ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

P. DUHEM

Sur l'équivalence des courants et des aimants

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 6 (1889), p. 297-326
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1889_3_6__297_0>

SUR L'ÉQUIVALENCE

DES

COURANTS ET DES AIMANTS,

Par P. DUHEM.

§ I. — Introduction.

Ampère a montré le premier qu'un courant fermé et uniforme exerçait soit sur un pôle d'aimant, soit sur un élément de courant, les mêmes actions qu'un feuillet magnétique ayant pour contour le conducteur linéaire dans lequel circule le courant.

Cette découverte d'Ampère conduit à se poser la question suivante :

Dans quels cas un conducteur traversé par des courants quelconques exerce-t-il soit sur un élément magnétique, soit sur un élément de courant, les mêmes actions qu'un aimant contenu en entier à l'intérieur de la surface qui limite le conducteur?

C'est cette question que nous nous proposons d'examiner dans ce qui va suivre.

Auparavant, nous allons indiquer quelques remarques sur la détermination d'un aimant dont on connaît à l'extérieur la fonction potentielle magnétique.

Soient x, y, z les coordonnées d'un point d'un aimant; soient $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ les composantes de l'aimantation en ce point; soient ξ, η, ζ les coordonnées d'un point quelconque, et r la distance des deux points (x, y, z) et (ξ, η, ζ). La quantité

$$\mathcal{V}(\xi, \eta, \zeta) = \int\int\int\left(\mathcal{A}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x} + \mathcal{B}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y} + \mathcal{C}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz$$

est la *fonction potentielle magnétique* au point (ξ, η, ζ).

Si l'on se donne un aimant, sa fonction potentielle magnétique est, en tout point extérieur à l'aimant, finie, continue et uniforme ainsi que ses dérivées partielles de tous les ordres; lorsque la distance R du point (ξ, η, ζ) à l'origine croît au delà de toute limite, les quantités

$$R\varphi, \quad R^2\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}, \quad R^2\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}, \quad R^2\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta}$$

ne croissent pas au delà de toute limite; enfin, en tout point extérieur à l'aimant, on a

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial\eta^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial\zeta^2} = 0.$$

Réciproquement, *étant donnée une fonction* $\varphi(\xi, \eta, \zeta)$, *qui, en tout point extérieur à une surface fermée* S, *est soumise aux conditions précédentes, peut-on, à l'intérieur de la surface* S, *former un aimant qui ait pour fonction potentielle magnétique à l'extérieur de la surface* S *la quantité* $\varphi(\xi, \eta, \zeta)$?

Il est facile de voir que l'on peut former une infinité de semblables aimants.

Donnons-nous arbitrairement une fonction $f(x, y, z)$ qui, en tout point (x, y, z) intérieur à la surface S, soit uniforme, finie et continue, ainsi que ses dérivées partielles du premier et du second ordre.

D'après le principe de Dirichlet, il existe une et une seule fonction $\upsilon(x, y, z)$ soumise aux conditions suivantes :

1° La fonction $\upsilon(x, y, z)$ est finie, uniforme et continue, ainsi que ses dérivées partielles du premier et du second ordre, en tout point (x, y, z) intérieur à la surface S.

2° En tout point intérieur à la surface S, on a

$$\Delta\,\upsilon(x, y, z) = \Delta f(x, y, z).$$

3° En tout point de la surface S, on a

$$\upsilon = \varphi.$$

D'après ce même principe de Dirichlet, il existe une infinité de fonctions $\Phi(x, y, z)$, différant les unes des autres seulement par une constante additive et soumises aux conditions suivantes :

1° La fonction $\Phi(x, y, z)$ est finie, continue et uniforme, ainsi que ses dérivées partielles du premier et du second ordre en tout point (x, y, z) intérieur à la surface S.

2° En tout point intérieur à la surface S, on a

$$\Delta \Phi(x, y, z) = \Delta f(x, y, z).$$

3° En tout point de la surface S, on a

$$\frac{\partial \Phi}{\partial N_i} = \frac{\partial \varphi}{\partial N_e} + \frac{\partial \upsilon}{\partial N_i}.$$

Prenons l'une quelconque de ces fonctions Φ et posons

$$\mathcal{A} = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \Phi}{\partial x},$$

$$\mathcal{B} = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \Phi}{\partial y},$$

$$\mathcal{C} = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \Phi}{\partial z};$$

$\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ seront, au point (x, y, z), les composantes de l'aimantation d'un certain aimant limité à la surface S.

Prenons une fonction qui soit, en tout point (ξ, η, ζ), extérieur à l'aimant, égale à $\varphi(\xi, \eta, \zeta)$ et, en tout point (x, y, z) intérieur à l'aimant, égale à $\upsilon(x, y, z)$. Cette fonction sera la fonction potentielle magnétique de l'aimant que nous venons de définir.

En effet :

1° La fonction potentielle magnétique Ψ de notre aimant doit être soumise aux conditions suivantes :

Elle doit être finie, continue et uniforme dans tout l'espace.

Ses dérivées partielles des deux premiers ordres doivent être finies, continues et uniformes dans tout l'espace extérieur à la surface S et dans tout l'espace intérieur à la surface S.

A l'infini, les quantités $R\Psi$, $R^2 \frac{\partial \Psi}{\partial \xi}$, $R^2 \frac{\partial \Psi}{\partial \eta}$, $R^2 \frac{\partial \Psi}{\partial \zeta}$ doivent demeurer finies.

En tout point de l'espace extérieur à la surface S, on doit avoir

$$\Delta \Psi = 0.$$

En tout point intérieur à la surface S, on doit avoir

$$\Delta \mathfrak{V} = 4\pi \left(\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial z} \right).$$

En tout point de la surface S, on doit avoir

$$\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial N_e} + \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial N_i} = 4\pi [\mathcal{A} \cos(N_i, x) + \mathcal{B} \cos(N_i, y) + \mathcal{C} \cos(N_i, z)].$$

2° Deux fonctions distinctes ne peuvent à la fois vérifier toutes ces conditions.

3° La fonction qui est égale à $\varphi(\xi, \eta, \zeta)$ à l'extérieur de la surface S et à $\mho(x, y, z)$ à l'intérieur vérifie toutes ces conditions.

Nous avons donc défini un aimant dont la fonction potentielle est égale en tout point extérieur (ξ, η, ζ) à $\varphi(\xi, \eta, \zeta)$. A chaque fonction $f(x, y, z)$ arbitrairement choisie correspond un semblable aimant. Il en existe donc bien une infinité, comme nous l'avions annoncé.

On voit de plus aisément que la méthode précédente donne tous les aimants intérieurs à la surface S, qui admettent à l'extérieur de cette surface la fonction potentielle donnée, et pour lesquels les composantes de l'aimantation sont, en tout point, les trois dérivées partielles d'une même fonction des coordonnées de ce point.

§ II. — Formules fondamentales de l'Électrodynamique et de l'Électromagnétisme.

Les formules dont nous allons faire usage pour l'examen de la question que nous avons posée au début du paragraphe précédent ont été données déjà dans deux Mémoires consacrés, l'un à l'étude de l'Électrodynamique, l'autre à l'étude de l'Électromagnétisme (1). Nous allons les rappeler ici en renvoyant aux deux Mémoires dont il s'agit pour l'exposé des méthodes qui permettent de les démontrer.

(1) P. Duhem, *Applications de la Thermodynamique aux actions qui s'exercent entre les courants électriques* (*Acta Societatis Scientiarum Fennicæ*, t. XVI. Helsingfors, 1887). — *Applications de la Thermodynamique aux actions qui s'exercent entre les courants électriques et les aimants* (*Acta Societatis Scientiarum Fennicæ*, t. XVII. Helsingfors, 1888).

Soient u', v', w' les composantes du flux électrique en un point de coordonnées x', y', z', d'un conducteur traversé par des courants quelconques. Soit r la distance du point (x', y', z') à un autre point (x, y, z). Soit λ la constante introduite par M. H. von Helmholtz dans l'étude de l'Électrodynamique.

