EDOUARD GOURSAT

Sur les substitutions orthogonales et les divisions régulières de l'espace

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 6 (1889), p. 9-102
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1889_3_6__9_0>

ANNALES

SCIENTIFIQUES

DE

L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

SUR LES

SUBSTITUTIONS ORTHOGONALES

ET LES

DIVISIONS RÉGULIÈRES DE L'ESPACE,

PAR M. E. GOURSAT,

MAITRE DE CONFÉRENCES A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

Dans son *Mémoire sur les groupes kleinéens*, M. Poincaré a été conduit à envisager des divisions régulières de l'espace en une infinité de régions $R_0, R_1, \ldots, R_i, \ldots$ telles que chaque région R_i se déduise de la région R_0 au moyen d'une transformation S_i résultant d'une suite d'inversions (¹). J'étudie dans ce travail des modes de division analogues, où le nombre des régions est supposé *fini*; mais, tandis que les transformations de M. Poincaré conservent un plan fixe réel, les transformations que je considère font revenir sur elle-même une sphère imaginaire. Le problème revient au fond à la détermination des groupes d'ordre fini de substitutions linéaires orthogonales à quatre

(¹) *Acta mathematica*, t. III, p. 49; 1883. On pourra consulter aussi sur ce sujet : WALTHER DYCK, *Ueber reguläre Raumeintheilungen* (*Berichte der math.-phys. Classe der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften*; 1883).

variables. On obtient de tels groupes en combinant les substitutions de deux groupes d'ordre fini de substitutions linéaires non homogènes à une seule variable; mais on ne paraît pas avoir remarqué jusqu'ici qu'il n'est pas nécessaire d'associer chaque substitution de l'un des groupes avec toutes les substitutions de l'autre groupe.

La première Partie contient des généralités sur les transformations de l'espace qui font correspondre un point à un point et qui conservent les angles, que nous appellerons, pour abréger, transformations *isogonales*, et sur les substitutions orthogonales. Dans la seconde Partie, je donne le moyen de former tous les groupes d'ordre fini de substitutions orthogonales à quatre variables, et j'énumère tous les groupes de substitutions à deux variables d'une certaine forme qui leur sont isomorphes. Enfin, dans la troisième Partie, j'étudie complètement la disposition des régions R_0, R_1, ..., lorsque ces régions sont des tétraèdres limités par des portions de sphères.

Certaines parties de ces recherches peuvent être rattachées à la Géométrie non euclidienne ou à la théorie des polyèdres réguliers de l'espace à quatre dimensions; ce dernier rapprochement est développé dans la quatrième Partie.

I.

1. On sait que toute fonction analytique d'une variable complexe fournit un mode de transformation des figures planes qui conserve les angles. Il n'existe pas de proposition analogue pour l'espace à trois dimensions, comme cela résulte d'un théorème très important énoncé pour la première fois par M. Liouville [1] : *Toute transformation de l'espace qui fait correspondre un point à un point et qui conserve les angles ne dépend que d'un nombre limité de paramètres et peut être obtenue par la combinaison de déplacements et de transformations par rayons vecteurs réciproques* (inversions). Ce théorème a été ensuite étendu par M. Darboux [2] aux espaces à plus de trois dimensions.

---

(1) Liouville, *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1re série, t. XIII, p. 220, et t. XV, p. 103.

(2) Darboux, *Mémoire sur la théorie des coordonnées curvilignes et des systèmes orthogonaux* (*Annales de l'École Normale*, 2e série, t. VII; 1878).

Quoique la propriété précédente soit aujourd'hui bien connue, je me propose de montrer comment on peut la déduire aisément du théorème de Dupin; je ne considère d'ailleurs que des points réels.

Considérons dans l'espace une transformation par rayons vecteurs réciproques; soient O le pôle de la transformation et K^2 son paramètre. La sphère S de centre O et de rayon égal à K demeure inaltérée par cette transformation. Pour me conformer à une expression usitée dans le cas des cercles, je dirai que cette transformation est une *réflexion* sur la sphère S, et que deux figures transformées réciproques sont *symétriques par rapport à cette sphère*.

Soient

$$(1) \qquad \begin{cases} X = f(x, y, z), \\ Y = \varphi(x, y, z), \\ Z = \psi(x, y, z) \end{cases}$$

trois fonctions réelles, continues ainsi que leurs dérivées, pour les valeurs réelles des variables x, y, z comprises entre certaines limites. Pour plus de précision, supposons que, le point m de coordonnées (x, y, z) restant compris à l'intérieur d'une certaine portion (e) de l'espace, le point M de coordonnées (X, Y, Z) reste compris à l'intérieur d'une autre portion (E) de l'espace. Admettons en outre que deux lignes quelconques décrites par le point (x, y, z) à partir d'un point quelconque (x_0, y_0, z_0) de (e) se coupent sous le même angle que les lignes correspondantes décrites par le point (X, Y, Z). Prenons dans la portion (e) de l'espace trois familles de surfaces (σ_1), (σ_2), (σ_3) formant un système triple orthogonal; les formules (1) feront correspondre à ce système trois nouvelles familles (Σ_1), (Σ_2), (Σ_3) formant encore un système triple orthogonal. Étant donnée une surface quelconque σ, il existe toujours un système triple orthogonal dont fait partie σ, formé par les surfaces parallèles à σ et par les développables composées des normales à σ le long de ses lignes de courbure. Dans la transformation considérée, la surface σ se change en une nouvelle surface Σ, le système triple orthogonal précédent se change en un nouveau système triple orthogonal et, par conséquent, les lignes de courbure de σ auront pour transformées les lignes de courbure de Σ.

Ainsi, *les lignes de courbure d'une surface quelconque σ ont pour transformées les lignes de courbure de la surface transformée Σ.*

Si la première surface est une sphère, toute ligne tracée sur cette surface est une ligne de courbure; la surface transformée devra donc posséder la même propriété. Or les seules surfaces réelles, telles que toute ligne tracée sur la surface soit une ligne de courbure, sont les plans et les sphères. En considérant le plan comme une sphère de rayon infini, on peut donc dire que *la transformation* (1) *change les sphères en sphères et, par suite, les cercles en cercles.* Cette propriété suffit pour établir que la transformation résulte d'une suite d'inversions.

Soient s une sphère de la première figure (f), a, b, c trois points de cette sphère, S la sphère correspondante de la seconde figure (F) et A, B, C les points correspondants aux points a, b, c. Faisons passer un plan P par les centres O, O' de ces deux sphères; et aux points O, O' élevons des perpendiculaires au plan P, Od, O'D du même côté du plan P. Supposons que l'on fasse la perspective de la sphère s sur le plan P, le point de vue étant le point d; cette opération équivaut à une certaine transformation par rayons vecteurs réciproques I, qui s'applique à tous les points de l'espace. Cette inversion appliquée à s donne le plan P, et aux trois points a, b, c fait correspondre trois points α, β, γ de ce plan. De même, il existe une certaine inversion I' qui, appliquée à la figure (F), change la sphère S en le plan P et les points A, B, C en trois points α', β', γ'. D'un autre côté, on peut trouver une transformation composée d'un certain nombre d'inversions par rapport à des sphères orthogonales au plan P et telle que les trois points α', β', γ' aient respectivement pour transformés les points α, β, γ [Poincaré, *Mémoire sur les groupes kleinéens* (*Acta mathematica*, t. III, p. 51; 1883)]. Soient T une pareille transformation, (f_1) la figure que l'on déduit de f par l'inversion I, (F_1) la figure qui se déduit de (F) par l'inversion I', suivie de la transformation T. Il est clair que ces deux figures (f_1) et (F_1) se déduisent l'une de l'autre par une transformation isogonale. De plus, les points α, β, γ et le plan P, considérés comme appartenant à la première figure, ont pour transformés dans la seconde figure les points α, β, γ et le plan P lui-même. On peut toujours supposer que les portions de l'espace situées d'un même côté du plan P se correspondent dans les deux figures; s'il en était autrement, on n'aurait qu'à remplacer (F_1) par sa symétrique par rapport au plan P. De même, soit C le cercle passant par les trois points α, β, γ; ce cercle se correspond évidemment à lui-même dans les deux figures. On peut supposer que la partie du plan P intérieure au cercle C, considérée comme appartenant à la première figure, a pour *image* dans la seconde figure cette même portion du plan. S'il en était autrement, on n'aurait qu'à remplacer (F_1) par sa symétrique relativement à la sphère orthogonale au plan P qui passe par le cercle C. Les hypothèses précédentes étant remplies, il est aisé de démontrer que les figures (f_1) et (F_1) doivent être identiques.

Soit, en effet, m un point du plan P, pris à l'intérieur du cercle C, par exemple; l'arc de cercle amb, intérieur au cercle C, fait avec l'arc de cercle ab un certain angle ω. Si l'on considère l'arc amb comme appartenant à la figure (f_1), l'arc de cercle correspondant de la seconde figure (F_1) doit être situé dans le plan P et intérieur à C, passer par les points a et b et couper l'arc ab sous le même angle ω; cet arc de cercle $am'b$ est donc identique à l'arc amb. On verra de même que l'arc de cercle bmc de la figure (f_1) a pour correspondant dans la seconde figure l'arc bmc lui-même, et, par suite, le point m' coïncide avec le point m. Le raisonnement est le même pour un point du plan P extérieur au cercle C, et nous voyons déjà que *tous les points du plan* P *restent fixes dans la transformation qui permet de passer de la figure* (f_1) *à la figure* (F_1).

Considérons maintenant un point quelconque M de l'espace comme appartenant à la figure (f_1), et cherchons le point correspondant M′ de la figure (F_1). Soit Σ une sphère passant par M et orthogonale au plan P suivant un cercle C′; la sphère Σ, regardée comme faisant partie de (f_1), aura pour image dans (F_1) une sphère Σ' passant par le cercle C′, et orthogonale au plan P. Cette sphère Σ' coïncidera donc avec Σ. Il suffit de considérer trois sphères Σ, Σ_1, Σ_2 passant par M et orthogonales au plan P pour en conclure que le point M′ ne peut coïncider qu'avec le point M ou avec son symétrique par rapport au plan P. Cette dernière hypothèse est à rejeter, puisqu'on suppose que les portions des deux figures situées du même côté du plan P se correspondent. Donc les deux figures (f_1) et (F_1) sont identiques. En revenant aux figures primitives (f) et (F), nous pouvons énoncer le théorème suivant :

Toute transformation isogonale dans l'espace peut être remplacée par un nombre fini d'inversions.

2. La proposition se vérifie immédiatement pour les transformations isogonales les plus simples, telles que les déplacements et les transformations par similitude. En effet, une translation équivaut à une suite de deux transformations par symétrie relativement à deux plans parallèles; une rotation de 2ω autour d'une droite D équivaut à une suite de deux transformations par symétrie par rapport à deux plans passant par la droite D et faisant entre eux un angle égal à ω ; une transformation par homothétie peut être remplacée par deux inversions successives relativement à deux sphères concentriques.

Il est clair, d'après la démonstration même qui a été donnée plus haut, que toute transformation isogonale peut être décomposée *d'une infinité de manières* en une suite d'inversions par rapport à des sphères que l'on peut supposer toutes réelles. A moins de mention expresse, je supposerai toujours dans la suite, quand il s'agira d'une inversion ou d'une réflexion sur une sphère, que la sphère en question est *réelle*. Cela posé, quelle que soit la manière dont on décompose une transformation isogonale en une suite d'inversions, *le nombre de ces inversions sera toujours de même parité*. Prenons en effet dans la première figure un trièdre non isoscèle OABC; après une première inversion, la figure symétrique de ce trièdre se composera de trois cercles passant par un même point O′ et les tangentes à ces trois cercles formeront un trièdre O′A′B′C′ ayant les mêmes angles que le premier. Ces deux trièdres seront donc égaux ou symétriques ; mais on reconnaît aisément que les faces seront disposées en ordre inverse et par suite les deux trièdres seront symétriques. Une nouvelle inversion remplacera de même le trièdre O′A′B′C′ par un nouveau trièdre O″A″B″C″, symétrique de O′A′B′C′ et, par suite, superposable au trièdre OABC. En général, après n inversions successives, le trièdre OABC sera remplacé par un trièdre $O_nA_nB_nC_n$, qui sera superposable au premier ou à son symétrique, suivant que n est pair ou impair. Par conséquent, étant données deux figures dans l'espace qui se déduisent l'une de l'autre par une transformation isogonale, la transformation sera équivalente à un nombre pair ou à un nombre impair d'inversions suivant que deux trièdres correspondants des deux figures sont égaux ou symétriques. Dans le premier cas, je dirai pour abréger que la transformation est une *transformation droite*, et que les deux figures sont *congruentes*; dans le second cas, la transformation sera appelée *transformation gauche* et les deux figures seront appelées *symétriques*.

La proposition précédente ne serait plus vraie si l'on considérait des inversions par rapport à des sphères imaginaires. Prenons par exemple la transformation définie par les formules

$$X = -\frac{x}{x^2+y^2+z^2}, \qquad Y = -\frac{y}{x^2+y^2+z^2}, \qquad Z = -\frac{z}{x^2+y^2+z^2},$$

qui peut être regardée comme une inversion par rapport à la sphère imaginaire

$$x^2+y^2+z^2+1=0;$$

cependant cette transformation est droite, car elle résulte de la combinaison de deux transformations gauches

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{x}{x^2+y^2+z^2}, & X &= -x_1, \\ y_1 &= \frac{y}{x^2+y^2+z^2}, & Y &= -y_1, \\ z_1 &= \frac{z}{x^2+y^2+z^2}; & Z &= -z_1. \end{aligned}$$

Remarque. — Si l'on se donne trois points a, b, c de la figure (f), les points correspondants A, B, C de la figure (F), une sphère s passant par les points a, b, c de la première figure et la sphère correspondante S de la seconde, il résulte de la démonstration qui a été développée plus haut qu'il n'existe que quatre transformations répondant à la question. Si T est l'une d'elles, on obtiendra les trois autres en faisant suivre T, soit d'une réflexion sur la sphère S, soit d'une réflexion sur la sphère orthogonale à S passant par les trois points A, B, C, soit de ces deux réflexions successivement. Donc la transformation isogonale la plus générale dépend seulement de *dix* paramètres.

3. Les transformations dont il s'agit peuvent être définies analytiquement d'une façon très élégante au moyen des coordonnées pentasphériques [1]. Considérons un système de cinq sphères orthogonales (S_1), (S_2), ..., (S_5) de rayons R_1, R_2, ..., R_5 et écrivons leurs équations sous la forme

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2\alpha_k x + 2\beta_k y + 2\gamma_k z + \delta_k \dfrac{x^2+y^2+z^2-R^2}{R} + i\varepsilon_k \dfrac{x^2+y^2+z^2+R^2}{R} = 0, \\ \qquad\qquad (k = 1, 2, \ldots, 5). \end{array} \right.$$

Les coefficients α_k, β_k, δ_k, γ_k, ε_k vérifient les relations

$$\alpha_k^2 + \beta_k^2 + \gamma_k^2 + \delta_k^2 + \varepsilon_k^2 = 1,$$
$$\alpha_k \alpha_{k'} + \beta_k \beta_{k'} + \gamma_k \gamma_{k'} + \delta_k \delta_{k'} + \varepsilon_k \varepsilon_{k'} = 0.$$

Désignons par S_k la puissance d'un point par rapport à la sphère (S_k); des relations précédentes on déduit, entre les puissances d'un point quelconque par rapport aux cinq sphères, la relation homogène

$$(3) \qquad \sum_1^5 \left(\frac{S_k}{R_k}\right)^2 = 0;$$

si une des sphères (S_k) se réduit à un plan, on devra remplacer $\dfrac{S_k}{R_k}$ par $2P_k$, P_k désignant la distance du point (x, y, z) à ce plan.

On appelle *coordonnées pentasphériques* d'un point les cinq quantités x_k proportionnelles à $\dfrac{S_k}{R_k}$, et l'on pose

$$(4) \qquad x_k = \lambda \frac{S_k}{R_k};$$

la relation (3) devient alors

$$(5) \qquad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 = 0.$$

Inversement cinq quantités x_k vérifiant la relation (5) déterminent un point et un seul; les coordonnées rectangulaires x, y, z de ce point

---

[1] DARBOUX, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, t. I, p. 213; 1887.

s'obtiendront en résolvant les équations (4), ce qui nous donne

$$(6)\quad \begin{cases} 2\lambda x = \sum_1^5 \alpha_k x_k, & \lambda(x^2+y^2+z^2-R^2) = \quad R \sum_1^5 \delta_k x_k, \\ 2\lambda y = \sum_1^5 \beta_k x_k, & \lambda(x^2+y^2+z^2+R^2) = -iR \sum_1^5 \varepsilon_k x_k, \\ 2\lambda z = \sum_1^5 \gamma_k x_k. \end{cases}$$

Rapprochons ces formules (6) des formules qui définissent une transformation par rayons vecteurs réciproques. Soient x, y, z les coordonnées rectangulaires d'un point quelconque de l'espace, x', y', z' les coordonnées du point symétrique par rapport à une certaine sphère, x_k et x'_k ($k = 1, 2, \ldots, 5$) les coordonnées pentasphériques de ces deux points. On reconnaît immédiatement, d'après les formules qui définissent une inversion, que les expressions

$$x', \quad y', \quad z', \quad x'^2+y'^2+z'^2-R^2, \quad x'^2+y'^2+z'^2+R^2$$

sont, à un facteur près, des combinaisons linéaires à coefficients constants des expressions

$$x, \quad y, \quad z, \quad x^2+y^2+z^2+R^2, \quad x^2+y^2+z^2-R^2;$$

par suite, d'après les relations (4) et (6), les coordonnées x'_k seront, à un facteur près, des fonctions linéaires à coefficients constants des cordonnées x_k. A cause du facteur arbitraire λ, nous pouvons donc supposer que les x'_k sont des fonctions linéaires à coefficients constants des x_k. Toute transformation isogonale de l'espace est ainsi définie par une certaine substitution linéaire effectuée sur les coordonnées pentasphériques. Mais, comme on doit avoir $\sum (x'_k)^2 = 0$ en même temps que $\sum (x_k)^2 = 0$ et qu'on peut multiplier les cinq coordonnées par un même facteur sans changer le point correspondant, la substitution linéaire pourra être supposée orthogonale, sans restreindre la généralité. Inversement, toute substitution orthogonale effectuée sur les cinq coordonnées x_k définit une transformation isogonale. Cela résulte immédiatement de ce que l'élément linéaire est donné par la formule

$$ds^2 = \frac{\sum (dx_k)^2}{\sum \left(\frac{x_k}{R_k}\right)^2}.$$

Ainsi, *toute transformation isogonale dans l'espace est définie, en coordonnées pentasphériques, par une substitution linéaire orthogonale à cinq variables, à coefficients constants.*

La transformation la plus générale dépend bien de dix paramètres, comme on l'a déjà reconnu par d'autres considérations.

4. Si l'on suppose que la transformation conserve une sphère fixe, on pourra prendre cette sphère pour une des cinq sphères orthogonales; la coordonnée pentasphérique correspondante ne devra pas changer dans la transformation et la substitution orthogonale à cinq variables se réduira à une substitution orthogonale à quatre variables.

Je ne considérerai, dans la suite de ce travail, que les transformations qui font revenir sur elle-même la sphère imaginaire de rayon $\sqrt{-1}$ ayant son centre à l'origine des coordonnées, que j'appellerai la sphère (Σ'). On obtient évidemment un système de cinq sphères orthogonales en joignant à la sphère précédente les trois plans de coordonnées supposés rectangulaires et la sphère (Σ) qui a pour équation

$$x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0.$$

Les cinq coordonnées pentasphériques du point (x, y, z) seront respectivement proportionnelles à

$$2x, \quad 2y, \quad 2z, \quad x^2 + y^2 + z^2 - 1, \quad i(x^2 + y^2 + z^2 + 1).$$

Puisque, par hypothèse, la cinquième coordonnée peut être regardée comme constante dans toutes les transformations dont on s'occupe, on peut en faire abstraction et la supposer toujours égale à $\sqrt{-1}$. On aura alors, pour nouvelles coordonnées du point (x, y, z), les quatre expressions

$$(7)\quad \begin{cases} u_1 = \dfrac{x^2+y^2+z^2-1}{x^2+y^2+z^2+1}, & u_2 = \dfrac{2x}{x^2+y^2+z^2+1}, \\ u_3 = \dfrac{2y}{x^2+y^2+z^2+1}, & u_4 = \dfrac{2z}{x^2+y^2+z^2+1}, \end{cases}$$

liées par la relation

$$(8)\qquad u_1^2+u_2^2+u_3^2+u_4^2=1.$$

Inversement, quatre quantités u_1, u_2, u_3, u_4 vérifiant l'équation (8) déterminent un point de l'espace et un seul dont on obtiendra les coordonnées x, y, z en résolvant les équations (7). On trouve ainsi

$$(9)\qquad x=\frac{u_2}{1-u_1},\qquad y=\frac{u_3}{1-u_1},\qquad z=\frac{u_4}{1-u_1};$$

le carré de l'élément linéaire devient, en tenant compte de l'équation (8),

$$(10)\qquad ds^2=\frac{du_1^2+du_2^2+du_3^2+du_4^2}{(1-u_1)^2}.$$

Ainsi, *toute transformation isogonale dans l'espace qui fait revenir sur elle-même la sphère imaginaire* (Σ') *est définie analytiquement par une substitution linéaire orthogonale à coefficients constants, effectuée sur les quantités* u_i.

Les deux catégories de transformations correspondent aux deux signes possibles pour le déterminant de la substitution orthogonale. Étant donnée, par exemple, une substitution de déterminant $+1$, on peut toujours imaginer, comme cela sera démontré rigoureusement dans la suite, que les coefficients varient d'une manière continue depuis les valeurs initiales

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

jusqu'aux valeurs données, et il est clair que la transformation finale sera une transformation droite. Une substitution du déterminant -1

résulte, au contraire, d'une substitution de déterminant $+1$, suivie de la substitution

$$(u_1)' = u_1, \qquad (u_2)' = -u_2, \qquad (u_3)' = u_3, \qquad (u_4)' = u_4,$$

qui définit une inversion. La transformation considérée est donc une transformation gauche.

Les formules qui précèdent s'interprètent aisément au moyen de la Géométrie à quatre dimensions. Considérons u_1, u_2, u_3, u_4 comme les coordonnées rectangulaires d'un point dans l'espace à quatre dimensions; l'équation (8) représente dans cet espace une *hypersphère* de rayon égal à l'unité, ayant son centre à l'origine [1].

Imaginons que l'on fasse la perspective de cette hypersphère dans l'espace à trois dimensions, le point de vue étant le point de cordonnées $u_1 = 1$, $u_2 = u_3 = u_4 = 0$; les coordonnées (x, y, z) du point de l'espace à trois dimensions qui est la perspective du point (u_1, u_2, u_3, u_4) de l'hypersphère sont précisément fournies par les formules (9). Par suite, les transformations dont il s'agit sont identiques au fond à des rotations dans l'espace à quatre dimensions ou à des rotations suivies de transformations par symétrie, suivant que le déterminant de la substitution orthogonale est égal à ± 1. On peut dire aussi que toute sphère orthogonale à (Σ') est la projection de l'intersection de l'hypersphère

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 = 1$$

avec un plan

$$lu_1 + mu_2 + nu_3 + pu_4 = 0.$$

Je ne me servirai que rarement de cette interprétation.

5. Toute substitution orthogonale droite à trois variables ou, ce qui revient au même, toute rotation peut être définie par une certaine substitution linéaire non homogène effectuée sur une variable complexe [2]. On peut de même rattacher toute substitution orthogonale à quatre variables ou, plus généralement, toute substitution linéaire à quatre

---

(1) Voir *Étude des surfaces qui admettent tous les plans de symétrie d'un polyèdre régulier*, IIIe Partie (*Annales de l'École normale*, 1887).

(2) Voir Darboux, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, t. I, p. 30; 1887.

variables qui reproduit une forme quadratique à discriminant différent de zéro, à un système de deux substitutions linéaires non homogènes effectuées sur deux variables complexes. Je me suis déjà servi de cette remarque dans un travail sur les équations linéaires (¹). Soient U_1, U_2, U_3, U_4 quatre fonctions linéaires et homogènes de u_1, u_2, u_3, u_4, telles que l'on ait identiquement

$$U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 + U_4^2 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2;$$

posons

$$\begin{aligned} u_1 - iu_4 &= v_1, & -u_2 - iu_3 &= v_2,\\ u_1 + iu_4 &= v_4, & u_2 - iu_3 &= v_3;\\ U_1 - iU_4 &= V_1, & -U_2 - iU_3 &= V_2,\\ U_1 + iU_4 &= V_4, & U_2 - iU_3 &= V_3. \end{aligned}$$

Les V_i seront des fonctions linéaires des v_i, telles que l'on ait identiquement

$$V_1 V_4 - V_2 V_3 = v_1 v_4 - v_2 v_3,$$

et la recherche de ces substitutions pourra s'interpréter géométriquement comme il suit : *Trouver toutes les collinéations qui font revenir sur elle-même la surface du second degré représentée par l'équation*

$$(11) \qquad v_1 v_4 - v_2 v_3 = 0.$$

Soient

$$(12) \qquad \left\{ \begin{aligned} \eta &= \frac{v_1}{v_3} = \frac{v_2}{v_4}, & -\xi &= \frac{v_4}{v_3} = \frac{v_2}{v_1},\\ \eta' &= \frac{V_1}{V_3} = \frac{V_2}{V_4}, & -\xi' &= \frac{V_4}{V_3} = \frac{V_2}{V_1}. \end{aligned} \right.$$

J'ai démontré, dans le travail déjà cité (p. 151), qu'il pourra se présenter deux cas : ou bien η' sera une fonction linéaire de η et ξ' une

---

(¹) *Sur les équations différentielles linéaires du quatrième ordre dont les intégrales vérifient une relation homogène du second degré* (*Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XI, p. 144; 1883).

Voir aussi sur ce sujet :

KLEIN, *Ueber binäre formen mit linearen transformationen in sich selbst* (*Mathematische Annalen*, t. IX, p. 188; 1876).

PICARD, *Sur les fonctions hyperabéliennes* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 4ᵉ série, t. I, p. 101; 1885).

fonction linéaire de ξ, ou bien η' sera une fonction linéaire de ξ et ξ' une fonction linéaire de η. On aura, par conséquent, un des deux systèmes de relations suivants :

$$\text{(A)} \qquad \eta' = \frac{a\eta + b}{c\eta + d}, \qquad \xi' = \frac{l\xi + m}{p\xi + q},$$

$$\text{(B)} \qquad \eta' = \frac{a\xi + b}{c\xi + d}, \qquad \xi' = \frac{l\eta + m}{p\eta + q},$$

a, b, c, d, l, m, p, q désignant des coefficients constants. Ces deux systèmes de formules s'interprètent aisément si l'on remarque que, lorsqu'on se déplace sur une génératrice rectiligne de la surface, l'un des paramètres ξ ou η reste constant. Dans toute collinéation correspondant au système (A), les paramètres des deux systèmes de génératrices sont transformés par une substitution linéaire; dans toute collinéation correspondant au système (B), il y a, en outre, échange entre les deux systèmes de génératrices.

