S. PINCHERLE

Sur les fractions continues algébriques

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 6 (1889), p. 145-152
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1889_3_6__145_0>

SUR LES

FRACTIONS CONTINUES ALGÉBRIQUES,

PAR M. S. PINCHERLE.

On sait que les travaux de Gauss sur l'évaluation approchée des intégrales définies ont servi de point de départ à de nombreuses recherches sur le développement en fraction continue d'une intégrale définie de la forme

$$\int_a^b \frac{f(y)\,dy}{x-y}.$$

Mais je ne crois pas que l'on ait encore considéré la question inverse : la détermination des propriétés d'une fonction définie par un développement en fraction continue. Dans les quelques pages qui suivent, j'aborde cette étude et j'espère que la nouveauté et les difficultés de la question feront accueillir avec indulgence les résultats que j'obtiens, quelque limités qu'ils soient.

1. Je considère une fraction continue dont les quotients incomplets sont tous du premier degré : soit

$$(1)\qquad \cfrac{b_1}{a_1x+a'_1-\cfrac{b_2}{a_2x+a'_2-\cfrac{b_3}{a_3x+a'_3-\ldots}}},$$

et je suppose que les coefficients a_n, a'_n, b_n tendent, pour n infini, à une limite finie et déterminée. On peut supposer, sans restriction essentielle,

$$(2)\qquad \lim_{n=\infty} a_n = 2,\qquad \lim_{n=\infty} a'_n = 0,\qquad \lim_{n=\infty} b_n = 1.$$

La fraction continue précédente donne naissance au système de réduites $\frac{Z_n}{N_n}$, dont les numérateurs et les dénominateurs sont déterminés par les équations récurrentes

$$\text{(3)} \qquad \begin{cases} N_n = (a_n x + a'_n) N_{n-1} - b_n N_{n-2}, \\ Z_n = (a_n x + a'_n) Z_{n-1} - b_n Z_{n-2} \end{cases}$$

et par les conditions initiales

$$\text{(4)} \qquad \begin{cases} N_0 = 1, & N_1 = a_1 x + a'_1, \\ Z_0 = 0, & Z_1 = b_1. \end{cases}$$

Lorsque les réduites ont une limite déterminée, cette limite est la valeur de la fraction continue : je l'indiquerai par F_x. Cette limite existe si, ε étant une quantité positive aussi petite que l'on veut, pour des valeurs assez grandes de n, on a, quel que soit l'entier r,

$$\text{(5)} \qquad \left| \frac{Z_{n+r}}{N_{n+r}} - \frac{Z_n}{N_n} \right| < \varepsilon;$$

mais les équations (3) permettent d'écrire

$$\frac{Z_{n+r}}{N_{n+r}} - \frac{Z_n}{N_n} = b_1 b_2 \ldots b_{n+1} \left(\frac{1}{N_n N_{n+1}} + \frac{b_{n+2}}{N_{n+1} N_{n+2}} + \ldots + \frac{b_{n+2} \ldots b_{n+r}}{N_{n+r-1} N_{n+r}} \right);$$

donc la condition (5) est précisément la condition nécessaire et suffisante pour la convergence de la série

$$\text{(6)} \qquad \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{b_1 b_2 \ldots b_{\nu+1}}{N_\nu N_{\nu+1}},$$

qui, si elle est convergente, est la limite de $\frac{Z_n}{N_n}$ et coïncide par conséquent avec la valeur de la fraction continue. J'indiquerai donc aussi par F_x la valeur de la série (6) [1].

2. Les racines des polynômes $N_n(x)$ forment un ensemble de points qui, suivant la nomenclature de M. Cantor, est de première

---

[1] A l'exemple de M. Mittag-Leffler, je distingue par la notation F_x les expressions analytiques, pour ne pas les confondre avec les fonctions monogènes.

puissance. Soit P cet ensemble. L'ensemble dérivé de P, et qu'on indique par P′, pourra se composer d'un point, de plusieurs points en nombre fini ou infini, et pourra même être de puissance supérieure à la première. Je ne ferai, pour le moment, qu'une hypothèse sur cet ensemble P′, et c'est qu'aucun de ses points ne soit à l'infini. L'ensemble P + P′ sera donc tout entier à l'intérieur d'un cercle ayant son centre au point $x = 0$ et un rayon fini R.