Posons

$$\left\{\begin{aligned}
\mathfrak{U}(x,y,z) = {} & \frac{1+\lambda}{2}\iiint \frac{u'}{r}\,dx'\,dy'\,dz' \\
& + \frac{1-\lambda}{2}\iiint \frac{x'-x}{r^3}[u'(x'-x)+v'(y'-y)+w'(z'-z)]\,dx'\,dy'\,dz', \\
\mathfrak{V}(x,y,z) = {} & \frac{1+\lambda}{2}\iiint \frac{v'}{r}\,dx'\,dy'\,dz' \\
& + \frac{1-\lambda}{2}\iiint \frac{y'-y}{r^3}[u'(x'-x)+v'(y'-y)+w'(z'-z)]\,dx'\,dy'\,dz', \\
\mathfrak{W}(x,y,z) = {} & \frac{1+\lambda}{2}\iiint \frac{w'}{r}\,dx'\,dy'\,dz' \\
& + \frac{1-\lambda}{2}\iiint \frac{z'-z}{r^3}[u'(x'-x)+v'(y'-y)+w'(z'-z)]\,dx'\,dy'\,dz'.
\end{aligned}\right.$$

Soient u, v, w les composantes du flux électrique en un point (x, y, z). Le potentiel électrodynamique d'un système renfermant des courants quelconques a pour expression

$$\Pi = -\frac{A}{2}\iiint(\mathfrak{U}u + \mathfrak{V}v + \mathfrak{W}w)\,dx\,dy\,dz, \tag{2}$$

A étant une constante et l'intégration s'étendant au système tout entier.

Posons

$$\left\{\begin{aligned}
\mathfrak{P}(x,y,z) &= \iiint\left(v'\frac{z'-z}{r^3} - w'\frac{y'-y}{r^3}\right)dx'\,dy'\,dz', \\
\mathfrak{Q}(x,y,z) &= \iiint\left(w'\frac{x'-x}{r^3} - u'\frac{z'-z}{r^3}\right)dx'\,dy'\,dz', \\
\mathfrak{R}(x,y,z) &= \iiint\left(u'\frac{y'-y}{r^3} - v'\frac{x'-x}{r^3}\right)dx'\,dy'\,dz'.
\end{aligned}\right. \tag{3}$$

L'action exercée par un conducteur parcouru par des courants quelconques sur un élément de courant $dx\,dy\,dz$, placé au point (x, y, z) et parcouru par un flux électrique dont les composantes sont u, v, w, se réduit à une force appliquée à l'élément $dx\,dy\,dz$. Cette force a pour composantes

$$(4)\qquad \begin{cases} X = X_1 + X_2, \\ Y = Y_1 + Y_2, \\ Z = Z_1 + Z_2, \end{cases}$$

et l'on a

$$(5)\qquad \begin{cases} X_1 = A\,[\mathfrak{Q}(x, y, z)\,w - \mathfrak{R}(x, y, z)\,v]\,dx\,dy\,dz, \\ Y_1 = A\,[\mathfrak{R}(x, y, z)\,u - \mathfrak{P}(x, y, z)\,w]\,dx\,dy\,dz, \\ Z_1 = A\,[\mathfrak{P}(x, y, z)\,v - \mathfrak{Q}(x, y, z)\,u]\,dx\,dy\,dz \end{cases}$$

et

$$(6)\qquad \begin{cases} X_2 = -A\,\mathfrak{U}(x, y, z)\left(\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz, \\ Y_2 = -A\,\mathfrak{V}(x, y, z)\left(\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz, \\ Z_2 = -A\,\mathfrak{W}(x, y, z)\left(\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz. \end{cases}$$

Soient $\mathcal{A}'$, $\mathcal{B}'$, $\mathcal{C}'$ les composantes de l'aimantation d'un aimant en un point (x', y', z). Soit r la distance du point (x', y', z') au point (x, y, z). Posons

$$(7)\qquad V(x, y, z) = \int\!\!\int\!\!\int\left(\mathcal{A}'\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x'} + \mathcal{B}'\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y'} + \mathcal{C}'\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z'}\right)dx'\,dy'\,dz'.$$

Si au point (x, y, z) se trouve un élément magnétique $dx\,dy\,dz$, dont l'aimantation ait pour composantes $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, les actions exercées par l'aimant considéré sur cet élément admettent un potentiel qui a pour expression

$$(8)\qquad P = h\left(\mathcal{A}\frac{\partial V}{\partial x} + \mathcal{B}\frac{\partial V}{\partial y} + \mathcal{C}\frac{\partial V}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz,$$

h étant une constante.

Posons

$$
(9)\qquad
\left\{
\begin{aligned}
\varphi &= \mathcal{B}' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z'} - \mathcal{C}' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y'},\\
\psi &= \mathcal{C}' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'} - \mathcal{A}' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z'},\\
\theta &= \mathcal{A}' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y'} - \mathcal{B}' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'}
\end{aligned}
\right.
$$

et

$$
(10)\qquad
\left\{
\begin{aligned}
\Phi(x, y, z) &= \iiint \varphi \, dx' dy' dz',\\
\Psi(x, y, z) &= \iiint \psi \, dx' dy' dz',\\
\Theta(x, y, z) &= \iiint \theta \, dx' dy' dz'.
\end{aligned}
\right.
$$

Considérons en outre un conducteur traversé par des courants. Soit, au point (x, y, z), un élément $dx\,dy\,dz$ de ce conducteur. Soient u, v, w les composantes du flux électrique au point (x, y, z). Le potentiel électromagnétique de l'aimant et du conducteur pourra se mettre sous la forme

$$
(11)\qquad \Omega = \mathrm{H} \iiint [\Phi(x, y, z)\, u + \Psi(x, y, z)\, v + \Theta(x, y, z)\, w]\, dx\, dy\, dz,
$$

l'intégration s'étendant au conducteur et H étant une constante.

L'élément $dx'\, dy'\, dz'$ de l'aimant exercera sur l'élément $dx\, dy\, dz$ du conducteur une action réductible à une force appliquée à l'élément du conducteur. Cette force aura pour composantes

$$
(12)\qquad
\left\{
\begin{aligned}
\mathrm{X} &= \mathrm{X}_1 + \mathrm{X}_2,\\
\mathrm{Y} &= \mathrm{Y}_1 + \mathrm{Y}_2,\\
\mathrm{Z} &= \mathrm{Z}_1 + \mathrm{Z}_2,
\end{aligned}
\right.
$$

et l'on a

$$
3)\qquad
\left\{
\begin{aligned}
\mathrm{X}_1 &= 3\mathrm{H}\left[\left(\varphi \frac{y'-y}{r^2} - \psi \frac{x'-x}{r^2}\right) v - \left(\theta \frac{x'-x}{r^2} - \varphi \frac{z'-z}{r^2}\right) w\right] dx\,dy\,dz\,dx'\,dy'\,dz'\\
\mathrm{Y}_1 &= 3\mathrm{H}\left[\left(\psi \frac{z'-z}{r^2} - \theta \frac{y'-y}{r^2}\right) w - \left(\varphi \frac{y'-y}{r^2} - \psi \frac{x'-x}{r^2}\right) u\right] dx\,dy\,dz\,dx'\,dy'\,dz'\\
\mathrm{Z}_1 &= 3\mathrm{H}\left[\left(\theta \frac{x'-x}{r^2} - \varphi \frac{z'-z}{r^2}\right) u - \left(\psi \frac{z'-z}{r^2} - \theta \frac{y'-y}{r^2}\right) v\right] dx\,dy\,dz\,dx'\,dy'\,dz'
\end{aligned}
\right.
$$

avec

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned} X_2 &= -H\varphi\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz\,dx'\,dy'\,dz',\\ Y_2 &= -H\psi\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz\,dx'\,dy'\,dz',\\ Z_2 &= -H\theta\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{dz}\right)dx\,dy\,dz\,dx'\,dy'\,dz'. \end{aligned}\right.$$

Considérons enfin un conducteur traversé par des courants. Soit (x', y', z') un point de ce conducteur. Soient u', v', w' les composantes du flux électrique en ce point. Soit r la distance du point (x', y', z') à un autre point (x, y, z). Posons

$$(15)\quad \left\{\begin{aligned} f &= v'\,\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z'} - w'\,\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y'},\\ g &= w'\,\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x'} - u'\,\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z'},\\ h &= u'\,\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y'} - v'\,\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x'} \end{aligned}\right.$$

et

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned} F(x, y, z) &= \iiint f\,dx'\,dy'\,dz',\\ G(x, y, z) &= \iiint g\,dx'\,dy'\,dz',\\ H(x, y, z) &= \iiint h\,dx'\,dy'\,dz'. \end{aligned}\right.$$

Supposons qu'au point (x, y, z) se trouve un élément magnétique $dx\,dy\,dz$. Soient $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ les composantes de l'aimantation. Les actions exercées par le conducteur sur l'élément magnétique admettent un potentiel qui a pour expression

$$(17)\quad Q = H[\mathcal{A}\,F(x, y, z) + \mathcal{B}\,G(x, y, z) + \mathcal{C}\,H(x, y, z)]\,dx\,dy\,dz.$$

Ces actions se composent d'une force appliquée à l'élément magnétique et d'un couple.

