C. GUICHARD

Surfaces rapportées à leurs lignes asymptotiques et congruences rapportées à leurs développables

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 6 (1889), p. 333-348
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1889_3_6__333_0>

SURFACES RAPPORTÉES A LEURS LIGNES ASYMPTOTIQUES

ET

CONGRUENCES RAPPORTÉES A LEURS DÉVELOPPABLES,

PAR M. C. GUICHARD,

CHARGÉ D'UN COURS A LA FACULTÉ DE CLERMONT-FERRAND.

Dans cette étude, je définis une droite d'une congruence par les coordonnées de son point central et par ses cosinus directeurs.

En menant par le centre d'une sphère de rayon 1 un rayon parallèle à cette droite, j'obtiens sur la sphère un point qui est la représentation sphérique de la droite. Aux développables de la congruence correspondent des courbes tracées sur la sphère.

Je suis amené ainsi à étudier un système de coordonnées curvilignes quelconque tracé sur la sphère; c'est l'objet du premier paragraphe de ce travail.

Je montre, dans un deuxième paragraphe, comment ce système de courbes doit être particularisé pour qu'il soit la représentation sphérique des lignes asymptotiques d'une surface. Je fais voir ensuite que, lorsque cette représentation sphérique est donnée, les surfaces correspondantes peuvent être obtenues à l'aide de quadratures.

Relativement aux congruences, la représentation sphérique de leurs développables peut former un système de courbes quelconque, et, quand ce système est donné, la détermination des congruences correspondantes se fait à l'aide d'une équation de Laplace.

Si l'on veut que ces développables découpent sur la surface centrale un réseau conjugué, il faut et il suffit que la représentation sphérique des développables soit celle des lignes asymptotiques d'une surface.

Ce théorème permet d'obtenir une série très étendue de surfaces rapportées à leurs lignes asymptotiques. Il suffit pour cela de prendre deux courbes quelconques. A chaque sécante commune aux deux courbes correspond un point de la surface; les lignes asymptotiques correspondent aux cônes, qui ont pour sommet un point d'une courbe et pour base l'autre courbe.

Enfin, si la représentation sphérique des développables est celle des lignes asymptotiques d'une surface à courbure constante, les arêtes de rebroussement des développables sont les lignes de courbure des surfaces focales.

Ce théorème permet d'établir entre certaines surfaces une correspondance réelle, de telle sorte qu'aux lignes asymptotiques de l'une des surfaces correspondent les lignes de courbure sur l'autre.

I. — Coordonnées curvilignes sur la sphère.

Soient α, β, γ les coordonnées d'un point M d'une sphère ayant pour centre l'origine et pour rayon l'unité. Supposons que α, β, γ soient des fonctions de deux variables u et v. Posons, avec Gauss,

$$d\sigma^2 = d\alpha^2 + d\beta^2 + d\gamma^2 = e\,du^2 + 2f\,du\,dv + g\,dv^2,$$

où l'on a

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} e &= \left(\frac{\partial\alpha}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial\beta}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial\gamma}{\partial u}\right)^2,\\ f &= \frac{\partial\alpha}{\partial u}\frac{\partial\alpha}{\partial v} + \frac{\partial\beta}{\partial u}\frac{\partial\beta}{\partial v} + \frac{\partial\gamma}{\partial u}\frac{\partial\gamma}{\partial v},\\ g &= \left(\frac{\partial\alpha}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial\beta}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial\gamma}{\partial v}\right)^2,\end{aligned}\right.$$

auxquelles nous joignons les formules

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} &\alpha\frac{\partial\alpha}{\partial u} + \beta\frac{\partial\beta}{\partial u} + \gamma\frac{\partial\gamma}{\partial u} = 0,\\ &\alpha\frac{\partial\alpha}{\partial v} + \beta\frac{\partial\beta}{\partial v} + \gamma\frac{\partial\gamma}{\partial v} = 0.\end{aligned}\right.$$

En différentiant les formules (1) et (2) par rapport à u et v, on trouve facilement

