P. APPELL

Sur les fonctions de deux variables quadruplement périodiques de troisième espèce

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 7 (1890), p. 143-154
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1890_3_7__143_0>

SUR LES

FONCTIONS DE DEUX VARIABLES

QUADRUPLEMENT PÉRIODIQUES

DE TROISIÈME ESPÈCE,

PAR M. P. APPELL.

1. En suivant la classification employée par M. Hermite pour les fonctions doublement périodiques d'une variable, nous appellerons *fonction quadruplement périodique de troisième espèce* une fonction uniforme de deux variables x et y qui se reproduit, multipliée par une exponentielle linéaire en x et y, quand on augmente les variables de chacune des quatre paires de périodes. Nous supposons essentiellement que l'on ne puisse pas, en multipliant cette fonction par une exponentielle de la forme

$$e^{Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey},$$

la ramener à être quadruplement périodique de première ou de seconde espèce, c'est-à-dire à se reproduire multipliée par l'unité ou par une constante quelconque, quand on ajoute aux variables chacune des quatre paires de périodes.

On sait, d'après un théorème énoncé par Riemann et confirmé par M. Weierstrass (¹), qu'une fonction quadruplement périodique de

(¹) MM. Picard et Poincaré ont démontré ce théorème par des considérations empruntées à la théorie des intégrales abéliennes (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 3 décembre 1883). J'ai indiqué depuis (*Comptes rendus*, 27 janvier 1890), pour démontrer ce même théorème, une méthode plus directe, qui a de nombreux points communs avec celle que j'emploie dans le présent travail.

deux variables, de première espèce, qui n'a pas de singularités essentielles à distance finie, peut toujours être ramenée à avoir pour paires de périodes les quantités

$$(2\pi i, 0), \quad (0, 2\pi i), \quad (\alpha, \beta), \quad (\alpha', \beta'),$$

vérifiant la relation

$$\beta = \alpha'.$$

Si la fonction admet des singularités essentielles, les paires de périodes (α, β) et (α', β') sont entièrement arbitraires. M. Picard a donné des exemples de fonctions de ce genre (1).

A cet égard, il y a, entre les fonctions quadruplement périodiques de deux variables de première et de deuxième espèce d'une part, et de troisième espèce d'autre part, cette différence remarquable que, même si une fonction de troisième espèce admet des singularités essentielles, on peut toujours ramener ses périodes à être

$$(2\pi i, 0), \quad (0, 2\pi i), \quad (\alpha, \beta), \quad (\alpha', \beta')$$

avec la relation de Riemann,

$$\beta = \alpha'.$$

Le présent travail est principalement consacré à la démonstration de ce théorème, que je me suis borné à énoncer dans une Note présentée à l'Académie des Sciences le 25 mars 1889. Il contient, en outre, quelques exemples généraux de fonctions ou expressions de deux variables quadruplement périodiques de troisième espèce.

2. Étant donnée une fonction quadruplement périodique de troisième espèce, on peut toujours, par un changement linéaire de variables, ramener les quatre paires de périodes à avoir la forme

$$(2\pi i, 0), \quad (0, 2\pi i), \quad (\alpha, \beta), \quad (\alpha', \beta').$$

Soit alors $F(x, y)$ une fonction quadruplement périodique de troi-

---

(1) *Comptes rendus*, 1er semestre 1889; *Bulletin de la Société mathématique*, t. XVII, p. 131; 1889.

sième espèce admettant ces quatre paires de périodes, on aura d'abord

$$(1)\qquad \begin{cases} F(x+2\pi i, y) = e^{px+qy+r} \; F(x, y), \\ F(x, y+2\pi i) = e^{p'x+q'y+r'} F(x, y), \end{cases}$$

p, q, r, p', q', r' désignant des constantes; puis on aura deux autres relations de la même forme pour les deux autres paires de périodes. En ajoutant $2\pi i$ à y dans la première de ces relations (1) et tenant compte de la seconde, on a

