ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

LOUIS RAFFY

Sur la rectification des cubiques planes unicursales

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 6 (1889), p. 103-144
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1889_3_6__103_0>

SUR LA RECTIFICATION

DES

CUBIQUES PLANES UNICURSALES,

PAR M. L. RAFFY.

INTRODUCTION.

Les courbes algébriques planes, les plus simples après les coniques, sont les cubiques unicursales. La détermination de leurs arcs dépend d'une intégrale hyperelliptique qui est ordinairement de genre 3. Dans certains cas pourtant le problème est résolu par une intégrale de genre moindre. Ainsi la parabole semi-cubique droite, la première courbe qui ait été rectifiée, a son arc algébrique : c'est la développée de la parabole du second degré. On sait aussi depuis longtemps (1) que toute cubique unicursale passant par les points cycliques est rectifiable par une intégrale elliptique (et même la cissoïde droite en termes finis). Plus récemment la théorie des surfaces minima a fourni une nouvelle classe de cubiques unicursales à arc algébrique (2) : ce sont les lignes de courbure de la surface de M. Enneper. Connues aussi (3) comme podaires négatives d'une parabole par rapport à son foyer et comme caustiques par réflexion d'une parabole pour des rayons incidents perpendiculaires à son axe, ces courbes pourraient être appelées *caustiques-podaires* de la parabole. Leur arc est une fonction rationnelle des coordonnées de son extrémité.

---

(1) SALMON, *Higher plane curves*, p. 267; Dublin, 1852.
(2) DARBOUX, *Leçons sur la théorie des surfaces*, t. I, p. 318 et 401.
(3) SALMON, *Higher plane curves*, 2e édition, Chap. III.

Je me suis proposé de relier ces résultats et de déterminer toutes les cubiques unicursales dont l'arc est exprimé par une intégrale de genre inférieur à 3, et toutes celles qui sont rectifiables algébriquement ou en termes finis.

Dans un premier Chapitre, j'indique les singularités qui diminuent le genre de cette intégrale pour une courbe unicursale quelconque et particulièrement pour les cubiques.

Dans le Chapitre II, j'étudie en détail les cubiques dont l'arc est de genre 0, de genre 1 ou de genre 2. Ce sont d'abord les cubiques *à courbure rationnelle* (1); j'entends par là les cubiques pour lesquelles la dérivée de l'arc par rapport à t est une fonction rationnelle de t. *Il n'y a pas d'autres cubiques unicursales à courbure rationnelle que les caustiques-podaires des paraboles du second degré.* Viennent ensuite les courbes rectifiables par l'intégration d'un radical carré portant sur un trinôme du second degré (radical circulaire). Ce sont évidemment, avec les précédentes, les seules cubiques *immédiatement* rectifiables en termes finis, c'est-à-dire rectifiables en termes finis sans changement de variable. Elles forment trois classes : 1° *les courbes représentées en coordonnées rectangulaires par les formules*

$$x = \lambda \frac{t^3 - 3t}{t - c}, \quad y = \lambda \frac{3t^2 - 1}{t - c};$$

2° *les paraboles semi-cubiques, obliques ou droites;* 3° *les cissoïdes, obliques ou droites.*

Relativement aux courbes dont l'arc est de genre 1, on a ce théorème :

Les seules cubiques unicursales dont l'arc soit de genre 1 sont celles qui présentent une des singularités suivantes, à l'exclusion des trois autres : 1° *deux points d'inflexion à tangente isotrope, situés à distance finie;* 2° *rebroussement à distance finie et contact simple avec la droite de l'infini;* 3° *branches paraboliques formant inflexion ou rebroussement à l'infini;* 4° *passage par les points cycliques.*

---

(1) Il est naturel d'appeler *courbes à courbure rationnelle* les courbes dont la courbure est une fonction rationnelle des coordonnées cartésiennes. On les a aussi appelées *courbes de direction.*

Enfin *les seules cubiques unicursales dont l'arc soit de genre* 2 *sont :* 1° *celles qui présentent un rebroussement à distance finie;* 2° *celles qui ont un contact simple avec la droite de l'infini ou qui admettent une asymptote double.*

Le Chapitre III traite des cubiques unicursales dont l'arc est une fonction algébrique du paramètre t. Parmi les courbes dont l'arc est de genre zéro, les seules qui répondent à la question sont les caustiques-podaires et les développées des paraboles du second degré. Ce résultat acquis, je prouve que si l'arc est algébrique, il est de genre zéro. Donc *les seules cubiques unicursales dont l'arc soit algébrique sont les caustiques-podaires des paraboles du second degré* (*arc rationnel*) *et les développées de ces mêmes paraboles* (*arc irrationnel*).