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned}
&\alpha\frac{\partial^2\alpha}{\partial u^2}+\beta\frac{\partial^2\beta}{\partial u^2}+\gamma\frac{\partial^2\gamma}{\partial u^2}=-e,\\
&\alpha\frac{\partial^2\alpha}{\partial u\,\partial v}+\beta\frac{\partial^2\beta}{\partial u\,\partial v}+\gamma\frac{\partial^2\gamma}{\partial u\,\partial v}=-f,\\
&\alpha\frac{\partial^2\alpha}{\partial v^2}+\beta\frac{\partial^2\beta}{\partial v^2}+\gamma\frac{\partial^2\gamma}{\partial v^2}=-g;\\
&\frac{\partial\alpha}{\partial u}\frac{\partial^2\alpha}{\partial u^2}+\frac{\partial\beta}{\partial u}\frac{\partial^2\beta}{\partial u^2}+\frac{\partial\gamma}{\partial u}\frac{\partial^2\gamma}{\partial u^2}=\frac{1}{2}\frac{\partial e}{\partial u},\\
&\frac{\partial\alpha}{\partial u}\frac{\partial^2\alpha}{\partial u\,\partial v}+\frac{\partial\beta}{\partial u}\frac{\partial^2\beta}{\partial u\,\partial v}+\frac{\partial\gamma}{\partial u}\frac{\partial^2\gamma}{\partial u\,\partial v}=\frac{1}{2}\frac{\partial e}{\partial v},\\
&\frac{\partial\alpha}{\partial u}\frac{\partial^2\alpha}{\partial v^2}+\frac{\partial\beta}{\partial u}\frac{\partial^2\beta}{\partial v^2}+\frac{\partial\gamma}{\partial u}\frac{\partial^2\gamma}{\partial v^2}=\frac{\partial f}{\partial v}-\frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial u},\\
&\frac{\partial\alpha}{\partial v}\frac{\partial^2\alpha}{\partial u^2}+\frac{\partial\beta}{\partial v}\frac{\partial^2\beta}{\partial u^2}+\frac{\partial\gamma}{\partial v}\frac{\partial^2\gamma}{\partial u^2}=\frac{\partial f}{\partial u}-\frac{1}{2}\frac{\partial e}{\partial v},\\
&\frac{\partial\alpha}{\partial v}\frac{\partial^2\alpha}{\partial u\,\partial v}+\frac{\partial\beta}{\partial v}\frac{\partial^2\beta}{\partial u\,\partial v}+\frac{\partial\gamma}{\partial v}\frac{\partial^2\gamma}{\partial u\,\partial v}=\frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial u},\\
&\frac{\partial\alpha}{\partial v}\frac{\partial^2\alpha}{\partial v^2}+\frac{\partial\beta}{\partial v}\frac{\partial^2\beta}{\partial v^2}+\frac{\partial\gamma}{\partial v}\frac{\partial^2\gamma}{\partial v^2}=\frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial v}.
\end{aligned}\right.$$

Cela posé, remarquons que le déterminant

$$\begin{vmatrix}
\alpha & \frac{\partial\alpha}{\partial u} & \frac{\partial\alpha}{\partial v}\\
\beta & \frac{\partial\beta}{\partial u} & \frac{\partial\beta}{\partial v}\\
\gamma & \frac{\partial\gamma}{\partial u} & \frac{\partial\gamma}{\partial v}
\end{vmatrix}$$

est différent de zéro. Il en résulte qu'on peut écrire

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2\alpha}{\partial u^2}&=A\frac{\partial\alpha}{\partial u}+B\frac{\partial\alpha}{\partial v}+P\alpha,\\
\frac{\partial^2\beta}{\partial u^2}&=A\frac{\partial\beta}{\partial u}+B\frac{\partial\beta}{\partial v}+P\beta,\\
\frac{\partial^2\gamma}{\partial u^2}&=A\frac{\partial\gamma}{\partial u}+B\frac{\partial\gamma}{\partial v}+P\gamma.
\end{aligned}$$

Multiplions ces équations par α, β, γ et ajoutons. On aura, en tenant compte des équations (2) et (3),

$$P=-e.$$

En les multipliant d'abord par $\frac{\partial\alpha}{\partial u}$, $\frac{\partial\beta}{\partial u}$, $\frac{\partial\gamma}{\partial u}$, puis par $\frac{\partial\alpha}{\partial v}$, $\frac{\partial\beta}{\partial v}$, $\frac{\partial\gamma}{\partial v}$, on trouve

$$\mathrm{A}e + \mathrm{B}f = \frac{1}{2}\frac{\partial e}{\partial u},$$
$$\mathrm{A}f + \mathrm{B}g = \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial u},$$

ce qui donne A et B.