3. Revenons maintenant à la série (6). Pour étudier la convergence de cette série, je pars d'un théorème sur les équations récurrentes, dû à M. Poincaré. Je forme l'équation *limite* des équations (3); cette équation, d'après les hypothèses (2), est

$$t^2 - 2tx + 1 = 0, \tag{7}$$

et le théorème de M. Poincaré enseigne que, *en général*, la limite de $\frac{N_n}{N_{n-1}}$ est la racine $t(x)$ de cette équation dont le module est le plus grand. Pour écarter les cas d'exception, il suffit de supposer que, pour tout point x qui n'appartient pas à l'ensemble P + P′, la limite supérieure de $\frac{N_n}{N_{n-1}}$ est finie : sous cette hypothèse, le théorème de M. Poincaré est à l'abri de toute objection.

Le rapport d'un terme de la série (6) au précédent est

$$\frac{b_{\nu+1} N_{\nu-1}}{N_{\nu+1}},$$

qui a $\frac{1}{t^2(x)}$ pour limite. Mais la racine de plus grand module de l'équation (7) a certainement ce module plus grand que l'unité, sauf pour les valeurs de x, pour lesquelles

$$|t(x)| = 1,$$

c'est-à-dire pour x réel et compris entre -1 et 1. Coupons donc le plan x suivant le segment $-1 \ldots +1$; supprimons encore de ce plan l'ensemble P + P′ et appelons T le champ de valeurs de x ainsi obtenu. Pour toute valeur de x prise dans le champ T, la série (6) est convergente.

4. On démontre aisément que la série (6) est, de plus, uniformément convergente dans le domaine de chaque point du champ T où le rapport $\frac{N_{\nu-1}}{N_\nu}$ tend *uniformément* à sa limite. Sous cette condition, qui d'ailleurs n'est pas nécessaire, mais simplement suffisante, il résulte d'un théorème bien connu de M. Weierstrass, et en employant la nomenclature de cet auteur, que cette série représente *une* ou *plusieurs* branches de fonctions analytiques monogènes, selon que le champ T est composé d'*une* seule ou de *plusieurs* pièces séparées.

La détermination plus précise du champ T et, par suite, l'étude des branches de fonctions représentées par F_x dépend donc, en grande partie, de la nature de l'ensemble $P+P'$, c'est-à-dire de la distribution des racines des polynômes $N_n(x)$ dans le plan. On conçoit que cette distribution peut être très variable, à cause de l'arbitraire laissé aux coefficients a_n, a'_n, b_n.

5. J'ai supposé plus haut que l'ensemble $P+P'$ soit entièrement renfermé dans un cercle de centre O et de rayon R. En dehors de ce cercle et sous les hypothèses des paragraphes précédents, l'expression F_x peut être transformée en une série de puissances de $\frac{1}{x}$, et, puisque F_x est nul pour $x=\infty$, on a

$$F_x = \frac{1}{2\pi i}\int_{(R)} \frac{F_y\,dy}{x-y}, \qquad |x|>R, \tag{8}$$

où l'intégration se fait le long de la circonférence de ce cercle ou d'une courbe fermée extérieure.