Au Chapitre IV, j'étudie les cubiques unicursales dont l'arc est susceptible de s'exprimer en termes finis. Après avoir établi ou rappelé quelques propositions auxiliaires, je démontre ce théorème :

En dehors des cubiques dont l'arc est de genre zéro, les cubiques dont l'arc est susceptible de s'exprimer en termes finis ne doivent être cherchées que parmi celles dont l'arc est de genre 1 *et qui présentent soit un rebroussement à distance finie et un contact simple avec la droite de l'infini, soit des branches paraboliques formant inflexion ou rebroussement à l'infini.*

Examinant ensuite les courbes de ces deux classes, je conclus qu'il n'en existera parmi elles de rectifiables en termes finis que si l'on peut intégrer en termes finis l'une des différentielles

$$\frac{(z+1)\,dz}{\sqrt{z^4+\lambda(z+1)^2}}, \qquad \frac{(z+1)\,dz}{\sqrt{z^4+4\lambda' z+3\lambda'}},$$

pour quelque valeur positive de λ ou pour quelque valeur positive de λ' autre que 1. Cette dernière question ne semble pas pouvoir être résolue dans l'état actuel de la Science. Néanmoins, comme l'intégration en termes finis exige deux conditions et qu'on ne dispose que d'un seul paramètre, il paraît fort probable qu'*en dehors des cubiques unicursales dont l'arc est de genre zéro, il n'en existe aucune qui soit rectifiable en termes finis.*

CHAPITRE PREMIER.

DU GENRE DE L'ARC DES COURBES PLANES UNICURSALES ET DES SINGULARITÉS QUI LE DIMINUENT.

1. Les coordonnées d'une courbe unicursale peuvent s'exprimer rationnellement en fonction d'un paramètre t qui corresponde uniformément aux points de la courbe. Si la courbe est d'ordre m, le dénominateur commun des coordonnées est d'ordre m, ainsi que leurs numérateurs; c'est du moins ce qu'on peut toujours réaliser au moyen d'une transformation homographique opérée sur le paramètre. Cela étant, nous substituerons aux coordonnées rectangulaires x et y les coordonnées symétriques

$$u = x + iy, \qquad v = x - iy,$$

et nous serons en droit de poser

$$u = \frac{A}{C}, \qquad v = \frac{B}{C},$$

A, B, C désignant trois polynômes entiers en t, d'ordre m, qu'aucun polynôme en t ne divise à la fois. N'ayant égard qu'aux courbes réelles, nous supposerons que C est un polynôme à coefficients réels, et que A et B ont leurs coefficients imaginaires conjugués.

Dans ce système de notations, la dérivée de l'arc s par rapport à t a pour expression

$$s' = \sqrt{u'v'} = \frac{\sqrt{(CA' - AC')(CB' - BC')}}{C^2} = \frac{\sqrt{T}}{C^2}.$$

Les deux polynômes $CA' - AC'$ et $CB' - BC'$ peuvent être supposés du degré $2m - 2$; leur produit T est du degré $4m - 4$. L'intégrale hyperelliptique qui représente l'arc est donc de genre $2m - 3$, sauf abaissement possible. On conçoit en effet que T puisse admettre dans certains cas des racines multiples. Si T est de la forme $\tau^2\theta$, θ étant un polynôme de degré $2r$ sans racine multiple, l'intégrale qui représente l'arc sera de genre zéro pour $r=0$ et $r=1$, de genre $r-1$ pour $r \geqq 2$. Ce genre peut être appelé *le genre de l'arc;* car il ne change pas quand on substitue à t tout autre paramètre correspondant uniformément aux points de la courbe. On sait en effet que tous les paramètres z qui jouissent de cette propriété sont liés à t par une relation homographique