$$F(x+2\pi i, y+2\pi i) = e^{(p+p')x+(q+q')y+r+r'+2q\pi i} F(x, y);$$

ajoutant de même $2\pi i$ à x dans la seconde des relations (1) et tenant compte de la première, on trouve une nouvelle expression de

$$F(x+2\pi i, y+2\pi i)$$

qui, par comparaison avec la précédente, donne

$$e^{2q\pi i} = e^{2p'\pi i}, \qquad p' = q+n,$$

n désignant un entier. Soit $\varphi(x, y)$ une exponentielle de la forme

$$\varphi(x, y) = e^{Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey},$$

on pourra, par des équations du premier degré, déterminer les constantes A, B, C, D, E, de telle façon que

$$\begin{aligned} \varphi(x+2\pi i, y) &= e^{-(px+qy+r)} \; \varphi(x, y), \\ \varphi(x, y+2\pi i) &= e^{-(qx+q'y+r')} \, \varphi(x, y), \end{aligned}$$

comme on le vérifie immédiatement. Si l'on pose alors

$$\Phi(x, y) = \varphi(x, y) F(x, y),$$

en tenant compte de la relation

$$p' = q+n,$$

on voit que cette fonction Φ vérifiera les deux relations

$$(2)\qquad \begin{cases} \Phi(x+2\pi i, y) = \Phi(x, y), \\ \Phi(x, y+2\pi i) = e^{nx} \Phi(x, y); \end{cases}$$

puis, par rapport aux autres paires de périodes α, β et α', β', elle vérifiera deux relations de la forme

$$(3)\qquad \begin{cases} \Phi(x+\alpha,\ y+\beta) = e^{ax+b_1y+c}\ \Phi(x, y), \\ \Phi(x+\alpha', y+\beta') = e^{a'x+b'_1y+c'}\Phi(x, y), \end{cases}$$

a, b_1, c, a', b'_1, c' désignant des constantes.

Si, dans la première des relations (3), on change x en $x+2\pi i$, on trouve

$$e^{2a\pi i} = 1 \qquad (a \text{ entier});$$

si ensuite on change y en $y+2\pi i$ en tenant compte de la relation

$$\Phi(x, y+2\pi i) = e^{nx}\Phi(x, y),$$

on trouve que l'on doit avoir

$$e^{2b_1\pi i} = e^{n\alpha},$$

d'où

$$2b_1\pi i = n\alpha + 2b\pi i \qquad (b \text{ entier}).$$

La seconde des relations (3) montre de même que a' est entier et que l'on a

$$2b'_1\pi i = n\alpha' + 2b'\pi i,$$

b' étant un entier. Les relations (3) s'écrivent donc

$$(4)\qquad \begin{cases} \Phi(x+\alpha,\ y+\beta) = e^{ax+by+\frac{n\alpha}{2\pi i}y+c}\ \Phi(x, y), \\ \Phi(x+\alpha', y+\beta') = e^{a'x+b'y+\frac{n\alpha'}{2\pi i}y+c'}\ \Phi(x, y), \end{cases}$$

où n, a, b, a', b' sont des nombres entiers. Nous supposons essentiellement que ces cinq nombres entiers ne sont pas tous nuls; car, s'ils étaient nuls, la fonction Φ serait quadruplement périodique de première ou de seconde espèce, ce qui est contraire à l'hypothèse que nous avons faite au commencement. Nous déduirons alors de ces relations (4) une relation entre les périodes d'une importance capitale. Pour cela, dans la première de ces relations, changeons x et y en $x+\alpha'$ et $y+\beta'$, puis tenons compte de la deuxième; nous trouvons, pour le rapport

$$(5)\qquad \frac{\Phi(x+\alpha+\alpha', y+\beta+\beta')}{\Phi(x, y)}$$

la valeur

$$e^{(a+a')x+(b+b')y+\frac{n}{2\pi i}(\alpha+\alpha')y+c+c'+a\alpha'+b\beta'+\frac{n}{2\pi i}\alpha\beta'}.$$

De même, en changeant dans la seconde des relations (4) x et y en $x+\alpha$ et $y+\beta$, puis tenant compte de la première, on trouve pour le rapport (5) une nouvelle expression qui, comparée à la précédente, donne

$$(6)\qquad a\alpha'+b\beta'+\frac{n}{2\pi i}\alpha\beta' = a'\alpha+b'\beta+\frac{n}{2\pi i}\beta\alpha'+2\mathrm{N}i\pi,$$

N désignant un entier.