En opérant de même sur les autres dérivées secondes, on aura le tableau de formules

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial^2\alpha}{\partial u^2} &= \mathrm{A}\frac{\partial\alpha}{\partial u} + \mathrm{B}\frac{\partial\alpha}{\partial v} - e\alpha,\\ \frac{\partial^2\alpha}{\partial u\,\partial v} &= \mathrm{C}\frac{\partial\alpha}{\partial u} + \mathrm{D}\frac{\partial\alpha}{\partial v} - f\alpha,\\ \frac{\partial^2\alpha}{\partial v^2} &= \mathrm{E}\frac{\partial\alpha}{\partial u} + \mathrm{F}\frac{\partial\alpha}{\partial v} - g\alpha, \end{aligned}\right.$$

auxquelles on doit joindre les formules analogues obtenues en remplaçant α soit par β, soit par γ.

Les coefficients qui entrent dans ces équations ont les valeurs suivantes :

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{A} &= \frac{g\frac{\partial e}{\partial u} - 2f\frac{\partial f}{\partial u} + f\frac{\partial e}{\partial v}}{2\Delta},\\ \mathrm{B} &= \frac{-f\frac{\partial e}{\partial u} + 2e\frac{\partial f}{\partial u} - e\frac{\partial e}{\partial v}}{2\Delta},\\ \mathrm{C} &= \frac{g\frac{\partial e}{\partial v} - f\frac{\partial g}{\partial u}}{2\Delta},\\ \mathrm{D} &= \frac{-f\frac{\partial e}{\partial v} + e\frac{\partial g}{\partial u}}{2\Delta},\\ \mathrm{E} &= \frac{2g\frac{\partial f}{\partial v} - g\frac{\partial g}{\partial u} - f\frac{\partial g}{\partial v}}{2\Delta},\\ \mathrm{F} &= \frac{-2f\frac{\partial f}{\partial v} + f\frac{\partial g}{\partial u} + e\frac{\partial g}{\partial v}}{2\Delta},\\ \Delta &= eg - f^2. \end{aligned}\right.$$

Différentions la première des formules (4) par rapport à v, la seconde par rapport à u; puis, dans les résultats obtenus, remplaçons les dérivées secondes par les valeurs données par les formules (4). On trouve

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial^3 \alpha}{\partial u^2 \partial v} &= \frac{\partial \alpha}{\partial u}\left(\frac{\partial A}{\partial v} + AC + BE\right) + \frac{\partial \alpha}{\partial v}\left(AD + \frac{\partial B}{\partial v} + BF - e\right) + \alpha\left(-Af - Bg - \frac{\partial e}{\partial v}\right) \\ &= \frac{\partial \alpha}{\partial u}\left(\frac{\partial C}{\partial u} + CA + DC - f\right) + \frac{\partial \alpha}{\partial v}\left(CB + \frac{\partial D}{\partial u} + D^2\right) + \alpha\left(-Ce - Df - \frac{\partial f}{\partial u}\right). \end{aligned}\right.$$

On aurait de même

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial^3 \alpha}{\partial u\, \partial v^2} &= \frac{\partial \alpha}{\partial u}\left(\frac{\partial C}{\partial v} + C^2 + DE\right) + \frac{\partial \alpha}{\partial v}\left(CD + \frac{\partial D}{\partial v} + DF - f\right) + \alpha\left(-Cf - Dg - \frac{\partial f}{\partial v}\right) \\ &= \frac{\partial \alpha}{\partial u}\left(\frac{\partial E}{\partial u} + EA + FC - g\right) + \frac{\partial \alpha}{\partial v}\left(EB + \frac{\partial F}{\partial u} + FD\right) + \alpha\left(-Ee - Ff - \frac{\partial g}{\partial u}\right). \end{aligned}\right.$$

Les égalités (6) et (7) subsistent quand on y remplace α, soit par β, soit par γ. On en conclut que, dans les formules (6), comme dans les formules (7), les deux coefficients de $\frac{\partial \alpha}{\partial u}$, $\frac{\partial \alpha}{\partial v}$ doivent être les mêmes. On obtient ainsi six équations qui contiennent les dérivées du second ordre de e, f, g. Ces équations ne sont pas toutes distinctes; quelques-unes même sont satisfaites identiquement. Voici comment on peut obtenir la solution la plus générale de ces équations : α, β, γ étant exprimés rationnellement à l'aide de deux variables ξ et η, on prendra pour ξ et η des fonctions arbitraires de u et v. On arrivera ainsi à exprimer e, f, g à l'aide de ces fonctions et de leurs dérivées. Ce sera la solution demandée. Mais, dans l'étude de systèmes particuliers de coordonnées curvilignes, il pourra être avantageux de se servir des équations (6) et (7).