Revenons maintenant aux variables u_i et à la surface du second degré représentée par l'équation

$$(13) \qquad u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 = 0;$$

nous pourrons énoncer le résultat suivant :

Étant donnée une collinéation qui fait revenir sur elle-même la surface (13), *si l'on pose*

$$(14) \qquad \frac{u_1}{\eta - \xi} = \frac{u_2}{1 + \xi\eta} = \frac{u_3}{i(1 - \xi\eta)} = \frac{u_4}{i(\eta + \xi)}$$

et, par suite,

$$(15) \qquad \frac{\eta}{u_1 - iu_4} = \frac{-\xi}{u_1 + iu_4} = \frac{\xi\eta}{u_2 + iu_3} = \frac{1}{u_2 - iu_3},$$

les valeurs nouvelles de ξ et de η sont données par un des deux systèmes de formules (A) *et* (B).

A toute substitution orthogonale à quatre variables correspond ainsi une collinéation qui fait revenir sur elle-même la surface (13) et, par suite, une substitution de la forme (A) ou (B). Inversement, à toute substitution de la forme (A) ou de la forme (B), on peut rattacher une substitution linéaire orthogonale à quatre variables.

Soient U_1, U_2, U_3, U_4 les nouvelles valeurs des variables u_i, vérifiant encore la relation

$$U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 + U_4^2 = 0.$$

Dans les formules

$$\frac{U_1}{\eta' - \xi'} = \frac{U_2}{1 + \xi'\eta'} = \frac{U_3}{i(1 - \xi'\eta')} = \frac{U_4}{i(\eta' + \xi')}$$

remplaçons ξ' et η' par leurs valeurs tirées des formules (A), puis η et ξ par leurs valeurs déduites des formules (15). On trouve ainsi

$$\begin{aligned}
&\frac{U_1}{(ap - cl)(u_2 + iu_3) + (dl - bp)(u_1 + iu_4) + (aq - cm)(u_1 - iu_4) + (bq - dm)(u_2 - iu_3)} \\
&= \frac{U_2}{(cp + al)(u_2 + iu_3) - (dp + bl)(u_1 + iu_4) + (cq + am)(u_1 - iu_4) + (dq + bm)(u_2 - iu_3)} \\
&= \frac{U_3}{i(cp - al)(u_2 + iu_3) + i(bl - dp)(u_1 + iu_4) + i(cq - am)(u_1 - iu_4) + i(dq - bm)(u_2 - iu_3)} \\
&= \frac{U_4}{i(ap + cl)(u_2 + iu_3) - i(bp + dl)(u_1 + iu_4) + i(aq + cm)(u_1 - iu_4) + i(bq + dm)(u_2 - iu_3)},
\end{aligned}$$

ou, en désignant par λ la valeur commune des rapports précédents,

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned}
U_1 = \lambda[&(aq + dl - bp - cm)u_1 + (ap + bq - cl - dm)u_2 \\
&+ i(ap + dm - bq - cl)u_3 + i(cm + dl - bp - aq)u_4], \\
U_2 = \lambda[&(am + cq - bl - dp)u_1 + (al + bm + cp + dq)u_2 \\
&+ i(al + cp - bm - dq)u_3 - i(am + bl + cq + dp)u_4], \\
U_3 = \lambda[&i(bl + cq - am - dp)u_1 + i(cp + dq - al - bm)u_2 \\
&+ (al + dq - bm - cp)u_3 + (cq + dp - am - bl)u_4], \\
U_4 = \lambda[&i(aq + cm - bp - dl)u_1 + i(ap + bq + cl + dm)u_2 \\
&+ (bq + dm - ap - cl)u_3 + (aq + bp + cm + dl)u_4].
\end{aligned}\right.$$

Pour avoir la valeur de λ, calculons le coefficient de u_1^2 dans la somme

$$U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 + U_4^2;$$

on trouve pour ce coefficient

$$4\lambda^2\delta\delta_1,$$

où

$$\delta = ad - bc, \qquad \delta_1 = lq - mp.$$

Pour avoir une substitution orthogonale, il faudra donc prendre

$$(17) \qquad \lambda = \pm \frac{1}{2\sqrt{\delta\delta_1}};$$

si l'on adopte pour λ une de ces deux valeurs, les formules (16) nous donneront les coefficients d'une substitution orthogonale à quatre variables

$$(18)\left\{\begin{array}{ll}
\alpha_1 = \lambda(aq + dl - bp - cm), & \beta_1 = \lambda(am + cq - bl - dp), \\
\alpha_2 = \lambda(ap + bq - cl - dm), & \beta_2 = \lambda(al + bm + cp + dq), \\
\alpha_3 = i\lambda(ap + dm - bq - cl), & \beta_3 = i\lambda(al + cp - bm - dq), \\
\alpha_4 = i\lambda(cm + dl - aq - bp); & \beta_4 = -i\lambda(am + bl + cq + dp); \\
\gamma_1 = i\lambda(bl + cq - am - dp), & \delta_1 = i\lambda(aq + cm - bp - dl), \\
\gamma_2 = i\lambda(cp + dq - al - bm), & \delta_2 = i\lambda(ap + bq + cl + dm), \\
\gamma_3 = \lambda(al + dq - bm - cp), & \delta_3 = \lambda(bq + dm - ap - cl), \\
\gamma_4 = \lambda(cq + dp - am - bl); & \delta_4 = \lambda(aq + bp + cm + dl).
\end{array}\right.$$

On vérifie sans difficulté que ces coefficients vérifient les relations

$$\sum \alpha_i^2 = 1, \qquad \sum \alpha_i\beta_i = 0$$

et les relations analogues.

A cause du double signe devant le second membre de la formule (17), on voit qu'*à toute substitution de la forme* (A) *correspondent deux substitutions orthogonales pour les variables u_i*, qui se déduisent l'une de l'autre en changeant u_i en $-u_i$; je dirai, pour abréger, que ces deux substitutions orthogonales sont *opposées*. Ce résultat était d'ailleurs évident *a priori*, si l'on remarque que η et ξ ne changent pas quand on change u_i en $-u_i$. Ces deux substitutions sont *droites;* il est clair en effet que le signe du déterminant est le même pour ces deux substitutions et ne dépend que des coefficients a, b, c, d, l, m, p, q. Or, si l'on fait varier ces coefficients d'une manière continue depuis les valeurs initiales

$$a = 1, \qquad b = c = 0, \qquad d = 1, \qquad l = 1, \qquad m = p = 0, \qquad q = 1,$$

le déterminant doit varier d'une manière continue et, comme il est toujours égal à ± 1, il doit conserver constamment la valeur initiale

$+1$. Le même raisonnement nous prouve qu'étant donnée une substitution orthogonale droite quelconque, on peut toujours imaginer que les coefficients d'une substitution orthogonale droite variable varient d'une manière continue depuis les valeurs initiales

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

jusqu'aux valeurs données.

La substitution (B) peut être remplacée par une substitution de la forme (A), suivie de la substitution particulière ($\eta' = \xi, \xi' = \eta$), et cette dernière revient à changer u_1 en $-u_1$. Par conséquent, toute substitution de la forme (B) fournit deux substitutions orthogonales gauches opposées.

Les formules (16) et (18) sont analogues, on le voit, aux formules d'Olinde Rodrigues, qui donnent sous forme rationnelle les coefficients de la substitution orthogonale à trois variables. Il y a cependant une différence entre ces deux catégories de formules, à cause de la présence d'un radical dans l'expression de λ. Mais, si l'on convient, ce qu'on peut toujours faire, de supposer les déterminants δ, δ_1 égaux à $+1$, on pourra prendre $\lambda = \frac{1}{2}$, et l'ambiguïté disparaît. Remarquons seulement que, lorsque a, b, c, d changent de signe en même temps, les α_i, β_i, ... changent de signe, tandis que la substitution

$$\eta' = \frac{a\eta + b}{c\eta + d}$$

reste la même. On pourrait alors introduire, au lieu d'une substitution linéaire non homogène telle que la précédente, un système de deux substitutions homogènes

$$\eta'_1 = a\eta_1 + b\eta_2,$$
$$\eta'_2 = c\eta_1 + d\eta_2,$$

où $ad - bc = 1$. Le lecteur trouvera bien aisément les modifications qu'il faut faire subir aux énoncés précédents.

6. Comme ce travail a surtout pour objet l'étude des transformations réelles, il est essentiel de rechercher comment on doit prendre les coefficients a, b, c, d, l, m, p, q pour que les coefficients de la substitution orthogonale (16) soient tous réels. Supposons, ce qui ne restreint pas la généralité,

$$ad - bc = lq - mp = 1,$$

et posons, pour abréger,

$$(19)\quad \left\{\begin{array}{ll}
aq - cm = \mu_1, & ap - cl = \mu_3, \\
dl - bp = \mu_2, & bq - dm = \mu_4; \\
am + cq = i\nu_1, & al + cp = \nu_3, \\
bl + dp = i\nu_2, & bm + dq = \nu_4; \\
dq - bm = \rho_1, & cq - am = \rho_3, \\
al - cp = \rho_2, & dp - bl = \rho_4; \\
bq + dm = i\pi_1, & aq + cm = \pi_3, \\
ap + cl = i\pi_2, & bp + dl = \pi_4.
\end{array}\right.$$

Les formules (18) pourront s'écrire, en prenant $\lambda = \frac{1}{2}$,

$$(18\,bis)\quad \left\{\begin{array}{llll}
2\alpha_1 = \mu_1 + \mu_2, & 2\beta_1 = i(\nu_1 - \nu_2), & 2\gamma_1 = i(\rho_3 - \rho_4), & 2\delta_1 = i(\pi_3 - \pi_4), \\
2\alpha_2 = \mu_3 + \mu_4, & 2\beta_2 = \nu_3 + \nu_4, & 2\gamma_2 = i(\rho_1 - \rho_2), & 2\delta_2 = -(\pi_1 + \pi_2), \\
2\alpha_3 = i(\mu_3 - \mu_4), & 2\beta_3 = i(\nu_3 - \nu_4), & 2\gamma_3 = \rho_1 + \rho_2, & 2\delta_3 = i(\pi_1 - \pi_2), \\
2\alpha_4 = i(\mu_2 - \mu_1), & 2\beta_4 = \nu_1 + \nu_2, & 2\gamma_4 = \rho_3 + \rho_4, & 2\delta_4 = \pi_3 + \pi_4.
\end{array}\right.$$

Pour que tous les coefficients α_i, β_i, γ_i, δ_i soient réels, il faut donc queles quantités

$$(\mu_1, \mu_2),\quad (\mu_3, \mu_4),\quad (\nu_1, \nu_2),\quad (\nu_3, \nu_4),\quad (\rho_1, \rho_2),\quad (\rho_3, \rho_4),\quad (\pi_1, \pi_2),\quad (\pi_3, \pi_4)$$

soient imaginaires conjuguées deux à deux, et cette condition nécessaire est d'ailleurs suffisante. On peut donc écrire

$$(20)\quad \left\{\begin{array}{llll}
aq - cm = A + Bi, & ap - cl = E + Fi, & al + cp = K + Li, & am + cq = -Q + P \\
dl - bp = A - Bi, & bq - dm = E - Fi, & bm + dq = K - Li, & bl + dp = Q + P \\
aq + cm = C + Di, & ap + cl = H + Gi, & al - cp = M + Ni, & cq - am = R + S \\
bp + dl = C - Di, & bq + dm = -H + Gi, & dq - bm = M - Ni, & dp - bl = R - S
\end{array}\right.$$

A, B, C, D, ... étant réels. On en tire

$$(21)\quad \left\{\begin{array}{ll} 2aq = A + C + (B + D)i, & 2ap = \quad E + H + (F + G)i,\\ 2cm = C - A + (D - B)i, & 2cl = \quad H - E + (G - F)i,\\ 2dl = A + C - (B + D)i, & 2bq = \quad E - H + (G - F)i,\\ 2bp = C - A + (B - D)i; & 2dm = -E - H + (F + G)i;\\ 2al = K + M + (L + N)i, & 2am = -Q - R + (P - S)i,\\ 2cp = K - M + (L - N)i, & 2cq = \quad R - Q + (P + S)i,\\ 2dq = K + M - (L + N)i, & 2dp = \quad Q + R + (P - S)i,\\ 2bm = K - M - (L - N)i; & 2bl = \quad Q - R + (P + S)i; \end{array}\right.$$

les quantités

$$(aq,\ dl),\quad (cm,\ bp),\quad (al,\ dq),\quad (cq,\ bm),$$
$$(ap,\ -dm),\quad (cl,\ -bq),\quad (am,\ -dp),\quad (cq,\ -bl)$$

devront être imaginaires conjuguées deux à deux. On en déduit aussitôt que $\frac{a}{d}$ et $\frac{d}{a}$ doivent être conjuguées, ainsi que $\frac{b}{c}$ et $\frac{c}{b}$, $\frac{l}{q}$ et $\frac{q}{l}$, $\frac{m}{p}$ et $\frac{p}{m}$; ce qui exige que les deux termes de chaque quotient aient le même module. On aura, par exemple,

$$a = Re^{i\varphi},\qquad d = Re^{i\omega},\qquad l = re^{i\theta},\qquad q = re^{i\psi},$$
$$c = R'e^{i\varphi'},\qquad b = R'e^{i\omega'},\qquad p = r'e^{i\theta'},\qquad m = r'e^{i\psi'}.$$

Les relations (21) se réduisent aux suivantes :

$$\begin{aligned} \varphi + \psi + \omega + \theta &= 2h\pi,\\ \varphi' + \psi' + \omega' + \theta' &= 2h'\pi,\\ \varphi + \omega + \theta' + \psi' &= (2h'' + 1)\pi, \end{aligned}$$

h, h', h'' désignant des nombres entiers. D'un autre côté, la relation $ad - bc = 1$ devient, en tenant compte des formules précédentes,

$$e^{i(\varphi+\omega)}(R^2 + R'^2) = 1;$$

il faudra donc que $\varphi + \omega$ soit un multiple pair de π, ainsi que $\psi + \theta$, et que $\varphi' + \omega'$ et $\psi' + \theta'$ soient des multiples impairs de π. On en conclut que a et d, b et $-c$, l et q, m et $-q$ devront être conjuguées. Inversement, si ces conditions sont remplies, les valeurs des coefficients α_i, β_i, γ_i, δ_i, fournies par les formules (18), seront réelles, sans qu'il soit nécessaire de supposer $ad - bc = lq - mp = 1$. Ainsi, *on obtient toutes les substitutions orthogonales droites à coefficients réels en prenant toutes les substitutions de la forme*

$$\eta' = \frac{a\eta + b}{a_0 - b_0\eta}, \qquad \xi' = \frac{l\xi + m}{l_0 - m_0\xi},$$

a_0, b_0, l_0, m_0 *étant les imaginaires conjuguées de* a, b, l, m.

Remarquons que la forme particulière des substitutions à laquelle nous sommes conduits est précisément celle qui convient aux rotations *réelles* d'une sphère autour d'un diamètre ([1]). Cette remarque nous sera très utile dans la suite. L'indétermination provenant du double signe devant le radical $\sqrt{\delta\delta_1}$ dans les formules (16) et (18) peut se lever aisément, sans qu'il soit nécessaire de supposer $\delta = \delta_1 = 1$. Ces déterminants $aa_0 + bb_0$, $ll_0 + mm_0$ étant réels et positifs, on conviendra, par exemple, de prendre pour le radical la valeur arithmétique.

Si l'on suppose que les deux variables η et ξ subissent la même substitution linéaire, c'est-à-dire si l'on prend

$$l = a, \qquad m = b, \qquad p = c, \qquad q = d,$$

les formules (18) deviennent

$$\begin{array}{llll}
\alpha_1 = 1, & \alpha_2 = 0, & \alpha_3 = 0, & \alpha_4 = 0, \\
\beta_1 = 0, & \beta_2 = \dfrac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}{2(ad - bc)}, & \beta_3 = \dfrac{i(a^2 + c^2 - b^2 - d^2)}{2(ad - bc)}, & \beta_4 = \dfrac{-i(ab + cd)}{ad - bc}, \\
\gamma_1 = 0, & \gamma_2 = \dfrac{i(c^2 + d^2 - a^2 - b^2)}{2(ad - bc)}, & \gamma_3 = \dfrac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2(ad - bc)}, & \gamma_4 = \dfrac{cd - ab}{ad - bc}, \\
\delta_1 = 0, & \delta_2 = \dfrac{i(ac + bd)}{ad - bc}, & \delta_3 = \dfrac{bd - ac}{ad - bc}, & \delta_4 = \dfrac{ad + bc}{ad - bc}.
\end{array}$$

On retrouve les formules bien connues qui représentent les coefficients d'une substitution orthogonale à trois variables, et qui sont équivalentes aux formules d'Olinde Rodrigues.

Une substitution orthogonale gauche résulte d'une substitution droite suivie de la substitution particulière

$$U_1 = -u_1, \qquad U_2 = u_2, \qquad U_3 = u_3, \qquad U_4 = u_4,$$

([1]) DARBOUX, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, t. I, p. 36; 1887.

que l'on obtient en échangeant η et ξ. Par suite, *on aura toutes les substitutions orthogonales gauches à coefficients réels en prenant toutes les substitutions de la forme*

$$\eta' = \frac{a\xi + b}{a_0 - b_0\xi}, \qquad \xi' = \frac{l\eta + m}{l_0 - m_0\eta},$$

a_0, b_0, l_0, m_0 *étant les imaginaires conjuguées de* a, b, l, m.

Revenons maintenant aux transformations isogonales de l'espace. La substitution particulière

$$U_1 = - u_1, \qquad U_2 = - u_2, \qquad U_3 = - u_3, \qquad U_4 = - u_4$$

définit, comme on s'en assure aisément, une inversion par rapport à la sphère imaginaire (Σ'). Je dirai encore que deux transformations sont opposées quand, en faisant suivre l'une d'elles de l'inversion précédente, on obtient la seconde. Nous pouvons alors énoncer les propositions suivantes :

Toute substitution de la forme

$$\eta' = \frac{a\eta + b}{a_0 - b_0\eta}, \qquad \xi' = \frac{l\xi + m}{l_0 - m_0\xi},$$

où a_0, b_0, l_0, m_0 *sont les imaginaires conjuguées de* a, b, l, m, *fournit deux transformations droites réelles et opposées.*

Toute substitution de la forme

$$\eta' = \frac{a\xi + b}{a_0 - b_0\xi}, \qquad \xi' = \frac{l\eta + m}{l_0 - m_0\eta},$$

où a_0, b_0, l_0, m_0 *sont les imaginaires conjuguées de* a, b, l, m, *fournit deux transformations gauches réelles et opposées.*

On obtient par ce procédé toutes les transformations isogonales réelles qui font revenir sur elle-même la sphère imaginaire (Σ').

Remarquons encore que l'une des transformations droites fournies par la substitution

$$\eta' = \frac{a\eta + b}{a_0 - b_0\eta}, \qquad \xi' = \frac{a\xi + b}{a_0 - b_0\xi}$$

se réduit à une rotation autour d'un axe passant par l'origine.

7. Avant d'aller plus loin, je rappellerai les principales définitions empruntées à la théorie générale des substitutions ([1]). Une substitution d'une nature quelconque, opérée sur une ou plusieurs quantités, sera désignée d'une manière générale par une des lettres S, T, U, V, ... La substitution

$$[z; f(z)] \quad \text{ou} \quad [x, y; f(x, y), \varphi(x, y)]$$

sera l'opération qui consiste à changer z en $f(z)$, ou celle qui consiste à changer x et y en $f(x, y)$ et $\varphi(x, y)$. L'opération inverse de $[z; f(z)]$ ou de S sera représentée par $[z; f^{-1}(z)]$ ou par S^{-1}; le produit de deux substitutions est l'opération qui consiste à faire successivement ces deux substitutions. Un système de substitutions forme un *groupe* si la substitution inverse d'une substitution du système et le produit de deux substitutions quelconques du système fait également partie du système. Un groupe A est *isomorphe* à un autre groupe B, si à toute substitution de B correspond une et une seule substitution de A et de telle sorte qu'au produit de deux substitutions de B corresponde le produit des deux substitutions correspondantes de A. Si B est également isomorphe à A, les deux groupes sont isomorphes entre eux et l'isomorphisme est *holoédrique*; autrement il est *mériédrique*.

Nous pouvons déduire de ce qui précède des exemples de ces deux espèces d'isomorphisme. Considérons le groupe B des huit substitutions orthogonales

$$|u_1, u_2, u_3, u_4; \quad u_1, \pm u_2, \pm u_3, \pm u_4|;$$

à ce groupe nous pouvons faire correspondre, d'après le paragraphe (5), un groupe A formé des huit substitutions

$$|\eta, \xi; \varepsilon\eta, \varepsilon\xi|, \quad |\eta, \xi; \varepsilon\xi, \varepsilon\eta|, \quad \left|\eta, \xi; \frac{\varepsilon}{\eta}, \frac{\varepsilon}{\xi}\right|, \quad \left|\eta, \xi; \frac{\varepsilon}{\xi}, \frac{\varepsilon}{\eta}\right|,$$

où $\varepsilon = \pm 1$. Le groupe A est évidemment isomorphe au groupe B et, comme les deux groupes sont du même ordre, l'isomorphisme est ho-

---

([1]) SERRET, *Traité d'Algèbre supérieure* (Paris, 1879). — C. JORDAN, *Traité des substitutions et des équations algébriques* (Paris, 1880). — WALTHER DYCK, *Gruppentheoretische Studien* (*Mathematische Annalen*, Band XX et XXII.)

loédrique. Au contraire, prenons le groupe B' des seize substitutions

$$|u_1,\ u_2,\ u_3,\ u_4;\quad \pm u_1,\ \pm u_2,\ \pm u_3\ \pm u_4|;$$

le groupe A est encore isomorphe au groupe B', mais l'isomorphisme est mériédrique.

Désignons par TS le produit des deux substitutions S et T, la substitution T étant effectuée la première; en général, les deux substitutions TS et ST sont distinctes. Si l'on a

$$TS = ST,$$

les substitutions sont dites *permutables*. Dans le cas général, on a

$$TST^{-1} = S',$$

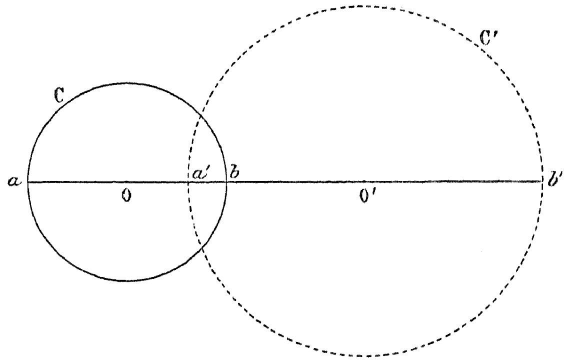
S' désignant une substitution différente de S, qui est appelée la *transformée de* S *par* T; les substitutions S et S' sont *semblables*. Si l'on prend les transformées par T de toutes les substitutions d'un groupe G, ces nouvelles substitutions forment encore un groupe G', qui est semblable à G et qui se confond avec G si la substitution T fait partie de G. Il est clair que deux groupes semblables sont isomorphes entre eux. Un groupe G est dit *permutable* à une substitution T, si le groupe transformé de G par T coïncide avec G.

Soit g un sous-groupe de G; ce groupe est appelé *sous-groupe distingué* s'il est permutable à toutes les substitutions de G. Un groupe quelconque contient toujours deux sous-groupes distingués : le groupe lui-même et le groupe qui se compose de la substitution identique. S'il n'en contient pas d'autre, il est dit *simple;* c'est un groupe *composé* dans le cas contraire.

8. Soient C, C' deux cercles situés dans deux plans rectangulaires P, P', qui se coupent suivant la ligne des centres OO' (*fig.* 1), et tels que les points a', b' soient conjugués harmoniques par rapport aux points a et b. Les deux cercles C, C' seront appelés *conjugués*. Il est clair que le cercle C admet ∞^2 cercles conjugués passant par deux points fixes imaginaires sur la perpendiculaire au plan P menée par le point O, points qui sont les centres des sphères de rayon nul passant par le cercle C. Les cercles conjugués du cercle C peuvent aussi être consi-

dérés comme les trajectoires orthogonales des sphères passant par C; deux sphères quelconques passant par deux cercles conjugués se coupent orthogonalement. Il résulte immédiatement de ces propriétés que toute transformation isogonale change un système de deux cercles conjugués en un nouveau système de deux cercles conjugués.

Fig. 1.



Les transformations droites les plus simples doivent résulter de deux inversions successives; comme, dans l'hypothèse où nous nous plaçons, les sphères d'inversion doivent couper orthogonalement la sphère (Σ'), ces sphères se coupent toujours suivant un cercle réel et nous sommes amenés à étudier en particulier les transformations qui proviennent de deux réflexions successives sur deux sphères se coupant suivant un cercle réel. Soient (Σ_1), (Σ_2) deux sphères se coupant suivant un cercle réel C sous un angle ω; soit m un point quelconque de l'espace, C′ le cercle conjugué de C passant par m, (Σ_3) la sphère passant par C et par m. Après les deux réflexions successives sur les sphères (Σ_1) et (Σ_2), la sphère (Σ_3) est remplacée par une sphère (Σ_4) passant par C et coupant la sphère (Σ_3) sous un angle 2ω; quant au cercle C′, qui est orthogonal aux deux sphères (Σ_1) et (Σ_2), il est conservé par ces deux réflexions. Le point m', image de m, se trouve donc à l'intersection du cercle C′ et de la sphère (Σ_4). L'opération précédente peut donc être définie sans faire intervenir les sphères (Σ_1) et (Σ_2); ces sphères ne jouent qu'un rôle auxiliaire et peuvent être remplacées par tout autre système de deux sphères passant par C et se coupant sous le même angle ω. Cette transformation présente, comme on voit, beaucoup d'analogie avec la rotation autour d'une droite D, les plans passant par D étant remplacés par les sphères passant par C et les parallèles par les cercles conjugués de C; pour abréger, j'appellerai cette transformation une *rotation autour du cercle* C. On pourrait d'ailleurs étendre sans difficulté la construction au cas où le cercle C est imaginaire.

Soient S et T deux transformations isogonales de l'espace; la transformation $TST^{-1} = S'$ sera une transformation de même nature, *semblable* à S. Il est clair que toute transformation semblable à une inversion est une inversion; cela résulte, si l'on veut, de ce que deux points symétriques par rapport à une sphère sont caractérisés par cette propriété que tout cercle passant par ces deux points est orthogonal à la sphère d'inversion. De même, toute transformation semblable à une rotation d'un angle ω autour d'un cercle est une rotation d'un angle ω autour d'un autre cercle.