$$t = \frac{az+b}{\alpha z+\beta}.$$

Ainsi défini, le genre de l'arc n'est susceptible d'abaissement que par l'effet des singularités qui correspondent à des racines multiples de T. Nous allons énumérer ces singularités dans les courbes unicursales d'ordre quelconque, et nous les discuterons plus spécialement dans le cas des cubiques. Cette étude se rattache à celle des points singuliers; pour la définition de l'ordre et de la classe d'un cycle, et pour la détermination de ces nombres, nous ne pouvons mieux faire que de renvoyer aux travaux de M. Halphen, notamment à l'importante *Étude sur les points singuliers,* qui est jointe à l'Ouvrage classique de Salmon : *Traité de Géométrie analytique; courbes planes* (¹).

I. — Singularités qui diminuent le genre de l'arc.

2. Dans tout ce qui suit, nous supposerons T mis sous la forme

$$T = \tau^2 \theta,$$

θ étant un polynôme entier sans racine multiple, dont le degré sera représenté par $\delta\theta$. Pour l'évaluer, nous étudierons les racines de T. Il y en a de deux sortes : 1° celles qui n'annulent pas C; 2° celles qui annulent C. D'après nos conventions, les premières donnent des points de la courbe situés à distance finie, les secondes des points à l'infini, et ce sont les seules valeurs de t qui donnent ces points.

Racines de T *n'annulant pas* C. — Soit t_0 une pareille racine; elle

(¹) *Appendice,* Iʳᵉ Partie, nᵒˢ 1 à 10. Le nombre que M. Halphen appelle ρ est, par la nature de notre problème, toujours égal à 1.

annule au moins un des deux polynômes $CA' - AC'$ et $CB' - BC'$. Nous supposerons que, pour $t = t_0$, $CA' - AC'$ soit nul comme $(t - t_0)^{n-1}$ et $CB' - BC'$ comme $(t - t_0)^{p-1}$, n et p étant deux entiers dont l'un au moins est supérieur ou égal à 2. Le rapport

$$\frac{u'}{v'} = -\frac{y' - ix'}{y' + ix'}$$

est de l'ordre de $(t - t_0)^{n-p}$. Si donc n et p sont différents, ce rapport est nul ou infini, c'est-à-dire que $y' : x'$ est égal à $\pm i$; la tangente au point $M(u = a, v = b)$ donné par $t = t_0$ est une droite isotrope. Soit, par exemple, p plus grand que n,

$$p = n + \nu.$$

La tangente en M au cycle fourni par les valeurs de t voisines de t_0 a pour coefficient angulaire $-i$. (Ce point M peut d'ailleurs être l'origine d'autres cycles, si les deux équations $u = a$, $v = b$ admettent d'autres racines communes que $t = t_0$.) Le développement de $u - a$ suivant les puissances de $t - t_0$ commence par un terme en $(t - t_0)^n$, celui de $v - b$ par un terme en $(t - t_0)^{n+\nu}$. Ainsi, le point M est l'origine d'un cycle à tangente isotrope dont l'ordre est n et la classe ν. D'autre part, t_0 est racine d'ordre $2n + \nu - 2$ de T; ainsi $\delta 0$ est diminué du plus grand nombre pair contenu dans $2n + \nu - 2$. Donc :

Si un point situé à distance finie est l'origine d'un cycle à tangente isotrope, le cycle étant d'ordre n et de classe ν, le genre de l'arc est diminué de $n - 1$ plus la partie entière de $\nu : 2$.

Si n et p sont égaux, le rapport $y' : x'$ tend pour $t = t_0$ vers une limite différente de $\pm i$. La tangente en M au cycle considéré n'est pas une droite isotrope. Le cycle est d'ordre n; et, t_0 étant racine d'ordre $2n - 2$ de T, le genre de l'arc est diminué de $n - 1$. Donc :

Si un point situé à distance finie est l'origine d'un cycle à tangente non isotrope, le cycle étant d'ordre n, le genre de l'arc est diminué de $n - 1$.