II. — Représentation sphérique des lignes asymptotiques d'une surface.

Soient M un point d'une surface; x, y, z ses coordonnées rectangulaires exprimées en fonction de deux variables u et v. Supposons, de plus, que les courbes $u =$ const., $v =$ const. soient les lignes asymptotiques de la surface. Soient enfin α, β, γ les cosinus directeurs de la normale en M à la surface. On sait que le point m de la sphère de rayon 1 (qui a pour coordonnées α, β, γ) est ce que Gauss appelle la *représentation sphérique* du point M de la surface. Au système des lignes asymptotiques de la surface correspond sur la sphère un système de courbes qui est la représentation sphérique des lignes asymptotiques de la surface. Je me propose d'établir ici la propriété caractéristique de cette représentation sphérique.

En vertu des hypothèses faites, on a les équations

$$(1)\quad \begin{cases} \alpha\dfrac{\partial x}{\partial u}+\beta\dfrac{\partial y}{\partial u}+\gamma\dfrac{\partial z}{\partial u}=0, \\ \alpha\dfrac{\partial x}{\partial v}+\beta\dfrac{\partial y}{\partial v}+\gamma\dfrac{\partial z}{\partial v}=0, \\ \dfrac{\partial \alpha}{\partial u}\dfrac{\partial x}{\partial u}+\dfrac{\partial \beta}{\partial u}\dfrac{\partial y}{\partial u}+\dfrac{\partial \gamma}{\partial u}\dfrac{\partial z}{\partial u}=0, \\ \dfrac{\partial \alpha}{\partial v}\dfrac{\partial x}{\partial v}+\dfrac{\partial \beta}{\partial v}\dfrac{\partial y}{\partial v}+\dfrac{\partial \gamma}{\partial v}\dfrac{\partial z}{\partial v}=0. \end{cases}$$

Déterminons maintenant des fonctions M, N, P qui satisfont aux équations

$$\frac{\partial x}{\partial u}=\mathrm{M}\frac{\partial \alpha}{\partial u}+\mathrm{N}\frac{\partial \alpha}{\partial v}+\mathrm{P}\alpha,$$

$$\frac{\partial y}{\partial u}=\mathrm{M}\frac{\partial \beta}{\partial u}+\mathrm{N}\frac{\partial \beta}{\partial v}+\mathrm{P}\beta,$$

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\mathrm{M}\frac{\partial \gamma}{\partial u}+\mathrm{N}\frac{\partial \gamma}{\partial v}+\mathrm{P}\gamma.$$

Pour cela, multiplions ces équations par α, β, γ et ajoutons. On trouve

$$\mathrm{P}=0.$$

En les multipliant par $\dfrac{\partial \alpha}{\partial u}$, $\dfrac{\partial \beta}{\partial u}$, $\dfrac{\partial \gamma}{\partial u}$ et en ajoutant les produits, on a

$$\mathrm{M}e+\mathrm{N}f=0,$$

ce qui permet de poser

$$\mathrm{M}=hf, \qquad \mathrm{N}=-he.$$

En opérant de même sur $\frac{\partial x}{\partial v}$, $\frac{\partial y}{\partial v}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$, on voit qu'on peut écrire

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial u} &= hf\frac{\partial\alpha}{\partial u} - he\frac{\partial\alpha}{\partial v},\\ \frac{\partial x}{\partial v} &= -\,lg\frac{\partial\alpha}{\partial u} + lf\frac{\partial\alpha}{\partial v},\end{aligned}\right.$$

auxquelles il faudrait joindre les formules analogues obtenues en remplaçant x et α, soit par y et β, soit par z et γ.

Différentions la première des équations (2) par rapport à v et la seconde par rapport à u; puis remplaçons dans les résultats obtenus les dérivées secondes de α par les valeurs données par les formules [(4) § I]; on trouve

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} &= \frac{\partial\alpha}{\partial u}\left[\frac{\partial}{\partial v}(hf) + hfC - heE\right] + \frac{\partial\alpha}{\partial v}\left[hfD - \frac{\partial}{\partial v}(he) - heF\right] + \alpha(-hf^2 + heg)\\ &= \frac{\partial\alpha}{\partial u}\left[-\frac{\partial}{\partial u}(lg) - lgA + lfC\right] + \frac{\partial\alpha}{\partial v}\left[-lgB + \frac{\partial}{\partial u}(lf) + lfD\right] + \alpha(lge - lf^2).\end{aligned}$$