9. Au moyen de ces remarques, on peut décomposer très simplement toute transformation de l'espèce considérée en une suite d'inversions. Cherchons d'abord la condition pour que la substitution

$$\left[\eta, \xi; \frac{a\xi + b}{c\xi + d}, \frac{l\eta + m}{p\eta + q}\right],$$

qui caractérise une transformation gauche, définisse une inversion. La substitution orthogonale qui caractérise une inversion doit admettre la période 2; il en sera évidemment de même de la substitution précédente, ce qui exige que les deux substitutions

$$\left[\eta; \frac{a\eta + b}{c\eta + d}\right], \quad \left[\eta; \frac{l\eta + m}{p\eta + q}\right]$$

soient inverses l'une de l'autre. On pourra alors supposer

$$l = -d, \qquad m = b, \qquad p = c, \qquad q = -a,$$

et la substitution précédente s'écrira

$$\left[\eta, \xi; \frac{a\xi + b}{c\xi + d}, \frac{b - d\eta}{c\eta - a}\right]. \tag{22}$$

Inversement, à toute substitution de la forme (22) correspond une substitution orthogonale qui reproduit identiquement tout système de valeurs (u_1, u_2, u_3, u_4) vérifiant la relation

$$(a+d)u_1 + (c-b)u_2 + i(c+b)u_3 + i(a-d)u_4 = 0;$$

on le vérifie immédiatement au moyen des formules (16). Par suite, la transformation quadratique correspondante ne change aucun point de la sphère

$$(23)\quad (a+d)(x^2+y^2+z^2-1) + 2[(c-b)x + i(c+b)y + i(a-d)z] = 0;$$

c'est donc une inversion par rapport à cette sphère. Je dirai, pour abréger, que la sphère (23) correspond à la substitution

$$\left[\zeta;\ \frac{a\zeta+b}{c\zeta+d}\right].$$

A toute substitution linéaire de cette forme on peut donc associer une sphère orthogonale à (Σ'); pour que cette sphère se réduise à un plan passant par l'origine, il faut et il suffit que $a+d=0$, c'est-à-dire que la substitution considérée soit de période 2.

Prenons deux sphères (Σ_1), (Σ_2) orthogonales à (Σ'), ayant pour substitutions *caractéristiques*

$$[\zeta;\ \varphi(\zeta)],\quad [\zeta;\ \psi(\zeta)],$$

et soit (Σ_3) la sphère symétrique de (Σ_1) par rapport à (Σ_2), qui est orthogonale comme les premières à (Σ'). Proposons-nous de trouver la substitution caractéristique de (Σ_3). Il suffit de remarquer pour cela qu'une réflexion sur (Σ_3) équivaut à la suite de trois réflexions successives sur (Σ_2), sur (Σ_1) et sur (Σ_2). Cette inversion correspond, par conséquent, à la substitution linéaire

$$[\eta, \xi;\ \psi(\varphi^{-1}(\psi(\xi))),\ \psi^{-1}(\varphi(\psi^{-1}(\eta)))];$$

la substitution caractéristique de (Σ_3) sera donc

$$[\zeta;\ \psi(\varphi^{-1}(\psi(\zeta)))].$$

Si les substitutions $[\zeta;\ \varphi(\zeta)]$, $[\zeta;\ \psi(\zeta)]$ font partie d'un groupe G, la nouvelle substitution fera encore partie de ce groupe. A tout groupe de substitutions linéaires de cette forme, on peut donc rattacher un système de sphères orthogonales à la sphère (Σ'), jouissant de la propriété suivante : *Étant données deux sphères quelconques du système, la sphère symétrique de l'une d'elles par rapport à l'autre fait encore partie du système.* On aurait encore un pareil système de sphères en prenant toutes les substitutions d'un groupe de période 2; mais ces sphères se réduisent, comme on l'a vu tout à l'heure, à des plans passant par l'origine. Si le groupe considéré est d'ordre fini, on sera conduit à un système composé d'un nombre limité de sphères. Nous reviendrons plus loin sur ce sujet.

Soit maintenant S une substitution droite orthogonale et réelle à quatre variables, et soit

$$[\eta, \xi; \varphi(\eta), \psi(\xi)]$$

la substitution correspondante de la forme (A). Cette substitution peut, comme on sait, être mise sous la forme

$$\left[\frac{\eta - a}{\eta - b}, \frac{\xi - c}{\xi - d}; e^{i\theta}\frac{\eta - a}{\eta - b}, e^{i\varphi}\frac{\xi - c}{\xi - d}\right],$$

où

$$ab_0 = cd_0 = -1,$$

θ et φ étant réels, et b_0, d_0 désignant les imaginaires conjuguées de b et de d. Désignons par T la substitution orthogonale droite qui correspond à la substitution linéaire

$$\left[\eta, \xi; \frac{a - \eta}{a_0\eta + 1}, \frac{c - \xi}{c_0\xi + 1}\right],$$

substitution réelle, comme il est aisé de s'en assurer. La substitution semblable à S

$$TST^{-1} = S'$$

correspondra à la substitution linéaire

$$[\eta, \xi; e^{i\theta}\eta, e^{i\varphi}\xi].$$

Pour avoir les coefficients de la substitution S', nous ferons, dans les formules (16),

$$a = e^{i\theta}, \qquad b = c = 0, \qquad d = 1,$$
$$l = e^{i\varphi}, \qquad m = p = 0, \qquad q = 1;$$

elles deviennent, en choisissant convenablement le signe,

$$(24)\quad \left\{\begin{aligned} U_1 &= u_1 \cos\frac{\varphi-\theta}{2} - u_4 \sin\frac{\varphi-\theta}{2}, \\ U_4 &= u_1 \sin\frac{\varphi-\theta}{2} + u_4 \cos\frac{\varphi-\theta}{2}, \\ U_2 &= u_2 \cos\frac{\varphi+\theta}{2} - u_3 \sin\frac{\varphi+\theta}{2}, \\ U_3 &= u_2 \sin\frac{\varphi+\theta}{2} + u_3 \cos\frac{\varphi+\theta}{2}. \end{aligned}\right.$$

Ces formules mettent en évidence le théorème suivant :

Le déterminant de toute substitution droite orthogonale réelle à quatre variables peut être ramené à la forme canonique

$$(25)\quad \begin{vmatrix} \cos\omega & -\sin\omega & 0 & 0 \\ \sin\omega & \cos\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\omega' & -\sin\omega' \\ 0 & 0 & \sin\omega' & \cos\omega' \end{vmatrix}.$$

Comme les angles θ et φ ne sont déterminés qu'à des multiples près de 2π, les angles ω et ω' de la substitution (24) admettent deux systèmes de valeurs (ω, ω') et $(\omega+\pi, \omega'+\pi)$; on retrouve ainsi les deux substitutions orthogonales qui correspondent à la substitution

$$[\eta, \xi;\quad e^{i\theta}\eta,\ e^{i\varphi}\xi].$$

En particulier, la substitution $[u_i;\ -u_i]$ s'obtient en prenant $\omega = \omega' = \pi$.

La substitution (24) peut être décomposée en deux substitutions permutables

$$(26)\quad \left\{\begin{aligned} U_2 &= u_2 \cos\frac{\varphi+\theta}{2} - u_3 \sin\frac{\varphi+\theta}{2}, \\ U_3 &= u_2 \sin\frac{\varphi+\theta}{2} + u_3 \cos\frac{\varphi+\theta}{2}, \\ U_1 &= u_1, \qquad U_4 = u_4; \end{aligned}\right.$$

$$(27)\quad \left\{\begin{aligned} U_1 &= u_1 \cos\frac{\varphi-\theta}{2} - u_4 \sin\frac{\varphi-\theta}{2}, \\ U_4 &= u_1 \sin\frac{\varphi-\theta}{2} + u_4 \cos\frac{\varphi-\theta}{2}, \\ U_2 &= u_2, \qquad U_3 = u_3. \end{aligned}\right.$$

Revenons aux coordonnées x, y, z, X, Y, Z ; les formules précédentes deviennent

$$(26') \quad \begin{cases} X = x\cos\omega - y\sin\omega, \\ Y = x\sin\omega + y\cos\omega, \\ Z = z; \end{cases}$$

$$(27') \quad \begin{cases} X = \dfrac{2x}{(x^2+y^2+z^2)(1-\cos\omega') + 2z\sin\omega' + 1 + \cos\omega'}, \\ Y = \dfrac{2y}{(x^2+y^2+z^2)(1-\cos\omega') + 2z\sin\omega' + 1 + \cos\omega'}, \\ Z = \dfrac{(x^2+y^2+z^2-1)\sin\omega' + 2z\cos\omega'}{(x^2+y^2+z^2)(1-\cos\omega') + 2z\sin\omega' + 1 + \cos\omega'}, \end{cases}$$

où

$$\omega = \frac{\varphi+\theta}{2}, \qquad \omega' = \frac{\varphi-\theta}{2}.$$

La première substitution définit une rotation d'un angle ω autour de Oz ; quant à la seconde, il est aisé de vérifier directement qu'elle définit une rotation d'un angle ω' autour du cercle

$$z = 0, \qquad x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0.$$

On peut encore s'en assurer comme il suit. Faisons dans les formules générales (24) $\varphi = -\theta = \frac{\omega'}{2}$. On aura $\omega = 0$, et la transformation (27)′ correspond par conséquent à la substitution linéaire

$$\left[\eta,\ \xi;\ e^{-\frac{i\omega'}{2}}\eta,\ e^{\frac{i\omega'}{2}}\xi\right],$$

qui est elle-même équivalente à la suite des deux substitutions

$$\left[\eta,\ \xi;\ e^{-\frac{i\omega'}{2}}\xi,\ e^{\frac{i\omega'}{2}}\eta\right], \quad [\eta,\ \xi;\ \xi,\ \eta].$$

La première définit, nous l'avons vu, une inversion par rapport à la sphère

$$2z\cot\frac{\omega'}{4} + x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0,$$

et la seconde une inversion par rapport à la sphère (Σ). Ces deux sphères se coupant suivant le cercle C, qui a pour équations

$$z = 0, \qquad x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0,$$

la résultante des deux inversions est bien une rotation autour de ce cercle.

Le cercle C et l'axe Oz forment évidemment un système de deux cercles conjugués orthogonaux à (Σ'). Si nous revenons maintenant à la transformation S considérée, nous pouvons énoncer la proposition suivante :

La transformation isogonale droite la plus générale qui fait revenir sur elle-même la sphère imaginaire (Σ') *résulte de deux rotations autour de deux cercles conjugués* C, C', *orthogonaux à* (Σ').

Les cercles C, C' seront appelés les *cercles principaux* de la transformation ; ils sont analogues aux pôles du diamètre fixe dans la rotation d'une sphère autour d'un de ses diamètres. Mais il faut remarquer que, dans la transformation, ces cercles ne sont pas fixes et qu'ils glissent sur eux-mêmes. Comme une rotation résulte elle-même de deux inversions, on peut encore énoncer le théorème suivant :

Toute transformation isogonale droite qui fait revenir sur elle-même la sphère (Σ') *est équivalente (et d'une infinité de manières) à une suite de quatre inversions, les deux premières sphères d'inversion étant orthogonales aux deux dernières.*

Une transformation de cette espèce ne peut pas en général être remplacée par deux inversions, car elle se réduirait à une rotation autour d'un cercle. On voit en même temps, d'après les développements qui précèdent, quelle est la condition pour que la substitution

$$[\eta,\ \xi;\ \varphi(\eta),\ \psi(\xi)]$$

corresponde à une suite de deux inversions. *Il faut et il suffit que les substitutions linéaires*

$$[\eta;\ \varphi(\eta)],\quad [\xi;\ \psi(\xi)]$$

aient les mêmes multiplicateurs.

Les raisonnements qui précèdent ne s'appliquent plus à la substitution droite $[u_i;\ -u_i]$ qui définit une inversion par rapport à la sphère (Σ'). Cette transformation peut être remplacée par deux rotations de π autour de deux cercles conjugués quelconques orthogonaux à (Σ'). Les transformations droites se classent d'après cela en deux catégories, suivant qu'elles résultent de *deux* ou de *quatre* inversions.

Soit maintenant U une transformation gauche définie par une substitution de la forme

$$\left[\eta,\ \xi;\ \frac{a\xi+b}{c\xi+d},\quad \frac{l\eta+m}{p\eta+q}\right];$$

soient α et β les points doubles de la substitution

$$\left[\eta;\ \frac{a\dfrac{l\eta+m}{p\eta+q}+b}{c\dfrac{l\eta+m}{p\eta+q}+d}\right],$$

et γ, δ les points doubles de la substitution

$$\left[\xi;\ \frac{l\dfrac{a\xi+b}{c\xi+d}+m}{p\dfrac{a\xi+b}{c\xi+d}+q}\right].$$

La substitution écrite plus haut pourra encore s'écrire

$$\left[\frac{\eta-\alpha}{\eta-\beta},\ \frac{\xi-\gamma}{\xi-\delta};\ \mathrm{A}\frac{\xi-\gamma}{\xi-\delta},\ \mathrm{B}\frac{\eta-\alpha}{\eta-\beta}\right].$$

Désignons par T la substitution orthogonale droite qui correspond à la substitution linéaire

$$\left[\eta,\ \xi;\ \frac{\alpha-\eta}{1-\dfrac{\eta}{\beta}},\quad \frac{\gamma-\xi}{1-\dfrac{\xi}{\delta}}\right];$$

cette substitution est encore réelle, car on a les mêmes relations que plus haut

$$\alpha\beta_0=\gamma\delta_0=-1.$$

La substitution $\mathrm{TUT}^{-1}=\mathrm{U}'$, semblable à U, sera définie par une substitution linéaire de la forme

$$[\eta,\ \xi;\ e^{i\theta}\xi,\ e^{i\varphi}\eta],$$

où θ et φ devront être réels. Les formules (16) nous donnent alors, pour la substitution orthogonale correspondante,

$$\begin{aligned}
U_1 &= -u_1 \cos\frac{\varphi-\theta}{2} + u_4 \sin\frac{\varphi-\theta}{2},\\
U_4 &= u_1 \sin\frac{\varphi-\theta}{2} + u_4 \cos\frac{\varphi-\theta}{2};\\
U_2 &= u_2 \cos\frac{\varphi+\theta}{2} - u_3 \sin\frac{\varphi+\theta}{2},\\
U_3 &= u_2 \sin\frac{\varphi+\theta}{2} + u_3 \cos\frac{\varphi+\theta}{2}.
\end{aligned}$$

Les deux premières formules définissent une transformation par symétrie relativement à une sphère passant par le cercle

$$z = 0, \qquad x^2 + y^2 + z^2 = 1,$$

et les deux dernières une rotation autour de Oz. En revenant à la transformation U, on peut donc énoncer le théorème suivant :

Toute transformation gauche de l'espèce considérée peut être remplacée par une rotation autour d'un cercle C, *orthogonal à* (Σ'), *suivie d'une inversion par rapport à une sphère orthogonale au cercle* C *et à la sphère* (Σ').

On voit de plus que *toute transformation gauche peut être remplacée par trois inversions, deux des sphères d'inversion étant orthogonales à la troisième.*

La forme canonique du déterminant d'une substitution gauche orthogonale est par conséquent la suivante :

$$\begin{vmatrix}
1 & 0 & 0 & 0\\
0 & -1 & 0 & 0\\
0 & 0 & \cos\omega & -\sin\omega\\
0 & 0 & \sin\omega & \cos\omega
\end{vmatrix}.$$

II.

10. Imaginons l'espace ou une portion de l'espace divisé en régions $R_0, R_1, \ldots, R_i, \ldots$, jouissant de la propriété suivante : lorsque le point (x_0, y_0, z_0) décrit la région R_0, le point (x_i, y_i, z_i), qui se déduit du point (x_0, y_0, z_0) au moyen d'une transformation isogonale S_i, décrit la région R_i. En d'autres termes, la région R_i se déduit de la région R_0 par la transformation S_i. En répétant les raisonnements employés par M. Poincaré au début de son Mémoire sur les groupes fuchsiens (*Acta mathematica*, t. I, p. 12), on reconnaît que : 1° les substitutions $S_0 = 1, S_1, \ldots, S_i, \ldots$ doivent former un groupe discontinu; 2° les régions $R_0, R_1, \ldots, R_i, \ldots$ divisent l'espace régulièrement en une infinité ou en un nombre fini de régions toutes congruentes ou symétriques entre elles.

La recherche des divisions régulières de l'espace en régions congruentes ou symétriques est donc ramenée à ce problème :

Construire tous les groupes discontinus de substitutions linéaires orthogonales à cinq variables.

Si les transformations considérées conservent une sphère fixe, nous sommes conduits à distinguer trois cas :

1° La sphère fixe est réelle; on peut supposer qu'elle se réduit à un plan, et le problème revient en réalité à la recherche des groupes fuchsiens et kleinéens.

2° La sphère fixe se réduit à un point. Supposons ce point rejeté à l'infini; on est conduit à la recherche des groupes de *mouvements*, dans le sens ordinaire du mot [1].

3° La sphère fixe est imaginaire. Nous supposerons que cette sphère fixe coïncide avec la sphère (Σ') qui a pour équation

$$x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0.$$

D'après ce qui a été dit plus haut, le problème revient lui-même à la recherche des groupes discontinus formés de substitutions linéaires orthogonales à quatre variables. Soit G un pareil groupe; d'après les développements du n° 5, il y correspond un groupe discontinu G_1, isomorphe au premier, formé de substitutions de la forme (A) ou (B). Si le groupe G ne contient pas la substitution $[u_i; -u_i]$, G sera lui-même isomorphe à G_1 et l'isomorphisme sera holoédrique. Dans le cas contraire, il sera mériédrique.

[1] SCHÖNFLIES, *Mathematische Annalen*, Bd. 28 et 29.

Inversement, si l'on connaît un groupe G_1 formé de substitutions linéaires de la forme (A) et (B), on en déduira aussitôt un groupe discontinu G de substitutions orthogonales auquel G_1 sera mériédriquement isomorphe. Il pourra arriver aussi que ce groupe G renferme des sous-groupes d'indice 2, auxquels G_1 soit holoédriquement isomorphe. Je me bornerai, dans ce travail, à la recherche des groupes d'ordre fini, c'est-à-dire au problème suivant :

Construire tous les groupes d'ordre fini de substitutions linéaires de la forme

$$\text{(A)} \qquad \left[\eta,\ \xi;\ \frac{a_i\eta + b_i}{c_i\eta + d_i},\ \frac{l_i\xi + m_i}{p_i\xi + q_i}\right]$$

ou de la forme

$$\text{(B)} \qquad \left[\eta,\ \xi;\ \frac{a'_i\xi + b'_i}{c'_i\xi + d'_i},\ \frac{l'_i\eta + m'_i}{p'_i\eta + q'_i}\right].$$

Ces groupes sont très nombreux, comme on le verra par l'énumération ci-dessous. Il est clair que nous ne regardons pas comme distincts deux groupes semblables entre eux.

11. Je dirai qu'un groupe est de la première *famille*, lorsqu'il ne contient que des substitutions de la forme (A), et qu'il est de la seconde famille lorsqu'il contient à la fois des substitutions de la forme (A) et des substitutions de la forme (B); un groupe quelconque de la première famille sera désigné par H, et un groupe quelconque de la seconde famille par K. Il ne peut pas exister de groupe ne contenant que des substitutions de la forme (B); car le produit de deux substitutions de la forme (B) est une substitution de la forme (A). Cependant, si le groupe ne contenait qu'une substitution de la forme (B), telle que

$$\left[\eta,\ \xi;\ \frac{a\xi + b}{c\xi + d},\ \frac{-d\eta + b}{c\eta - a}\right],$$

il n'y aurait également qu'une substitution de la forme (A)

$$[\eta,\ \xi;\ \eta,\ \xi],$$

et le groupe se réduirait à ces deux substitutions. Laissant de côté ce cas particulier, nous voyons que tout groupe K contient un certain nombre de substitutions de la forme (A); comme le produit de deux substitutions de cette forme est une substitution de même forme, on en conclut que tout groupe de la seconde famille contient un sous-groupe de la première famille, formé par toutes les substitutions du groupe qui sont de la forme (A). Nous sommes donc amenés à résoudre d'abord le problème suivant :

Construire tous les groupes d'ordre fini, formés de substitutions de la forme (A),

$$\left[\eta,\ \xi;\ \frac{a_i\eta+b_i}{c_i\eta+d_i},\ \frac{l_i\xi+m_i}{p_i\xi+q_i}\right].$$

Posons, pour abréger,

$$f_i(\eta)=\frac{a_i\eta+b_i}{c_i\eta+d_i},\qquad \varphi_i(\xi)=\frac{l_i\xi+m_i}{p_i\xi+q_i},$$

il est clair que toutes les substitutions

$$[\eta;\ f_i(\eta)]$$

devront former un groupe d'ordre fini G. De même, toutes les substitutions

$$[\xi;\ \varphi_i(\xi)]$$

formeront un groupe d'ordre fini G_1. Réciproquement, étant donnés deux groupes G et G_1, d'ordres m et n respectivement, si l'on combine chaque substitution de G avec toutes les substitutions de G_1 respectivement, on obtient un groupe H d'ordre mn, que j'appellerai *groupe complet;* mais il s'en faut de beaucoup qu'on obtienne ainsi *tous* les groupes H d'ordre fini. Supposons, par exemple, que les deux groupes G et G_1 soient holoédriquement isomorphes; si l'on associe à chaque substitution de G la substitution correspondante de G_1, il est clair qu'on obtiendra un groupe H de même ordre que G et G_1. On est donc conduit à traiter la question suivante : *Étant donnés deux groupes d'ordre fini* G *et* G_1 *de substitutions linéaires à une variable, associer de toutes les manières possibles les substitutions de* G *à celles de* G_1, *de façon à former un groupe* H.

Ce groupe H contiendra un certain nombre de substitutions de la forme

$$[\eta, \xi; \eta, \varphi_k(\xi)];$$

les substitutions

$$[\xi; \varphi_k(\xi)]$$

formeront évidemment un groupe g_1 identique à G_1 ou à un sous-groupe de G_1. De même, le groupe H renfermera un certain nombre de substitutions de la forme

$$[\eta, \xi; f_j(\eta), \xi],$$

et les substitutions

$$[\eta; f_j(\eta)]$$

formeront un groupe g, contenu dans G. Soient m, n, μ, ν les ordres respectifs des groupes G, G_1, g, g_1. Si l'on combine de toutes les manières possibles une substitution de g avec une substitution de g_1, on obtient un groupe h, formé des substitutions

$$[\eta, \xi; f_j(\eta), \varphi_k(\xi)] \qquad (j = 1, 2, \ldots, \mu;\ k = 1, 2, \ldots, \nu)$$

et d'ordre $\mu\nu$. Il est clair que le groupe h est contenu dans H, et, si l'on désigne par M l'ordre de H, on aura

$$M = D\mu\nu,$$

D désignant un nombre entier. J'appellerai h le *sous-groupe complet principal* de H.

Il est aisé, d'après cela, de se rendre compte de la composition du groupe H. On voit d'abord que toute substitution de G est associée dans H avec ν substitutions différentes de G_1, et ν seulement. En effet, si H contient la substitution

$$\left[\eta, \xi; \frac{a\eta + b}{c\eta + d}, \frac{l\xi + m}{p\xi + q}\right],$$

il contiendra aussi les ν substitutions

$$\left[\eta, \xi; \frac{a\eta + b}{c\eta + d}, \frac{l\varphi_k(\xi) + m}{p\varphi_k(\xi) + q}\right] \qquad (k = 1, 2, \ldots, \nu),$$

qui sont évidemment distinctes. De plus, le groupe H ne contiendra pas d'autre substitution où figure la substitution

$$\left[\eta;\ \frac{a\eta+b}{c\eta+d}\right]$$

du groupe G. En effet, une telle substitution pourrait s'écrire

$$\left[\eta,\ \xi;\ \frac{a\eta+b}{c\eta+d},\ \frac{l\pi(\xi)+m}{p\pi(\xi)+q}\right],$$

$\pi(\xi)$ désignant une fonction linéaire de ξ différente des $\varphi_k(\xi)$; par suite, le groupe H contiendrait la substitution

$$[\eta,\ \xi;\ \eta,\ \pi(\xi)]$$

et le groupe g_1 la substitution $[\xi; \pi(\xi)]$, contrairement à l'hypothèse. On verrait de même que chaque substitution de G_1 doit figurer dans H, associée à μ substitutions différentes de G, et à μ seulement. On aura donc

$$M = m\nu = n\mu,$$

et, par suite,

$$m = D\mu, \qquad n = D\nu;$$

les sous-groupes g et g_1 sont par conséquent de même indice dans les groupes G et G_1. De plus, g et g_1 sont des sous-groupes *distingués*. Soit en effet T une substitution quelconque de G, T′ une substitution correspondante de G_1, S une substitution quelconque de g et S′ une substitution quelconque de g_1. Le groupe H contiendra la substitution obtenue en associant les deux substitutions correspondantes

$$TST^{-1}, \quad T'S'(T')^{-1}$$

effectuées respectivement sur les variables η et ξ. Comme on peut supposer que S′ se réduit à la substitution identique $[\xi; \xi]$, on voit que la substitution TST^{-1} doit appartenir au groupe g, c'est-à-dire que ce groupe est permutable à toutes les substitutions de G. On verrait de même que g_1 est un sous-groupe distingué de G_1, et par suite h sera un sous-groupe distingué de H.