L'axe du couple a pour composantes

$$(18)\quad \left\{\begin{aligned} L &= H[\mathcal{C}\,G(x, y, z) - \mathcal{B}\,H(x, y, z)]\,dx\,dy\,dz,\\ M &= H[\mathcal{A}\,H(x, y, z) - \mathcal{C}\,F(x, y, z)]\,dx\,dy\,dz,\\ N &= H[\mathcal{B}\,F(x, y, z) - \mathcal{A}\,G(x, y, z)]\,dx\,dy\,dz. \end{aligned}\right.$$

La force a pour composantes

$$(19)\qquad \begin{cases} X = X_1 + X_2, \\ Y = Y_1 + Y_2, \\ Z = Z_1 + Z_2, \end{cases}$$

et l'on a

$$(20)\quad \begin{cases} X_1 = \mathrm{H}\, dx\, dy\, dz \left(\mathfrak{B}\iiint \frac{w'}{r^3}\, dx'\, dy'\, dz' - \mathfrak{C}\iiint \frac{v'}{r^3}\, dx'\, dy'\, dz'\right) \\ \qquad -3\mathrm{H}\, dx dy dz \left(\mathfrak{A}\iiint f\frac{x'-x}{r^2}\, dx'dy'dz' + \mathfrak{B}\iiint f\frac{y'-y}{r^2}\, dx'dy'dz' + \mathfrak{C}\iiint f\frac{z'-z}{r^2}\, dx'dy'dz'\right), \\ Y_1 = \mathrm{H}\, dx\, dy\, dz \left(\mathfrak{C}\iiint \frac{u'}{r^3}\, dx'\, dy'\, dz' - \mathfrak{A}\iiint \frac{w'}{r^3}\, dx'\, dy'\, dz'\right) \\ \qquad -3\mathrm{H}\, dx dy dz \left(\mathfrak{A}\iiint g\frac{x'-x}{r^2}\, dx'dy'dz' + \mathfrak{B}\iiint g\frac{y'-y}{r^2}\, dx'dy'dz' + \mathfrak{C}\iiint g\frac{z'-z}{r^2}\, dx'dy'dz'\right), \\ Z_1 = \mathrm{H}\, dx\, dy\, dz \left(\mathfrak{A}\iiint \frac{v'}{r^3}\, dx'\, dy'\, dz' - \mathfrak{B}\iiint \frac{u'}{r^3}\, dx'\, dy'\, dz'\right) \\ \qquad -3\mathrm{H}\, dx dy dz \left(\mathfrak{A}\iiint h\frac{x'-x}{r^2}\, dx'dy'dz' + \mathfrak{B}\iiint h\frac{y'-y}{r^2}\, dx'dy'dz' + \mathfrak{C}\iiint h\frac{z'-z}{r^2}\, dx'dy'dz'\right), \end{cases}$$

avec

$$(21)\quad \begin{cases} X_2 = \mathrm{H}\, dx dy dz \left[\mathfrak{B}\iiint\left(\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} + \frac{\partial w'}{\partial z'}\right)\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z'}\, dx'\, dy'\, dz' - \mathfrak{C}\iiint\left(\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} + \frac{\partial w'}{\partial z'}\right)\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y'}\, dx'\, dy'\, dz'\right], \\ Y_2 = \mathrm{H}\, dx dy dz \left[\mathfrak{C}\iiint\left(\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} + \frac{\partial w'}{\partial z'}\right)\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'}\, dx'\, dy'\, dz' - \mathfrak{A}\iiint\left(\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} + \frac{\partial w'}{\partial z'}\right)\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z'}\, dx'\, dy'\, dz'\right], \\ Z_2 = \mathrm{H}\, dx dy dz \left[\mathfrak{A}\iiint\left(\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} + \frac{\partial w'}{\partial z'}\right)\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y'}\, dx'\, dy'\, dz' - \mathfrak{B}\iiint\left(\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} + \frac{\partial w'}{\partial z'}\right)\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'}\, dx'\, dy'\, dz'\right]. \end{cases}$$

Les formules que nous venons de réunir renferment toutes les lois de l'Électrodynamique et de l'Électromagnétisme. C'est de ces formules que nous allons faire usage dans ce qui va suivre.

§ III. — Action d'un courant quelconque sur un élément magnétique.

Considérons un conducteur limité par une surface fermée S. Supposons que E soit l'espace extérieur à la surface S.

Supposons le conducteur, limité par la surface S, parcouru par des courants quelconques. Soit (x', y', z') un point de ce conducteur; soient u', v', w' les composantes du flux électrique au point (x', y', z').

Au point (x, y, z) extérieur à ce conducteur, plaçons un élément magnétique de volume dv dont l'aimantation ait pour composantes $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$. Les actions exercées par le courant sur cet élément magnétique admettent pour potentiel, d'après l'égalité (17),

$$Q = H[\mathcal{A}\,F(x, y, z) + \mathcal{B}\,G(x, y, z) + \mathcal{C}\,H(x, y, z)]\,dv.$$

Imaginons au contraire la surface S remplie par un aimant. Soient $\mathcal{A}'$, $\mathcal{B}'$, $\mathcal{C}'$ les composantes de l'aimantation au point (x', y', z'). Les actions exercées par cet aimant sur l'élément magnétique dv admettent pour potentiel, d'après l'égalité (8),

$$P = h\left(\mathcal{A}\frac{\partial V}{\partial x} + \mathcal{B}\frac{\partial V}{\partial y} + \mathcal{C}\frac{\partial V}{\partial z}\right)dv,$$

$V(x, y, z)$ étant défini par l'égalité (7).

Pour que le courant et l'aimant aient les mêmes actions sur l'élément magnétique dv, il est nécessaire et suffisant que ces deux potentiels soient identiques. Pour que le courant et l'aimant aient les mêmes actions sur tout élément magnétique, il est nécessaire et suffisant que ces deux potentiels soient identiques quels que soient $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$.

Cette identité s'exprime par

$$F(x, y, z) = \frac{h}{H}\frac{\partial V(x, y, z)}{\partial x},$$

$$G(x, y, z) = \frac{h}{H}\frac{\partial V(x, y, z)}{\partial y},$$

$$H(x, y, z) = \frac{h}{H}\frac{\partial V(x, y, z)}{\partial z}.$$

De là la conclusion suivante :

Si les actions du courant sur un élément magnétique extérieur quelconque sont équivalentes à celles d'un aimant limité par la même surface que le courant, il existe une fonction de (x, y, z) finie, continue et uniforme dans tout l'espace E, dont $F(x, y, z)$, $G(x, y, z)$, $H(x, y, z)$ sont les dérivées partielles du premier ordre.

Réciproquement :

S'il existe une fonction de (x, y, z) finie, continue et uniforme dans tout l'espace E dont $F(x, y, z)$, $G(x, y, z)$, $H(x, y, z)$ soient les dérivées partielles du premier ordre, il existe un aimant limité à la même surface que le courant et exerçant les mêmes actions que lui sur tout élément magnétique extérieur.

Dans ce cas, en effet, il existe une fonction $V(x, y, z)$ finie, continue et uniforme dans tout l'espace E, telle que l'on puisse écrire

$$F(x, y, z) = \frac{h}{H} \frac{\partial V(x, y, z)}{\partial x},$$

$$G(x, y, z) = \frac{h}{H} \frac{\partial V(x, y, z)}{\partial y},$$

$$H(x, y, z) = \frac{h}{H} \frac{\partial V(x, y, z)}{\partial z}.$$

Si l'on se reporte à l'expression des fonctions F, G, H, expression donnée par les égalités (16), on voit que les trois fonctions F, G, H sont finies, continues et uniformes dans tout l'espace E; qu'elles s'annulent à l'infini, et cela de telle manière que les produits

$$R^2 F(x, y, z), \quad R^2 G(x, y, z), \quad R^2 H(x, y, z),$$

demeurent finis lorsque la distance R du point (x, y, z) à l'origine des coordonnées croît au delà de toute limite. Il en résulte que la fonction $V(x, y, z)$ admet dans tout l'espace des dérivées partielles du premier ordre qui sont finies, continues et uniformes, et qui s'annulent à l'infini de telle manière que les produits

$$R^2 \frac{\partial V}{\partial x}, \quad R^2 \frac{\partial V}{\partial y}, \quad R^2 \frac{\partial V}{\partial z}$$

demeurent finis.

Les quantités F, G, H admettent dans tout l'espace E des dérivées partielles du premier ordre qui sont finies, continues et uniformes; il en est donc de même des dérivées partielles du second ordre de la fonction V.