Cette relation permet de montrer que l'on peut toujours, par une transformation d'un degré convenable, ramener les quatre paires de périodes à être

$$(2\pi i,\ 0),\quad (0,\ 2\pi i),\quad (\mathrm{A},\ \mathrm{B}),\quad (\mathrm{A}',\ \mathrm{B}'),$$

avec la condition

$$\mathrm{A}' = \mathrm{B}.$$

3. Pour cela, nous distinguerons deux cas, suivant que l'entier n est nul ou non.

Premier cas : $n = 0$. — Les nombres entiers a, b, a', b' ne sont pas nuls tous les quatre, mais il pourrait arriver que leur déterminant fût nul.

Supposons d'abord le déterminant

$$\delta = ab' - ba'$$

différent de zéro. Les relations (4) étant actuellement

$$\begin{aligned}\Phi(x+\alpha;\ y+\beta) &= e^{ax+by+c}\,\Phi(x,y),\\ \Phi(x+\alpha',\ y+\beta') &= e^{a'x+b'y+c'}\,\Phi(x,y),\end{aligned}$$

on en conclut

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned}\Phi(x+a'\alpha-a\alpha',\ y+a'\beta-a\beta') &= e^{-\delta y+\varepsilon'}\,\Phi(x,y),\\ \Phi(x-b'\alpha+b\alpha',\ y-b'\beta+b\beta') &= e^{-\delta x+\varepsilon}\,\Phi(x,y),\end{aligned}\right.$$

ε et ε' désignant des constantes.

Le déterminant δ n'étant pas nul, prenons pour nouvelles paires de périodes les quantités

$$(2\pi i, 0), \qquad (0, 2\pi i), \qquad (A, B), \qquad (A', B'),$$

où

$$A = b\alpha' - b'\alpha, \qquad B = b\beta' - b'\beta,$$
$$A' = a'\alpha - a\alpha' + 2Ni\pi, \qquad B' = a'\beta - a\beta'.$$

Ces nouvelles périodes sont distinctes comme les périodes primitives, puisque δ est différent de zéro; la fonction Φ vérifie alors les relations

$$\begin{aligned}
\Phi(x + 2\pi i, y) &= \Phi(x, y),\\
\Phi(x, y + 2\pi i) &= \Phi(x, y),\\
\Phi(x + A, \ y + B) &= e^{-\delta x + \varepsilon}\,\Phi(x, y),\\
\Phi(x + A', y + B') &= e^{-\delta y + \varepsilon'}\,\Phi(x, y),
\end{aligned}$$

et la relation (6), où l'on fait $n = 0$, donne

$$B = A'.$$

Supposons maintenant $\delta = 0$. Nous allons voir que, dans ce cas, il y a réduction, et que la fonction Φ peut être ramenée à une fonction de deux variables doublement périodique de troisième espèce par rapport à l'une des variables, l'autre étant regardée comme une constante. En effet, les quatre nombres a, b, a', b' n'étant pas nuls tous quatre, supposons a' différent de zéro. La relation

$$ab' - ba' = 0$$

montre que, si b' est nul, b l'est aussi. Dans ce cas particulier, la relation (6)

$$a\alpha' + b\beta' = a'\alpha + b'\beta + 2N\pi i$$

donne

$$a\alpha' = a'\alpha + 2N\pi i.$$

La fonction Φ admettrait alors les deux groupes de périodes

$$0, \quad 2\pi i,$$
$$a'\alpha - a\alpha' + 2N\pi i, \quad a'\beta - a\beta',$$

qui se réduiraient à

$$(0,\ 2\pi i),\quad (0,\ a'\beta - a\beta');$$

elle serait donc doublement périodique par rapport à y seul.