Il faudra donc que les groupes G et G_1 admettent deux sous-groupes distingués de même indice g et g_1. Si ces deux sous-groupes se confondent avec les groupes G et G_1, l'indice est l'unité, h se confond avec H, qui est alors un groupe complet. Si G et G_1 sont isomorphes holoédriquement, on peut supposer que g et g_1 se réduisent à la substitution identique; c'est le cas qui a été considéré plus haut. Il pourra arriver aussi que l'un des groupes g et g_1 seulement se réduise à la substitution identique, comme on le verra plus loin. Considérons le cas général où les sous-groupes g et g_1 sont d'indice D. Les substitutions de G et de G_1 pourront être groupées dans l'ordre ci-après :

$$G \left| \begin{array}{ccccc} 1 & S_1 & S_2 & \ldots & S_{\mu-1} \\ T_1 & T_1 S_1 & T_1 S_2 & \ldots & T_1 S_{\mu-1} \\ T_2 & T_2 S_1 & T_2 S_2 & \ldots & T_2 S_{\mu-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ T_{D-1} & T_{D-1} S_1 & T_{D-1} S_2 & \ldots & T_{D-1} S_{\mu-1} \end{array} \right|,$$

$$G_1 \left| \begin{array}{ccccc} 1 & S'_1 & S'_2 & \ldots & S'_{\nu-1} \\ T'_1 & T'_1 S'_1 & T'_1 S'_2 & \ldots & T'_1 S'_{\nu-1} \\ T'_2 & T'_2 S'_1 & T'_2 S'_2 & \ldots & T'_2 S'_{\nu-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ T'_{D-1} & T'_{D-1} S'_1 & T'_{D-1} S'_2 & \ldots & T'_{D-1} S'_{\nu-1} \end{array} \right|.$$

On forme ces Tableaux comme il suit. Sur la première ligne de G on écrit toutes les substitutions de g et sur la première ligne de G_1 toutes les substitutions de g_1. On prend ensuite pour T_1 une substitution de G ne faisant pas partie du groupe g, et pour T'_1 une substitution de G_1 qui doit être associée à T_1 dans le groupe H. On prend ensuite pour T_2 une substitution de G n'appartenant pas aux deux premières lignes, et ainsi de suite. D'après ce qui a été dit plus haut, on obtiendra le groupe H en associant une substitution prise dans G avec les ν substitutions de G_1 qui appartiennent à la ligne de même rang que la substitution prise dans G. En opérant ainsi, on obtient bien un système de $D\mu\nu$ substitutions de la forme (A); tout revient à examiner à quelles conditions ces $D\mu\nu$ substitutions forment un groupe.

Soient $T_i S_\rho$, $T_j S_\pi$ deux substitutions quelconques de G, $T'_i S'_\sigma$, $T'_j S'_\varpi$ deux substitutions du groupe G_1 qui doivent être associées respectivement aux précédentes dans le groupe cherché H,

$$T_0 = S_0 = S'_0 = 1,$$

$$(i, j = 0, 1, 2, \ldots, D-1), \qquad (\rho, \pi = 0, 1, 2, \ldots, \mu-1),$$

$$(\sigma, \varpi = 0, 1, 2, \ldots, \nu-1).$$

Le groupe H devra contenir aussi les deux substitutions associées

$$T_i S_\rho T_j S_\pi, \quad T'_i S'_\sigma T'_j S'_\varpi.$$

Supposons en particulier $\sigma = \varpi = 0$; la seconde substitution se réduit à $T'_i T'_j$, c'est-à-dire à une substitution *déterminée* du groupe G_1, qui appartient par exemple à la $h^{\text{ième}}$ ligne. Il faudra donc que la substitution de G

$$T_i S_\rho T_j S_\pi$$

appartienne toujours à la même ligne, quels que soient les indices ρ et π, pourvu que i et j restent les mêmes. C'est en effet ce qui a lieu; le groupe g étant permutable aux substitutions de G, on a une relation de la forme

$$T_j^{-1} S_\rho T_j = S_{\rho'} \quad \text{ou} \quad S_\rho T_j = T_j S_{\rho'},$$

et la substitution précédente peut être remplacée par la substitution

$$T_i T_j S_{\rho'} S_\pi,$$

qui appartient à la même ligne que la substitution $T_i T_j$, quels que soient ρ et π.

Ainsi, quand on combine une substitution de G appartenant à la $i^{\text{ième}}$ ligne avec une substitution appartenant à la $j^{\text{ième}}$ ligne, la substitution résultante appartient à la $h^{\text{ième}}$, h étant un nombre entier qui dépend seulement des nombres i et j. Si, pour abréger, on représente par (i, j) le rang de la ligne à laquelle appartient la substitution $T_i T_j$, on aura D^2 relations de la forme

$$(i, j) = h. \tag{28}$$

Ce qui précède s'applique aussi au groupe G_1 : si l'on représente par $(i, j)_1$ le rang de la ligne à laquelle appartient la substitution $T'_i T'_j$, il faudra que l'on ait, pour tous les systèmes de valeurs de i et de j,

$$(i, j)_1 = (i, j). \tag{29}$$

En résumé, *pour avoir tous les groupes* H *que l'on peut former avec deux groupes d'ordre fini* G *et* G_1, *on commencera par déterminer deux sous-groupes distingués* g *et* g_1 *de même indice; les substitutions des groupes* G *et* G_1 *étant écrites comme plus haut, il faudra examiner si l'on* *peut faire correspondre ces lignes de façon que toutes les relations* (29) *soient vérifiées simultanément. S'il en est ainsi, on obtiendra un groupe* H *en associant de toutes les manières possibles les substitutions de* G *et de* G_1 *qui appartiennent à des lignes de même rang dans les deux Tableaux.*

12. On peut énoncer la règle précédente sous une forme un peu différente. Supposons que toutes les relations $(i, j)_1 = (i, j)$ soient vérifiées, et soit G_2 un groupe formé de D substitutions d'une nature quelconque

$$U_1, U_2, \ldots, U_D,$$

qui vérifient les D^2 relations analogues aux relations (28)

$$U_i U_j = U_h. \tag{28'}$$

Si un tel groupe G_2 existe, il sera isomorphe à la fois aux deux groupes G et G_1 ; en effet, faisons correspondre la substitution U_i aux μ substitutions de G de la $i^{\text{ième}}$ ligne, les relations (28) et (28′) établissent précisément l'isomorphisme. Or nous verrons plus loin que l'on peut toujours trouver un groupe G_2 de substitutions linéaires remplissant les conditions précédentes, quels que soient le groupe G et le sous-groupe distingué g.

Réciproquement, soit G_2 un groupe de substitutions linéaires isomorphe à la fois à G et à G_1 ; si l'on associe les substitutions de G et de G_1 qui correspondent à une même substitution de G_2, on vérifie immédiatement que l'on obtient de cette façon un groupe H. On est donc conduit à la règle suivante :

Pour former un groupe H *en associant les substitutions de deux groupes d'ordre fini* G *et* G_1, *on déterminera un groupe* G_2 *isomorphe à la fois à* G *et à* G_1, *puis on associera les substitutions de* G *et de* G_1 *qui correspondent à une même substitution de* G_2.

Remarquons que le groupe auxiliaire G_2 n'est pas complètement déterminé, mais peut être remplacé par tout autre groupe holoédriquement isomorphe à celui-là.

13. Il est nécessaire, pour continuer, de rappeler les principales propriétés des groupes d'ordre fini de substitutions linéaires non ho-

mogènes à une seule variable (¹). Suivant la méthode de Riemann, représentons la variable $z = \alpha + i\beta$ par le point (α, β) dans le plan des $\alpha\beta$; puis faisons la projection stéréographique de ce point sur la sphère de rayon 1 qui a son centre à l'origine, en prenant pour pôle le point de cette sphère situé sur la partie positive de l'axe $O\gamma$. La variable z représente le point ainsi obtenu. Toute substitution linéaire

$$\left(z;\quad \frac{az+b}{cz+d}\right),$$

que nous écrirons aussi

$$z' = \frac{az+b}{cz+d},$$

définit une rotation de la sphère autour d'un axe passant par son centre, pourvu qu'on puisse la mettre sous la forme

$$z' = \frac{az+b}{a_0 - b_0 z},$$

a_0 et b_0 étant les imaginaires conjuguées de a et de b. Si l'on considère le groupe des rotations qui font revenir sur lui-même un polyèdre régulier, les substitutions linéaires correspondantes formeront évidemment un groupe d'ordre fini. Inversement, tout groupe d'ordre fini de cette espèce est semblable à un des groupes ainsi obtenus, pourvu qu'on ajoute aux polyèdres réguliers la pyramide et la double pyramide régulière. Ces groupes peuvent ainsi être ramenés à cinq types distincts, dont nous allons rappeler les principales propriétés.

Groupe cyclique.

Le groupe cyclique se compose des m substitutions

$$z' = e^{\frac{2ik\pi}{m}} z \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, m-1);$$

il correspond à m rotations de $\frac{2\pi}{m}, \frac{4\pi}{m}, \ldots, \frac{2(m-1)\pi}{m}$, 2π autour d'un même axe. Toutes les substitutions de ce groupe étant échangeables,

(¹) *Voir* KLEIN, *Vorlesungen über das Ikosaeder*, Chap. I et II. Leipzig, 1884.

si μ est un diviseur de m, le sous-groupe g formé des μ substitutions

$$z' = e^{\frac{2ik'\pi}{\mu}} z \qquad (k' = 0, 1, 2, \ldots, \mu - 1)$$

sera distingué. Soit $m = D\mu$; désignons par p un nombre entier premier avec D. Soient S la substitution

$$z' = e^{\frac{2i\pi}{\mu}} z$$

et T la substitution

$$z' = e^{\frac{2ip\pi}{m}} z.$$

Les substitutions de G pourront être disposées suivant un Tableau rectangulaire de la façon suivante :

$$\left|\begin{array}{ccccc} 1 & S & S^2 & \ldots & S^{\mu-1} \\ T & TS & TS^2 & \ldots & TS^{\mu-1} \\ T^2 & T^2S & T^2S^2 & \ldots & T^2S^{\mu-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ T^{D-1} & T^{D-1}S & \ldots & \ldots & T^{D-1}S^{\mu-1} \end{array}\right|.$$

On aura ici, d'une manière générale,

$$(i, j) \equiv i + j \pmod{D}.$$

Introduisons maintenant le groupe cyclique G_2 d'ordre D formé des D substitutions

$$Z' = e^{\frac{2hi\pi}{D}} Z \qquad (h = 0, 1, 2, \ldots, D - 1);$$

si l'on fait correspondre la substitution qui précède à toutes les substitutions de la $h^{\text{ième}}$ ligne du Tableau de G, il est clair que G_2 sera isomorphe à G.

Groupe du dièdre.

Le groupe du dièdre est formé des $2m$ substitutions

$$z' = e^{\frac{2ki\pi}{m}} z, \qquad z' = \frac{e^{\frac{2ki\pi}{m}}}{z} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, m - 1).$$

Géométriquement, il correspond aux $2m$ rotations qui font revenir sur elle-même la double pyramide régulière; les m dernières substitutions correspondent à des rotations de 180° autour d'axes situés dans le plan de l'équateur. Un sous-groupe sera forcément un groupe de même espèce ou un groupe cyclique.

Soient encore $m = D\mu$ et p un nombre entier premier avec D. Le groupe d'ordre μ, composé des μ substitutions

$$z' = e^{\frac{2hi\pi}{\mu}} z \qquad (h = 0, 1, 2, \ldots, \mu - 1),$$

sera un sous-groupe distingué. Désignons par S, T, U les substitutions

$$z' = e^{\frac{2i\pi}{\mu}} z, \qquad z' = e^{\frac{2pi\pi}{m}} z, \qquad z' = \frac{1}{z};$$

les substitutions du groupe G pourront être disposées comme il suit :

$$\left|\begin{array}{lllll}
1 & S & S^2 & \ldots & S^{\mu-1} \\
T & TS & TS^2 & \ldots & TS^{\mu-1} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
T^{D-1} & T^{D-1}S & T^{D-1}S^2 & \ldots & T^{D-1}S^{\mu-1} \\
U & US & US^2 & \ldots & US^{\mu-1} \\
UT & UTS & UTS^2 & \ldots & UTS^{\mu-1} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
UT^{D-1} & UT^{D-1}S & \ldots & \ldots & UT^{D-1}S^{\mu-1}
\end{array}\right|.$$

Prenons maintenant le groupe G_2 formé des $2D$ substitutions

$$Z' = e^{\frac{2ki\pi}{D}} Z, \qquad Z' = \frac{e^{\frac{2ki\pi}{D}}}{Z} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots D - 1),$$

et faisons correspondre la substitution

$$Z' = e^{\frac{2ki\pi}{D}} Z$$

à la $(k+1)^{\text{ième}}$ ligne du Tableau de G, c'est-à-dire à toutes les substitutions de cette ligne, et de même la substitution

$$Z' = \frac{e^{\frac{2ki\pi}{D}}}{Z}$$

à toutes les substitutions de la $(D+k+1)^{\text{ième}}$ ligne du Tableau de G; on vérifie aisément que G_2 sera isomorphe à G. On pourra supposer $D=1$, à condition de prendre $p=0$.

Si m est pair et égal à $2n$, le groupe G admet un autre sous-groupe distingué d'indice 2. Désignons par S, T, U les trois substitutions

$$z' = e^{\frac{2i\pi}{n}} z, \qquad z' = e^{\frac{2i\pi}{2n}} z, \qquad z' = \frac{1}{z};$$

les substitutions du groupe G pourront être disposées comme il suit :

$$\left|\begin{matrix} 1, & S, & S^2, & \dots & S^{n-1}, & U, & US, & \dots & US^{n-1} \\ T, & TS, & TS^2, & \dots & TS^{n-1}, & TU, & TUS, & \dots & TUS^{n-1} \end{matrix}\right|.$$

Appelons encore G_2 le groupe des deux substitutions

$$Z' = Z, \qquad Z' = -Z;$$

ce groupe G_2 est évidemment isomorphe à G si l'on fait correspondre la substitution $Z'=Z$ à toutes les substitutions de la première ligne de G et $Z'=-Z$ à toutes les substitutions de la seconde ligne de G. Les seuls groupes isomorphes au groupe du dièdre sont donc des groupes de même espèce ou le groupe cyclique précédent.

Parmi les groupes du dièdre, il y a lieu de distinguer le groupe des quatre substitutions

$$z' = z, \quad -z, \quad \frac{1}{z}, \quad -\frac{1}{z},$$

appelé par les géomètres allemands *Vierergruppe*, qui admet trois sous-groupes distingués d'indice 2.

Groupe du tétraèdre.

Le groupe du tétraèdre est formé des douze substitutions

$$z' = \pm z, \quad \pm\frac{1}{z}, \quad \pm i\frac{z+1}{z-1}, \quad \pm i\frac{z-1}{z+1}, \quad \pm\frac{z+i}{z-i}, \quad \pm\frac{z-i}{z+i};$$

il correspond au groupe des rotations qui font revenir sur lui-même un tétraèdre régulier et admet par conséquent trois substitutions de période 2 et huit substitutions de période 3. Il contient un sous-groupe distingué d'indice 3, qui est précisément le *Vierergruppe*, et ses substitutions peuvent être rangées dans l'ordre suivant :

$$
\begin{array}{cccc}
z' = z, & -z, & \dfrac{1}{z}, & -\dfrac{1}{z}, \\[2mm]
i\dfrac{z+1}{z-1}, & i\dfrac{z-1}{z+1}, & i\dfrac{1+z}{1-z}, & i\dfrac{1-z}{1+z}, \\[2mm]
\dfrac{z+i}{z-i}, & \dfrac{z-i}{z+i}, & -\dfrac{z-i}{z+i}, & -\dfrac{z+i}{z-i}.
\end{array}
$$

Considérons le groupe G_2 d'ordre 3 formé des substitutions

$$Z' = Z, \quad e^{\frac{2i\pi}{3}} Z, \quad e^{\frac{4i\pi}{3}} Z,$$

et faisons correspondre ces trois substitutions aux substitutions du groupe G qui appartiennent respectivement à la première, à la deuxième et à la troisième ligne; on vérifie sans peine que G_2 sera isomorphe à G. D'ailleurs il n'y a pas d'autre groupe isomorphe au groupe du tétraèdre, abstraction faite de ce groupe lui-même et du groupe qui se réduit à la substitution identique.

Groupe de l'octaèdre.

Le groupe de l'octaèdre se compose des vingt-quatre substitutions

$$z' = i^k z, \quad \frac{i^k}{z}, \quad i^k\frac{z+1}{z-1}, \quad i^k\frac{z-1}{z+1}, \quad i^k\frac{z+i}{z-i}, \quad i^k\frac{z-i}{z+i} \qquad (k = 0, 1, 2, 3),$$

qui correspondent aux vingt-quatre rotations faisant revenir sur lui-même l'octaèdre régulier; il admet par conséquent neuf substitutions de période 2, huit substitutions de période 3, six substitutions de période 4. Il contient deux sous-groupes distingués : le groupe du tétraèdre et le *Vierergruppe*. On peut ranger les substitutions dans l'ordre suivant

$$
\begin{array}{cccccc}
z' = \pm z, & \pm\dfrac{1}{z}, & \pm i\dfrac{z+1}{z-1}, & \pm i\dfrac{z-1}{z+1}, & \pm\dfrac{z+i}{z-i}, & \pm\dfrac{z-i}{z+i}, \\[2mm]
\pm iz, & \pm\dfrac{i}{z}, & \pm\dfrac{z+1}{z-1}, & \pm\dfrac{z-1}{z+1}, & \pm i\dfrac{z+i}{z-i}, & \pm i\dfrac{z-i}{z+i},
\end{array}
$$

et l'on reconnaît que le groupe G_2 des deux substitutions

$$Z' = \pm Z$$

lui est isomorphe. On peut aussi écrire les substitutions du groupe dans l'ordre suivant :

$$\begin{array}{cccc}
z' = z, & -z, & \dfrac{1}{z}, & -\dfrac{1}{z}, \\[2mm]
i\dfrac{z+1}{z-1}, & i\dfrac{z-1}{z+1}, & i\dfrac{1+z}{1-z}, & i\dfrac{1-z}{1+z}, \\[2mm]
\dfrac{z+i}{z-i}, & \dfrac{z-i}{z+i}, & -\dfrac{z-i}{z+i}, & -\dfrac{z+i}{z-i}, \\[2mm]
iz, & -iz, & \dfrac{i}{z}, & -\dfrac{i}{z}, \\[2mm]
\dfrac{z+1}{z-1}, & \dfrac{z-1}{z+1}, & -\dfrac{z+1}{z-1}, & -\dfrac{z-1}{z+1}, \\[2mm]
i\dfrac{z+i}{z-i}, & i\dfrac{z-i}{z+i}, & -i\dfrac{z-i}{z+i}, & -i\dfrac{z+i}{z-i}.
\end{array}$$

Soit G'_1 le groupe des six substitutions

$$Z' = Z, \quad e^{\frac{2i\pi}{3}} Z, \quad e^{\frac{4i\pi}{3}} Z, \quad \frac{1}{Z}, \quad \frac{e^{\frac{2i\pi}{3}}}{Z}, \quad \frac{e^{\frac{4i\pi}{3}}}{Z};$$

faisons correspondre ces six substitutions aux substitutions du groupe de l'octaèdre qui figurent respectivement dans les première, deuxième, troisième, quatrième, cinquième, sixième lignes du Tableau précédent. On vérifie sans peine que G'_1 sera isomorphe à G.

Il n'y a pas d'autre groupe que G_2 et G'_1 isomorphe au groupe de l'octaèdre, en dehors de ce groupe lui-même et du groupe qui se réduit à la substitution identique.

Groupe de l'icosaèdre.

Le groupe de l'icosaèdre se compose des soixante substitutions

$$= \varepsilon^{\mu} z, \quad \frac{-\varepsilon^{4\mu}}{z}, \quad \varepsilon^{\nu}\frac{-(\varepsilon-\varepsilon^4)\varepsilon^{\mu} z + (\varepsilon^2-\varepsilon^3)}{(\varepsilon^2-\varepsilon^3)\varepsilon^{\mu} z + \varepsilon - \varepsilon^4}, \quad -\varepsilon^{4\nu}\frac{(\varepsilon^2-\varepsilon^3)\varepsilon^{\mu} z + (\varepsilon-\varepsilon^4)}{-(\varepsilon-\varepsilon^4)\varepsilon^{\mu} z + (\varepsilon^2-\varepsilon^3)},$$

$$\left(\varepsilon = e^{\frac{2i\pi}{5}}; \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3, 4\right),$$

qui correspondent aux soixante rotations faisant revenir sur lui-même l'icosaèdre régulier. Il admet, par conséquent, quinze substitutions de période 2, vingt substitutions de période 3, vingt-quatre substitutions de période 4. Le groupe de l'icosaèdre est un groupe simple.

14. Considérons maintenant deux de ces groupes d'ordre fini, G et G_1, distincts ou non, et proposons-nous de former tous les groupes H que l'on peut obtenir en combinant ces deux-là. Puisqu'on regarde comme identiques tous les groupes semblables, on peut évidemment supposer les deux groupes G et G_1 ramenés à la forme canonique. Nous examinerons successivement toutes les combinaisons possibles.

1° G et G_1 sont des groupes cycliques d'ordres m et n respectivement. On a vu que les seuls groupes isomorphes à un groupe cyclique d'ordre m sont les groupes cycliques dont l'ordre est un diviseur de m. Par conséquent, si m et n sont premiers entre eux, le seul groupe isomorphe à la fois à G et à G_1 se réduira à la substitution identique, et le groupe H sera un groupe complet d'ordre mn.

D'une manière générale, supposons que m et n admettent un diviseur commun D, $m=\mu D$, $n=\nu D$. Soit G_2 le groupe cyclique d'ordre D, isomorphe à la fois à G et à G_1. La substitution

$$z' = z e^{\frac{2ki\pi}{D}} \qquad (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ D-1)$$

de G_2 correspond, comme on l'a vu plus haut, aux μ substitutions de G

$$\eta' = \eta e^{\frac{2kpi\pi}{m}+\frac{2hi\pi}{\mu}} \qquad (h=0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ \mu-1)$$

et aux ν substitutions de G_1

$$\xi' = \xi e^{\frac{2kqi\pi}{n}+\frac{2h'i\pi}{\nu}} \qquad (h'=0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ \nu-1),$$

p et q étant deux nombres entiers premiers avec D. Le groupe H se composera donc des $D\mu\nu$ substitutions

$$\left[\eta,\ \xi;\ \eta e^{\frac{2kpi\pi}{m}+\frac{2hi\pi}{\mu}},\ \xi e^{\frac{2kqi\pi}{n}+\frac{2h'i\pi}{\nu}}\right].$$

Il est clair que l'on peut toujours supposer, sans restreindre la généralité, $p = 1$ et q inférieur à D. J'ajoute que l'on peut se borner à prendre pour q un nombre premier inférieur à $\frac{D}{2}$. Supposons, en effet, que ce nombre q soit compris entre $\frac{D}{2}$ et D. Le groupe H contiendra la substitution

$$\left[\eta, \xi; \eta e^{\frac{2i\pi}{m}}, \xi e^{\frac{2qi\pi}{n}}\right];$$

transformons ce groupe par la substitution

$$\left[\eta, \xi; \eta, \frac{1}{\xi}\right],$$

nous obtenons un nouveau groupe H_1 semblable au précédent et qui contiendra la substitution

$$\left[\eta, \xi; \eta e^{\frac{2i\pi}{m}}, \xi e^{-\frac{2qi\pi}{n}}\right].$$

Mais, si q est compris entre $\frac{D}{2}$ et D, $-q$ sera congru suivant le module D à un nombre compris entre o et $\frac{D}{2}$, et le groupe H_1 contiendra la substitution

$$\left[\eta, \xi; \eta e^{\frac{2i\pi}{m}}, \xi e^{\frac{2q_1 i\pi}{n}}\right],$$

q_1 étant compris entre o et $\frac{D}{2}$. Si donc on considère deux groupes semblables comme identiques, ainsi qu'il a été convenu, on voit qu'on peut se borner à prendre pour q les nombres premiers avec D inférieurs à $\frac{D}{2}$.

La méthode précédente est tout à fait générale. On peut supposer qu'un des nombres μ et ν se réduit à l'unité, ou que l'on a $\mu = \nu = 1$; on peut aussi supposer $D = 1$ et alors on prendra $p = q = 0$.

Exemple I. — Soit $m = n = 5$. On a deux groupes H d'ordre 5 formés, d'une part, des substitutions

$$[\eta, \xi; \varepsilon^{\mu}\eta, \varepsilon^{\mu}\xi]$$

et, d'autre part, des substitutions

$$[\eta, \xi; \varepsilon^{\mu}\eta, \varepsilon^{2\mu}\xi], \qquad \varepsilon = e^{\frac{2i\pi}{5}} \qquad (\mu = 0, 1, 2, 3, 4).$$

On aura ensuite un groupe complet d'ordre 25 composé des substitutions

$$[\eta, \xi; \varepsilon^{\mu}\eta, \varepsilon^{\nu}\xi], \qquad (\mu, \nu = 0, 1, 2, 3, 4).$$

Exemple II. — Soient $m = 6$, $n = 9$. On aura un groupe complet H d'ordre 54 et un groupe d'ordre 18. Le groupe complet se compose des substitutions

$$\left[\eta, \xi; \eta e^{\frac{2ki\pi}{9}}, \xi e^{\frac{2hi\pi}{6}}\right] \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, 8; \quad h = 0, 1, 2, \ldots, 5);$$

le groupe d'ordre 18 se compose des substitutions

$$\left[\eta, \xi; \eta e^{\frac{2ki\pi}{9}+\frac{2hi\pi}{3}}, \xi e^{\frac{2ki\pi}{6}+\frac{2h'i\pi}{2}}\right]$$
$$(k = 0, 1, 2; \quad h = 0, 1, 2; \quad h' = 0, 1).$$

2° G est un groupe cyclique d'ordre m et G_1 un groupe du dièdre d'ordre $2n$. Les seuls groupes cycliques isomorphes au groupe du dièdre sont d'ordre 1 ou 2. En associant les substitutions de G et de G_1, on aura d'abord un groupe complet, puis un nouveau groupe si m est pair et n impair, et un troisième groupe si m et n sont pairs tous les deux.

3° G est un groupe cyclique d'ordre m et G_1 est le groupe du tétraèdre. On aura d'abord un groupe complet H d'ordre $12m$. Si m est un multiple de 3, on aura en outre un groupe d'ordre $4m$.

4° G est un groupe cyclique d'ordre m, et G_1 est le groupe de l'octaèdre. On aura un groupe complet H d'ordre $24m$, et, si m est pair, un autre groupe d'ordre $12m$.

5° G est un groupe cyclique d'ordre m et G_1 est le groupe de l'icosaèdre. On aura un seul groupe complet H d'ordre $60m$.

6° G et G_1 sont deux groupes du dièdre d'ordres $2m$ et $2n$ respectivement. Nous examinerons d'abord la question suivante. Soient G', G'_1 deux groupes identiques dérivés des substitutions

$$\eta' = \eta e^{\frac{2i\pi}{m}}, \qquad \eta' = \frac{1}{\eta}; \qquad \xi' = \xi e^{\frac{2i\pi}{m}}, \qquad \xi' = \frac{1}{\xi};$$

proposons-nous de rechercher toutes les manières dont on peut faire correspondre les substitutions des deux groupes de façon qu'ils soient isomorphes. Si m est plus grand que 2, la substitution $\eta' = \frac{1}{\eta}$ de G' devra correspondre à une substitution de G'_1 de période 2, et, en remplaçant le groupe G'_1 par un groupe semblable, on pourra supposer qu'elle correspond à la substitution $\xi' = \frac{1}{\xi}\cdot$ A la substitution

$$\eta' = \eta e^{\frac{2i\pi}{m}}$$

de G' devra correspondre une substitution de G'_1 de la forme

$$\xi' = \xi e^{\frac{2qi\pi}{m}},$$

q étant premier avec m. La correspondance entre les substitutions de G' et de G'_1 sera complètement déterminée et l'on vérifie sans difficulté que ces deux groupes seront isomorphes. On verra, comme plus haut, qu'on peut prendre pour q un nombre inférieur à $\frac{m}{2}\cdot$

Si $m = 2$, on pourra toujours faire correspondre les substitutions $\eta' = -\eta$ et $\xi' = -\xi$; mais on pourrait supposer que la substitution $\eta' = \frac{1}{\eta}$ correspond à $\xi' = -\frac{1}{\xi}\cdot$ En transformant le groupe G'_1 au moyen de la substitution $\xi' = i\xi$, on voit qu'on ramènera les substitutions correspondantes des deux groupes à être identiques.