Comme précédemment, on voit que ces deux expressions de $\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}$ doivent être identiques. La comparaison des deux coefficients de α donne d'abord

$$l = h.$$

On voit alors que h doit vérifier les deux équations

$$(3)\qquad \frac{\partial}{\partial v}(hf) + \frac{\partial}{\partial u}(hg) = h(eE - gA),$$

$$(4)\qquad \frac{\partial}{\partial u}(hf) + \frac{\partial}{\partial v}(he) = h(gB - eF).$$

Développons la première de ces équations; on aura

$$\frac{\partial}{\partial v}(hf) + \frac{\partial}{\partial u}(hg) = h\frac{\partial f}{\partial v} + f\frac{\partial h}{\partial v} + h\frac{\partial g}{\partial u} + g\frac{\partial h}{\partial u}$$

et

$$eE - gA = \frac{2ge\frac{\partial f}{\partial v} - ge\frac{\partial g}{\partial u} - ef\frac{\partial g}{\partial v} - g^2\frac{\partial e}{\partial u} + 2gf\frac{\partial f}{\partial u} - gf\frac{\partial e}{\partial v}}{2\Delta}$$

$$= \frac{-g\frac{\partial \Delta}{\partial u} + 2\Delta\frac{\partial f}{\partial v} - f\frac{\partial \Delta}{\partial v}}{2\Delta}.$$

L'équation (3) devient alors

$$2\Delta\left(f\frac{\partial h}{\partial v} + h\frac{\partial g}{\partial u} + g\frac{\partial h}{\partial u}\right) = -hg\frac{\partial \Delta}{\partial u} - hf\frac{\partial \Delta}{\partial v}$$

ou encore

$$-2\Delta h\frac{\partial g}{\partial u} = f\left(2\Delta\frac{\partial h}{\partial v} + h\frac{\partial \Delta}{\partial v}\right) + g\left(2\Delta\frac{\partial h}{\partial u} + h\frac{\partial \Delta}{\partial u}\right).$$

En multipliant les deux membres de cette équation par h, on a

$$-2(\Delta h^2)\frac{\partial g}{\partial u} = f\frac{\partial}{\partial v}(\Delta h^2) + g\frac{\partial}{\partial u}(\Delta h^2).$$

Posons

(5) $$\Delta h^2 = e^{2\lambda}.$$

Il vient

(6) $$-\frac{\partial g}{\partial u} = f\frac{\partial \lambda}{\partial v} + g\frac{\partial \lambda}{\partial u}.$$

On aurait de même, en transformant de la même manière l'équation (2),

(7) $$-\frac{\partial e}{\partial v} = f\frac{\partial \lambda}{\partial u} + e\frac{\partial \lambda}{\partial v}.$$

Les équations (6) et (7) sont équivalentes à celles qui s'en déduisent en les résolvant par rapport à $\frac{\partial \lambda}{\partial u}$, $\frac{\partial \lambda}{\partial v}$; on trouve

$$\frac{\partial \lambda}{\partial u} = \frac{-e\frac{\partial g}{\partial u} + f\frac{\partial e}{\partial v}}{\Delta} = -2D,$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial v} = \frac{f\frac{\partial g}{\partial u} - g\frac{\partial e}{\partial v}}{\Delta} = -2C,$$

d'où

$$\frac{\partial C}{\partial u} = \frac{\partial D}{\partial v}. \tag{8}$$

Réciproquement, si la relation (8) est satisfaite, les équations (3) et (4) sont compatibles. Donc :

Pour qu'un système de courbes tracées sur la sphère soit la représentation sphérique des lignes asymptotiques d'une surface, il faut et il suffit que ce système soit tel que l'on ait

$$\frac{\partial C}{\partial u} = \frac{\partial D}{\partial v}.$$

Je ferai, sur ce sujet, les deux remarques suivantes :

1° Si l'on se donne sur la sphère un système de courbes satisfaisant à la relation (8), on pourra, à l'aide de quadratures, déterminer λ par la formule

$$d\lambda = -2(D\,du + C\,dv), \tag{9}$$

ce qui donne λ à une constante près, puis, en vertu de l'équation (5), h à un facteur constant près. Les équations (2) donneront ensuite x, y, z par des quadratures. On voit, d'après cela, que, lorsque la représentation sphérique des lignes asymptotiques d'une surface est donnée, on peut déterminer cette surface par une suite de quadratures; de plus, toutes les surfaces ainsi obtenues peuvent se déduire de l'une d'entre elles par une homothétie suivie d'une translation.