Si a' et b' sont tous deux différents de zéro, on a

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{m}{m'},$$

m et m' étant premiers entre eux, et m devant être remplacé par zéro quand a et b sont nuls. Donc

$$a = pm,\qquad a' = pm',\qquad b = qm,\qquad b' = qm',$$

où p et q sont des entiers non nuls. La relation (6) devient alors

$$m(p\alpha' + q\beta') = m'(p\alpha + q\beta) + 2Ni\pi. \tag{8}$$

Faisons le changement linéaire de variables

$$X = px + qy,\qquad Y = y,$$

et adoptons pour x et y les paires de périodes

$$(-2q\pi i,\ 2p\pi i),\quad (0,\ 2\pi i),\quad (m'\alpha - m\alpha',\ m'\beta - m\beta'),\quad (\alpha',\ \beta').$$

Les paires de périodes correspondantes relatives aux variables X et Y seront, d'après (8), données par le Tableau suivant :

$$\begin{array}{lllll}
X: & A_{11} = 0, & A_{21} = 2q\pi i, & B_{11} = -2Ni\pi, & B_{21} = p\alpha' + q\beta', \\
Y: & A_{12} = 2p\pi i, & A_{22} = 2\pi i, & B_{12} = m'\beta - m\beta', & B_{22} = \beta'.
\end{array}$$

Si donc N est nul, *deux périodes* relatives à X sont nulles, A_{11} et B_{11} ; si N est différent de zéro, la combinaison

$$NA_{21} + qB_{11},\quad NA_{22} + qB_{12}$$

donne une paire de périodes dans laquelle la période relative à X est encore nulle. Donc la fonction $\Phi(x, y)$ exprimée en X et Y est *doublement périodique par rapport à* Y *seul.* Il y a donc réduction, comme nous l'avons annoncé, toutes les fois que le déterminant

$$\delta = ab' - ba'$$

est nul en même temps que n.

Second cas : n différent de zéro. — Reprenons les relations (4)

$$(4)\qquad \begin{cases} \Phi(x+2\pi i, y) = \Phi(x, y), \\ \Phi(x, y+2\pi i) = e^{nx}\Phi(x, y), \\ \Phi(x+\alpha, y+\beta) = e^{ax+by+\frac{n\alpha}{2\pi i}y+c}\Phi(x, y), \\ \Phi(x+\alpha', y+\beta') = e^{a'x+b'y+\frac{n\alpha'}{2\pi i}y+c'}\Phi(x, y), \end{cases}$$

et la relation (6) qui lie les périodes

$$(6)\qquad a\alpha' + b\beta' + \frac{n\alpha\beta'}{2\pi i} = a'\alpha + b'\beta + \frac{n\beta\alpha'}{2\pi i} + 2Ni\pi.$$

Nous allons ramener les relations (4) à la forme des relations que vérifient les fonctions Θ.

On a, puisque n, a, b sont des entiers,

$$\Phi(x + n\alpha + 2b\pi i, y + n\beta - 2a\pi i) = e^{ly+k}\Phi(x, y),$$

où l et k désignent des constantes dont la première est

$$l = \frac{n}{2\pi i}(n\alpha + 2b\pi i);$$

on trouvera de même

$$\Phi(x + n\alpha' + 2b'\pi i, y + n\beta' - 2a'\pi i) = e^{l'y+k'}\Phi(x, y),$$

$$l' = \frac{n}{2\pi i}(n\alpha' + 2b'\pi i).$$

Prenons, comme paires de périodes,

$$(2\pi i, 0),\quad (0, 2\pi i),\quad (\alpha_1, \beta_1),\quad (\alpha'_1, \beta'_1)$$

en posant

$$\alpha_1 = n\alpha + 2b\pi i,\qquad \beta_1 = n\beta - 2a\pi i,$$
$$\alpha'_1 = n\alpha' + 2b'\pi i,\qquad \beta'_1 = n\beta' - 2a'\pi i;$$

ces nouvelles périodes sont indépendantes comme les premières. Les relations ci-dessus peuvent alors s'écrire