Revenons maintenant aux deux groupes G et G_1 et soit $m = D\mu$, $n = D\nu$. Appelons g le sous-groupe distingué de G dérivé de la substitution

$$\eta' = \eta e^{\frac{2i\pi}{\mu}}$$

et g_1 le sous-groupe distingué de G_1 dérivé de la substitution

$$\xi' = \xi e^{\frac{2i\pi}{\nu}}.$$

Le groupe auxiliaire du dièdre G_2 d'ordre $2D$ sera isomorphe à la fois à G et à G_1; pour achever de former le groupe H, nous ferons correspondre les deux substitutions

$$\eta' = \frac{1}{\eta}, \qquad \xi' = \frac{1}{\xi}$$

et

$$\eta' = \eta e^{\frac{2i\pi}{m}}, \qquad \xi' = \xi e^{\frac{2qi\pi}{m}},$$

q étant un nombre premier avec m, que l'on peut supposer inférieur à $\frac{m}{2}$.

Le groupe cyclique d'ordre 2 est toujours isomorphe au groupe du dièdre et il peut l'être de deux façons différentes si l'ordre de ce dernier groupe est pair. Si donc un seul des nombres m et n est pair, on aura un nouveau groupe H ; si m et n sont pairs, on aura deux nouveaux groupes.

7° G est un groupe du dièdre d'ordre $2m$ et G_1 est le groupe du tétraèdre. Il n'existe aucun groupe isomorphe à la fois à G et à G_1, sauf celui qui se réduit à la substitution identique. On aura donc un seul groupe complet H d'ordre $24m$.

8° G est un groupe du dièdre d'ordre $2m$ et G_1 est le groupe de l'octaèdre. On aura d'abord un groupe complet H d'ordre $48m$, mais on pourra avoir aussi trois autres groupes. On sait en effet que le groupe cyclique d'ordre 2 est isomorphe à la fois au groupe G_1 et au groupe G, et, si m est pair, il l'est de deux façons différentes au groupe G. Si m est un multiple de 3, le groupe du dièdre d'ordre 6 sera également isomorphe aux deux groupes G et G_1 et fournira un nouveau groupe H.

9° Le groupe G est un groupe du dièdre d'ordre $2m$ et G_1 est le groupe de l'icosaèdre. On aura un seul groupe complet H d'ordre $120m$.

10° Les groupes G et G_1 sont identiques au groupe du tétraèdre. Si l'on fait correspondre deux substitutions quelconques de période 2 des deux groupes, ainsi que deux substitutions quelconques de période 3, ces deux groupes seront isomorphes, mais tous les groupes H ainsi obtenus seront semblables. En effet, on peut toujours choisir la variable ξ de façon que les substitutions $\eta' = -\eta$, $\xi' = -\xi$ se correspondent. A la substitution

$$\eta' = i\frac{\eta+1}{\eta-1}$$

de G correspondra une des huit substitutions

$$\begin{gathered}\xi' = i\frac{\xi+1}{\xi-1}, \quad i\frac{\xi-1}{\xi+1}, \quad i\frac{1+\xi}{1-\xi}, \quad i\frac{1-\xi}{1+\xi},\\ \frac{\xi+i}{\xi-i}, \quad \frac{\xi-i}{\xi+i}, \quad -\frac{\xi-i}{\xi+i}, \quad -\frac{\xi+i}{\xi-i};\end{gathered}$$

si c'est une substitution de la seconde ligne, on transformera le groupe G_1 par la substitution $\xi' = i\xi$, et l'on aura une substitution de la première ligne qu'on pourra ramener à son tour à la substitution

$$\xi' = i\frac{\xi + 1}{\xi - 1},$$

en transformant le groupe G_1 au moyen d'une des substitutions

$$\xi' = \xi, \quad -\xi, \quad \frac{1}{\xi}, \quad -\frac{1}{\xi}.$$

En définitive, on aura un seul groupe H d'ordre 12, obtenu en associant les substitutions identiques de G et de G_1. On aura, en outre, un groupe complet d'ordre 144 et un groupe d'ordre 48, fourni par le groupe cyclique d'ordre 3 isomorphe à la fois à G et à G_1.

11° G est le groupe du tétraèdre et G_1 le groupe de l'octaèdre. On a un seul groupe complet H d'ordre 288.

12° G est le groupe du tétraèdre et G_1 le groupe de l'icosaèdre. On a un seul groupe complet d'ordre 720.

13° G et G_1 sont identiques au groupe de l'octaèdre. Nous avons encore à rechercher si ces deux groupes peuvent être isomorphes de plusieurs façons différentes. On démontrera, comme pour le tétraèdre, que l'on peut toujours faire correspondre les substitutions

$$\eta' = -\eta, \qquad \xi' = -\xi \qquad \text{et} \qquad \eta' = i\frac{\eta + 1}{\eta - 1}, \qquad \xi' = i\frac{\xi + 1}{\xi - 1};$$

à la substitution $\eta' = i\eta$ de G correspondra une des deux substitutions $\xi' = i\xi$, $\xi' = -i\xi$ de G_1. Si c'était la dernière, les deux substitutions

$$\eta' = \frac{1 + \eta}{1 - \eta}, \qquad \xi' = \frac{\xi + 1}{\xi - 1}$$

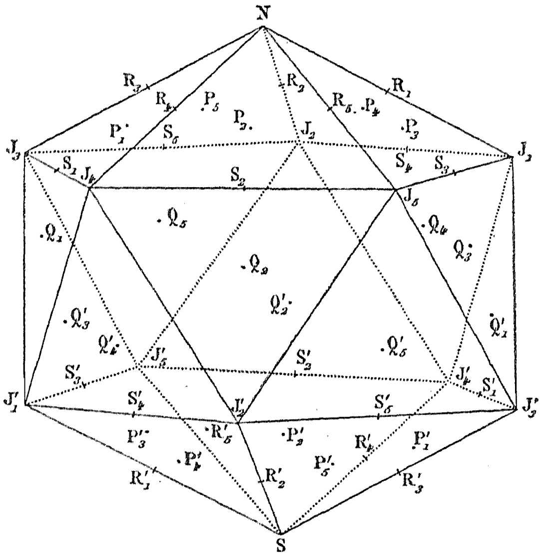
devraient se correspondre, ce qui est impossible, car l'une est de période 4 et la seconde de période 2. On aura donc un seul groupe H d'ordre 24, obtenu en associant les substitutions identiques de G et de G_1.

Le groupe cyclique d'ordre 2 et le groupe du dièdre d'ordre 6, qui sont isomorphes à la fois à G et G_1, fournissent deux autres groupes H d'ordres 288 et 96 respectivement. Enfin, on aura un groupe complet d'ordre 576.

14° G est le groupe de l'octaèdre et G_1 le groupe de l'icosaèdre. On a un seul groupe complet H d'ordre 1440.

15° G et G_1 sont identiques au groupe de l'icosaèdre. On aperçoit tout d'abord deux groupes H, le groupe complet d'ordre 3600 et le groupe d'ordre 60 obtenu en associant les substitutions identiques des deux groupes. Pour savoir s'il existe d'autres groupes, il nous faut rechercher toutes les manières d'associer les substitutions de G et de G_1

Fig. 2.



une à une, de façon que ces deux groupes soient isomorphes. Cette question, qui n'offre d'ailleurs aucune difficulté, se trouve traitée dans un travail de M. Fischer (¹). On trouve ainsi un nouveau groupe H d'ordre 60 et la correspondance entre les substitutions de G et de G_1, ou plutôt entre les rotations qu'elles représentent, est donnée par le Tableau suivant.

(¹) Fischer, *Konforme Abbildung sphärischer dreiecke auf einander mittelst algebraischer Functionen*. Leipzig, 1885.

G.		G₁.	
Axe.	Angle.	Axe.	Angle.
NS	$\frac{\pi}{5}$	NS	$\frac{2\pi}{5}$
$J_kJ'_k$	$\frac{\pi}{5}$	$J_{2k-1}J'_{2k-1}$	$\frac{3\pi}{5}$
$P_kP'_k$	$\frac{\pi}{3}$	$Q_{2k-1}Q'_{2k-1}$	$\frac{\pi}{3}$
$Q_kQ'_k$	$\frac{\pi}{3}$	$P_{2k-1}P'_{2k-1}$	$\frac{2\pi}{3}$
$R_kR'_k$	$\frac{\pi}{2}$	$S_{2k-1}S'_{2k-1}$	$\frac{\pi}{2}$
$S_kS'_k$	$\frac{\pi}{2}$	$R_{2k-1}R'_{2k-1}$	$\frac{\pi}{2}$
$T_kT'_k$	$\frac{\pi}{2}$	$T_{2k-1}T'_{2k-1}$	$\frac{\pi}{2}$

Analytiquement, la correspondance entre les substitutions des deux groupes est complètement définie si l'on associe les deux couples de substitutions

$$\eta' = \varepsilon\eta, \qquad \xi' = \varepsilon^2\xi;$$

$$\eta' = \frac{-(\varepsilon-\varepsilon^4)\eta+\varepsilon^2-\varepsilon^3}{(\varepsilon^2-\varepsilon^3)\eta+\varepsilon-\varepsilon^4}, \qquad \xi' = \frac{(\varepsilon^2-\varepsilon^3)\eta+(\varepsilon-\varepsilon^4)}{(\varepsilon-\varepsilon^4)\eta-(\varepsilon^2-\varepsilon^3)}.$$

15. Nous pouvons maintenant énumérer tous les types auxquels se ramènent tous les groupes H d'ordre fini.

I. Groupe composé des $D\mu\nu$ substitutions :

$$\left[\eta,\ \xi;\ \eta e^{\frac{2ki\pi}{m}+\frac{2hi\pi}{\mu}},\ \xi e^{\frac{2kqi\pi}{n}+\frac{2h'i\pi}{\nu}}\right]$$

$$(k = 0, 1, 2, \ldots, D-1;\quad h = 0, 1, 2, \ldots, \mu-1;\quad h' = 0, 1, 2, \ldots, \nu-1),$$

où $m = D\mu$, $n = D\nu$, q désignant un nombre entier premier avec D, que l'on peut supposer non supérieur à $\frac{D}{2}$. Si $D = 1$, $m = \mu$, $n = \nu$, le groupe est un groupe complet d'ordre mn.

II. Groupe complet formé des $2mn$ substitutions :

$$\left[\eta,\ \xi;\ \eta e^{\frac{2ki\pi}{m}},\ \xi e^{\frac{2hi\pi}{n}}\right], \quad \left[\eta,\ \xi;\ \eta e^{\frac{2ki\pi}{m}},\ \frac{e^{\frac{2hi\pi}{n}}}{\xi}\right]$$

$$(k = 0, 1, 2, \ldots, m-1;\quad h = 0, 1, 2, \ldots, n-1).$$

III. Groupe formé de mn substitutions :

$$\left[\eta,\ \xi;\ \eta e^{\frac{4ki\pi}{m}},\ \xi e^{\frac{2hi\pi}{n}}\right],\quad \left[\eta,\ \xi;\ \eta e^{\frac{2(2k+1)i\pi}{m}},\ \frac{e^{\frac{2hi\pi}{n}}}{\xi}\right]$$

$$(m=2\mu;\quad k=0,1,2,\ldots,\mu-1;\quad h=0,1,2,\ldots,n-1).$$

IV. Groupe formé de $4\mu\nu$ substitutions :

$$\left[\eta,\ \xi;\ \eta e^{\frac{2ki\pi}{\mu}},\ \xi e^{\frac{2hi\pi}{\nu}}\right],\qquad \left[\eta,\ \xi;\ \eta e^{\frac{2ki\pi}{\mu}},\ \frac{e^{\frac{2hi\pi}{\nu}}}{\xi}\right],$$

$$\left[\eta,\ \xi;\ \eta e^{\frac{(2k+1)i\pi}{\mu}},\ \xi e^{\frac{(2h+1)i\pi}{\nu}}\right],\quad \left[\eta,\ \xi;\ \eta e^{\frac{(2k+1)i\pi}{\mu}},\ \frac{e^{\frac{(2h+1)i\pi}{\nu}}}{\xi}\right]$$

$$(k=0,1,2,\ldots,\mu-1;\quad h=0,1,2,\ldots,\nu-1).$$

V. Groupe complet de $12m$ substitutions :

$$\left[\eta,\ \xi;\ \eta e^{\frac{2ik\pi}{m}},\ \varphi(\xi)\right]\quad (k=0,1,2,\ldots,m-1),$$

où $[\xi;\ \varphi(\xi)]$ est une quelconque des 12 substitutions du groupe du tétraèdre.

VI. Groupe composé de $4m$ substitutions :

$$\left[\eta,\ \xi;\ \eta e^{\frac{6ki\pi}{m}},\ \varphi(\xi)\right],\quad \left[\eta,\ \xi;\ \eta e^{\frac{(6k+2)i\pi}{m}},\ i\frac{\varphi(\xi)+1}{\varphi(\xi)-1}\right],$$

$$\left[\eta,\ \xi;\ \eta e^{\frac{(6k+4)i\pi}{m}},\ \frac{\varphi(\xi)+i}{\varphi(\xi)-i}\right]$$

$$m=3\mu\quad (k=0,1,2,\ldots,\mu-1),$$

où $[\xi;\ \varphi(\xi)]$ désigne une des quatre substitutions $[\xi;\ \xi]$, $[\xi;\ -\xi]$, $\left[\xi;\ \frac{1}{\xi}\right]$, $\left[\xi;\ -\frac{1}{\xi}\right]$.

VII. Groupe complet de $24m$ substitutions :

$$\left[\eta,\ \xi;\ \eta e^{\frac{2ki\pi}{m}},\ \varphi(\xi)\right]\quad (k=0,1,2,\ldots,m-1),$$

où $[\xi;\ \varphi(\xi)]$ est une quelconque des substitutions du groupe de l'octaèdre.

VIII. Groupe composé de $12m$ substitutions :

$$\left[\eta,\ \xi;\ \eta e^{\frac{4ki\pi}{m}},\ \varphi(\xi)\right],\quad \left[\eta,\ \xi;\ \eta e^{\frac{(4k+2)i\pi}{m}},\ i\varphi(\xi)\right]$$
$$m = 2\mu \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, \mu - 1),$$

$[\xi;\ \varphi(\xi)]$ désignant une quelconque des substitutions du groupe du tétraèdre.

IX. Groupe complet de $60m$ substitutions :

$$\left[\eta,\ \xi;\ \eta e^{\frac{2ki\pi}{m}},\ \varphi(\xi)\right] \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, m - 1),$$

$[\xi;\ \varphi(\xi)]$ étant une quelconque des substitutions du groupe de l'icosaèdre.

X. Groupe complet de $4mn$ substitutions :

$$\left[\eta,\ \xi;\ \eta e^{\frac{2ik\pi}{m}},\ \xi e^{\frac{2ih\pi}{n}}\right],\quad \left[\eta,\ \xi;\ \eta e^{\frac{2ik\pi}{m}},\ \frac{e^{\frac{2ih\pi}{n}}}{\xi}\right],$$
$$\left[\eta,\ \xi;\ \frac{e^{\frac{2ik\pi}{m}}}{\eta},\ \xi e^{\frac{2hi\pi}{n}}\right],\quad \left[\eta,\ \xi;\ \frac{e^{\frac{2ik\pi}{m}}}{\eta},\ \frac{e^{\frac{2ih\pi}{n}}}{\xi}\right]$$
$$(k = 0, 1, 2, \ldots, m - 1;\ h = 0, 1, 2, \ldots, n - 1).$$

XI. Groupe composé de $2D\mu\nu$ substitutions

$$\left[\eta,\ \xi;\ \eta e^{\frac{2ki\pi}{m}+\frac{2hi\pi}{\mu}},\ \xi e^{\frac{2kqi\pi}{m}+\frac{2h'i\pi}{\nu}}\right],\quad \left[\eta,\ \xi;\ \frac{e^{\frac{2ki\pi}{m}+\frac{2hi\pi}{\mu}}}{\eta},\ \frac{e^{\frac{2kqi\pi}{m}+\frac{2h'i\pi}{\nu}}}{\xi}\right],$$
$$m = D\mu, \qquad n = D\nu,$$
$$(k = 0, 1, 2, \ldots, D - 1;\ h = 0, 1, 2, \ldots, \mu - 1;\ h' = 0, 1, 2, \ldots, \nu - 1),$$

q étant un nombre premier avec D, que l'on peut supposer non supérieur à $\frac{D}{2}$.

XII. Groupe composé de $2mn$ substitutions

$$\left[\eta,\ \xi;\ \eta e^{\frac{2ik\pi}{m}},\ \xi e^{\frac{4hi\pi}{n}}\right],\qquad \left[\eta,\ \xi;\ \eta e^{\frac{2ki\pi}{m}},\ \frac{e^{\frac{4hi\pi}{n}}}{\xi}\right],$$
$$\left[\eta,\ \xi;\ \frac{e^{\frac{2ik\pi}{m}}}{\eta},\ \xi e^{\frac{(4h+2)i\pi}{n}}\right],\quad \left[\eta,\ \xi;\ \frac{e^{\frac{2ki\pi}{m}}}{\eta},\ \frac{e^{\frac{(4h+2)i\pi}{n}}}{\xi}\right],$$
$$n = 2\nu, \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, m - 1;\ h = 0, 1, 2, \ldots, \nu - 1).$$

XIII. Groupe composé de $2mn$ substitutions :

$$\left[\eta,\ \xi;\ \eta e^{\frac{4ki\pi}{m}},\ \xi e^{\frac{4hi\pi}{n}}\right],\quad \left[\eta,\ \xi;\ \eta e^{\frac{4ki\pi}{m}},\ \frac{e^{\frac{4hi\pi}{n}}}{\xi}\right],\quad \left[\eta,\ \xi;\ \frac{e^{\frac{4ki\pi}{m}}}{\eta},\ \xi e^{\frac{4hi\pi}{n}}\right],$$

$$\left[\eta,\ \xi;\ \frac{e^{\frac{4ki\pi}{m}}}{\eta},\ \frac{e^{\frac{4hi\pi}{n}}}{\xi}\right],\quad \left[\eta,\ \xi;\ \eta e^{\frac{(4k+2)i\pi}{m}},\ \xi e^{\frac{(4h+2)i\pi}{n}}\right],\quad \left[\eta,\ \xi;\ \eta e^{\frac{(4k+2)i\pi}{m}},\ \frac{e^{\frac{(4h+2)i\pi}{n}}}{\xi}\right],$$

$$\left[\eta,\ \xi;\ \frac{e^{\frac{(4k+2)i\pi}{m}}}{\eta},\ \xi e^{\frac{(4h+2)i\pi}{n}}\right],\quad \left[\eta,\ \xi;\ \frac{e^{\frac{(4k+2)i\pi}{m}}}{\eta},\ \frac{e^{\frac{(4h+2)i\pi}{n}}}{\xi}\right]$$

$$m=2\mu,\quad n=2\nu,\quad (k=0,1,2,\ldots,\mu-1;\ h=0,1,2,\ldots,\nu-1).$$

XIV. Groupe complet de $24m$ substitutions :

$$\left[\eta,\ \xi;\ \eta e^{\frac{2ki\pi}{m}},\ \varphi(\xi)\right],\quad \left[\eta,\ \xi;\ \frac{e^{\frac{2ki\pi}{m}}}{\eta},\ \varphi(\xi)\right]\quad (k=0,1,2,\ldots,m-1),$$

$[\xi;\ \varphi(\xi)]$ étant une quelconque des substitutions du groupe du tétraèdre.

XV. Groupe complet de $48m$ substitutions :

$$\left[\eta,\ \xi;\ \eta e^{\frac{2ki\pi}{m}},\ \varphi(\xi)\right],\quad \left[\eta,\ \xi;\ \frac{e^{\frac{2ki\pi}{m}}}{\eta},\ \varphi(\xi)\right]\quad (k=0,1,2,\ldots,m-1),$$

$[\xi;\ \varphi(\xi)]$ étant une quelconque des substitutions du groupe de l'octaèdre.

XVI. Groupe composé de $24m$ substitutions :

$$\left[\eta,\ \xi;\ \eta e^{\frac{2ki\pi}{m}},\ \varphi(\xi)\right],\quad \left[\eta,\ \xi;\ \frac{e^{\frac{2ki\pi}{m}}}{\eta},\ i\varphi(\xi)\right]\quad (k=0,1,2,\ldots,m-1),$$

$[\xi;\ \varphi(\xi)]$ étant une des substitutions du groupe du tétraèdre.

XVII. Groupe composé de $24m$ substitutions :

$$\left[\eta,\ \xi;\ \eta e^{\frac{4ki\pi}{m}},\ \varphi(\xi)\right],\qquad \left[\eta,\ \xi;\ \frac{e^{\frac{4ki\pi}{m}}}{\eta},\ \varphi(\xi)\right],$$

$$\left[\eta,\ \xi;\ \eta e^{\frac{(4k+2)i\pi}{m}},\ i\varphi(\xi)\right],\quad \left[\eta,\ \xi;\ \frac{e^{\frac{(4k+2)i\pi}{m}}}{\eta},\ i\varphi(\xi)\right]$$

$$m = 2\mu \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, \mu - 1),$$

$[\xi;\ \varphi(\xi)]$ étant une des substitutions du groupe du tétraèdre.

XVIII. Groupe composé de $8m$ substitutions :

$$\left[\eta,\ \xi;\ \eta e^{\frac{6ki\pi}{m}},\ \varphi(\xi)\right],\quad \left[\eta,\ \xi;\ \eta e^{\frac{(6k+2)i\pi}{m}},\ i\frac{\varphi(\xi)+1}{\varphi(\xi)-1}\right],\quad \left[\eta,\ \xi;\ \eta e^{\frac{(6k+4)i\pi}{m}},\ \frac{\varphi(\xi)+i}{\varphi(\xi)-i}\right],$$

$$\left[\eta,\ \xi;\ \frac{e^{\frac{3ki\pi}{m}}}{\eta},\ i\varphi(\xi)\right],\quad \left[\eta,\ \xi;\ \frac{e^{\frac{(6k+2)i\pi}{m}}}{\eta},\ \frac{\varphi(\xi)+1}{\varphi(\xi)-1}\right],\quad \left[\eta,\ \xi;\ \frac{e^{\frac{(6k+4)i\pi}{m}}}{\eta},\ i\frac{\varphi(\xi)+i}{\varphi(\xi)-i}\right]$$

$$m = 3\mu \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, \mu - 1),$$

$[\xi;\ \varphi(\xi)]$ étant une des quatre substitutions $[\xi;\ \xi]$, $[\xi;\ -\xi]$, $\left[\xi;\ \frac{1}{\xi}\right]$, $\left[\xi,\ -\frac{1}{\xi}\right]$.

XIX. Groupe complet d'ordre $120m$:

$$\left[\eta,\ \xi;\ \eta e^{\frac{2ki\pi}{m}},\ \varphi(\xi)\right],\quad \left[\eta,\ \xi;\ \frac{e^{\frac{2ki\pi}{m}}}{\eta},\ \varphi(\xi)\right] \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, m - 1),$$

$[\xi;\ \varphi(\xi)]$ étant une quelconque des substitutions du groupe de l'icosaèdre.

XX. Groupe complet de 144 substitutions :

$$[\eta,\ \xi;\ f(\eta),\ \varphi(\xi)],$$

où l'on désigne par $[z;\ f(z)]$, $[z;\ \varphi(z)]$ deux substitutions quelconques du groupe du tétraèdre.

XXI. Groupe composé de 12 substitutions :

$$[\eta,\ \xi;\ f(\eta),\ f(\xi)],$$

$[z;\ f(z)]$ étant une des douze substitutions du groupe du tétraèdre.

XXII. Groupe composé de 48 substitutions :

$$[\eta, \xi; f(\eta), \varphi(\xi)], \quad \left[\eta, \xi; i\frac{f(\eta)+1}{f(\eta)-1}, i\frac{\varphi(\xi)+1}{\varphi(\xi)-1}\right], \quad \left[\eta, \xi; \frac{f(\eta)+i}{f(\eta)-i}, \frac{\varphi(\xi)+i}{\varphi(\xi)-i}\right],$$

$[z; f(z)]$, $[z; \varphi(z)]$ désignant deux quelconques des substitutions

$$[z; z], \quad [z; -z], \quad \left[z; \frac{1}{z}\right], \quad \left[z; -\frac{1}{z}\right].$$

XXIII. Groupe complet de 288 substitutions :

$$[\eta, \xi; f(\eta), \varphi(\xi)],$$

$[z; f(z)]$ étant une substitution quelconque du groupe du tétraèdre et $[z; \varphi(z)]$ une substitution quelconque du groupe de l'octaèdre.

XXIV. Groupe complet de 720 substitutions :

$$[\eta, \xi; f(\eta), \varphi(\xi)],$$

$[z; f(z)]$ et $[z; \varphi(z)]$ étant respectivement deux substitutions quelconques du groupe du tétraèdre et du groupe de l'icosaèdre.

XXV. Groupe complet de 576 substitutions :

$$[\eta, \xi; f(\eta), \varphi(\xi)],$$

$[z; f(z)]$ et $[z; \varphi(z)]$ étant deux substitutions quelconques du groupe de l'octaèdre.

XXVI. Groupe de 24 substitutions :

$$[\eta, \xi; f(\eta), f(\xi)],$$

$[z; f(z)]$ étant une substitution quelconque du groupe de l'octaèdre.