D'après les égalités (15) et (16), on a

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \int\int\int \left(v' \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z' \, \partial x} - w' \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y' \, \partial x} \right) dx' \, dy' \, dz',$$

$$\frac{\partial G}{\partial y} = \int\int\int \left(w' \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x' \, \partial y} - u' \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z' \, \partial y} \right) dx' \, dy' \, dz',$$

$$\frac{\partial H}{\partial z} = \int\int\int \left(u' \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y' \, \partial z} - v' \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x' \, dz} \right) dx' \, dy' \, dz'.$$

Il est aisé de vérifier que l'on a

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} = 0,$$

en sorte que la fonction V vérifie dans tout l'espace E l'équation de Laplace

$$\Delta V = 0.$$

Sur la surface S, ses dérivées partielles sont connues.

Il existe une infinité de fonctions V satisfaisant aux conditions que nous venons d'indiquer. Pour que ces conditions déterminent une fonction V, il faut y joindre la valeur que prend cette fonction en un certain point à l'infini. D'ailleurs, les diverses fonctions V obtenues en changeant cette valeur ne diffèrent les unes des autres que par une constante. Si donc parmi elles il en existe une pour laquelle on puisse écrire

$$F(x, y, z) = \frac{h}{\Pi} \frac{\partial V}{\partial x},$$

$$G(x, y, z) = \frac{h}{\Pi} \frac{\partial V}{\partial y},$$

$$H(x, y, z) = \frac{h}{\Pi} \frac{\partial V}{\partial z},$$

on pourra écrire ces mêmes équations pour toutes les autres.

Donc, si les trois fonctions $F(x, y, z)$, $G(x, y, z)$ et $H(x, y, z)$ sont les trois dérivées partielles d'une même fonction de x, y, z, finie continue et uniforme dans tout l'espace E, il existe une fonction

$V(x, y, z)$ telle que l'on puisse écrire les égalités précédentes. Cette fonction est assujettie aux conditions suivantes :

Elle est finie, continue et uniforme dans tout l'espace E; elle est égale à o en un certain point à l'infini.

Elle admet dans tout l'espace E des dérivées partielles du premier ordre qui sont finies, continues et uniformes; à l'infini, les quantités $R^2 \frac{\partial V}{\partial x}$, $R^2 \frac{\partial V}{\partial y}$, $R^2 \frac{\partial V}{\partial z}$ demeurent finies.

Dans tout l'espace E, elle admet des dérivées partielles du second ordre qui sont uniformes, finies et continues et qui vérifient l'équation de Laplace

$$\Delta V = 0.$$

D'après ce que nous avons vu dans l'Introduction, il existe une infinité d'aimants qui admettent la fonction V pour fonction potentielle. D'après ce que nous avons vu au précédent numéro, ces aimants ont tous, sur un élément magnétique extérieur quelconque, la même action que le courant considéré.

Donc, *pour que les actions d'un courant limité par la surface* S *sur un élément magnétique quelconque soient équivalentes aux actions d'un aimant limité à la même surface* S, *il est nécessaire et suffisant que les trois fonctions* $F(x, y, z)$, $G(x, y, z)$, $H(x, y, z)$ *soient dans tout l'espace* E *extérieur à la surface* S *les dérivées partielles d'une même fonction uniforme, finie et continue de* (x, y, z).

Supposons, en premier lieu, que *la connexité de première espèce de l'espace* E *soit de premier ordre*. Dans ce cas, pour que les fonctions F, G, H soient dans tout l'espace E les dérivées partielles d'une même fonction *uniforme*, finie et continue des coordonnées x, y, z, il est nécessaire et suffisant que l'on ait

$$\frac{\partial G(x, y, z)}{\partial z} = \frac{\partial H(x, y, z)}{\partial y},$$
$$\frac{\partial H(x, y, z)}{\partial x} = \frac{\partial F(x, y, z)}{\partial z},$$
$$\frac{\partial F(x, y, z)}{\partial y} = \frac{\partial G(x, y, z)}{\partial x}.$$

D'après la définition des fonctions F, G, H, donnée par les égalités (15) et (16), la première des égalités précédentes peut s'écrire

$$\iiint\left[w'\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x'\,\partial z}+v'\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x'\,\partial y}-u'\left(\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial z\,\partial z'}+\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial y\,\partial y'}\right)\right]dx'\,dy'\,dz'=0$$

ou bien

$$\iiint\left[w'\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x\,\partial z'}+v'\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x\,\partial y'}+u'\left(\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial y^2}\right)\right]dx'\,dy'\,dz'=0$$

ou bien encore

$$\iiint\left(u'\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x\,\partial x'}+v'\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x\,\partial y'}+w'\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x\,\partial z'}\right)dx'\,dy'\,dz'$$
$$+\iiint u'\left(\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial z^2}\right)dx'\,dy'\,dz'=0.$$

Une dernière transformation nous permet d'écrire cette égalité sous la forme

$$\mathbf{S}\,[u'\cos(N_i,x)+v'\cos(N_i,y)+w'\cos(N_i,z)]\,\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\,dS$$
$$+\iiint\left(\frac{\partial u'}{\partial x'}+\frac{\partial v'}{\partial y'}+\frac{\partial w'}{\partial z'}\right)\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\,dx'\,dy'\,dz'$$
$$-\iiint u'\left(\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial z^2}\right)dx'\,dy'\,dz'=0.$$

Mais on a

$$\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial z^2}=0,$$

$$u'\cos(N_i,x)+v'\cos(N_i,y)+w'\cos(N_i,z)=0;$$

nous obtenons donc la première des trois conditions

$$\frac{\partial}{\partial x}\int\int\int\left(\frac{\partial u'}{\partial x'}+\frac{\partial v'}{\partial y'}+\frac{\partial w'}{\partial z'}\right)\frac{1}{r}\,dx'\,dy'\,dz'=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\int\int\int\left(\frac{\partial u'}{\partial x'}+\frac{\partial v'}{\partial y'}+\frac{\partial w'}{\partial z'}\right)\frac{1}{r}\,dx'\,dy'\,dz'=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\int\int\int\left(\frac{\partial u'}{\partial x'}+\frac{\partial v'}{\partial y'}+\frac{\partial w'}{\partial z'}\right)\frac{1}{r}\,dx'\,dy'\,dz'=0.$$

Les deux autres conditions s'obtiennent d'une manière analogue.

Ces trois conditions montrent que, dans tout l'espace E, la quantité

$$\text{(22)}\qquad J(x,y,z)=\int\int\int\left(\frac{\partial u'}{\partial x'}+\frac{\partial v'}{\partial y'}+\frac{\partial w'}{\partial z'}\right)\frac{1}{r}\,dx'\,dy'\,dz'$$

est constante. Comme elle est égale à o à l'infini, il en résulte que l'on a, dans tout l'espace E,

$$J(x,y,z)=0.$$

On arrive donc ainsi à la conclusion suivante :

Pour qu'un conducteur traversé par des courants quelconques et limité par une surface S, *telle que l'espace* E *extérieur à cette surface ait une connexité de première espèce du premier ordre, exerce sur un élément magnétique extérieur quelconque les mêmes actions qu'un aimant limité à la surface* S, *il est nécessaire et suffisant que l'on ait en tout point* (x, y, z) *de l'espace* E

$$J(x,y,z)=0.$$

Supposons maintenant que l'espace E, extérieur à la surface S, ait une connexité de première espèce d'ordre $(n+1)$. On peut alors, au moyen de n surfaces coupures convenablement disposées, transformer l'espace E en un espace dont la connexité de première espèce soit du premier ordre. Chacune des surfaces coupures $F_1, F_2, \ldots, F_n$ peut être considérée comme un feuillet formé de deux surfaces infiniment voisines $\sigma_1, \sigma'_1; \sigma_2, \sigma'_2; \ldots; \sigma_n, \sigma'_n$. L'ensemble des surfaces S, $\sigma_1, \sigma'_1, \sigma_2, \sigma'_2, \ldots, \sigma_n, \sigma'_n$ peut être considéré comme une surface fermée, telle que l'espace extérieur à cette surface ait une connexité de première espèce du premier ordre. On pourra alors, sur cette surface, raisonner comme sur la surface S dans le cas précédent, et l'on arrivera à la conclusion suivante :