3. *Racines de* T *annulant* C. — Soit t_0 une telle racine ; elle annule un seul des polynômes $CA' - AC'$ et $CB' - BC'$ ou les annule tous les deux suivant qu'elle est racine simple ou racine multiple de C. Soit n son

ordre de multiplicité. Si elle n'annule ni A ni B, elle est racine d'ordre $2n-2$ de T, $\delta\theta$ est diminué de $2n-2$ et le genre de l'arc de $n-1$. Remarquons que, dans ce cas, u et v sont, pour $t=t_0$, infinis comme $(t-t_0)^{-n}$; le rapport

$$\frac{u}{v}=-\frac{y-ix}{y+ix}$$

tend vers une limite finie et différente de zéro. Ainsi x et y sont infinis, et le rapport $y:x$ prend une valeur différente de $\pm i$. Donc :

Si une courbe admet une direction asymptotique non isotrope et si au point situé à l'infini dans cette direction correspondent n valeurs égales du paramètre t, le genre de l'arc est diminué de $n-1$.

Supposons maintenant que t_0 annule A ou B, A par exemple. Cette valeur rend nul le rapport $u:v$ et donne une direction asymptotique de coefficient angulaire i.

Soit r son ordre de multiplicité comme racine de A. Il y a trois cas à distinguer, suivant que r est supérieur, égal ou inférieur à n.

Supposons d'abord $r \geqq n+1$. Le cycle fourni par les valeurs de t infiniment voisines de t_0 est d'ordre n et de classe $\nu=r-n$. D'autre part, le polynôme $CA'-AC'$ admet t_0 comme racine d'ordre $n+r-1=2n+\nu-1$; le polynôme $CB'-BC'$ admet t_0 comme racine d'ordre $n-1$. Donc t_0 est racine d'ordre $3n+\nu-2$ de T; l'abaissement de $\delta\theta$ est égal au plus grand nombre pair contenu dans $3n+\nu-2$. Par suite, *le genre de l'arc est diminué de $n-1$ plus la partie entière de* $(n+\nu):2$.

Soit maintenant $r=n$. Pour $t=t_0$, u prend une valeur a finie et différente de zéro, tandis que v est infini comme $(t-t_0)^{-n}$. Le cycle correspondant aux valeurs de t voisines de t_0 est d'ordre n. Pour trouver sa classe, on fera une combinaison linéaire et homogène de A et C, d'où disparaisse le terme en $(t-t_0)^n$. Cette combinaison est ici $A-aC$. Si $n+\nu$ est le degré de son premier terme, la classe du cycle est ν. D'autre part, $A-aC$ admettant t_0 comme racine d'ordre $n+\nu$, l'identité

$$CA'-AC'=C(A-aC)'-(A-aC)C'$$

montre que $CA'-AC'$ admet t_0 comme racine d'ordre $2n+\nu-1$; or t_0 est racine d'ordre $n-1$ de $CB'-BC'$. Donc t_0 est racine d'ordre

$3n + \nu - 2$ de T; l'abaissement de $\delta\theta$ est égal au plus grand nombre pair contenu dans $3n + \nu - 2$. Par suite, *le genre de l'arc est diminué de $n - 1$ plus la partie entière de $(n + \nu) : 2$.*

Supposons enfin $r \leqq n - 1$. Le cycle est d'ordre r et de classe $\nu = n - r$. D'autre part, le polynôme $CA' - AC'$ admet t_0 comme racine d'ordre $n + r - 1 = 2n - \nu - 1$, et $CB' - BC'$ admet t_0 comme racine d'ordre $n - 1$. Donc t_0 est racine d'ordre $3n - \nu - 2$ de T; l'abaissement de $\delta\theta$ est égal au plus grand nombre pair contenu dans $3n - \nu - 2$. Par suite, *le genre est diminué de $n - 1$ plus la partie entière de $(n - \nu) : 2$.*

Dans le cas présent, l'asymptote isotrope est rejetée à l'infini, puisque u et v sont infinis pour $t = t_0$, tandis que, dans les deux cas précédents $(r \geqq n)$, l'asymptote isotrope est située à distance finie. Dans les trois cas, n désigne le nombre des valeurs égales de t qui correspondent à l'origine du cycle, et ν est la classe du cycle. On arrive donc à cette conclusion :

Si l'un des points cycliques est l'origine d'un cycle de classe ν et si à ce point correspondent n valeurs égales du paramètre t, le genre de l'arc est diminué de $n - 1$ plus la partie entière de $(n + \nu) : 2$, si l'asymptote isotrope tangente au cycle est située à distance finie; il est diminué de $n - 1$ plus la partie entière de $(n - \nu) : 2$, si cette asymptote est rejetée à l'infini.