XXVII. Groupe de 96 substitutions :

$$[\eta, \xi; f(\eta), \varphi(\xi)], \quad \left[\eta, \xi; i\frac{f(\eta)+1}{f(\eta)-1}, i\frac{\varphi(\xi)+1}{\varphi(\xi)-1}\right], \quad \left[\eta, \xi; \frac{f(\eta)+i}{f(\eta)-i}, \frac{\varphi(\xi)+i}{\varphi(\xi)-i}\right],$$

$$[\eta, \xi; if(\eta), i\varphi(\xi)], \quad \left[\eta, \xi; \frac{f(\eta)+1}{f(\eta)-1}, \frac{\varphi(\xi)+1}{\varphi(\xi)-1}\right], \quad \left[\eta, \xi; i\frac{f(\eta)+i}{f(\eta)-i}, i\frac{\varphi(\xi)+i}{\varphi(\xi)-i}\right],$$

$[z; f(z)]$ et $[z; \varphi(z)]$ désignant deux quelconques des substitutions

$$[z; z], \quad [z; -z], \quad \left[z; \frac{1}{z}\right], \quad \left[z; -\frac{1}{z}\right].$$

XXVIII. Groupe composé de 288 substitutions :

$$[\eta,\ \xi;\ f(\eta),\ \varphi(\xi)],\quad [\eta,\ \xi;\ if(\eta),\ i\varphi(\xi)],$$

$[z; f(z)]$ et $[z; \varphi(z)]$ désignant deux substitutions quelconques du groupe du tétraèdre.

XXIX. Groupe complet de 1440 substitutions :

$$[\eta,\ \xi;\ f(\eta),\ \varphi(\xi)],$$

$[z; f(z)]$ et $[z; \varphi(z)]$ étant respectivement deux substitutions quelconques du groupe de l'octaèdre et du groupe de l'icosaèdre.

XXX. Groupe complet de 3600 substitutions :

$$[\eta,\ \xi;\ f(\eta),\ \varphi(\xi)],$$

$[z; f(z)]$ et $[z; \varphi(z)]$ désignant deux substitutions quelconques du groupe de l'icosaèdre.

XXXI. Groupe composé de 60 substitutions :

$$[\eta,\ \xi;\ f(\eta),\ f(\xi)],$$

$[z; f(z)]$ désignant une quelconque des substitutions du groupe de l'icosaèdre.

XXXII. Groupe composé de 60 substitutions :

$$[\eta,\ \xi;\ f_i(\eta),\ f_j(\xi)];$$

$[\eta; f_i(\eta)]$ et $[\xi; f_j(\xi)]$ désignent deux substitutions du groupe de l'icosaèdre qui se correspondent d'après le Tableau donné à la page 62.

16. Considérons maintenant un groupe d'ordre fini K, contenant à la fois des substitutions de la forme (A) et des substitutions de la forme (B), et soit H le sous-groupe de K formé par les substitutions de la forme (A). Ce groupe H sera obtenu, comme nous venons de le voir, en associant d'une certaine manière les substitutions

$$[\eta;\ f_i(\eta)],\quad [\xi;\ \varphi_i(\xi)]$$

de deux groupes d'ordre fini G, G_1 de substitutions linéaires à une seule variable. Nous représenterons par

$$[\eta,\ \xi;\ f_i(\eta),\ \varphi_i(\xi)]\quad (i = 1, 2, \ldots, M)$$

une substitution quelconque de H. Soit

$$[\eta,\ \xi;\ \pi(\xi),\ \psi(\eta)]$$

une substitution quelconque de K de la forme (B); ce groupe devra contenir la substitution

$$[\eta,\ \xi;\ \pi(\varphi_i(\pi^{-1}(\eta))),\ \psi(f_i(\psi^{-1}(\xi)))],$$

de sorte que le groupe G devra contenir la substitution

$$[\eta;\ \pi(\varphi_i(\pi^{-1}(\eta)))],$$

et le groupe G_1 la substitution

$$[\xi;\ \psi(f_i(\psi^{-1}(\xi)))],$$

c'est-à-dire que les deux groupes G et G_1 seront *semblables*. On peut aller plus loin; si l'on suppose, par exemple, $f_i(\eta)=\eta$, on voit que le sous-groupe g doit contenir la substitution

$$[\eta;\ \pi(\varphi_i(\pi^{-1}(\eta)))].$$

De même, si l'on suppose $\varphi_i(\xi)=\xi$, le sous-groupe g_1 doit contenir la substitution

$$[\xi;\ \psi(f_i(\psi^{-1}(\xi)))],$$

ce qui nous montre que les sous-groupes g et g_1 doivent aussi être *semblables*. Il résulte déjà de ces propriétés que le groupe H ne pourra pas être pris arbitrairement parmi les groupes que nous avons obtenus. Supposons que l'on ait choisi un groupe H satisfaisant à ces conditions; soit

$$[\eta,\ \xi;\ \Phi(\xi),\ \Psi(\eta)]$$

une substitution de K de la forme (B). Les substitutions

$$[\eta,\ \xi;\ \psi^{-1}(\xi),\ \pi^{-1}(\eta)]$$
$$[\eta,\ \xi;\ \Phi(\pi^{-1}(\eta)),\ \Psi(\psi^{-1}(\xi))]$$

devront appartenir au même groupe, et la dernière devra faire partie du groupe H, de sorte que la substitution proposée pourra s'écrire

$$[\eta,\ \xi;\ f_i(\pi(\xi)),\ \varphi_i(\psi(\eta))].$$

On est donc ramené au problème suivant : *Étant donné un groupe* H *d'ordre* M, *dans quels cas les* 2 M *substitutions*

$$[\eta, \xi; f_i(\eta), \varphi_i(\xi)], \quad [\eta, \xi; f_i(\pi(\xi)), \varphi_i(\psi(\eta))], \quad (i=1, 2, \ldots, \mathrm{M})$$

forment-elles un groupe? Remarquons qu'on peut supposer $\pi(\xi)=\xi$; on n'a en effet qu'à transformer le groupe précédent au moyen de la substitution $[\eta, \xi; \eta, \pi(\xi)]$, et l'on est conduit à rechercher les groupes formés de 2M substitutions, telles que

$$[\eta, \xi; f_i(\eta), \varphi_i(\xi)], \quad [\eta, \xi; f_i(\xi), \varphi_i(\psi(\eta))], \quad (i=1, 2, \ldots, \mathrm{M}).$$

Soit Σ un système de 2M substitutions de cette forme; si ce système forme un groupe, il contiendra la substitution

$$[\eta, \xi; \varphi_i(\psi(\eta)), \psi(f_i(\xi))],$$

qui résulte de la combinaison des trois substitutions

$$[\eta, \xi; \xi, \psi(\eta)], \quad [\eta, \xi; f_i(\eta), \varphi_i(\xi)], \quad [\eta, \xi; \xi, \psi(\eta)].$$

Par conséquent, *si le groupe* H *contient la substitution*

$$[\eta, \xi; f_i(\eta), \varphi_i(\xi)],$$

il doit contenir aussi la substitution

$$[\eta, \xi; \varphi_i(\psi(\eta)), \psi(f_i(\xi))].$$

Réciproquement, si cette condition est remplie, les 2M substitutions de Σ forment un groupe. Pour le prouver, nous allons montrer que le produit de deux substitutions quelconques de ce système appartient encore à ce système. Il en est évidemment ainsi si l'on prend deux substitutions de la forme (A), puisque, par hypothèse, ces substitutions forment un groupe.

1° Prenons maintenant les deux substitutions

$$[\eta, \xi; f_i(\xi), \varphi_i(\psi(\eta))], \quad [\eta, \xi; f_j(\xi), \varphi_j(\psi(\eta))]$$

dont le produit est

$$[\eta, \xi; f_i(\varphi_j(\psi(\eta))), \varphi_i(\psi(f_j(\xi)))].$$

Or, par hypothèse, le groupe H admet les deux substitutions

$$[\eta,\ \xi;\ f_i(\eta),\ \varphi_i(\xi)],\quad [\eta,\ \xi;\ \varphi_j(\psi(\eta)),\ \psi(f_j(\xi))],$$

dont le produit donne précisément la substitution précédente.

2° Faisons de même le produit des deux substitutions

$$[\eta,\ \xi;\ f_j(\eta),\ \varphi_j(\xi)],\quad [\eta,\ \xi;\ f_i(\xi),\ \varphi_i(\psi(\eta))];$$

ce produit

$$[\eta,\ \xi;\ f_j(f_i(\xi)),\ \varphi_j(\varphi_i(\psi(\eta)))]$$

fait partie du système Σ, puisque la substitution

$$[\eta,\ \xi;\ f_j(f_i(\eta)),\ \varphi_j(\varphi_i(\xi))]$$

appartient à H.

3° Enfin, faisons le produit des deux substitutions

$$[\eta,\ \xi;\ f_i(\xi),\ \varphi_i(\psi(\eta))],\quad [\eta,\ \xi;\ f_j(\eta),\ \varphi_j(\xi)];$$

ce produit est la substitution

$$[\eta,\ \xi;\ f_i(\varphi_j(\xi)),\ \varphi_i(\psi(f_j(\eta)))].$$

On a vu que le groupe H renferme la substitution

$$[\eta,\ \xi;\ \varphi_i(\psi(\eta)),\ \psi(f_i(\xi))].$$

Comme on peut supposer $\varphi_i(\xi) = \xi$, $f_i(\eta) = \eta$, on voit que H contient les substitutions

$$[\eta,\ \xi;\ \psi(\eta),\ \psi(\xi)],\quad [\eta,\ \xi;\ \psi^{-1}(\eta),\ \psi^{-1}(\xi)],$$

et, par suite, le système Σ contiendra la substitution

$$[\eta,\ \xi;\ \psi^{-1}(\xi),\ \eta].$$

Par hypothèse, le groupe H renferme la substitution

$$[\eta,\ \xi;\ \varphi_j(\psi(\eta)),\ \psi(f_j(\xi))];$$

il contiendra donc aussi la substitution

$$[\eta,\ \xi;\ \varphi_j(\eta),\ \psi(f_j(\psi^{-1}(\xi)))]$$

et la substitution

$$[\eta,\ \xi;\ f_i(\varphi_j(\eta)),\ \varphi_i(\psi(f_j(\psi^{-1}(\xi))))].$$

Par suite, le système Σ renfermera la substitution

$$[\eta, \xi;\ f_i(\varphi_j(\xi)),\ \varphi_i(\psi(f_j(\eta)))],$$

qui est précisément la substitution trouvée plus haut.

Si l'on multiplie une substitution quelconque de Σ de la forme (B) par les M substitutions de même forme, on obtient M substitutions de la forme (A) différentes, qui doivent appartenir au groupe H. Un de ces produits doit donc se réduire à la substitution unité, c'est-à-dire que les substitutions de Σ sont deux à deux inverses l'une de l'autre. *Ce système forme donc un groupe.*

Il est aisé de voir que les deux groupes G et G_1 qui figurent dans la composition de H doivent être identiques: en effet, le groupe K contient les deux substitutions

$$[\eta, \xi;\ \xi,\ \psi(\eta)],\quad [\eta, \xi;\ \psi^{-1}(\xi),\ \eta]$$

et, par suite, la substitution

$$[\eta, \xi;\ \varphi_i(\eta),\ \psi(f_i(\psi^{-1}(\xi)))],$$

ce qui montre que les substitutions de G_1 sont identiques à celles de G. Si l'on suppose $f_i(\eta) = \eta$, on voit que le groupe H contient les deux substitutions

$$[\eta, \xi;\ \varphi_i(\eta),\ \xi],\quad [\eta, \xi;\ \eta,\ \varphi_i(\xi)].$$

Par suite, les groupes g et g_1 doivent aussi être identiques. Il n'y a donc aucune difficulté à obtenir tous les groupes K d'ordre fini. Parmi les groupes H d'ordre fini, on prendra ceux qui sont composés en associant les substitutions de deux groupes identiques G, G_1, de telle sorte que les sous-groupes g, g_1 soient également identiques. Le groupe H étant choisi de cette façon, on cherchera les substitutions $[\eta;\ \psi(\eta)]$ de G qui satisfont aux conditions précédentes. Remarquons qu'il ne sera pas nécessaire d'essayer successivement toutes les substitutions de G; car on peut évidemment, sans changer le groupe K, remplacer la substitution $[\eta;\ \psi(\eta)]$ par toutes celles qu'on obtient en la multipliant par les différentes substitutions du groupe g. Dans chaque cas particulier, la recherche peut se simplifier au moyen de remarques que l'on aperçoit aisément.

17. Nous allons passer en revue les différents groupes H satisfaisant aux conditions précédentes. Considérons le groupe de substitutions

$$\left[\eta,\ \xi;\ \eta e^{\frac{2ki\pi}{m}+\frac{2hi\pi}{\mu}},\ \xi e^{\frac{2kqi\pi}{m}+\frac{2h'i\pi}{\mu}}\right],$$

$$m=\mu D,\qquad k=0,1,2,\ldots,D-1,\qquad \frac{h}{h'}=0,1,2,\ldots,\mu-1,$$

où q est un nombre premier avec D. Si le groupe contient la substitution

$$[\eta,\ \xi;\ \psi(\eta),\ \psi(\xi)],$$

la fonction rationnelle $\psi(\eta)$ satisfait à toutes les conditions du problème, et inversement. On peut prendre

$$\psi(\eta)=\eta e^{\frac{2li\pi}{m}}\qquad (l=0,1,2,\ldots,D-1);$$

il faudra donc que l'on ait

$$l(1-q)\equiv 0\pmod{D}.$$

De plus, si le groupe H admet la substitution $[\eta,\ \xi;\ f(\eta),\ \varphi(\xi)]$, il devra admettre aussi la substitution $[\eta,\ \xi;\ \varphi(\eta),\ f(\xi)]$. Pour qu'il en soit ainsi, on vérifie aisément que le nombre q doit être racine de la congruence (¹)

$$q^2-1\equiv 0\pmod{D}.$$

Les nombres q et l étant choisis comme il vient d'être expliqué, la fonction $\psi(\eta)$ satisfait à toutes les conditions du problème.

Supposons le groupe H formé des substitutions

$$\left[\eta,\ \xi;\ \eta e^{\frac{2ki\pi}{m}+\frac{2hi\pi}{m}},\ \xi e^{\frac{2kqi\pi}{m}+\frac{2h'i\pi}{\mu}}\right],$$

$$\left[\eta,\ \xi;\ \frac{e^{\frac{2ki\pi}{m}+\frac{2hi\pi}{\mu}}}{\eta},\ \frac{e^{\frac{2kqi\pi}{m}+\frac{2h'i\pi}{\mu}+\frac{2ri\pi}{m}}}{\xi}\right],$$

$$m=D\mu,\qquad \left(k=0,1,2,\ldots,D-1;\qquad \frac{h}{h'}=0,1,2,\ldots,\mu-1\right),$$

q étant un nombre premier avec D inférieur à D, et r un des nombres

(¹) Voir SERRET, *Algèbre supérieure*, t. II, p. 24, 5ᵉ édition, 1885.

entiers o, 1, 2, ..., D — 1. Si la fonction $\psi(\eta)$ est de la forme

$$\psi(\eta) = \eta e^{2li\pi},$$

on trouve, comme plus haut, qu'on doit avoir

$$q^2 - 1 \equiv 0 \pmod{D}, \quad l(q-1) \equiv 0 \pmod{D}, \quad (r-l)(q+1) \equiv 0 \pmod{D}.$$

Si la fonction $\psi(\eta)$ est de la forme

$$\psi(\eta) = \frac{e^{\frac{2li\pi}{m}}}{\eta},$$

il faudra que l'on ait

$$l - r \equiv lq \pmod{D}, \quad 1 + q^2 \equiv 0 \pmod{D}, \quad (r-l)q \equiv l \pmod{D}.$$

Supposons le groupe H composé des substitutions

$$[\eta, \xi; f_i(\eta), \varphi_i(\xi)], \quad \left[\eta, \xi; f_i\left(e^{\frac{i\pi}{m}}\eta\right), \varphi_i\left(e^{\frac{i\pi}{m}}\xi\right)\right],$$

où $[z; f_i(z)]$ et $[z; \varphi_i(z)]$ sont deux substitutions quelconques du groupe du dièdre d'ordre $2m$. Les deux fonctions rationnelles

$$\psi(\eta) = \eta \quad \text{et} \quad \psi(\eta) = \eta e^{\frac{i\pi}{m}}$$

satisfont aux conditions du problème.

Considérons le groupe H formé des douze substitutions

$$[\eta, \xi; f_i(\eta), f_i(\xi)],$$

où $[z; f_i(z)]$ est une des douze substitutions du groupe du tétraèdre. Combinons ce groupe avec une autre substitution

$$[\eta, \xi; \varphi(\xi), \varphi(\pi(\eta))];$$

on aura les vingt-quatre substitutions

$$[\eta, \xi; f_i(\eta), f_i(\xi)], \quad [\eta, \xi; f_i(\varphi(\xi)), f_i(\varphi(\pi(\eta)))].$$

Pour que ces substitutions forment un groupe, il faudra que la substitution

$$[\eta, \xi; f_i(\varphi(f_j(\xi))), f_i(\varphi(\pi(f_j(\eta))))]$$

fasse aussi partie de ce système. Si l'on pose

$$\psi(z) = f_i(\varphi(f_j(\varphi^{-1}(z)))),$$

il faudra que l'on ait

$$f_i(\varphi(\pi(f_j(\eta)))) = \psi(\varphi(\pi(\eta))),$$

c'est-à-dire

$$\pi(f_j(\eta)) = f_j(\pi(\eta)).$$

La substitution $[\eta;\ \pi(\eta)]$ devrait donc être permutable à toutes les substitutions du groupe du tétraèdre; ce qui n'aura lieu que si l'on a $\pi(\eta) = \eta$. Il faudra, en outre, que la substitution $[\eta;\ \varphi(\eta)]$, combinée avec le groupe du tétraèdre, donne un nouveau groupe d'ordre fini, d'ordre au plus égal à 24. Cela ne pourra arriver que dans deux cas, c'est-à-dire lorsque cette substitution appartiendra au groupe du tétraèdre ou au groupe de l'octaèdre. Nous avons ainsi deux groupes K d'ordre 24.

En combinant le groupe complet (XX) avec la nouvelle substitution $[\eta, \xi;\ \xi, \eta]$, on aura de même un groupe K d'ordre 288.

Prenons maintenant le groupe XXII; en combinant ce groupe avec une des substitutions

$$[\eta, \xi;\ \xi, \eta], \quad \left[\eta, \xi;\ \xi,\ i\frac{\eta+1}{\eta-1}\right], \quad \left[\eta, \xi;\ \xi,\ \frac{\eta+i}{\eta-i}\right],$$

on obtient trois groupes K. Ces trois groupes sont semblables; les deux derniers sont les transformés du premier par l'une des substitutions

$$\left[\eta, \xi;\ \eta,\ i\frac{\xi+1}{\xi-1}\right], \quad \left[\eta, \xi;\ \eta,\ \frac{\xi+i}{\xi-i}\right].$$

En cherchant encore si l'on peut combiner le groupe H précédent avec une autre substitution de la forme

$$[\eta, \xi;\ \varphi(\xi), \pi(\eta)],$$

on trouve qu'on peut le combiner avec la substitution $[\eta, \xi;\ i\xi, i\eta]$ de l'octaèdre.

On verra de même sans difficulté qu'on obtient des groupes K d'ordre fini en combinant les groupes (XXV), (XXVI), (XXVII), (XXX), (XXXI) avec la substitution $[\eta, \xi;\ \xi, \eta]$, le groupe (XXVIII) avec l'une des substitutions $[\eta, \xi;\ \xi, \eta]$, $[\eta, \xi;\ \xi, i\eta]$, et le groupe (XXXII) avec la substitution $\left[\eta, \xi;\ \xi, -\frac{1}{\eta}\right]$, et qu'on les obtient tous de cette manière.

18. Nous pouvons donc énumérer tous les groupes K d'ordre fini.

XXXIII. Groupe composé de $2D\mu^2$ substitutions :

$$\left[\eta,\ \xi;\ \eta e^{\frac{2ki\pi}{m}+\frac{2hi\pi}{\mu}},\ \xi e^{\frac{2kqi\pi}{m}+\frac{2h'i\pi}{\mu}}\right],$$
$$\left[\eta,\ \xi;\ \xi e^{\frac{2ki\pi}{m}+\frac{2hi\pi}{\mu}},\ \eta e^{\frac{2kqi\pi}{m}+\frac{2h'i\pi}{\mu}+\frac{2li\pi}{m}}\right],$$
$$m = D\mu,\qquad \left(k = 0, 1, 2, \ldots, D-1;\ \frac{h}{h'} = 0, 1, 2, \ldots, \mu-1\right);$$

q est un nombre premier avec D racine de la congruence

$$q^2 - 1 \equiv 0 \pmod{D},$$

et l un nombre entier qui satisfait à la relation

$$l(q-1) \equiv 0 \pmod{D}.$$

Si $D = 1$, on pourra supposer $k = 0$, $q = 0$, $l = 0$.

XXXIV. Groupe composé de $8m^2$ substitutions :

$$[\eta,\ \xi;\ f_i(\eta),\ \varphi_i(\xi)],\quad [\eta,\ \xi;\ f_i(\xi),\ \varphi_i(\eta)],$$

où $[z; f_i(z)]$ et $[z; \varphi_i(z)]$ sont deux substitutions quelconques du groupe du dièdre d'ordre $2m$.

XXXV. Groupe composé de $4D\mu^2$ substitutions :

$$\left[\eta,\ \xi;\ \eta e^{\frac{2ki\pi}{m}+\frac{2hi\pi}{\mu}},\quad \xi e^{\frac{2kqi\pi}{m}+\frac{2h'i\pi}{\mu}}\right],$$
$$\left[\eta,\ \xi;\ \frac{e^{\frac{2ki\pi}{m}+\frac{2hi\pi}{\mu}}}{\eta},\quad \frac{e^{\frac{2kqi\pi}{m}+\frac{2h'i\pi}{\mu}+\frac{2ri\pi}{m}}}{\xi}\right],$$
$$\left[\eta,\ \xi;\ \xi e^{\frac{2ki\pi}{m}+\frac{2hi\pi}{\mu}},\quad \eta e^{\frac{2kqi\pi}{m}+\frac{2li\pi}{m}+\frac{2h'i\pi}{\mu}}\right],$$
$$\left[\eta,\ \xi;\ \frac{e^{\frac{2ki\pi}{m}+\frac{2hi\pi}{\mu}}}{\xi},\quad \frac{e^{\frac{2kqi\pi}{m}-\frac{2li\pi}{m}+\frac{2ri\pi}{m}+\frac{2h'i\pi}{\mu}}}{\eta}\right];$$
$$m = D\mu;\qquad \left(k = 0, 1, 2, \ldots, D-1;\quad \frac{h}{h'} = 0, 1, 2, \ldots, \mu-1\right);$$

q est un nombre premier avec D racine de la congruence

$$q^2 - 1 \equiv 0 \pmod{D},$$

et l, r deux nombres entiers vérifiant les relations

$$l(q-1)\equiv 0 \pmod{D}, \qquad (r-l)(q+1)\equiv 0 \pmod{D}.$$

XXXVI. Groupe composé de $4D\mu^2$ substitutions :

$$\left[\eta,\ \xi;\ \eta\, e^{\frac{2ki\pi}{m}+\frac{2hi\pi}{\mu}},\ \ \xi\, e^{\frac{2hqi\pi}{m}+\frac{2h'i\pi}{\mu}}\right],$$

$$\left[\eta,\ \xi;\ \frac{e^{\frac{2ki\pi}{m}+\frac{2hi\pi}{\mu}}}{\eta},\ \ \frac{e^{\frac{2kqi\pi}{m}+\frac{2ri\pi}{m}+\frac{2h'i\pi}{\mu}}}{\xi}\right],$$

$$\left[\eta,\ \xi;\ \xi\, e^{\frac{2ki\pi}{m}+\frac{2hi\pi}{\mu}},\ \ \frac{e^{\frac{2kqi\pi}{m}+\frac{2h'i\pi}{\mu}+\frac{2li\pi}{m}}}{\eta}\right],$$

$$\left[\eta,\ \xi;\ \frac{e^{\frac{2ki\pi}{m}+\frac{2hi\pi}{\mu}}}{\xi},\ \ \eta\, e^{\frac{2kqi\pi}{m}+\frac{2h'i\pi}{\mu}+\frac{2ri\pi}{m}-\frac{2li\pi}{m}}\right],$$

$$m = D\mu, \qquad \left(k = 0, 1, 2, \ldots, D-1; \qquad \frac{h}{h'} = 0, 1, 2, \ldots, \mu-1\right);$$

q est un nombre premier avec D, racine de la congruence

$$q^2+1\equiv 0 \pmod{D}$$

et l, r deux nombres entiers satisfaisant aux relations

$$l-r\equiv lq \pmod{D}, \qquad (r-l)q\equiv l \pmod{D}.$$

XXXVII. Groupe composé de $16m^2$ substitutions :

$$[\eta,\ \xi;\ f_i(\eta),\ \varphi_i(\xi)], \quad \left[\eta,\ \xi;\ f_i\left(e^{\frac{i\pi}{m}}\eta\right),\ \varphi_i\left(e^{\frac{i\pi}{m}}\xi\right)\right],$$

$$[\eta,\ \xi;\ f_i(\xi),\ \varphi_i(\eta)], \quad \left[\eta,\ \xi;\ f_i\left(e^{\frac{i\pi}{m}}\xi\right),\ \varphi_i\left(e^{\frac{i\pi}{m}}\eta\right)\right],$$

où $[z; f_i(z)]$ et $[z; \varphi_i(z)]$ sont 2 substitutions quelconques du groupe du dièdre d'ordre $2m$.

XXXVIII. Groupe composé de $16m^2$ substitutions :

$$[\eta,\ \xi;\ f_i(\eta),\ \varphi_i(\xi)], \qquad \left[\eta,\ \xi;\ f_i\left(e^{\frac{i\pi}{m}}\eta\right),\ \varphi_i\left(e^{\frac{i\pi}{m}}\xi\right)\right]$$

$$\left[\eta,\ \xi;\ f_i(\xi),\ \varphi_i\left(e^{\frac{i\pi}{m}}\eta\right)\right], \quad \left[\eta,\ \xi;\ f_i\left(e^{\frac{i\pi}{m}}\xi\right),\ \varphi_i(\eta)\right],$$

où $[z; f_i(z)]$ et $[z; \varphi_i(z)]$ sont deux substitutions quelconques du groupe du dièdre d'ordre $2m$.

XXXIX. Groupe composé de 24 substitutions :

$$[\eta, \xi; f_i(\eta), f_i(\xi)], \quad [\eta, \xi; f_i(\xi), f_i(\eta)],$$

où $[z; f_i(z)]$ désigne une des 12 substitutions du groupe du tétraèdre. Ce groupe renferme 4 substitutions de la forme (B) de période 2.

XL. Groupe composé de 24 substitutions :

$$[\eta, \xi; f_i(\eta), f_i(\xi)], \quad [\eta, \xi; f_i(i\xi), f_i(i\eta)],$$

où $[z; f_i(z)]$ désigne une des 12 substitutions du groupe du tétraèdre. Ce groupe renferme 6 substitutions de la forme (B) de période 2.

XLI. Groupe composé de 96 substitutions que l'on obtient en combinant le groupe (XXII) avec la substitution $[\eta, \xi; \xi, \eta]$; il contient 4 substitutions de la forme (B) de période 2.