Étant donné un conducteur traversé par des courants et limité par une surface S, *telle que l'espace* E *extérieur à cette surface ait une connexité de première espèce d'ordre* $(n+1)$, *pour que l'action de ce conducteur sur un élément magnétique extérieur quelconque soit équivalente à celle d'un aimant limité par la surface* S *et de n aimants lamellaires placés suivant les sections* $F_1, F_2, \ldots, F_n$ *qui transforment l'espace* E *en un espace dont la connexité de première espèce est du premier ordre, il est nécessaire et suffisant que l'on ait, en tout point extérieur à ce conducteur,*

$$J(x, y, z) = 0.$$

Si les courants qui traversent le conducteur sont des courants uniformes, on a en tout point

$$\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} + \frac{\partial w'}{\partial z'} = 0,$$

en sorte que la condition précédente se trouve réalisée; mais cette condition peut encore être réalisée par des courants qui ne sont pas uniformes. De ce nombre sont, par exemple, les courants variables à l'intérieur d'une sphère qu'a étudiés M. H. von Helmholtz [1]. Pour ces courants, en effet, la quantité

$$\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} + \frac{\partial w'}{\partial z'}$$

a la même valeur en tous les points équidistants du centre de la sphère. Si donc on désigne par R la distance du point (x, y, z) au centre de la sphère, l'égalité

$$J(x, y, z) = \iiint \frac{1}{r}\left(\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} + \frac{\partial w'}{\partial z'}\right) dx'\,dy'\,dz'$$

deviendra

$$J(x, y, z) = \frac{1}{R}\iiint\left(\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} + \frac{\partial w'}{\partial z'}\right) dx'\,dy'\,dz'$$

---

(1) H. von Helmholtz, *Ueber die Bewegungsgleichungen der Elektricität für ruhende leitende Körper* (*Borchardt's Journal für reine und angewandte Mathematik*, Bd LXXII, p. 57. — Helmholtz, *Wissenschaftliche Abhandlungen*, t. I, p. 545).

ou bien

$$J(x, y, z) = -\frac{1}{R} \mathbf{S} [u' \cos(N_i, x) + v' \cos(N_i, y) + w' \cos(N_i, z)] dS;$$

mais, en tout point de la surface de la sphère, on a

$$u' \cos(N_i, x) + v' \cos(N_i, y) + w' \cos(N_i, z) = 0.$$

On a donc

$$J(x, y, z) = 0.$$

Si l'on se reporte aux égalités (21), on voit que les courants pour lesquels la quantité $J(x, y, z)$ est égale à zéro jouissent, à l'exclusion de tous autres, de cette propriété que l'on a, pour tout élément magnétique extérieur,

$$X_2 = 0, \qquad Y_2 = 0, \qquad Z_2 = 0.$$

Or, en général, si l'on calcule l'action d'un courant sur un élément magnétique en faisant usage de la loi de l'Électromagnétisme donnée par Biot, on obtient un résultat inexact. Pour le rendre exact, il faut adjoindre à l'action trouvée une force appliquée à l'élément magnétique et ayant pour composantes X_2, Y_2, Z_2. Nous arrivons donc à la conclusion suivante :

Pour que l'action d'un courant sur un élément magnétique extérieur quelconque soit donnée exactement par la loi de Biot, il est nécessaire et suffisant que l'on ait, en tout point extérieur au courant,

$$J(x, y, z) = 0.$$

Dans les idées d'Ampère sur l'Électromagnétisme, on doit adjoindre à l'action d'un courant sur un élément magnétique donné par la loi de Biot un couple défini de la manière suivante :

Soient

$$A = \left(\frac{z' - z}{r^3} u' - \frac{x' - x}{r^3} w'\right)(z' - z) - \left(\frac{x' - x}{r^3} v' - \frac{y' - y}{r^3} u'\right)(y' - y),$$

$$B = \left(\frac{x' - x}{r^3} v' - \frac{y' - y}{r^3} u'\right)(x' - x) - \left(\frac{y' - y}{r^3} w' - \frac{z' - z}{r^3} v'\right)(z' - z),$$

$$C = \left(\frac{y' - y}{r^3} w' - \frac{z' - z}{r^3} v'\right)(y' - y) - \left(\frac{z' - z}{r^3} u' - \frac{x' - x}{r^3} w'\right)(x' - x).$$

Les composantes de l'axe du couple en question seront

$$\lambda = \mathrm{H}\,dx\,dy\,dz\left(\mathcal{A}\frac{\partial}{\partial x}\int\!\!\int\!\!\int \mathrm{A}\,dx'dy'dz' + \mathcal{B}\frac{\partial}{\partial y}\int\!\!\int\!\!\int \mathrm{A}\,dx'dy'dz' + \mathcal{C}\frac{\partial}{\partial z}\int\!\!\int\!\!\int \mathrm{A}\,dx'dy'dz'\right),$$

$$\mu = \mathrm{H}\,dx\,dy\,dz\left(\mathcal{A}\frac{\partial}{\partial x}\int\!\!\int\!\!\int \mathrm{B}\,dx'dy'dz' + \mathcal{B}\frac{\partial}{\partial y}\int\!\!\int\!\!\int \mathrm{B}\,dx'dy'dz' + \mathcal{C}\frac{\partial}{\partial z}\int\!\!\int\!\!\int \mathrm{B}\,dx'dy'dz'\right),$$

$$\nu = \mathrm{H}\,dx\,dy\,dz\left(\mathcal{A}\frac{\partial}{\partial x}\int\!\!\int\!\!\int \mathrm{C}\,dx'dy'dz' + \mathcal{B}\frac{\partial}{\partial y}\int\!\!\int\!\!\int \mathrm{C}\,dx'dy'dz' + \mathcal{C}\frac{\partial}{\partial z}\int\!\!\int\!\!\int \mathrm{C}\,dx'dy'dz'\right);$$

mais nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}
\mathrm{A} &= u'\frac{(y'-y)^2+(z'-z)^2}{r^3} - v'\frac{(x'-x)(y'-y)}{r^3} - w'\frac{(x'-x)(z'-z)}{r^3}\\
&= \frac{u'}{r} - \frac{u'(x'-x)^2}{r^3} - \frac{v'(x'-x)(y'-y)}{r^3} - \frac{w'(x'-x)(z'-z)}{r^3}\\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(u'\frac{\partial r}{\partial x'} + v'\frac{\partial r}{\partial y'} + w'\frac{\partial r}{\partial z'}\right).
\end{aligned}$$

Nous aurons alors

$$\begin{aligned}
\int\!\!\int\!\!\int \mathrm{A}\,dx'dy'dz' &= \frac{\partial}{\partial x}\int\!\!\int\!\!\int\left(u'\frac{\partial r}{\partial x'} + v'\frac{\partial r}{\partial y'} + w'\frac{\partial r}{\partial z'}\right)dx'\,dy'\,dz'\\
&= -\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{S}\, r[u'\cos(\mathrm{N}_i, x) + v'\cos(\mathrm{N}_i, y) + w'\cos(\mathrm{N}_i, z)]\,d\mathrm{S}\\
&\quad - \frac{\partial}{\partial x}\int\!\!\int\!\!\int\left(\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} + \frac{\partial w'}{\partial z'}\right)r\,dx'\,dy'\,dz'.
\end{aligned}$$

Le premier terme est nul, car on a, en tout point de la surface S,

$$u'\cos(\mathrm{N}_i, x) + v'\cos(\mathrm{N}_i, y) + w'\cos(\mathrm{N}_i, z) = 0.$$

Si donc on pose

$$\mathrm{K}(x, y, z) = \int\!\!\int\!\!\int\left(\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} + \frac{\partial w'}{\partial z'}\right)r\,dx'\,dy'\,dz', \tag{23}$$

on aura

$$\int\!\!\int\!\!\int \mathrm{A}\,dx'dy'dz' = -\frac{\partial \mathrm{K}}{\partial x}.$$

On aura donc

$$\lambda = -\mathrm{H}\,dx\,dy\,dz\left(\mathcal{A}\frac{\partial^2 \mathrm{K}}{\partial x^2} + \mathcal{B}\frac{\partial^2 \mathrm{K}}{\partial x\,\partial y} + \mathcal{C}\frac{\partial^2 \mathrm{K}}{\partial x\,\partial z}\right),$$

$$\mu = -\mathrm{H}\,dx\,dy\,dz\left(\mathcal{A}\frac{\partial^2 \mathrm{K}}{\partial y\,\partial x} + \mathcal{B}\frac{\partial^2 \mathrm{K}}{\partial y^2} + \mathcal{C}\frac{\partial^2 \mathrm{K}}{\partial y\,\partial z}\right),$$

$$\nu = -\mathrm{H}\,dx\,dy\,dz\left(\mathcal{A}\frac{\partial^2 \mathrm{K}}{\partial z\,\partial x} + \mathcal{B}\frac{\partial^2 \mathrm{K}}{\partial z\,\partial y} + \mathcal{C}\frac{\partial^2 \mathrm{K}}{\partial z^2}\right).$$