4. La discussion précédente se résume en ces quatre énoncés :

Théorème I. — *Si un point situé à distance finie est l'origine d'un cycle à tangente isotrope, le cycle étant d'ordre n et de classe ν, le genre de l'arc est diminué de $n - 1$ plus la partie entière de $\nu : 2$.*

Théorème II. — *Si un point situé à distance finie est l'origine d'un cycle à tangente non isotrope, le cycle étant d'ordre n, le genre de l'arc est diminué de $n - 1$.*

Théorème III. — *Si une courbe admet une direction asymptotique non isotrope, et si au point situé à l'infini dans cette direction correspondent n valeurs égales du paramètre t, le genre de l'arc est diminué de $n - 1$.*

Théorème IV. — *Si l'un des points cycliques est l'origine d'un cycle de classe ν, et si à ce point correspondent n valeurs égales du paramètre t, le* *genre de l'arc est diminué de $n-1$ plus la partie entière $(n+\nu):2$, si l'asymptote isotrope tangente au cycle est située à distance finie; il est diminué de $n-1$ plus la partie entière de $(n-\nu):2$, si cette asymptote est rejetée à l'infini.*

II. — Genre de l'arc d'une cubique.

5. Nous allons appliquer ces quatre théorèmes aux cubiques.

Remarques préliminaires relatives aux cubiques. — 1° Il n'y a pas de cycle d'ordre supérieur à 2 : il n'y a de cycle d'ordre 2 que celui qui a pour origine le point de rebroussement quand la courbe en présente un; 2° la somme $n+\nu$ de l'ordre et de la classe d'un cycle ne peut dépasser trois; 3° un point cyclique ne peut être qu'un point simple, origine d'un cycle d'ordre 1 comme tout point simple.

6. *Application du théorème I.* — Le point origine d'un cycle à tangente isotrope ne peut être qu'un point simple; car une courbe réelle présentant un rebroussement où la tangente est une droite isotrope doit avoir un autre rebroussement où la tangente est l'autre droite isotrope, ce qui n'est pas possible pour une cubique. Ainsi n est égal à 1. Dès lors, pour que le genre de l'arc diminue, il faut que ν soit égal à 2 (puisque $n+\nu \leqq 3$), c'est-à-dire que l'origine du cycle soit un point d'inflexion. L'abaissement correspondant de $\delta 0$ est égal à 2. Mais il existe un autre point d'inflexion où la tangente est l'autre droite isotrope. Donc :

Si une cubique présente à distance finie deux points d'inflexion à tangente isotrope, $\delta 0$ diminue de 4 unités.

Remarquons qu'une cubique unicursale ayant au plus trois points d'inflexion, en vertu des formules de Plücker, ne peut présenter plus d'un couple de deux points d'inflexion à tangente isotrope. L'abaissement de $\delta 0$ qui correspond au théorème I ne peut donc se produire qu'une fois.

7. *Application du théorème II.* — Il n'y aura abaissement du genre de l'arc que si n est égal à 2, c'est-à-dire que si l'origine du cycle est

un point de rebroussement. L'abaissement correspondant de $\delta\theta$ est égal à 2. Donc :

Si une cubique présente un point de rebroussement à distance finie, $\delta\theta$ diminue de 2 unités.

8. *Application du théorème III.* — Il n'y aura abaissement du genre de l'arc que si C admet une racine double ou une racine triple. Dans le premier cas, $\delta\theta$ diminue de 2 unités; dans le second, de 4 unités.

Voyons quelles singularités géométriques correspondent à ces deux hypothèses.