XLII. Groupe composé de 96 substitutions que l'on obtient en combinant le groupe (XXII) avec la substitution $[\eta, \xi; i\xi, i\eta]$. Il contient 12 substitutions de la forme (B) de période 2.

XLIII. Groupe composé de 288 substitutions :

$$[\eta, \xi; f_i(\eta), \varphi_i(\xi)], \quad [\eta, \xi; f_i(\xi), \varphi_i(\eta)],$$

où $[z; f_i(z)]$ et $[z; \varphi_i(z)]$ sont 2 substitutions quelconques du groupe du tétraèdre. Il renferme 12 substitutions de la forme (B) de période 2.

XLIV. Groupe composé de 48 substitutions :

$$[\eta, \xi; f_i(\eta), f_i(\xi)], \quad [\eta, \xi; f_i(\xi), f_i(\eta)],$$

où $[z; f_i(z)]$ est une des 24 substitutions du groupe de l'octaèdre. Ce groupe renferme 10 substitutions de la forme (B) de période 2.

XLV. Groupe composé de 576 substitutions, qui s'obtient en combinant le groupe (XXVIII) avec la substitution $[\eta, \xi; \xi, \eta]$. Ce groupe renferme 24 substitutions de la forme (B) de période 2.

XLVI. Groupe composé de 576 substitutions, qui s'obtient en combinant le groupe (XXVIII) avec la substitution $[\eta, \xi; \xi, i\eta]$.

XLVII. Groupe composé de 192 substitutions, qui s'obtient en combinant le groupe (XXVII) avec la substitution $[\eta, \xi; \xi, \eta]$. Ce groupe renferme 16 substitutions de la forme (B) de période 2.

XLVIII. Groupe composé de 1152 substitutions :

$$[\eta,\ \xi;\ f_i(\eta),\ \varphi_i(\xi)],\quad [\eta,\ \xi;\ f_i(\xi),\ \varphi_i(\eta)],$$

où $[z; f_i(z)]$ et $[z;\ \varphi_i(z)]$ sont 2 substitutions quelconques du groupe de l'octaèdre. Ce groupe contient 24 substitutions de la forme (B) de période 2.

XLIX. Groupe de 120 substitutions :

$$[\eta,\ \xi;\ f_i(\eta),\ f_i(\xi)],\quad [\eta,\ \xi;\ f_i(\xi),\ f_i(\eta)],$$

où $[z; f_i(z)]$ désigne une des 60 substitutions du groupe de l'icosaèdre. Ce groupe contient 16 substitutions de la forme (B) de période 2.

L. Groupe composé de 7200 substitutions :

$$[\eta,\ \xi;\ f_i(\eta),\ \varphi_i(\xi)],\quad [\eta,\ \xi;\ f_i(\xi),\ \varphi_i(\eta)],$$

où $[z; f_i(z)]$ et $[z;\ \varphi_i(z)]$ désignent 2 substitutions quelconques du groupe de l'icosaèdre. Ce groupe contient 60 substitutions de la forme (B) de période 2.

LI. Groupe d'ordre 120 obtenu en combinant le groupe (XXXII) avec la substitution $\left[\eta, \xi; \xi, -\frac{1}{\eta}\right]$.

19. Prenons un des groupes précédents d'ordre M; il y correspond un groupe d'ordre 2M de substitutions orthogonales auquel le premier groupe est isomorphe. D'après le Tableau précédent, on voit que tous les coefficients de ce nouveau groupe seront réels; par conséquent, *tout groupe d'ordre fini de substitutions orthogonales à quatre variables est semblable à un groupe à coefficients réels*. Étant donné un pareil groupe, on peut lui rattacher, comme on l'a vu plus haut, une division régulière de l'espace en un nombre fini de parties R_0, R_1, ..., R_i, ..., chaque région R_i se déduisant de R_0 au moyen d'une transformation qui conserve les angles. Considérons par exemple le groupe des huit substitutions

$$[\eta,\ \xi;\ \eta,\ \xi],\quad [\eta,\ \xi;\ -\eta,\ -\xi],\quad \left[\eta,\ \xi;\ \frac{1}{\eta},\ \frac{1}{\xi}\right],\quad \left[\eta,\ \xi;\ -\frac{1}{\eta},\ -\frac{1}{\xi}\right],$$
$$[\eta,\ \xi;\ \xi,\ \eta],\quad [\eta,\ \xi;\ -\xi,\ -\eta],\quad \left[\eta,\ \xi;\ \frac{1}{\xi},\ \frac{1}{\eta}\right],\quad \left[\eta,\ \xi;\ -\frac{1}{\xi},\ -\frac{1}{\eta}\right].$$

Il y correspond deux groupes de substitutions orthogonales, un qui est formé des 8 substitutions

$$[u_1, u_2, u_3, u_4; u_1, \pm u_2, \pm u_3, \pm u_4],$$

l'autre, des seize substitutions

$$[u_1, u_2, u_3, u_4; \pm u_1, \pm u_2, \pm u_3, \pm u_4].$$

Si l'on se reporte aux formules (16), on aperçoit tout de suite les divisions correspondantes de l'espace. Au premier groupe correspondent les huit portions de l'espace, limitées par les trois plans de coordonnées, et, au second, les 16 tétraèdres, dont tous les angles sont égaux à $\frac{\pi}{2}$, déterminés par les trois plans de coordonnées et la sphère de rayon égal à l'unité ayant son centre à l'origine des coordonnées. On peut de même rattacher aux groupes (XLIV) et (XLIX) la division de l'espace au moyen des plans de symétrie d'un octaèdre et d'un icosaèdre régulier, ou au moyen de ces plans et de la sphère orthogonale

$$x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0.$$

Je ne m'occuperai pas dans ce travail de la recherche de toutes les divisions qui correspondent à tous les groupes qui viennent d'être énumérés. Je traiterai seulement, dans la troisième Partie de ce Mémoire, un cas particulier intéressant.

Les considérations qui ont été employées pour la formation des groupes H et K s'étendent évidemment à tous les problèmes analogues, où il s'agit de former un groupe de substitutions en associant d'une certaine manière les substitutions de deux groupes donnés, quelle que soit la nature des substitutions de ces deux groupes.

III.

20. Les développements qui précèdent conduisent sans peine à la solution complète de la question suivante. Considérons un tétraèdre à faces planes ou sphériques, et imaginons que l'on prenne le tétraèdre symétrique du premier par rapport à une de ses faces, puis le symétrique du nouveau tétraèdre par rapport à une de ses faces, et ainsi de suite. Dans quels cas arrivera-t-on à un nombre *fini* de tétraèdres dis-

tincts les uns des autres? La question analogue, relative aux triangles limités par des arcs de cercle, a été résolue par M. Schwarz dans un beau Mémoire sur la série hypergéométrique ([1]). Un raisonnement tout pareil à celui de M. Schwarz nous montre d'abord que la sphère orthogonale aux quatre faces du tétraèdre considéré doit être imaginaire; on peut évidemment supposer, sans restreindre la généralité, que cette sphère orthogonale est précisément la sphère (Σ') qui a pour équation

$$x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0.$$

Cela posé, prenons un point quelconque M de l'espace et représentons-nous les images en nombre fini de ce point $M_1, M_2, \ldots, M_{p-1}$, obtenues par l'application répétée indéfiniment de la loi de symétrie. Ces différents points se déduisent du point M par des transformations qui conservent les angles et qui font revenir sur elle-même la sphère imaginaire (Σ'), et il est clair que ces transformations forment un groupe d'ordre fini p. Le problème proposé est donc équivalent à celui-ci : *Trouver tous les groupes d'ordre fini de substitutions linéaires orthogonales à quatre variables dérivés de quatre substitutions gauches qui, réduites à la forme canonique, sont de la forme*

$$(u_1, u_2, u_3, u_4;\ u_1, u_2, u_3, -u_4).$$

Ce problème peut, à son tour, être remplacé par le suivant : *Trouver tous les groupes* K *d'ordre fini, dérivés de substitutions de la forme* (B) *de période* 2.

La marche à suivre pour résoudre cette question est donc la suivante. Parmi les groupes K d'ordre fini, on cherchera ceux qui admettent des substitutions de la forme (B) de période 2 n'appartenant pas à un groupe d'ordre moindre, et on étudiera la disposition des sphères d'inversion correspondantes à ces substitutions.

21. Si les groupes XXXIII à XXXVIII admettent des substitutions de la forme (B) de période 2, ces substitutions auront l'une des formes suivantes

$$\left[\eta, \xi;\ \rho\xi, \frac{1}{\rho}\eta\right], \quad \left[\eta, \xi;\ \frac{\rho}{\xi}, \frac{\rho}{\eta}\right];$$

([1]) *Journal de Borchardt*, t. LXXV.

les sphères d'inversion correspondantes passent toutes par l'axe des z ou par le cercle qui a pour équations

$$z = 0, \qquad x^2 + y^2 = 1.$$

Inversement, si l'on considère un système de m sphères passant par un même cercle C et se coupant mutuellement sous des angles égaux à $\frac{\pi}{m}$, il est clair que ces sphères divisent l'espace en $2m$ régions et que deux régions contiguës sont toujours symétriques par rapport à la face commune. Cette solution du problème, où les quatre faces du tétraèdre se réduisent à deux, était d'ailleurs évidente *a priori*.

Considérons maintenant deux cercles conjugués C, C′, un système de m sphères passant par C et se coupant sous un angle égal à $\frac{\pi}{m}$, et un système de n sphères passant par C′ et se coupant sous un angle égal à $\frac{\pi}{n}$. Ces mn sphères divisent l'espace en $4mn$ tétraèdres, dont les angles opposés sont respectivement $\frac{\pi}{m}$ et $\frac{\pi}{n}$, $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$. Il est clair encore que deux tétraèdres contigus sont symétriques par rapport à la face commune. On se représente aisément cette décomposition de l'espace, si l'on suppose que le cercle C′ se réduise à l'axe du cercle C.

Les groupes XXXIX, XL, XLI, XLIV, XLIX renferment des substitutions de la forme (B) de période 2; mais les sphères d'inversion correspondantes se réduisent aux plans de symétrie d'un polyèdre régulier ou à la sphère (Σ) qui a pour équation

$$x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0.$$

On obtient ainsi une nouvelle solution du problème, qui était encore évidente *a priori*.

Les douze substitutions de la forme (B) de période 2 du groupe XLIII appartiennent à un groupe semblable au groupe XLII; et les vingt-quatre substitutions de même forme du groupe XLVIII appartiennent au groupe XLV. Nous n'avons donc à considérer que les groupes XLII, XLV, XLVIII, L, LI.

22. Le groupe XLII contient les douze substitutions

$$[\eta, \xi; \varphi(\xi), \varphi^{-1}(\eta)],$$

où $[z; \varphi(z)]$ désigne une des douze substitutions du groupe de l'octaèdre qui n'appartiennent pas au groupe du tétraèdre; les sphères d'inversion correspondantes auront pour équations

$$(30)\qquad \left\{\begin{array}{c} x \pm z = 0, \qquad y \pm z = 0, \qquad x \pm y = 0, \\ x^2+y^2+z^2-1 \pm 2x = 0, \qquad x^2+y^2+z^2-1 \pm 2y = 0, \\ x^2+y^2+z^2-1 \pm 2z = 0. \end{array}\right.$$

On a, comme on voit, les six plans de symétrie d'un tétraèdre régulier et six sphères égales ayant respectivement pour centres les milieux des arêtes de ce tétraèdre. Le groupe de substitutions orthogonales correspondantes est facile à trouver : il se compose des 192 substitutions obtenues en permutant les u_i de toutes les manières possibles et en prenant toutes les combinaisons de signes où entre un nombre pair de fois le signe $-$ ([1]). On peut vérifier directement que les douze sphères précédentes divisent l'espace en 192 tétraèdres, qui se déduisent tous de l'un d'eux par la loi de symétrie. Considérons le tétraèdre limité par les trois plans

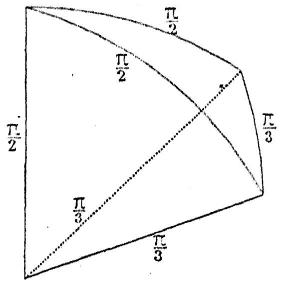
$$x+y=0, \qquad x-y=0, \qquad x-z=0$$

et la portion de la sphère

$$x^2+y^2+z^2+2z-1=0,$$

située dans la partie positive du trièdre $Oyxz$. Cette sphère coupe les

Fig. 3.



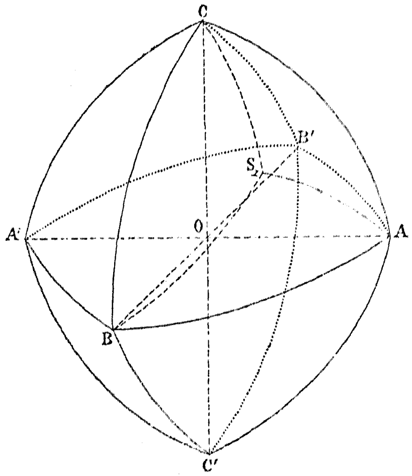
deux premiers plans sous un angle égal à $\frac{\pi}{2}$, et le plan $x-z=0$ sous

([1]) Voir *Étude des surfaces qui admettent tous les plans de symétrie d'un polyèdre régulier*, III^e Partie, n^{os} 4 et 5 (*Annales de l'École Normale*, 1887).

un angle égal à $\frac{\pi}{3}$. Les angles de ce tétraèdre auront, par conséquent, les valeurs indiquées sur la *fig.* 3.

Au lieu de ce tétraèdre, considérons un tétraèdre OABC congruent à celui-là et limité par trois plans rectangulaires et une sphère coupant ces plans sous ún angle égal à $\frac{\pi}{3}$. En assemblant huit de ces tétraèdres autour du point O, on formera une sorte d'octaèdre régulier à faces sphériques, dont tous les angles auront pour valeur $\frac{2\pi}{3}$ (*fig.* 4).

Fig. 4.



Si nous prenons ensuite le tétraèdre symétrique de OABC par rapport à la face ABC, le symétrique de OA′BC′ par rapport à la face A′BC′, le symétrique de OA′B′C par rapport à A′B′C, et enfin le symétrique de OAB′C′ par rapport à AB′C′, on obtient un nouveau tétraèdre $S_1 S_2 S_3 S_4$ (¹), que l'on pourrait aussi obtenir en prolongeant les faces A′BC, AB′C, ABC′, A′B′C′ jusqu'à leurs intersections mutuelles. Ce tétraèdre a tous ses angles égaux à $\frac{\pi}{2}$, et il est formé de 12 tétraèdres qui se déduisent de OABC par la loi de symétrie. Or l'espace est rempli complètement par 16 tétraèdres se déduisant de $S_1 S_2 S_3 S_4$ par des répétitions symétriques. *Il faudra donc* $16 \times 12 = 192$ *répétitions symétriques du tétraèdre* OABC *pour remplir tout l'espace.*

(¹) On n'a marqué que le sommet S_1 sur la figure.

23. Le groupe XLVII contient 16 substitutions de la forme (B) de période 2

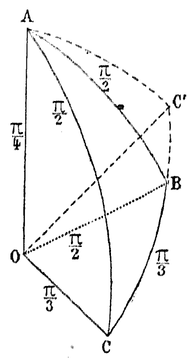
$$[\eta, \xi;\ \varphi(\xi),\ \varphi^{-1}(\eta)],$$

où $[z;\ \varphi(z)]$ est une des substitutions de période 2 ou 4 du groupe de l'octaèdre. Les sphères d'inversion correspondantes seront représentées par les équations

$$(31)\quad \left\{\begin{array}{l} x=0,\quad y=0,\quad z=0,\quad y\pm z=0,\quad z\pm x=0,\quad x\pm y=0,\\ \qquad x^2+y^2+z^2-1=0,\qquad x^2+y^2+z^2-1\pm 2x=0,\\ x^2+y^2+z^2-1\pm 2y=0,\qquad x^2+y^2+z^2-1\pm 2z=0; \end{array}\right.$$

on a, outre les neuf plans de symétrie du cube, la sphère inscrite et les six sphères précédentes qui ont pour centres les centres des faces du cube. Le groupe de substitutions orthogonales correspondant au groupe XLVII se compose des 384 substitutions obtenues en permutant les u_i de toutes les manières possibles et en prenant toutes les combinaisons de signes (*voir* le Mémoire déjà cité, *Annales de l'École Normale*, 3ᵉ série, t. IV; 1887). On vérifie encore facilement que les 16 sphères (31) divisent l'espace en 384 tétraèdres, tels que 2 tétraèdres contigus sont symétriques par rapport à la face commune.

Fig. 5.



Considérons le tétraèdre limité par les trois plans

$$y=0,\qquad x-y=0,\qquad x-z=0$$

et la sphère

$$x^2+y^2+z^2+2z-1=0,$$

Cette sphère coupe les deux premiers plans orthogonalement et le troisième plan sous un angle égal à $\frac{\pi}{3}$. Les angles de ce tétraèdre auront donc les valeurs indiquées sur la *fig.* 5 ci-dessus.

Prenons le tétraèdre OABC′, symétrique de OABC par rapport à la face OAB. La face ABC′ sera dans le prolongement de la face ABC et la face OBC′ dans le prolongement de la face OBC; de sorte que la *fig.* OACC′ sera un tétraèdre dont les angles seront précisément les mêmes que ceux du tétraèdre de la *fig.* 3 et disposés de la même façon. Il faudra donc, d'après ce qu'on vient de voir, 192 répétitions symétriques du tétraèdre OACC′ pour remplir tout l'espace, *et, par suite,* $2 \times 192 = 384$ *répétitions symétriques du tétraèdre* OABC.

24. Le groupe XLV contient les 24 substitutions

$$[\eta, \xi; \varphi(\xi), \varphi^{-1}(\eta)],$$

où $[z; \varphi(z)]$ est une quelconque des 24 substitutions du groupe de l'octaèdre. Les 24 sphères d'inversion correspondantes seront représentées par les équations

$$(32)\quad \left\{\begin{array}{c} x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad x \pm y = 0, \quad y \pm z = 0, \quad z \pm x = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0, \qquad x^2 + y^2 + z^2 \pm 2x - 1 = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 \pm 2y - 1 = 0, \qquad x^2 + y^2 + z^2 \pm 2z - 1 = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 \pm 2x \pm 2y \pm 2z - 1 = 0. \end{array}\right.$$

Considérons le tétraèdre limité par les trois plans

$$y = 0, \qquad x - y = 0, \qquad x - z = 0$$

et la sphère qui a pour équation

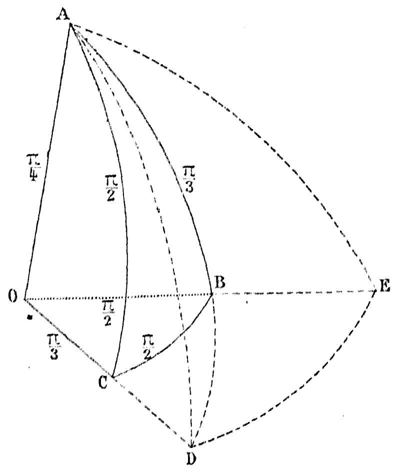
$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 2y + 2z - 1 = 0;$$

cette sphère coupe à angle droit les deux plans $x - y = 0$ et $x - z = 0$ et le plan $y = 0$ sous un angle égal à $\frac{\pi}{3}$. Les angles de ce tétraèdre OABC auront, par conséquent, les valeurs indiquées sur la *fig.* 6.

Prenons le tétraèdre ABCD symétrique de OABC par rapport à la face ABC; la face ACD sera dans le prolongement de la face OAC et la face BCD dans le prolongement de la face OBC, de sorte que la figure

OABD sera encore un tétraèdre dont les angles suivant les arêtes AB, AD, BD seront respectivement $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{2}$. Prenons ensuite le tétraèdre ABDE symétrique de ABCD par rapport à la face ABD. La face ABE sera dans le prolongement de la face OAB et la face BDE dans le

Fig. 6.



prolongement de la face OBD. La figure OADE sera un tétraèdre et les angles suivant les arêtes AE, AD, DE seront respectivement $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{3}$. Ce tétraèdre OADE est donc congruent au tétraèdre OABC de la *fig.* 5; puisqu'il faut 384 répétitions symétriques du tétraèdre OADE pour remplir tout l'espace, *il faudra* $3 \times 384 = 1152$ *répétitions symétriques du tétraèdre* OABC *de la fig.* 6 *pour remplir tout l'espace.*

Il suit de là que le groupe de substitutions linéaires orthogonales qui correspond au groupe XLV sera d'ordre 1152. Les 24 sphères (32) seront représentées en coordonnées u_i par les équations

$$(33)\qquad \left\{\begin{array}{llll} u_1 = 0, & u_2 = 0, & u_3 = 0, & u_4 = 0, \\ u_1 \pm u_2 = 0, & u_1 \pm u_3 = 0, & u_1 \pm u_4 = 0, & \\ u_2 \pm u_3 = 0, & u_2 \pm u_4 = 0, & u_3 \pm u_4 = 0, & \\ u_1 \pm u_2 \pm u_3 \pm u_4 = 0. & & & \end{array}\right.$$

On trouve facilement que le groupe en question s'obtient en ajoutant aux 384 substitutions du groupe du paragraphe précédent les 768 substitutions de la forme suivante

$$(34)\quad \begin{cases} (u_1)' = \varepsilon\, \dfrac{u_1 + \eta u_2 + \theta u_3 + \rho u_4}{2}, \\ (u_2)' = \varepsilon'\, \dfrac{u_1 + \eta' u_2 + \theta' u_3 + \rho' u_4}{2}, \\ (u_3)' = \varepsilon''\, \dfrac{u_1 + \eta'' u_2 + \theta'' u_3 + \rho'' u_4}{2}, \\ (u_4)' = \varepsilon'''\, \dfrac{u_1 + \eta''' u_2 + \theta''' u_3 + \rho''' u_4}{2}, \end{cases}$$

où toutes les lettres ε, η, θ, ρ désignent ± 1 et où l'on a

$$(35)\quad \begin{cases} \eta + \eta' + \eta'' + \eta''' = 0, \\ \theta + \theta' + \theta'' + \theta''' = 0, \\ \rho + \rho' + \rho'' + \rho''' = 0, \\ \eta\theta + \eta'\theta' + \eta''\theta'' + \eta'''\theta''' = 0, \\ \eta\rho + \eta'\rho' + \eta''\rho'' + \eta'''\rho''' = 0, \\ \theta\rho + \theta'\rho' + \theta''\rho'' + \theta'''\rho''' = 0. \end{cases}$$

25. Le groupe L (p. 79) donne naissance à un groupe d'ordre 14400 de substitutions orthogonales à quatre variables et, par suite, à un groupe $\mathcal{G}$ composé de 14400 transformations de l'espace qui conservent les angles, et dont fait partie l'inversion par rapport à la sphère imaginaire (Σ'). Ce groupe contient, en outre, 60 inversions par rapport à des sphères réelles correspondant aux 60 substitutions

$$[\eta,\ \xi;\ \varphi(\xi),\ \varphi^{-1}(\eta)],$$

où $[z;\ \varphi(z)]$ est une quelconque des 60 substitutions du groupe de l'icosaèdre. Il est aisé de trouver la position de ces sphères; d'abord, les 15 substitutions de période 2 donnent les 15 plans de symétrie de l'icosaèdre et la substitution $[\eta, \xi; \xi, \eta]$ donne la sphère (Σ) qui a pour équation

$$x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0.$$

La sphère correspondante à la substitution $[\eta,\ \xi;\ \varepsilon^{\mu}\xi,\ \varepsilon^{-\mu}\eta]$, où $\varepsilon = e^{\frac{2i\pi}{5}}$, a pour équation

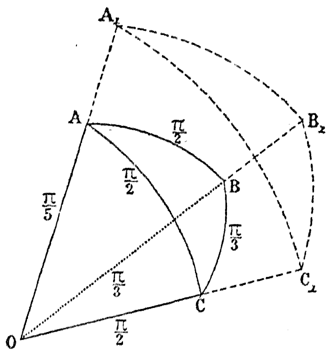
$$x^2 + y^2 + z^2 - 1 + 2z \operatorname{tang}\frac{\mu\pi}{5} = 0 \quad (\mu = 1, 2, 3, 4);$$

ces différentes sphères coupent la sphère (Σ) sous des angles respectivement égaux à $\frac{\pi}{5}, \frac{2\pi}{5}, \frac{3\pi}{5}, \frac{4\pi}{5}$. On trouve de même que les sphères correspondant à une substitution $[z;\ \varphi(z)]$ de période 3 du groupe de l'icosaèdre coupent sous un angle égal à $\frac{\pi}{3}$ ou à $\frac{2\pi}{3}$ la sphère Σ et ont leurs centres sur l'axe de symétrie ternaire correspondant de l'icosaèdre.

En définitive, pour avoir les 60 sphères, on prendra, outre la sphère (Σ), les sphères obtenues comme il suit; par l'origine, on mènera un plan perpendiculaire à un axe de symétrie d'ordre $\mu(\mu = 2, 3, 5)$ de l'icosaèdre et coupant la sphère (Σ) suivant un cercle C. Par le cercle C, on fera ensuite passer des sphères coupant la sphère (Σ) sous des angles égaux à $\frac{\nu\pi}{\mu}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, \mu - 1)$, et l'on opérera de même avec tous les axes de symétrie de l'icosaèdre. Ce système de sphères jouit de la propriété d'être symétrique par rapport à l'une quelconque des sphères qui le composent (*voir* p. 35).

Considérons le tétraèdre limité par trois plans de symétrie de l'icosaèdre découpant sur la sphère (Σ) un triangle dont les angles sont $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{5}$ et par la sphère qui a son centre sur le prolongement de OA_2

Fig. 7.



et qui coupe (Σ) sous un angle égal à $\frac{2\pi}{5}$ (*fig.* 7); on trouve facilement que cette sphère coupe le plan OB_1C_1 sous un angle égal à $\frac{\pi}{3}$, et les angles du tétraèdre OABC auront les valeurs indiquées sur la figure.