Nous voilà déjà ramenés à une des expressions qui servent de point de départ ordinaire pour les développements en fractions continues [1]. Mais, en beaucoup de cas, on peut préciser davantage : ces cas dépendent naturellement de la distribution dans le plan des ensembles P et P', et je vais considérer les principaux.

a. Supposons d'abord que les racines c_ν des polynômes $N_n(x)$ soient

---

[1] Heine (*Handbuch der Kugelfunctionen*, t. I, p. 186) note expressément que l'on peut partir, pour l'étude du développement en fraction continue, d'une intégrale prise le long d'une ligne quelconque.

isolées et aient un seul point limite c : l'ensemble P' se réduit au seul point c. Dans ce cas, l'expression F_x représente une branche à une seule valeur d'une fonction analytique monogène. Du point c_ν comme centre, je décris une circonférence avec un rayon assez petit pour ne renfermer aucun autre point de l'ensemble $P + P'$, et je considère l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(c_\nu)} \frac{F_y\,dy}{x-y} \quad (x \text{ extérieur})$$

prise le long de cette circonférence. J'obtiens ainsi une fonction entière (en général transcendante) $g_\nu\left(\frac{1}{x-c_\nu}\right)$ de $\frac{1}{x-c_\nu}$. On peut coordonner à chaque point c_ν une semblable fonction ; ensuite, d'après le théorème de M. Mittag-Leffler, on peut former une fonction analytique uniforme $U(x)$, singulière seulement aux points $c_\nu (\nu = 1, 2, \ldots, \infty)$ et c, mais qui, retranchée de $g_\nu\left(\frac{1}{x-c_\nu}\right)$, donne une différence régulière pour $x = c_\nu$.

Si maintenant le point c est sur la coupure $-1\ldots 1$, l'expression

$$K_x = F_x - U(x)$$

représente dans tout le plan, à l'exception de la coupure, une branche à une seule valeur d'une fonction analytique monogène.

Si, au contraire, le point c n'est pas sur la coupure, on décrit du point c comme centre une circonférence de rayon moindre que la plus petite distance de c à la coupure. En intégrant le long de cette circonférence (x extérieur),

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(c)} \frac{F_y - U(y)}{x-y}\,dy$$

nous donne une fonction entière $G\left(\frac{1}{x-c}\right)$ de $\frac{1}{x-c}$, telle que la différence

$$F_x - U(x) - G\left(\frac{1}{x-c}\right)$$

n'est plus singulière pour $x = c$, et, par conséquent, l'expression

$$K_x = F_x - U(x) - G\left(\frac{1}{x-c}\right)$$

représente, comme précédemment, une branche à une seule valeur d'une fonction monogène.

b. En supposant que l'ensemble P′ se compose d'un nombre fini de points, on arrive à une conclusion analogue.

c. Il en est de même si, selon la définition de M. Cantor, l'ensemble P est de $n^{\text{ième}}$ *espèce* (c'est-à-dire $P^{(n+1)} = 0$).

d. Enfin, il en est encore de même si, l'ensemble P étant d'*espèce* infinie, l'ensemble dérivé P′ se compose d'un ensemble d'espèce finie, plus le segment $-1 \ldots 1$ en entier ou en partie.

Dans tous les cas considérés, on obtient la formule

$$F_x = \overline{U}(x) + K_x,$$

où $\overline{U}(x)$ est une fonction uniforme et K_x est une expression qui, dans tout le plan, sauf la coupure $-1 \ldots 1$, donne une branche à une seule valeur d'une fonction monogène.

6. Il s'agit maintenant d'examiner de plus près ces expressions K_x. Posons

$$x = \xi + i\eta$$

et prenons pour ξ une valeur comprise entre -1 et $+1$; considérons ensuite la limite pour $\eta = 0$ de la différence

$$K_{\xi+i\eta} - K_{\xi-i\eta}.$$

Lorsque cette limite existe (est finie et déterminée), on peut distinguer deux cas. Ou elle est nulle partout : alors le segment $-1 \ldots 1$ peut être pour K_x une ligne singulière, mais K_x, en traversant cette ligne, ne subit aucune substitution et représente par conséquent une fonction qui n'admet qu'une seule branche; c'est donc une fonction uniforme, qui peut admettre une ligne singulière $-1 \ldots 1$; je l'indique par $V(x)$. Ou bien cette limite est une fonction de ξ : je la représente par $f(\xi)$.