La condition nécessaire et suffisante pour que la loi électromagnétique d'Ampère et la loi électromagnétique de Biot soient équivalentes est donc que l'on ait, en tout point (x, y, z) extérieur au courant,

$$\frac{\partial^2 \mathrm{K}}{\partial x^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 \mathrm{K}}{\partial y^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 \mathrm{K}}{\partial z^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \mathrm{K}}{\partial y\,\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial^2 \mathrm{K}}{\partial z\,\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial^2 \mathrm{K}}{\partial x\,\partial y} = 0.$$

Ces conditions sont réalisées pour les courants uniformes; car, dans ce cas, on a en tout point (x', y', z') du conducteur

$$\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} + \frac{\partial w'}{\partial z'} = 0,$$

et, par conséquent, d'après l'égalité (23), en tout point (x, y, z) extérieur au courant

$$\mathrm{K}(x, y, z) = 0.$$

Pour tous les courants pour lesquels la loi électromagnétique d'Ampère et la loi électromagnétique de Biot sont équivalentes, on a

$$\frac{\partial^2 \mathrm{K}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathrm{K}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathrm{K}}{\partial z^2} = 0, \tag{24}$$

en tout point extérieur au courant.

Cette égalité peut s'écrire, d'après l'égalité (23),

$$\iiint\left(\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} + \frac{\partial w'}{\partial z'}\right)\left(\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial z^2}\right) dx'\,dy'\,dz' = 0;$$

mais on a

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} = \frac{1}{r} - \frac{(x-x')^2}{r^3},$$
$$\frac{\partial^2 r}{\partial y^2} = \frac{1}{r} - \frac{(y-y')^2}{r^3},$$
$$\frac{\partial^2 r}{\partial z^2} = \frac{1}{r} - \frac{(z-z')^2}{r^3}$$

et, par conséquent,

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial z^2} = -\frac{2}{r}.$$

La condition (24) devient donc

$$J(x, y, z) = 0.$$

Ainsi, toutes les fois que la loi électromagnétique d'Ampère et la loi électromagnétique de Biot donnent des résultats équivalents pour l'action d'un courant sur un élément magnétique extérieur, elles conduisent l'une et l'autre à l'expression exacte de cette action. On peut, dans ce cas, substituer un aimant au courant.

Nous venons d'étudier les conditions pour que la loi électromagnétique d'Ampère et la loi électromagnétique de Biot soient équivalentes. Cherchons maintenant d'une manière absolue dans quel cas la loi électromagnétique d'Ampère conduit à des résultats exacts pour l'action d'un courant sur un élément magnétique quelconque.

L'action exacte du courant est, d'après les formules (18), (19), (20) et (21), composée d'une force

$$X_1 + X_2, \quad Y_1 + Y_2, \quad Z_1 + Z_2,$$

appliquée à l'élément magnétique, et d'un couple

$$L, \quad M, \quad N.$$

L'action donnée par la loi électromagnétique d'Ampère se compose d'une force

$$X_1, \quad Y_1, \quad Z_1,$$

appliquée à l'élément magnétique, et d'un couple

$$L + \lambda, \quad M + \mu, \quad N + \nu.$$

Pour que les résultats donnés par la loi d'Ampère soient exacts, il faut et il suffit que l'on ait

$$X_2 = 0, \quad Y_2 = 0, \quad Z_2 = 0,$$
$$\lambda = 0, \quad \mu = 0, \quad \nu = 0.$$

La première série de conditions exprime que la loi de Biot conduit à des résultats exacts; la seconde, qu'elle est équivalente à la loi d'Ampère. Si l'on se reporte alors à la loi précédente, on voit que : *Toutes les fois que la loi électromagnétique d'Ampère conduit à l'expression exacte de l'action d'un courant sur un élément magnétique quelconque, la loi de Biot donne aussi l'expression exacte de cette action.*

La réciproque de cette proposition n'est pas vraie; la loi de Biot est donc plus généralement applicable que celle d'Ampère.

§ IV. — Action d'un courant quelconque sur un élément de courant uniforme.

Les quantités $\mathfrak{P}(x, y, z)$, $\mathfrak{Q}(x, y, z)$, $\mathfrak{R}(x, y, z)$ étant définies par les égalités (3), l'action d'un conducteur traversé par des courants quelconques sur un élément de courant uniforme $dx\,dy\,dz$, placé au point de coordonnées (x, y, z) et en lequel le flux a pour composantes u, v, w, se réduit à une force appliquée à l'élément de courant et ayant pour composantes, d'après les égalités (5),

$$X_1 = A[\mathfrak{Q}(x, y, z)w - \mathfrak{R}(x, y, z)v]\,dx\,dy\,dz,$$
$$Y_1 = A[\mathfrak{R}(x, y, z)u - \mathfrak{P}(x, y, z)w]\,dx\,dy\,dz,$$
$$Z_1 = A[\mathfrak{P}(x, y, z)v - \mathfrak{Q}(x, y, z)u]\,dx\,dy\,dz.$$

Considérons un aimant enfermé à l'intérieur de la même surface S. Soient $\mathcal{A}'$, $\mathcal{B}'$, $\mathcal{C}'$ les composantes de l'aimantation au point (x', y', z'). L'action de cet aimant sur l'élément de courant uniforme considéré se réduira à une force appliquée à l'élément de courant. Les composantes de cette force ont pour valeur, d'après les égalités (13),

$$\xi_1 = 3H\,dx\,dy\,dz\left[v\iiint\left(\varphi\frac{y'-y}{r^2} - \psi\frac{x'-x}{r^2}\right)dx'\,dy'\,dz' - w\iiint\left(\theta\frac{x'-x}{r^2} - \varphi\frac{z'-z}{r^2}\right)dx'\,dy'\,dz'\right],$$
$$\eta_1 = 3H\,dx\,dy\,dz\left[w\iiint\left(\psi\frac{z'-z}{r^2} - \theta\frac{y'-y}{r^2}\right)dx'\,dy'\,dz' - u\iiint\left(\varphi\frac{y'-y}{r^2} - \psi\frac{x'-x}{r^2}\right)dx'\,dy'\,dz'\right],$$
$$\zeta_1 = 3H\,dx\,dy\,dz\left[u\iiint\left(\theta\frac{x'-x}{r^2} - \varphi\frac{z'-z}{r^2}\right)dx'\,dy'\,dz' - v\iiint\left(\psi\frac{z'-z}{r^2} - \theta\frac{y'-y}{r^2}\right)dx'\,dy'\,dz'\right].$$

Cherchons à quelles conditions on aura

$$\xi_1 = X_1,$$
$$\eta_1 = Y_1,$$
$$\zeta_1 = Z_1,$$

quels que soient x, y, z, u, v, w.

Pour cela, transformons les expressions de ξ_1, η_1, ζ_1 de la manière suivante.

Les égalités (9) donnent

$$\varphi = \mathcal{B}' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z'} - \mathcal{C}' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y'} = \mathcal{C}' \frac{y'-y}{r^3} - \mathcal{B}' \frac{z'-z}{r^3},$$

$$\psi = \mathcal{C}' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'} - \mathcal{A}' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z'} = \mathcal{A}' \frac{z'-z}{r^3} - \mathcal{C}' \frac{x'-x}{r^3},$$

$$\theta = \mathcal{A}' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y'} - \mathcal{B}' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'} = \mathcal{B}' \frac{x'-x}{r^3} - \mathcal{A}' \frac{y'-y}{r^3}.$$

On a donc

$$\begin{aligned}
&3\left(\theta \frac{x'-x}{r^2} - \varphi \frac{z'-z}{r^2}\right) \\
&\quad = -3\mathcal{A}' \frac{(x'-x)(y'-y)}{r^5} - 3\mathcal{C}' \frac{(z'-z)(y'-y)}{r^5} + 3\mathcal{B}' \frac{(x'-x)^2 + (z'-z)^2}{r^5} \\
&\quad = \mathcal{A}' \frac{\partial}{\partial x'} \frac{y'-y}{r^3} + \mathcal{B}' \frac{\partial}{\partial y'} \frac{y'-y}{r^3} + \mathcal{C}' \frac{\partial}{\partial z'} \frac{y'-y}{r^3} \\
&\quad = \frac{\partial}{\partial y}\left(\mathcal{A}' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'} + \mathcal{B}' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y'} + \mathcal{C}' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z'}\right)
\end{aligned}$$

et, de même,

$$3\left(\varphi \frac{y'-y}{r^2} - \psi \frac{x'-x}{r^2}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\mathcal{A}' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'} + \mathcal{B}' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y'} + \mathcal{C}' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z'}\right).$$

D'après cela, si l'on désigne par $V(x, y, z)$ la fonction potentielle magnétique de l'aimant, définie par l'égalité

$$\mathrm{V}(x, y, z) = \int\int\int \left(\mathcal{A}' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'} + \mathcal{B}' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y'} + \mathcal{C}' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z'} \right) dx'\,dy'\,dz',$$

on a la première des trois égalités

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \mathrm{H}\left(v \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial z} - w \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial y} \right) dx\,dy\,dz, \\ \eta_1 &= \mathrm{H}\left(w \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x} - u \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial z} \right) dx\,dy\,dz, \\ \zeta_1 &= \mathrm{H}\left(u \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial y} - v \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x} \right) dx\,dy\,dz. \end{aligned}$$

Les deux autres égalités se démontrent de même.