Soit d'abord $t = 0$ une racine double de C. Nous poserons

$$C = t^2(t - a), \qquad x = \frac{X}{C}, \qquad y = \frac{Y}{C},$$

X et Y désignant deux polynômes du troisième degré en t, dont un seul peut être divisible par t. On est donc en droit de supposer que Y ne s'annule pas avec t. Pour déterminer l'ordre et la classe du cycle dont l'origine est le point à l'infini donné par $t = 0$, on doit former avec C, X et Y trois combinaisons linéaires et homogènes qui soient, pour $t = 0$, de l'ordre de grandeur de trois puissances différentes de t. Soient α, β, γ les exposants de ces puissances rangés par ordre de grandeur croissante; l'ordre n du cycle est $\beta - \alpha$, sa classe ν est $\gamma - \beta$. Ici, l'un des exposants α, β, γ est nul, puisque Y n'est pas divisible par t; un autre est égal à 2, puisque C est divisible par t^2. Il faudra former une combinaison $\zeta = fC + gX + hY$ qui, pour $t = 0$, soit de l'ordre de grandeur d'une puissance positive de t, autre que la seconde. Or, le polynôme ζ est du troisième degré en t; il sera donc nécessairement de l'ordre de t ou de l'ordre de t^3. Dans le premier cas, on a

$$\alpha = 0, \qquad \beta = 1, \qquad \gamma = 2; \qquad n = \beta - \alpha = 1, \qquad \nu = \gamma - \beta = 1.$$

L'ordre et la classe du cycle fourni par les valeurs infiniment petites de t étant égaux tous deux à l'unité, l'origine du cycle est un point ordinaire; la tangente au cycle est la droite de l'infini, puisque $t = 0$ est racine double de C.

Dans le second cas, on a

$$\alpha = 0, \qquad \beta = 2, \qquad \gamma = 3; \qquad n = \beta - \alpha = 2, \qquad \nu = \gamma - \beta = 1.$$

Le cycle fourni par les valeurs infiniment petites de t étant d'ordre 2 et de classe 1, son origine est un point de rebroussement. D'autre part, l'expression

$$\frac{\zeta}{C} = f + g\frac{X}{C} + h\frac{Y}{C} = f + gx + hy$$

est proportionnelle à la distance d'un point (x, y) de la courbe à la droite

$$(D) \qquad f + gx + hy = 0,$$

qui n'est certainement pas la droite de l'infini; car, si g et h étaient tous les deux nuls, ζ serait de l'ordre de t^2 et non de l'ordre de t^3. Or on a

$$\frac{\zeta}{C} = \frac{\lambda t^3}{t^2(t-a)} = \frac{\lambda t}{t-a}.$$

On voit par là que le point de rebroussement donné par $t = 0$ est sur la droite (D), qui sera une asymptote double de la cubique.

9. Supposons maintenant que C admette une racine triple. Cette racine étant nécessairement réelle, on peut la supposer nulle. Soit donc $C = t^3$. On n'aura qu'à prendre comme nouvelle variable z l'inverse de t pour avoir les deux coordonnées de la courbe exprimées par deux polynômes *entiers*. Réciproquement, si les coordonnées d'une cubique sont exprimées par deux polynômes entiers en z, on pourra dire que C admet une racine triple; car, si l'on prend pour nouvelle variable t l'inverse de z, les coordonnées deviennent des fractions, et leur dénominateur commun est t^3. Ainsi il revient au même de dire que C admet une racine triple ou que les coordonnées sont des fonctions *entières* d'un paramètre.

Pour étudier les singularités géométriques qui correspondent à cette hypothèse, posons

$$C = t^3, \qquad x = \frac{X}{C}, \qquad y = \frac{Y}{C},$$

X et Y étant deux polynômes, dont le premier seul pourra être divisible par t. Pour déterminer l'ordre et la classe du cycle dont l'origine est donnée par $t=0$, remarquons que deux des trois exposants désignés plus haut par α, β, γ sont connus : α est nul et γ est égal à 3. La combinaison

$$\zeta = fC + gX + hY$$

ne pourra être pour $t=0$ que de l'ordre de t ou de l'ordre de t^2. Dans le premier cas, on a

$$\alpha=0, \quad \beta=1, \quad \gamma=3; \quad n=\beta-\alpha=1, \quad \nu=\gamma-\beta=2.$$

Le cycle est d'ordre 1 et de classe 2. Donc le point à l'infini est un point d'inflexion. Quant à la tangente d'inflexion, c'est la droite de l'infini, puisque $t=0$ est racine triple de C. La courbe présente donc des branches paraboliques formant une inflexion à l'infini.