Supposons que $f(\xi)$ soit intégrable et continue de -1 à 1, en sorte que l'intégrale

$$\sigma(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-1}^{1} \frac{f(y)\,dy}{x-y}$$

ait un sens [1], la variable d'intégration étant réelle. Si l'on prend une quantité positive ε aussi petite que l'on veut, on peut trouver pour chaque valeur de ξ un intervalle $\xi - \delta \ldots \xi + \delta_1$ assez petit pour que l'on ait pour tout point y de cet intervalle

$$f(y) = f(\xi) + \tau(y), \qquad |\tau(y)| < \varepsilon.$$

En divisant l'intervalle d'intégration en trois parties, de -1 à $\xi - \delta$, de $\xi - \delta$ à $\xi - \delta_1$ et de $\xi + \delta_1$ à 1, et en formant

$$\sigma(\xi + i\eta) - \sigma(\xi - i\eta),$$

un raisonnement emprunté à M. Hermite (*Cours*, 3e éd., p. 142) montre aisément que la première et la troisième intégrale ont zéro pour limite, tandis que la deuxième a pour limite $f(x)$. On a donc

$$\lim_{\eta = 0} [\sigma(\xi + i\eta) - \sigma(\xi - i\eta)] = f(\xi).$$

Mais, par hypothèse, la différence des valeurs de K_x a la même limite; donc

$$K_x - \sigma(x)$$

est une des fonctions que nous avons désignées par $V(x)$.

7. En résumant, nous pouvons énoncer les résultats suivants :

« Soit une fraction continue à quotients incomplets linéaires, les coefficients de ces quotients ayant une limite finie. Soit $N_n(x)$ le dénominateur de la $n^{\text{ième}}$ réduite : c'est un polynôme de degré n. Soit, enfin, P l'ensemble des racines des polynômes $N_n(x)$.

» Cela posé :

» 1° En supposant que le rapport $\frac{N_{n+1}}{N_n}$ ait, en général, une limite supérieure finie, ce rapport tend à une limite déterminée, et la fraction

---

[1] Remarquons qu'il n'est pas nécessaire de supposer que $f(x)$ soit finie pour $x = \pm 1$. Si l'ordre d'infini était fini, mais tel que l'intégrale $\sigma(x)$ n'eût aucun sens, il suffirait de remplacer dans ce qui suit $\sigma(x)$ par

$$\frac{1}{(x^2-1)^m} \int_{-1}^{1} \frac{(y^2-1)^m f(y)\, dy}{x-y},$$

m étant un nombre entier positif suffisamment grand.

continue est convergente, excepté pour les points des ensembles P, P′ et pour ceux d'une coupure que, par un changement de variable, on peut toujours réduire au segment $-1\ldots 1$. Si le rapport $\frac{N_{n+1}}{N_n}$ tend uniformément à sa limite, la fraction continue est une expression analytique F_x.

» 2° Si ni P ni P′ n'ont des points à l'infini; si, de plus, P est d'espèce finie ou si, étant d'espèce infinie, P′ se compose d'un ensemble d'espèce finie et du segment $-1\ldots 1$, l'expression F_x peut s'écrire, sous les hypothèses précédentes,

$$F_x = U(x) + K_x,$$

où $U(x)$ est une fonction analytique *uniforme* et K_x une nouvelle expression qui représente, sauf pour les points de la coupure, une branche à une seule valeur de fonction analytique monogène.

» 3° Enfin, si, sous les mêmes hypothèses, la différence des valeurs de F_x de part et d'autre de la coupure a une limite $f(x)$ intégrable et continue de -1 à $+1$, on a

$$F_x = U(x) + V(x) + \frac{1}{2\pi i}\int_{-1}^{1} \frac{f(y)\,dy}{x-y},$$

où $V(x)$, si elle n'est pas identiquement nulle, est une fonction *uniforme* qui admet le segment $-1\ldots 1$ comme ligne singulière. »