2° Si l'on exprime α, β, γ en fonction rationnelle de deux paramètres ξ, η, qui sont des fonctions de u et v; e, f, g contiendront les dérivées premières de ξ, η, de sorte que (8) contiendra les dérivées du troisième ordre de ξ et η. La résolution de cette équation du troisième ordre permettrait de rapporter toutes les surfaces à leurs lignes asymptotiques. La résolution de cette équation paraît impossible; il semble même qu'il est difficile d'en obtenir des solutions particulières ayant cependant une grande généralité. Cependant, dans le cours de ce travail, nous trouverons une série assez étendue de surfaces rapportées à leurs lignes asymptotiques.

Les équations (2) permettent de former simplement le ds^2 de la surface; on trouve

$$ds^2 = \Delta h^2 (e\, du^2 - f\, du\, dv + g\, dv^2),$$

l'arc de la représentation sphérique étant donné par la formule

$$d\sigma^2 = e\, du^2 + 2f\, du\, dv + g\, dv^2.$$

La comparaison de ces deux formules donne, pour le rayon de torsion des lignes asymptotiques,

$$\mathrm{T} = \sqrt{\Delta h^2}.$$

Enfin l'équation du second degré qui donne les rayons de courbure de la surface est

$$\rho^2 + 2\rho h f - h^2 \Delta = 0.$$

Si la surface a une courbure constante, $h^2\Delta$ est constant; alors C et D sont nuls. On en déduit

$$\frac{\partial e}{\partial v} = 0, \qquad \frac{\partial g}{\partial u} = 0.$$

En choisissant convenablement les variables u et v, on pourra poser

$$e = 1, \qquad g = 1.$$

Les équations (6), (7) du § I se réduisent alors à

$$(1 - f^2)\frac{\partial^2 f}{\partial u\, \partial v} + f \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial v} = (1 - f^2)^2.$$

III. — Représentation sphérique d'une congruence de droites.

Soient

D une droite de la congruence;
F, F′ les points focaux;
C le milieu de F, F′;
x, y, z les coordonnées rectangulaires du point C;
α, β, γ les cosinus directeurs de la droite D;
ρ la longueur CF.

Supposons ces quantités exprimées en fonction de deux variables u

et v; supposons, de plus, que les surfaces réglées $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$ soient les développables de la congruence. Le point de la sphère de rayon 1, qui a pour coordonnées α, β, γ, est ce que j'appelle la représentation sphérique de la droite D; enfin les courbes $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$, tracées sur la sphère, seront la représentation sphérique de la congruence.

Le point F a pour coordonnées

$$x + \rho\alpha, \quad y + \rho\beta, \quad z + \rho\gamma$$

et le point F′

$$x - \rho\alpha, \quad y - \rho\beta, \quad z - \rho\gamma.$$

On peut donc poser les équations

$$\frac{\partial(x + \rho\alpha)}{\partial u} = h\alpha, \qquad \frac{\partial(y + \rho\beta)}{\partial u} = h\beta, \qquad \frac{\partial(z + \rho\gamma)}{\partial u} = h\gamma,$$
$$\frac{\partial(x - \rho\alpha)}{\partial v} = l\alpha, \qquad \frac{\partial(y + \rho\beta)}{\partial v} = l\beta, \qquad \frac{\partial(z - \rho\gamma)}{dv} = l\gamma;$$

d'où l'on tire

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial u} &= \left(h - \frac{\partial\rho}{\partial u}\right)\alpha - \rho\frac{\partial\alpha}{\partial u}, \\ \frac{\partial x}{\partial v} &= \left(l + \frac{\partial\rho}{\partial v}\right)\alpha + \rho\frac{\partial\alpha}{\partial v} \end{aligned} \right.$$

et les formules analogues pour y et z.