Dans le second cas, on a

$$\alpha=0, \quad \beta=2, \quad \gamma=3; \quad n=\beta-\alpha=2, \quad \nu=\gamma-\beta=1.$$

Le cycle est d'ordre 2 et de classe 1. Donc le point à l'infini est un point de rebroussement. Quant à la tangente en ce point, c'est la droite de l'infini, puisque C admet une racine triple. La courbe a donc des branches paraboliques formant un rebroussement à l'infini.

En résumé, à une racine double de C correspond soit un contact simple avec la droite de l'infini, soit une asymptote double; à une racine triple de C correspondent des branches paraboliques formant inflexion ou rebroussement à l'infini.

10. *Application du théorème IV.* — Tout cycle ayant pour origine un point cyclique est d'ordre 1; sa classe ne pouvant dépasser 2 (puisque $n+\nu$ est au plus égal à 3), l'abaissement de $\delta\theta$ produit par un point cyclique est égal à 2. Donc, si une cubique passe par les points cycliques, $\delta\theta$ diminue de 4 unités.

11. Il est presque superflu de faire remarquer que les causes d'abaissement de $\delta\theta$ énoncées par les théorèmes II, III et IV ne peuvent, non plus que celle qui s'exprime par le théorème I, se présenter chacune plus d'une fois.

Ces cinq causes d'abaissement sont groupées en regard de leurs effets dans le Tableau suivant :

Nature de la singularité.	Abaissement de 2θ.
J. inflexions à tangente isotrope	4
R. rebroussement à distance finie	2
D. racine double de C	2
E. coordonnées entières	4
O. passage par les points cycliques	4

Dans ce Tableau, la lettre O a été choisie comme rappelant les ombilics du plan, nom donné parfois aux points cycliques. La signification des autres lettres s'explique d'elle-même. Pour abréger, nous avons mis en face de D et de E des hypothèses analytiques. Mais on a vu que D correspond soit à un contact simple avec la droite de l'infini, soit à une asymptote double, et E aux branches paraboliques formant inflexion ou rebroussement à l'infini.

12. *Remarques.* — Voici maintenant quelques remarques relatives à la coexistence des diverses singularités ci-dessus, que nous désignerons fréquemment par les lettres placées devant leur nom.

1° Les deux singularités R et J s'excluent mutuellement d'après les formules de Plücker.

2° Des trois dernières singularités D, E, O, chacune exclut les deux autres. Il suit de là que, si l'on attribue à une cubique l'une des deux premières singularités, elle ne pourra présenter en outre qu'une seule des trois dernières; et que, si on lui attribue l'une des trois dernières, elle ne pourra présenter en outre que l'une des deux premières.

3° Les deux singularités O et J s'excluent mutuellement. En effet, une tangente inflexionnelle d'une cubique ne peut rencontrer la courbe qu'au point d'inflexion, sans quoi elle aurait plus de trois points communs avec elle; en particulier, elle ne peut être parallèle à une asymptote. Donc une cubique ne peut à la fois passer par les points cycliques, c'est-à-dire admettre des asymptotes isotropes, et présenter deux points d'inflexion à tangente isotrope.

CHAPITRE II.

DÉTERMINATION DES CUBIQUES UNICURSALES DONT L'ARC EST DE GENRE INFÉRIEUR A TROIS.

13. D'après ce qui précède, les singularités que nous avons appelées J, R, D, E, O sont les seules qui puissent diminuer le genre de l'arc des cubiques. Nous allons déterminer successivement toutes celles de ces courbes dont l'arc s'abaisse au genre 0, au genre 1 ou au genre 2. Pour le genre 0, $\delta\theta$ est égal à 0 ou à 2; quand $\delta\theta$ est nul, on a les courbes pour lesquelles la dérivée de l'arc par rapport à t est une fonction rationnelle de t; ce sont les courbes à courbure rationnelle; quand $\delta\theta = 2$, l'arc s'exprime encore en termes finis par l'intégration d'un radical portant sur un trinôme du second degré. Quand $\delta\theta = 4$, l'arc est de genre 1; la cubique est rectifiable par les intégrales elliptiques. Quand $\delta\theta = 6$, sa rectification dépend des intégrales hyperelliptiques de genre 2.

I. — Détermination des cubiques unicursales à courbure rationnelle.

14. Dans les courbes d'ordre n, le degré de θ est généralement égal à $4n - 4$. Pour que la courbe soit à courbure rationnelle, il faut et il suffit que $\delta\theta$ se réduise à 0.