$$\begin{aligned}
\Phi(x+2\pi i, y) &= \Phi(x, y),\\
\Phi(x, y+2\pi i) &= e^{nx}\Phi(x, y),\\
\Phi(x+\alpha_1, y+\beta_1) &= e^{ly+k}\Phi(x, y),\\
\Phi(x+\alpha'_1, y+\beta'_1) &= e^{l'y+k'}\Phi(x, y),
\end{aligned}$$
$$l = \frac{n\alpha_1}{2\pi i}, \qquad l' = \frac{n\alpha'_1}{2\pi i}.$$

De plus, la relation (6) devient, si l'on y remplace α, β, α', β' par leurs expressions en fonction de α_1, β_1, α'_1, β'_1,

$$(9) \qquad \frac{1}{2\pi i}(\beta_1\alpha'_1 - \alpha_1\beta'_1) = 2Mi\pi,$$

M désignant un entier *non nul*, comme nous le verrons plus loin.

La période β_1 n'est pas nulle; car, si l'on avait $\beta_1 = 0$, la fonction Φ serait doublement périodique par rapport à x seul. Si nous posons

$$\Phi_1(x, y) = e^{\lambda y^2+\mu y}\Phi(x, y),$$

nous pourrons déterminer λ et μ de façon que $\Phi_1(x, y)$ ne change pas quand on augmente x et y de la paire de périodes α_1, β_1. Nous aurons

$$\lambda = -\frac{l}{2\beta_1} = -\frac{n\alpha_1}{4i\pi\beta_1}.$$

La fonction Φ_1 vérifie alors les relations suivantes, où nous prenons comme second groupe de périodes $(0, 2M\pi i)$ au lieu de $(0, 2\pi i)$,

$$\begin{aligned}
\Phi_1(x+2\pi i, y) &= \Phi_1(x, y),\\
\Phi_1(x, y+2M\pi i) &= e^{Mn\left(x-\frac{\alpha_1}{\beta_1}y\right)+C}\Phi_1(x, y),\\
\Phi_1(x+\alpha_1, y+\beta_1) &= \Phi_1(x, y),\\
\Phi_1(x+\alpha'_1, y+\beta'_1) &= e^{\frac{2Mni\pi}{\beta_1}y+C'}\Phi_1(x, y),
\end{aligned}$$

où C et C' désignent des constantes.

Faisons enfin un changement linéaire de variables, en posant

$$X = x - \frac{\alpha_1}{\beta_1}y, \qquad Y = \frac{2\pi i}{\beta_1}y,$$
$$\Phi_1(x, y) = \Phi_2(X, Y).$$

Les paires de périodes de X et Y correspondant aux paires de périodes (α_1, β_1), (α'_1, β'_1) de x et y sont

$$(0, 2\pi i), \quad \left(\frac{\beta_1\alpha'_1 - \alpha_1\beta'_1}{\beta_1}, \frac{2\pi i\beta'_1}{\beta_1}\right);$$

on voit donc que l'entier M qui figure dans la relation (9) n'est pas nul, car autrement, dans ces deux paires de périodes, les périodes relatives à X seraient *nulles* et la fonction Φ_2 serait doublement périodique en X seul. En formant le Tableau complet des paires de périodes de X et Y correspondant à celles de x et y, on aura :

Périodes de x et y.	Périodes de X et Y.
$(2\pi i, 0)$	$(2\pi i, 0)$
$(0, 2M\pi i)$	(A, B)
(α_1, β_1)	$(0, 2\pi i)$
(α'_1, β'_1)	(A', B')

où l'on a posé

$$A = -\frac{2M\pi i\alpha_1}{\beta_1}, \qquad B = -\frac{4\pi^2 M}{\beta_1},$$
$$A' = \frac{\beta_1\alpha'_1 - \alpha_1\beta'_1}{\beta_1}, \qquad B' = \frac{2\pi i\beta'_1}{\beta_1}.$$

On aura alors

$$\begin{aligned}
\Phi_2(X + 2\pi i, Y) &= \Phi_2(X, Y),\\
\Phi_2(X, Y + 2\pi i) &= \Phi_2(X, Y),\\
\Phi_2(X + A, Y + B) &= e^{MnX+C}\,\Phi_2(X, Y),\\
\Phi_2(X + A', Y + B') &= e^{MnY+C'}\,\Phi_2(X, Y),
\end{aligned}$$

et la relation (9) donnera

$$B = A',$$

ce qu'il fallait démontrer.