Différentions la première de ces équations par rapport à v, la seconde par rapport à u, et remplaçons les dérivées secondes de α par les valeurs fournies par les équations [(4), § I]. On a

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} &= \frac{\partial\alpha}{\partial u}\left(-\frac{\partial\rho}{\partial v} - \rho\mathrm{C}\right) + \frac{\partial\alpha}{\partial v}\left(h - \frac{\partial\rho}{\partial u} - \rho\mathrm{D}\right) + \alpha\left(\frac{\partial h}{\partial v} - \frac{\partial^2\rho}{\partial u\,\partial v} + \rho f\right) \\ &= \frac{\partial\alpha}{\partial u}\left(l + \frac{\partial\rho}{\partial v} + \rho\mathrm{C}\right) + \frac{\partial\alpha}{\partial v}\left(\frac{\partial\rho}{\partial u} + \rho\mathrm{D}\right) + \alpha\left(\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial^2\rho}{\partial u\,\partial v} - \rho f\right). \end{aligned}$$

Ces deux expressions devant être identiques, on aura

$$(2) \qquad l = -2\left(\frac{\partial\rho}{\partial v} + \rho\mathrm{C}\right),$$

$$(3) \qquad h = +2\left(\frac{\partial\rho}{\partial u} + \rho\mathrm{D}\right)$$

et

$$\frac{\partial h}{\partial v} - \frac{\partial f}{\partial u} = 2\frac{\partial^2 \rho}{\partial u\,\partial v} - 2\rho f.$$

En éliminant l et h entre ces équations, on trouve

$$(4)\qquad \frac{\partial^2 \rho}{\partial u\,\partial v} + C\frac{\partial \rho}{\partial u} + D\frac{\partial \rho}{\partial v} + \rho\left(\frac{\partial C}{\partial u} + \frac{\partial D}{\partial v} + f\right).$$

On voit ainsi qu'on peut se donner arbitrairement la représentation sphérique d'une congruence; pour déterminer la congruence correspondante, il faudra résoudre l'équation de Laplace (4); le problème s'achèvera par une quadrature.

Si l'on voulait avoir toutes les congruences, telles que les arêtes de rebroussement de leurs développables soient des hélices, il faudrait prendre comme représentation sphérique deux séries de cercles.

IV. — Cas où les développables de la congruence découpent un réseau conjugué sur la surface centrale.

En tenant compte des équations (2), (3), (4), on peut écrire ainsi la valeur de $\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}$:

$$(5)\quad \frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} = \frac{\partial \alpha}{\partial u}\left(-\frac{\partial \rho}{\partial v} - \rho C\right) + \frac{\partial \alpha}{\partial v}\left(\frac{\partial \rho}{\partial u} + \rho D\right) + \alpha\left(D\frac{\partial \rho}{\partial v} - C\frac{\partial \rho}{\partial u} + \rho\frac{\partial D}{\partial v} - \rho\frac{\partial c}{\partial u}\right).$$

Si sur la surface centrale, lieu des points C, les courbes $u =$ const., $v =$ const. forment un réseau conjugué, on doit pouvoir poser

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} = P\frac{\partial x}{\partial u} + Q\frac{\partial x}{\partial v}$$

avec les formules analogues pour y et z. La comparaison des formules (1) et (5) donne

$$P = C + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial v},$$

$$Q = D + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial u}.$$

On aura, en égalant les coefficients de α,

$$D\frac{\partial\rho}{\partial v} - C\frac{\partial\rho}{\partial u} + \rho\frac{\partial D}{\partial v} - \rho\frac{\partial C}{\partial u}$$
$$= \left(C + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial\rho}{\partial u} + 2\rho D\right) - \left(D + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial\rho}{\partial v} + 2\rho C\right)$$

et, en simplifiant,

$$\frac{\partial C}{\partial u} = \frac{\partial D}{\partial v}.$$

Donc :

Pour que les développables de la congruence découpent un réseau conjugué sur la surface centrale, il faut et il suffit que la représentation sphérique de la congruence soit celle des lignes asymptotiques d'une surface.

Inversement, si l'on connaît une congruence jouissant de la propriété indiquée, on pourra, à l'aide de quadratures seulement, en déduire une surface rapportée à ses lignes asymptotiques.

Or on sait que cette propriété existe dans le cas particulier où la surface focale se compose de deux courbes. Indiquons rapidement comment on détermine dans ce cas la surface correspondante.