Ces expériences de ξ_1, η_1, ζ_1 étant obtenues, en raisonnant comme nous l'avons fait au numéro précédent, on arrivera aisément à la conclusion suivante :

Pour que le courant considéré ait sur un élément de courant uniforme quelconque les mêmes actions qu'un aimant limité à la surface S, il faut et il suffit que les trois fonctions $\mathfrak{P}(x, y, z)$, $\mathfrak{Q}(x, y, z)$, $\mathfrak{R}(x, y, z)$ soient, dans tout l'espace extérieur à la surface S, les dérivées partielles d'une même fonction des coordonnées.

En exprimant cette condition comme nous l'avons fait au numéro précédent pour les fonctions $\mathrm{F}(x, y, z)$, $\mathrm{G}(x, y, z)$, $\mathrm{H}(x, y, z)$, nous arriverons à la proposition suivante :

Pour qu'un conducteur limité par une surface fermée S *et parcouru par des courants quelconques exerce sur un élément de courant uniforme quelconque les mêmes actions qu'un aimant limité à la surface* S *joint à* n *feuillets magnétiques disposés sur les* n *surfaces qui transforment la connexité de première espèce de l'espace* E *extérieur à* S *en connexité de premier ordre, il est nécessaire et suffisant que l'on ait en tous les points de l'espace* E

$$\mathrm{J}(x, y, z) = 0.$$

Les courants dont les actions sur un élément magnétique extérieur peuvent être remplacées par les actions d'un aimant sont aussi ceux dont les actions sur un élément de courant uniforme peuvent être remplacées par les actions d'un aimant.

Il est en outre facile de voir que, *si l'on a*

$$\text{H}^2 = \text{A}h,$$

tout aimant qui exerce sur un élément magnétique les mêmes actions qu'un courant donné exerce aussi les mêmes actions que lui sur un élément de courant uniforme.

L'action d'un courant quelconque sur un élément uniforme est donnée par la loi de Grassmann. Cette loi conduit aux expressions que nous venons de discuter. La loi électrodynamique d'Ampère conduit à ajouter à l'action exercée conformément à la loi de Grassmann sur l'élément de courant $dx\,dy\,dz$ une force dont les composantes ont pour valeur

$$\begin{aligned} dy\,dz \Bigg\{ & u \int\!\!\int\!\!\int \left(u' \frac{\partial}{\partial x'} \left[(x'-x) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \right] + v' \frac{\partial}{\partial y'} \left[(x'-x) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \right] + w' \frac{\partial}{\partial z'} \left[(x'-x) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \right] \right) dx'\,dy'\,dz' \\ & + v \int\!\!\int\!\!\int \left(u' \frac{\partial}{\partial x'} \left[(x'-x) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} \right] + v' \frac{\partial}{\partial y'} \left[(x'-x) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} \right] + w' \frac{\partial}{\partial z'} \left[(x'-x) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \right] \right) dx'\,dy'\,dz' \\ & + w \int\!\!\int\!\!\int \left(u' \frac{\partial}{\partial x'} \left[(x'-x) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \right] + v' \frac{\partial}{\partial y'} \left[(x'-x) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \right] + w' \frac{\partial}{\partial z'} \left[(x'-x) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \right] \right) dx'\,dy'\,dz' \Bigg\}, \end{aligned}$$

$$\text{H} = \ldots, \qquad \text{Z} = \ldots.$$

Posons, pour abréger,

$$\Xi = -\,\text{A}\,dx\,dy\,dz\,(\alpha a + \beta b + \gamma c).$$

Nous verrons sans peine que l'on peut écrire

$$\begin{aligned} \xi = & -\mathbf{S} \left[(x'-x) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \right] [u' \cos(\text{N}_i, x) + v' \cos(\text{N}_i, y) + w' \cos(\text{N}_i, z)]\, d\text{S} \\ & - \int\!\!\int\!\!\int \left[(x'-x) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \right] \left(\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} + \frac{\partial w'}{\partial z'} \right) dx'\,dy'\,dz'. \end{aligned}$$

Mais, en tout point de la surface S, on a

$$u' \cos(\text{N}_i, x) + v' \cos(\text{N}_i, y) + w' \cos(\text{N}_i, z) = 0.$$

On a donc

$$\alpha = -\int\!\!\int\!\!\int \left[(x'-x)\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\right]\left(\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} + \frac{\partial w'}{\partial z'}\right) dx'\,dy'\,dz'$$

et, de même,

$$\beta = -\int\!\!\int\!\!\int \left[(x'-x)\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}\right]\left(\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} + \frac{\partial w'}{\partial z'}\right) dx'\,dy'\,dz',$$

$$\gamma = -\int\!\!\int\!\!\int \left[(x'-x)\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\right]\left(\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} + \frac{\partial w'}{\partial z'}\right) dx'\,dy'\,dz'.$$

Cherchons maintenant à quelle condition l'action d'un courant sur un élément de courant fermé et uniforme quelconque pourra être donnée par la loi d'Ampère. Il sera nécessaire et suffisant pour cela que les quantités Ξ, H, Z soient égales à o, quels que soient u, v, w, x, y, z; ou bien qu'on ait en tout point (x, y, z) de l'espace E extérieur au courant

$$(25)\quad \begin{cases} \displaystyle\int\!\!\int\!\!\int \frac{(x'-x)^2}{r^3}\left(\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} + \frac{\partial w'}{\partial z'}\right) dx'\,dy'\,dz' = 0, \\ \displaystyle\int\!\!\int\!\!\int \frac{(y'-y)^2}{r^3}\left(\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} + \frac{\partial w'}{\partial z'}\right) dx'\,dy'\,dz' = 0, \\ \displaystyle\int\!\!\int\!\!\int \frac{(z'-z)^2}{r^3}\left(\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} + \frac{\partial w'}{\partial z'}\right) dx'\,dy'\,dz' = 0; \end{cases}$$

$$(26)\quad \begin{cases} \displaystyle\int\!\!\int\!\!\int \frac{(y'-y)(z'-z)}{r^3}\left(\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} + \frac{\partial w'}{\partial z'}\right) dx'\,dy'\,dz' = 0, \\ \displaystyle\int\!\!\int\!\!\int \frac{(z'-z)(x'-x)}{r^3}\left(\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} + \frac{\partial w'}{\partial z'}\right) dx'\,dy'\,dz' = 0, \\ \displaystyle\int\!\!\int\!\!\int \frac{(x'-x)(y'-y)}{r^3}\left(\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} + \frac{\partial w'}{\partial z'}\right) dx'\,dy'\,dz' = 0. \end{cases}$$

Ajoutons membre à membre les trois égalités (25), en tenant compte de la relation

$$r^2 = (x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2.$$

Nous aurons

$$\iiint \frac{1}{r}\left(\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} + \frac{\partial w'}{\partial z'}\right) dx'\,dy'\,dz' = 0.$$

Moyennant cette égalité, on peut substituer aux égalités (25) les égalités

$$(27)\quad \begin{cases} \displaystyle\iiint \left[\frac{(x'-x)^2}{r^3} - \frac{1}{r}\right]\left(\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} + \frac{\partial w'}{\partial z'}\right) dx'\,dy'\,dz' = 0, \\ \displaystyle\iiint \left[\frac{(y'-y)^2}{r^3} - \frac{1}{r}\right]\left(\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} + \frac{\partial w'}{\partial z'}\right) dx'\,dy'\,dz' = 0, \\ \displaystyle\iiint \left[\frac{(z'-z)^2}{r^3} - \frac{1}{r}\right]\left(\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} + \frac{\partial w'}{\partial z'}\right) dx'\,dy'\,dz' = 0. \end{cases}$$

Si nous posons alors, comme en l'égalité (23),

$$K(x, y, z) = \iiint r\left(\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} + \frac{\partial w'}{\partial z'}\right) dx'\,dy'\,dz',$$

les égalités (27) et (26) deviendront

$$\frac{\partial^2 K}{\partial x^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 K}{\partial y^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 K}{\partial z^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 K}{\partial y\,\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial^2 K}{\partial z\,\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial^2 K}{\partial x\,\partial y} = 0.$$

Ce sont donc là les conditions nécessaires et suffisantes pour que la loi d'Ampère soit équivalente à la loi de Grassmann.