Imaginons que l'on forme les répétitions de ce tétraèdre par la loi de symétrie; comme tous les angles sont des parties aliquotes de π, ces tétraèdres ne pourront empiéter les uns sur les autres. Il suffit, pour s'en convaincre, de répéter les raisonnements dont s'est servi M. Poincaré à propos des polyèdres qui interviennent dans la théorie des groupes kleinéens. D'ailleurs, ces tétraèdres seront en nombre fini M et rempliront une seule fois tout l'espace, c'est-à-dire qu'on aura un nouveau groupe $\mathcal{G}'$ de transformations de l'espace que conservent les angles. A ce groupe $\mathcal{G}'$, on fera correspondre un groupe isomorphe K d'ordre M ou $\frac{M}{2}$, renfermant les quatre substitutions de la forme (B) de période 2 qui caractérisent les inversions par rapport aux quatre faces du tétraèdre OABC. Ce groupe K sera nécessairement identique au groupe (L) et, par suite, le groupe $\mathcal{G}'$ sera identique à $\mathcal{G}$ ou à un sous-groupe de $\mathcal{G}$ d'indice 2. Pour prouver que $\mathcal{G}$ et $\mathcal{G}'$ sont identiques, il suffira de montrer que l'une des transformations dont se compose le groupe $\mathcal{G}'$ est précisément l'inversion par rapport à la sphère imaginaire (Σ'). C'est ce qui résulte bien clairement des remarques suivantes. Au nombre des transformations du groupe $\mathcal{G}'$ se trouvent les inversions par rapport aux trois plans de symétrie de l'icosaèdre OAB, OAC, OBC, par suite les inversions par rapport à l'un quelconque des plans de symétrie de l'icosaèdre et par conséquent aussi la transformation par symétrie relativement au point O. Soit (Σ_1) la sphère à laquelle appartient la face ABC et (Σ_2) la sphère symétrique par rapport à l'origine. Le groupe $\mathcal{G}'$ contiendra encore l'inversion par rapport à (Σ_2) et, par conséquent, l'inversion par rapport à la sphère (Σ) qui passe par l'intersection des deux sphères (Σ_1) et (Σ_2); renfermant à la fois l'inversion par rapport à la sphère (Σ) et la transformation par symétrie relativement au point O, le groupe $\mathcal{G}'$ contiendra l'inversion par rapport à la sphère imaginaire (Σ'), qui est une combinaison des deux transformations précédentes. Donc les deux groupes $\mathcal{G}$ et $\mathcal{G}'$ sont identiques, et *il faudra* 14400 *répétitions symétriques du tétraèdre* OABC *pour remplir tout l'espace*.

26. Le groupe (LI) donne naissance à un groupe de 120 substitutions orthogonales, dérivé de 10 inversions, qui peut être défini géo-

métriquement d'une manière très simple. Considérons les six plans de symétrie d'un tétraèdre régulier

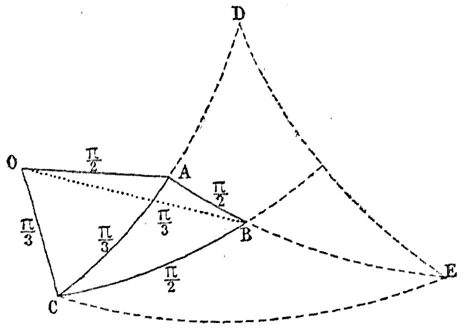
$$x \pm y = 0, \qquad y \pm z = 0, \qquad z \pm x = 0$$

et les quatre sphères

$$(36) \qquad \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + \dfrac{2}{\sqrt{5}}(x + y + z) - 1 = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 + \dfrac{2}{\sqrt{5}}(x - y - z) - 1 = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 + \dfrac{2}{\sqrt{5}}(-x + y - z) - 1 = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 + \dfrac{2}{\sqrt{5}}(-x - y + z) - 1 = 0. \end{cases}$$

La première sphère coupe à angle droit les deux plans $x - y = 0$, $x - z = 0$ et sous un angle de 60° le plan $x + y = 0$. Le tétraèdre OABC, limité par ces trois plans et cette sphère, aura donc les angles indiqués sur la *fig.* 8.

Fig. 8.



Assemblons six tétraèdres égaux au précédent autour de l'arête OB, nous formons un tétraèdre OCDE dont les angles auront les valeurs marquées sur la *fig.* 9; réunissons ensuite quatre tétraèdres égaux à celui-là autour du sommet O, nous formons un nouveau tétraèdre CDEF (*fig.* 10), dont les faces appartiennent aux sphères (36) et dont les angles sont égaux à $\frac{2\pi}{3}$. Il suffit évidemment d'ajouter à ce tétraèdre CDEF les quatre tétraèdres symétriques par rapport à chacune de ses faces pour remplir tout l'espace. Par conséquent, *il faudra* $24 \times 5 = 120$ *répétitions symétriques du tétraèdre* OABC *de la fig.* 8 *pour remplir tout l'espace.*

Fig. 9.

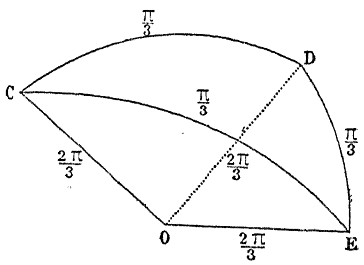
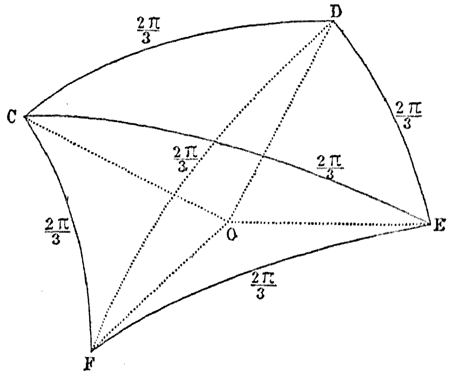


Fig. 10.



Les dix sphères d'inversion auront pour équations, dans le système de coordonnées u_1, u_2, u_3, u_4,

$$(37)\quad \begin{cases} u_2 \pm u_3 = 0, \qquad u_2 \pm u_4 = 0, \qquad u_3 \pm u_4 = 0, \\ \sqrt{5}\,u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 0, \qquad \sqrt{5}\,u_1 + u_2 - u_3 - u_4 = 0, \\ \sqrt{5}\,u_1 - u_2 + u_3 - u_4 = 0, \qquad \sqrt{5}\,u_1 - u_2 - u_3 + u_4 = 0; \end{cases}$$

le système de 120 substitutions orthogonales, isomorphe au groupe (LI), sera dérivé des 4 substitutions fondamentales

$$\begin{array}{lll} (u_1)' = u_1, & (u_1)' = u_1, & (u_1)' = u_1, \\ (u_2)' = u_3, & (u_2)' = -u_3, & (u_2)' = u_2, \\ (u_3)' = u_2, & (u_3)' = -u_2, & (u_3)' = u_4, \\ (u_4)' = u_4; & (u_4)' = u_4; & (u_4)' = u_3; \end{array}$$

$$(u_1)' = u_1 - \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{5}\,u_1 + u_2 + u_3 + u_4}{2\sqrt{2}}\right),$$

$$(u_2)' = u_2 - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{5}\,u_1 + u_2 + u_3 + u_4}{2\sqrt{2}}\right),$$

$$(u_3)' = u_3 - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{5}\,u_1 + u_2 + u_3 + u_4}{2\sqrt{2}}\right),$$

$$(u_4)' = u_4 - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{5}\,u_1 + u_2 + u_3 + u_4}{2\sqrt{2}}\right).$$

27. Les groupes qui viennent d'être considérés contiennent à la fois des transformations droites et des transformations gauches; les transformations droites de chacun des groupes forment de nouveaux groupes, et il est aisé d'avoir les divisions régulières correspondantes de l'espace. Il suffira d'associer chaque tétraèdre à un tétraèdre symétrique par rapport à une de ses faces. Le nombre des régions sera évidemment diminué de moitié.

Considérons quatre sphères de l'un quelconque des systèmes qui viennent d'être étudiés, telles que trois quelconques ne passent pas par un même cercle. Ces quatre sphères décomposent l'espace en seize tétraèdres. Prenons en particulier un de ces tétraèdres; l'angle de deux faces adjacentes est commensurable avec π et les répétitions distinctes de ce tétraèdre par la loi de symétrie sont en nombre *limité*, mais ces répétitions symétriques empiètent en général les unes sur les autres et remplissent l'espace plusieurs fois. Ce n'est que dans les cas qui ont été examinés, où l'angle de deux faces adjacentes quelconques est une partie aliquote de π, que les répétitions symétriques remplissent l'espace une seule fois.

Ces divisions de l'espace, considérées dans la troisième Partie de ce travail, sont analogues, comme on voit, aux divisions de la sphère en triangles ou en quadrilatères au moyen des plans de symétrie d'une double pyramide ou d'un polyèdre régulier. Mais nous n'avons pas épuisé ainsi tous les groupes d'ordre fini de substitutions orthogonales à quatre variables. Il existe donc des divisions régulières de l'espace en un nombre fini de régions qui n'ont pas leurs analogues sur la sphère. Je me propose de revenir sur ces divisions dans un autre travail.

IV.

28. Parmi les notions de Géométrie susceptibles d'être étendues à n dimensions se trouve celle des figures régulières. Dans l'espace à quatre dimensions, en particulier, on sait qu'il existe six polyèdres réguliers [1]. D'un autre côté, le problème de Géométrie traité par

[1] Stringham, *Regular figures in a n dimensional space* (*American Journal of Mathematics*, t. III, p. 1; 1880). — V. Schlegel, *Quelques théorèmes de Géométrie à n dimensions* (*Bulletin de la Société mathématique de France*, t. X, p. 172; 1882).

M. Schwarz, auquel il a été fait allusion plus haut (n° 20), conduit à la recherche des triangles sphériques dont les trois côtés appartiennent à trois plans de symétrie d'un polyèdre régulier. On est donc amené à soupçonner quelque rapport entre la théorie des polyèdres réguliers de l'espace à quatre dimensions et les divisions régulières de l'espace dont il a été question dans les n^{os} 22 à 27. Voici le moyen le plus naturel pour montrer la connexion intime qui existe entre ces deux questions.

Considérons d'abord un polyèdre régulier convexe de l'espace à trois dimensions; les plans menés par les arêtes de ce polyèdre et le centre de la sphère circonscrite décomposent la surface de cette sphère en polygones sphériques réguliers égaux. La recherche des polyèdres réguliers à trois dimensions revient par conséquent à ce problème de Géométrie :

Décomposer la surface d'une sphère en polygones réguliers égaux par des arcs de grand cercle.

Ce problème peut à son tour être remplacé par un problème de Géométrie plane dont il est bien facile d'avoir l'énoncé. En effet, faisons une projection stéréographique de la sphère, divisée comme il vient d'être dit, sur un plan; les arcs de grand cercle auront pour projections des arcs de cercles orthogonaux à un même cercle imaginaire (C'). Le plan se trouvera divisé en un nombre fini de polygones limités par des arcs de cercle orthogonaux à C'. Ces polygones ne seront plus égaux, mais ils seront *congruents;* en d'autres termes, ils pourront se déduire l'un de l'autre par une suite d'inversions. De plus, ils seront tous congruents à un polygone de même nature qui aurait tous ses côtés égaux et tous ses angles égaux. Si donc nous convenons d'appeler *polygone régulier* un polygone limité par des arcs de cercle orthogonaux au cercle imaginaire (C') et congruent à un polygone de même espèce ayant tous ses côtés égaux et tous ses angles égaux, le problème de Géométrie sphérique énoncé plus haut est identique à celui-ci :

Diviser le plan en polygones réguliers congruents recouvrant tout le plan une fois et une seule fois.

Il n'y a plus rien dans cet énoncé qui suppose la notion de l'étendue à trois dimensions, et rien ne nous empêche de nous proposer un problème analogue à celui-là dans l'espace à trois dimensions. Nous aurons ainsi la projection dans cet espace d'un polyèdre régulier de l'espace à quatre dimensions, ou plutôt de la configuration déterminée par ce polyèdre sur l'*hypersphère*

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 = 1.$$

Soit donc (Σ') une sphère imaginaire, par exemple la sphère qui a pour équation

$$x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0;$$

nous appellerons *corps régulier* tout corps limité par des portions de sphères réelles orthogonales à (Σ'), congruent à un corps de même nature dont tous les éléments de même espèce seraient superposables, et dont les faces seraient des polygones sphériques réguliers égaux. On obtiendra un solide de cette espèce en remplaçant les faces planes d'un polyèdre régulier ordinaire par des faces sphériques égales. Remarquons qu'un corps régulier peut parfaitement s'étendre jusqu'à l'infini; par exemple, la portion de l'espace comprise dans la partie positive du trièdre $oxyz$ et extérieure à la sphère

$$x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$$

constitue, d'après notre définition, un corps régulier à quatre faces ou un *tétraèdre régulier*. Cela posé, la détermination des polyèdres réguliers de l'espace à quatre dimensions est équivalente, à notre point de vue, à ce problème de Géométrie à trois dimensions :

Diviser l'espace en corps réguliers congruents, de façon que ces corps réguliers remplissent tout l'espace une fois et une seule fois.

Une fois qu'on aura obtenu un pareil mode de division, on n'aura plus qu'à imaginer les sommets projetés sur l'hypersphère

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 = 1$$

pour avoir les coordonnées des sommets d'un polyèdre régulier dans l'espace à quatre dimensions. On retrouve ainsi sans aucune difficulté les six figures régulières découvertes par M. Stringham.

29. Le tétraèdre CDEF de la *fig.* 10 est évidemment un corps régulier, d'après la manière même dont ce tétraèdre a été obtenu, et il admet les mêmes plans de symétrie que le tétraèdre régulier ordinaire qui a les mêmes sommets, c'est-à-dire les six plans OCD, OCE, OCF, ODE, ODF, OEF. Le tétraèdre symétrique de celui-là par rapport à la face CDE, par exemple, sera un nouveau corps tétraédral régulier, limité par la face CDE et les prolongements des trois plans OCD, ODE, OCE. En opérant de même avec chaque face de CDEF, on voit que l'espace est décomposé en cinq corps tétraédraux réguliers ayant quatre à quatre un sommet commun. Le nombre des sommets de cette figure est égal à cinq, celui des arêtes à dix, ainsi que celui des faces. On a ainsi la projection dans l'espace à trois dimensions du *pentaédroïde* de M. Stringham. Les coordonnées des cinq sommets de ce polyèdre dans l'espace à quatre dimensions sont

$$(u_1 = 1,\ u_2 = u_3 = u_4 = 0),\quad \left(u_1 = -\frac{1}{4},\ u_2 = u_3 = u_4 = -\frac{\sqrt{5}}{4}\right),$$
$$\left(u_1 = -\frac{1}{4},\ u_2 = -u_3 = -u_4 = -\frac{\sqrt{5}}{4}\right),\quad \left(u_1 = -\frac{1}{4},\ u_2 = -u_3 = u_4 = \frac{\sqrt{5}}{4}\right),$$
$$\left(u_1 = -\frac{1}{4},\ u_2 = u_3 = -u_4 = \frac{\sqrt{5}}{4}\right);$$

il admet dix plans de symétrie représentés par les équations (37).

L'octaèdre à faces courbes de la *fig.* 4 ABCA'B'C' est aussi un corps régulier. Cet octaèdre est formé par la réunion de huit tétraèdres OABC congruents au tétraèdre de la *fig.* 3, et il faut, nous l'avons vu, 192 tétraèdres congruents à celui-là ou à son symétrique pour remplir tout l'espace. Il faudra par conséquent $\frac{192}{8} = 24$ octaèdres congruents à l'octaèdre ABCA'B'C' pour remplir tout l'espace; ils se déduiront d'ailleurs du premier par des répétitions symétriques. On a ainsi une division de l'espace en corps octaédraux réguliers assemblés six par six autour d'un sommet commun. La figure a 24 sommets, 96 arêtes et 96 faces, elle constitue la projection de l'*icosatétraédroïde* de M. Stringham. Dans l'espace à quatre dimensions, les sommets auront pour coordonnées

$$\begin{gathered}(u_1 = u_2 = u_3 = 0,\ u_4 = \pm 1),\\ (u_1 = u_2 = u_4 = 0,\ u_3 = \pm 1),\\ (u_1 = u_3 = u_4 = 0,\ u_2 = \pm 1),\\ (u_2 = u_3 = u_4 = 0,\ u_1 = \pm 1),\\ (u_1 = \pm \tfrac{1}{2},\ u_2 = \pm \tfrac{1}{2},\ u_3 = \pm \tfrac{1}{2},\ u_4 = \pm \tfrac{1}{2});\end{gathered}$$

le polyèdre admet 24 plans de symétrie représentés par les équations (33).

La division de l'espace en seize tétraèdres au moyen des trois plans de coordonnées et de la sphère $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ fournit la projection de l'*hexadécaédroïde*. Ces seize tétraèdres sont assemblés huit par huit autour d'un sommet commun; la figure a 8 sommets, 24 arêtes, 32 faces. Dans l'espace à quatre dimensions, les sommets du polyèdre ont pour coordonnées

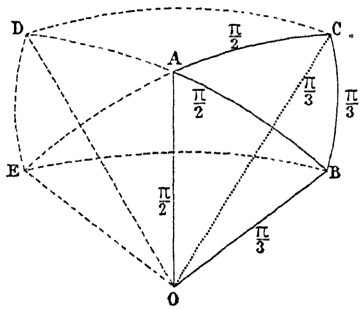
$$\begin{gathered}(u_1 = u_2 = u_3 = 0,\ u_4 = \pm 1),\\ (u_1 = u_2 = u_4 = 0,\ u_3 = \pm 1),\\ (u_1 = u_3 = u_4 = 0,\ u_2 = \pm 1),\\ (u_2 = u_3 = u_4 = 0,\ u_1 = \pm 1);\end{gathered}$$

les plans de symétrie sont au nombre de seize, représentés par les équations

$$\begin{array}{cccc} u_1 = 0, & u_2 = 0, & u_3 = 0, & u_4 = 0,\\ u_1 \pm u_2 = 0, & u_1 \pm u_4 = 0, & u_2 \pm u_4 = 0, & \\ u_1 \pm u_3 = 0, & u_2 \pm u_3 = 0, & u_3 \pm u_4 = 0. & \end{array}$$

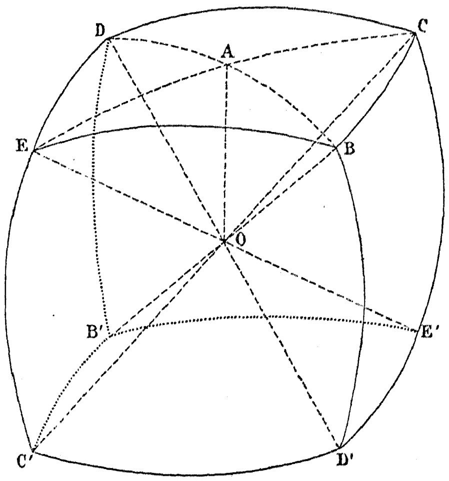
Pour trouver la projection de l'*octaédroïde*, reprenons le tétraèdre OABC congruent au tétraèdre de la *fig.* 3 (*voir* ci-après *fig.* 11); en assemblant quatre tétraèdres égaux à celui-là autour de l'arête OA, on forme une sorte de pyramide OBCDE, limitée par quatre plans qui se coupent suivant des angles égaux à $\frac{2\pi}{3}$, et une face sphérique BCDE, coupant tous ces plans sous un angle égal à $\frac{\pi}{3}$. Si l'on réunit ensuite six pyramides égales à celle-là autour du sommet O, on obtient un corps hexaédral tel que BCDEB'C'D'E' (*fig.* 12), qui est évidemment régulier, et dont deux faces adjacentes se coupent sous un angle égal à $\frac{2\pi}{3}$. Comme il faut 192 tétraèdres congruents à OABC ou à son symétrique

Fig. 11.



pour remplir tout l'espace et que l'hexaèdre précédent en contient 24, il faudra $\frac{192}{24} = 8$ hexaèdres congruents à celui-là pour remplir tout l'espace. Il est aisé de le vérifier; en effet, si l'on prend les symé-

Fig. 12.



triques de l'hexaèdre BCDEB′C′D′E′ par rapport à chacune de ces six faces, on obtient un corps formé de sept hexaèdres, et la partie de l'espace extérieure à ce corps constitue un hexaèdre congruent au premier.

On voit que ces hexaèdres sont assemblés quatre à quatre autour d'un sommet commun; la figure a 16 sommets, 24 faces, 32 arêtes. Dans l'espace à quatre dimensions, les 16 sommets ont pour coordonnées

$$u_1 = \pm \tfrac{1}{2}, \qquad u_2 = \pm \tfrac{1}{2}, \qquad u_3 = \pm \tfrac{1}{2}, \qquad u_4 = \pm \tfrac{1}{2};$$

les plans de symétrie sont les mêmes que pour l'hexadécaédroïde.

30. Considérons enfin la division régulière de l'espace en 14400 tétraèdres congruents au tétraèdre OABC de la *fig.* 7 ou à son symétrique. Les sommets de cette configuration, analogues au sommet O, seront au nombre de $\frac{14400}{120} = 120$, et les sommets analogues au sommet B seront au nombre de $\frac{14400}{24} = 600$. Imaginons qu'autour du sommet O on assemble 120 tétraèdres égaux au tétraèdre OABC ou à son symétrique. On obtient ainsi un corps régulier ayant la forme d'un dodécaèdre à faces sphériques, l'angle de deux faces adjacentes étant égal à $\frac{2\pi}{3}$. Si l'on opère de même autour de chaque sommet analogue au sommet O, on aura divisé l'espace en 120 corps dodécaédraux réguliers congruents. Le polyèdre régulier correspondant de l'espace à quatre dimensions est l'*hécatonicosaédroïde* de M. Stringham; le nombre des sommets est égal à 600 et les dodécaèdres sont assemblés quatre par quatre autour de chaque sommet. Le nombre des faces est égal à 720 et celui des arêtes à 1200.

De même, si, autour de chaque sommet analogue au sommet B, on rassemble les 24 tétraèdres qui ont un de leurs sommets en ce point, on forme un corps tétraédral régulier, dans lequel l'angle de deux faces adjacentes est égal à $\frac{2\pi}{5}$. L'espace se trouve ainsi divisé en 600 tétraèdres assemblés vingt par vingt autour d'un sommet commun; le polyèdre régulier correspondant de l'espace à quatre dimensions est l'*hexacosiaédroïde* de M. Stringham. La figure a 120 sommets, 1200 faces, 720 arêtes. Ces deux derniers polyèdres ont 60 plans de symétrie.

31. On sait que les polyèdres réguliers de l'espace à trois dimen-

sions, cube et octaèdre, dodécaèdre et icosaèdre, peuvent être associés deux à deux, de telle façon que les centres des faces de l'un soient les sommets de l'autre. En d'autres termes, si l'on considère une division de la surface de la sphère en polygones réguliers, les centres de ces polygones sont les sommets d'un autre mode de division de la sphère en polygones réguliers. De même, si nous considérons une des divisions précédentes de l'espace en corps réguliers, les centres de ces corps réguliers sont les sommets d'un autre mode de division de l'espace en corps réguliers. J'appelle *centre* d'un corps régulier le point intérieur à ce corps commun à toutes les sphères orthogonales à la sphère (Σ') qui passent par une arête de ce corps et divisent en deux parties égales l'angle des deux faces adjacentes. Appelons *réciproques* les polyèdres réguliers de l'espace à quatre dimensions qui correspondent à ces deux modes de division de l'espace; le pentaédroïde et l'icosatétraédroïde coïncident avec leurs réciproques. Le polyèdre réciproque de l'octaédroïde est l'hexadécaédroïde et le réciproque de l'hexacosiaédroïde est l'hécatonicosaédroïde.

32. La notion de polyèdre régulier étoilé ne paraît pas avoir été étendue à l'espace à quatre dimensions. Au point de vue où nous nous plaçons, cette extension n'offre aucune difficulté. On sait, en effet, que la construction d'un polyèdre régulier étoilé de l'espace à 3 dimensions équivaut à décomposer la surface de la sphère en polygones sphériques réguliers égaux, ces polygones recouvrant exactement la sphère plusieurs fois, et cela d'une manière uniforme, en sorte que la surface soit partout doublée ou triplée, etc. [1]. Tout pareillement, la construction d'un polyèdre régulier étoilé de l'espace à quatre dimensions revient à diviser l'espace en corps réguliers congruents remplissant l'espace plusieurs fois, de façon qu'un point quelconque appartienne à un même nombre *fini* de ces corps. On aperçoit sans peine plusieurs solutions du problème. Reprenons le dodécaèdre régulier à faces courbes dont il a été question au n° 30; si l'on prolonge les arêtes, on obtient un dodécaèdre régulier étoilé, à faces courbes, analogue au dodécaèdre régulier de deuxième espèce de Poinsot à faces étoilées. Les répétitions

[1] POINSOT, *Journal de l'École Polytechnique*, t. IV, p. 36.

de ce dodécaèdre par la loi de symétrie sont au nombre de 120 et remplissent l'espace deux fois. On conçoit donc l'existence d'un polyèdre régulier étoilé dans l'espace à quatre dimensions formé de 120 dodécaèdres réguliers étoilés, assemblés 12 par 12 autour des sommets.

De même, si l'on prolonge les faces du dodécaèdre convexe à faces courbes du n° 30 jusqu'à la rencontre des faces qui entourent la face opposée, on obtiendra un dodécaèdre étoilé, à faces courbes, analogue au dodécaèdre de troisième espèce à faces convexes de Poinsot. Si l'on prolonge ensuite les arêtes de ce nouveau corps régulier, on obtient un nouveau dodécaèdre à faces courbes analogue au dodécaèdre de quatrième espèce de Poinsot. Les deux corps réguliers ainsi obtenus donnent encore lieu à deux divisions de l'espace en corps réguliers congruents remplissant l'espace plusieurs fois et, par suite, à deux nouveaux polyèdres réguliers étoilés dans l'espace à quatre dimensions.

Dans les exemples précédents, les corps réguliers qui remplissent l'espace plusieurs fois d'une manière uniforme sont analogues aux polyèdres réguliers étoilés ordinaires. Voici maintenant un exemple de division régulière de l'espace par des tétraèdres réguliers à faces sphériques, tels que par chaque point de l'espace passe un même nombre de ces tétraèdres.

Considérons les trois plans de symétrie de l'icosaèdre qui ont pour équations

$$x\sqrt{10+2\sqrt{5}} \pm y(\sqrt{5}-1) = 0, \qquad 2x + z(\sqrt{5}-1) = 0,$$

et la sphère de rayon $R = 2$ qui a pour centre le point de coordonnées

$$x = \frac{4}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}, \qquad y = 0, \qquad z = \frac{3-\sqrt{5}}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}.$$

Cette sphère a son centre sur un axe de symétrie ternaire de l'icosaèdre; elle coupe orthogonalement la sphère imaginaire (Σ') et, sous un angle égal à $\frac{\pi}{3}$, la sphère (Σ) : elle fait donc partie du groupe des 60 sphères dont il a été question au n° 25. Par suite, les répétitions distinctes du tétraèdre, limité par ces trois plans et cette sphère, d'après la loi de symétrie, seront en nombre limité et rempliront l'espace un nombre fini de fois. Mais on vérifie aisément que ce tétraèdre est un corps régulier, l'angle de deux faces adjacentes quelconques étant égal à $\frac{4\pi}{5}$. On est donc conduit à un nouveau polyèdre régulier étoilé de l'espace à quatre dimensions.