En résumé, dans les deux cas, $n = 0$ et $n \gtrless 0$, on peut ramener la fonction Φ, quadruplement périodique de troisième espèce, à vérifier des relations de la même forme que celles que vérifient les fonctions Θ de deux variables, avec la condition de Riemann

$$B = A'.$$

4. Pour donner des exemples de fonctions de deux variables qua-

druplement périodiques de troisième espèce, suivons une méthode analogue à celle qui sert à former l'élément simple dans la théorie des fonctions doublement périodiques de troisième espèce (*Annales de l'École Normale*, 3e série, t. I, II, III), ou, en nous plaçant à un point de vue plus général, imitons ce que fait Halphen dans son *Traité des fonctions elliptiques*, t. I, p. 468 [1].

Soient α, β, γ trois quantités telles que la partie réelle de la forme quadratique

$$\alpha m^2 + \beta n^2 + 2\gamma mn$$

soit négative pour toutes les valeurs réelles de m et n autres que $m = n = 0$; soit p un nombre entier positif, et $\varphi(u, v)$ une fonction uniforme des deux variables u et v. Si la série

$$\Phi(x, y) = \sum_{m, n = -\infty}^{m, n = +\infty} e^{p(\alpha m^2 + \beta n^2 + 2\gamma mn + mx + ny)} \varphi(e^{x + 2m\alpha + 2n\gamma}, e^{y + 2m\gamma + 2n\beta})$$

est convergente, elle définit une fonction uniforme de x et y vérifiant les quatre relations

$$\begin{aligned}
\Phi(x + 2\pi i, y) &= \Phi(x, y), \\
\Phi(x, y + 2\pi i) &= \Phi(x, y), \\
\Phi(x + 2\alpha, y + 2\gamma) &= e^{-p(x+\alpha)}\,\Phi(x, y), \\
\Phi(x + 2\gamma, y + 2\beta) &= e^{-p(y+\beta)}\,\Phi(x, y);
\end{aligned}$$

cette fonction est donc quadruplement périodique de troisième espèce. Lorsque la fonction $\varphi(u, v)$ est un polynôme en u, v, $\frac{1}{u}$ et $\frac{1}{v}$, la fonction Φ est composée linéairement avec des fonctions Θ de deux variables. Lorsque la fonction $\varphi(u, v)$ est rationnelle, la fonction Φ possède des singularités essentielles à distance finie. Par exemple, on pourra prendre pour $\varphi(u, v)$ les expressions

$$\frac{1}{1+u}, \quad \frac{1}{1+v}, \quad \frac{1}{(1+u)(1+v)}, \quad \ldots, \quad \frac{u^a v^b}{(1+u)^{a'}(1+v)^{b'}},$$

a, b, a', b' désignant des entiers positifs. En supposant α, β, γ réels,

---

(1) *Voyez* une Note que j'ai présentée à l'Académie des Sciences le 25 mars 1889 (*Comptes rendus*, t. CVIII).

les fonctions Φ correspondantes possèdent les surfaces de singularités

$$x'' = (2h+1)\pi, \qquad y'' = (2k+1)\pi,$$

où l'on a posé $x = x' + ix''$, $y = y' + iy''$ et où h et k désignent des entiers quelconques. L'hypothèse $a = b = 1$, $a' = b' = 2$ fournit une fonction de troisième espèce, analogue à la fonction de première espèce que M. Picard donne comme exemple dans sa Note du 18 mars 1889 (*Comptes rendus*, t. CVIII) [1].

[1] *Voyez* aussi *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XVII, p. 131.