Ainsi, lorsque, dans le calcul de l'action d'un courant quelconque sur un élément de courant quelconque, les deux lois d'Ampère et de Grassmann sont équivalentes; lorsque, par conséquent, la loi d'Ampère donne exactement l'action du courant considéré sur un élément de courant uniforme quelconque, la loi électromagnétique d'Ampère et la loi électromagnétique de Biot fournissent la même expression pour l'action de ce courant sur un élément magnétique, et cette expression est exacte. La réciproque de cette proposition est vraie également.

§ IV. — Action d'un courant quelconque sur un élément de courant quelconque.

L'action d'un courant quelconque sur un élément de courant quelconque se réduit à une force dont les composantes sont

$$X = X_1 + X_2, \qquad Y = Y_1 + Y_2, \qquad Z = Z_1 + Z_2,$$

(X_1, Y_1, Z_1) étant donnés par les égalités (5), et (X_2, Y_2, Z_2) par les égalités (6)

$$Z_2 = -A\mathfrak{V}(x, y, z)\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz.$$

$$Y_2 = -A\mathfrak{V}(x, y, z)\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz,$$

$$X_2 = -A\mathfrak{W}(x, y, z)\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz.$$

L'expression des quantités X_1, Y_1, Z_1 est entièrement connue. Tandis que, par l'intermédiaire des quantités $\mathfrak{V}(x, y, z)$, $\mathfrak{V}(x, y, z)$, $\mathfrak{W}(x, y, z)$, définies par les égalités (1), X_2, Y_2, Z_2 dépendent d'une constante encore inconnue, la constante λ d'Helmholtz. Cherchons à quelle condition l'action d'un courant sur un élément quelconque de courant sera indépendante de la valeur de λ. Il faut et il suffit pour cela que les trois quantités $\mathfrak{V}(x, y, z)$, $\mathfrak{V}(x, y, z)$, $\mathfrak{W}(x, y, z)$ soient indépendantes de λ.

D'après les égalités (1), on a

$$\mathfrak{V}(x, y, z) = \frac{1+\lambda}{2}\int\int\int \frac{u'}{r}\, dx'\, dy'\, dz'$$
$$+ \frac{1-\lambda}{2}\int\int\int \frac{x'-x}{r^3}[u'(x'-x) + v'(y'-y) + w'(z'-z)]\, dx'\, dy'\, dz'.$$

On peut écrire

$$\int\int\int \frac{x'-x}{r^3}[u'(x'-x) + v'(y'-y) + w'(z'-z)]\, dx'\, dy'\, dz'$$
$$= -\int\int\int (x'-x)\left(u'\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'} + v'\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y'} + w'\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z'}\right) dx'\, dy'\, dz'.$$

Par une intégration par parties, cette quantité devient

$$\mathbf{S}\frac{x'-x}{r}[u'\cos(\mathrm{N}_i, x)+v'\cos(\mathrm{N}_i, y)+w'\cos(\mathrm{N}_i, z)]\,d\mathrm{S}$$
$$+\int\int\int\frac{x'-x}{r}\left(\frac{\partial u'}{\partial x'}+\frac{\partial v'}{\partial y'}+\frac{\partial w'}{\partial z'}\right)dx'\,dy'\,\partial z'$$
$$+\int\int\int\frac{u'}{r}\,dx'\,dy'\,dz'.$$

Mais on a, en tout point de S,

$$u'\cos(\mathrm{N}_i, x)+v'\cos(\mathrm{N}_i, y)+w'\cos(\mathrm{N}_i, z)=0.$$

On a aussi

$$\int\int\int\frac{x'-x}{r}\left(\frac{\partial u'}{\partial x'}+\frac{\partial v'}{\partial y'}+\frac{\partial w'}{\partial z'}\right)dx'\,dy'\,dz'$$
$$=-\int\int\int\frac{\partial r}{\partial x}\left(\frac{\partial u'}{\partial x'}+\frac{\partial v'}{\partial y'}+\frac{\partial w'}{\partial z'}\right)dx'\,dy'\,dz'=-\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{K}(x, y, z).$$

On a donc, finalement,

$$\mho(x, y, z)=\int\int\int\frac{u'}{r}\,dx'\,dy'\,dz'-\frac{1-\lambda}{2}\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{K}(x, y, z)$$

et, de même,

$$\mathcal{V}(x, y, z)=\int\int\int\frac{v'}{r}\,dx'\,dy'\,dz'-\frac{1-\lambda}{2}\frac{\partial}{\partial y}\mathrm{K}(x, y, z),$$
$$\mathcal{W}(x, y, z)=\int\int\int\frac{w'}{r}\,dx'\,dy'\,dz'-\frac{1-\lambda}{2}\frac{\partial}{\partial z}\mathrm{K}(x, y, z).$$

De là la conclusion suivante :

Pour que l'action d'un courant sur un élément extérieur quelconque soit indépendante de la valeur de la constante λ d'Helmholtz, il faut et il suffit que la quantité $\mathrm{K}(x, y, z)$ soit constante dans tout l'espace extérieur au courant.

Cette condition est réalisée pour les courants uniformes, pour lesquels la quantité $\mathrm{K}(x, y, z)$ est égale à zéro.

§ VI. — Conclusion.

Résumons les principaux résultats de ces recherches.

Dans l'ensemble des courants électriques, on rencontre une catégorie très remarquable. Elle est formée par les courants pour lesquels on a en tout point extérieur

$$J(x, y, z) = \int\int\int \left(\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} + \frac{\partial w'}{\partial z'}\right) \frac{1}{r}\, dx'\, dy'\, dz' = 0.$$

De tels courants ont sur tout élément magnétique extérieur la même action qu'un aimant limité à leur surface; cette action est donnée par la loi de Biot.

Ils ont sur tout élément de courant uniforme extérieur la même action qu'un aimant limité à leur surface; cette action est donnée par la loi de Grassmann.

La propriété qui distingue cette catégorie de courants a, d'ailleurs, une signification intéressante.

Soit ρ' la densité de l'électricité libre en un point (x', y', z'); on a

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} = -\left(\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} + \frac{\partial w'}{\partial z'}\right)$$

et, par conséquent,

$$J(x, y, z) = -\int\int\int \frac{1}{r} \frac{\partial \rho'}{\partial t}\, dx'\, dy'\, dz'.$$

Soit $\Phi(x, y, z)$ la fonction potentielle de l'électricité; on a

$$\Phi(x, y, z) = \int\int\int \frac{\rho'}{r}\, dx'\, dy'\, dz'$$

et, par conséquent,

$$J(x, y, z) = -\frac{\partial \Phi(x, y, z)}{\partial t}.$$

Les courants en question jouissent donc de cette propriété :

Le mouvement électrique dont les conducteurs sont le siège laisse invariable la valeur, en tout point extérieur, de la fonction potentielle de l'électricité libre.

Parmi les courants dont nous venons de parler, on trouve une catégorie plus spéciale; ce sont ceux pour lesquels la quantité

$$K(x, y, z) = \int\int\int \left(\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} + \frac{\partial w'}{\partial z'}\right) r \, dx' \, dy' \, dz'$$

est constante dans tout l'espace extérieur. Ceux-là ont sur un élément de courant extérieur quelconque une action indépendante de la valeur de la constante λ d'Helmholtz.

Enfin, dans la catégorie précédente de courants, s'en trouve une encore plus particulière; elle est formée par les courants pour lesquels on a, en tout point extérieur,

$$\frac{\partial^2 K}{\partial x^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 K}{\partial y^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 K}{\partial z^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 K}{\partial y \, \partial z} = 0, \qquad \frac{\partial^2 K}{\partial z \, \partial x} = 0, \qquad \frac{\partial^2 K}{\partial x \, \partial y} = 0.$$

L'action d'un tel courant sur un élément magnétique extérieur peut être calculée aussi bien par la loi électromagnétique d'Ampère que par la loi électromagnétique de Biot; son action sur un élément de courant uniforme peut être calculée aussi bien par la loi électrodynamique d'Ampère que par la loi électrodynamique de Grassmann.