Soient $\varphi(u)$, $\varphi_1(u)$, $\varphi_2(u)$ les coordonnées d'un point de la première courbe; $-\psi(v)$, $-\psi_1(v)$, $-\psi_2(v)$ celles d'un point de la deuxième courbe. On aura

$$\alpha = \frac{\varphi + \psi}{2\rho}, \qquad \beta = \frac{\varphi_1 + \psi_1}{2\rho}, \qquad \gamma = \frac{\varphi_2 + \psi_2}{2\rho},$$
$$4\rho^2 = (\varphi + \psi)^2 + (\varphi_1 + \psi_1)^2 + (\varphi_2 + \psi_2)^2.$$

Ces équations permettent de calculer les quantités e, f, g. D'autre part, pour la congruence spéciale que nous considérons ici, on a $l = 0$, $h = 0$; ce qui donne

$$C = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial v}, \qquad D = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial u}.$$

La formule (9) du § II devient

$$d\lambda = \frac{2\,d\rho}{\rho}$$

et, par suite,

$$\Delta h^2 = e^{2\lambda} = \frac{\rho^4}{p^2},$$

p étant une constante ; cette formule donne h. Les formules (1) du § II donnent ensuite x par une quadrature.

A une congruence linéaire cette méthode fait correspondre un paraboloïde dont les plans directeurs sont perpendiculaires aux directrices de la congruence.

A une droite et une courbe correspondent des surfaces réglées à plan directeur; le plan directeur est perpendiculaire à la droite. Toutes les surfaces réglées à plan directeur peuvent être obtenues par cette méthode.

V. — Cas où les arêtes de rebroussement des développables de la congruence sont lignes de courbure des surfaces focales.

Soient X, Y, Z les coordonnées du foyer F. On a

$$X = x + \rho\alpha, \qquad Y = y + \rho\beta, \qquad Z = z + \rho\gamma,$$

ce qui donne

$$\frac{\partial X}{\partial u} = h\alpha = 2\left(\frac{\partial \rho}{\partial u} + \rho D\right)\alpha,$$

$$\frac{\partial X}{\partial v} = \left(l + 2\frac{\partial \rho}{\partial v}\right)\alpha + 2\rho\frac{\partial \alpha}{\partial v} = -2\rho C\alpha + 2\rho\frac{\partial \alpha}{\partial v},$$

avec les formules analogues pour Y, Z. Ces formules permettraient de vérifier très simplement que les courbes $u =$ const., $v =$ const. sont conjuguées; si ces courbes sont rectangulaires, elles seront les lignes de courbure de la surface lieu de F. La condition d'orthogonalité donne

$$C = 0.$$

Si la même propriété subsiste pour la seconde surface focale, on aura aussi

$$D = 0.$$

Ces deux conditions réunies montrent que la représentation sphérique de la congruence est celle des lignes asymptotiques d'une surface à courbure constante.

Dans ce cas particulier, ρ est donné par l'équation

$$\frac{\partial^2\rho}{\partial u\,\partial v}+\rho f=0, \tag{6}$$

et l'on a, pour la surface F,

$$\left\{\begin{aligned}\frac{\partial X}{\partial u}&=2\frac{\partial\rho}{\partial u}\alpha,\\ \frac{\partial X}{\partial v}&=2\rho\frac{\partial\alpha}{\partial v}.\end{aligned}\right. \tag{7}$$

Ainsi :

Si l'on connaît une surface à courbure constante rapportée à ses lignes asymptotiques et une solution quelconque de l'équation correspondante (6), *les formules* (7) *donneront par quadrature une surface* F.

La correspondance entre ces deux surfaces est réelle, et aux lignes asymptotiques de la surface donnée correspondent les lignes de courbure de la surface F.

Les surfaces F ainsi obtenues sont évidemment des surfaces particulières. Si, en effet, on prend une surface quelconque S, les tangentes aux lignes de courbure de S ne rencontrent pas la seconde nappe focale suivant une ligne de courbure.

Inversement, si l'on se donne une surface jouissant de la propriété de F, on pourra par des quadratures y faire correspondre une surface à courbure constante.

Ces surfaces F jouissent d'une propriété curieuse que j'établirai dans un prochain Mémoire. L'une des nappes de la surface, lieu des centres de courbure de F, est telle qu'on peut y tracer un système de courbes conjuguées formées de géodésiques.

Il est facile d'avoir des solutions particulières de l'équation aux dérivées partielles (6). En se reportant aux formules (4) du § I, on voit que α, β, γ sont des solutions de l'équation (6). Si l'on prend pour ρ la solution particulière α, on a une congruence spéciale, de la nature de celles que nous étudions dans ce paragraphe et dont la surface centrale est un plan. En effet, les formules (1), (2), (3) du § V donnent, dans ce cas,

$$\frac{\partial x}{\partial u} = 0, \qquad \frac{\partial x}{\partial v} = 0.$$

La surface centrale est un plan parallèle au plan des yz.