Dans les cubiques, $\delta\theta$ est généralement égal à 8. Les cubiques cherchées devront donc présenter des singularités telles que $\delta\theta$ éprouve un abaissement égal à 8. Nous n'avons qu'à chercher dans le Tableau précédent, en tenant compte des remarques qui le précèdent et qui le suivent, les abaissements de $\delta\theta$ dont la somme fait 8.

Aucune singularité ne peut se répéter; aucune n'abaisse $\delta\theta$ de 8 unités. Il faut donc réunir au moins deux singularités; mais chacune des trois dernières exclut les deux autres, et chacune des deux premières exclut l'autre. On doit donc prendre *une* des deux premières avec *une* des trois dernières. Or l'abaissement produit par R étant égal à 2, aucune des trois singularités, D, E, O, jointe à R ne suffit pour produire un abaissement égal à 8. Donc R ne convient pas. Avec J on ne peut, pour abaisser $\delta 0$ de 8 unités, grouper que O ou E. Mais J exclut O. Donc la seule solution du problème est fournie par J jointe à E. En d'autres termes, *les seules cubiques unicursales qui soient à courbure rationnelle sont celles qui présentent à distance finie deux points d'inflexion à tangente isotrope et dont les coordonnées sont entières.*

15. Il est facile d'obtenir toutes ces courbes. Soient, en effet, u et v deux polynômes conjugués du troisième degré en t. Leurs dérivées u', v' sont des trinômes du second degré, dont le produit doit être carré parfait

$$s'^2 = u'v' = \lambda(t-ci)^2(t+ci)^2.$$

On ne peut supposer que les facteurs $t-ci$ et $t+ci$ appartiennent tous les deux à u' ainsi qu'à v'; car alors le rapport $v' : u'$ serait constant et la courbe serait une droite. On doit donc prendre

$$u' = 3A(t+ci)^2, \qquad v' = 3B(t-ci)^2$$

et, par suite,

$$u - a = A(t+ci)^3, \qquad v - b = B(t-ci)^3,$$

en désignant par A et B, a et b deux couples de constantes imaginaires conjuguées. Si maintenant on pose

$$\frac{u-a}{A} = u_1, \qquad \frac{v-b}{B} = v_1,$$

on ne fera que substituer à la courbe (u, v) une courbe semblable (u_1, v_1). On aura ainsi

$$u_1 = x_1 + iy_1 = (t+ci)^3, \qquad v_1 = x_1 - iy_1 = (t-ci)^3;$$

d'où l'on déduit

$$x_1 = t(t^2 - 3c^2), \qquad y_1 = 3ct^2 - c^3.$$

Si l'on fait

$$x_1 = x, \qquad y_1 - 8c^3 = y,$$

il vient

$$x = t(t^2 - 3c^2), \qquad y = 3c(t^2 - 3c^2).$$

L'élimination de t entre ces deux équations est immédiate et donne

$$y^2(y+9c^3)-27c^3x^2=0,$$

ce qui peut s'écrire

$$y^2(y+h)-3hx^2=0.$$

Sous cette forme on reconnaît les caustiques-podaires des paraboles du second degré. Nous arrivons donc à cette conclusion :

Théorème. — *Il n'existe pas d'autres cubiques unicursales à courbure rationnelle que les caustiques-podaires des paraboles du second degré.*

Ce résultat peut se déduire aussi des formules générales que j'ai données antérieurement pour représenter les coordonnées de toutes les courbes unicursales à courbure rationnelle (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 28 mars 1887).

II. — Détermination des cubiques unicursales rectifiables par l'intégration d'un radical circulaire.

16. J'appelle *radical circulaire*, par analogie avec les radicaux elliptiques, un radical carré portant sur un trinôme du second degré à racines distinctes. Il s'agit donc de trouver toutes les cubiques pour lesquelles $\delta\theta$, au lieu d'être égal à 8, se réduit à 2.

Pour obtenir cet abaissement de 6 unités, il faut, en vertu des remarques faites au n° 12, grouper une des deux premières singularités avec une des trois dernières.

Le Tableau montre qu'avec J on ne peut prendre que D, et qu'avec R on ne peut prendre que E ou bien O.

17. Examinons ces trois solutions $J+D$, $R+E$, $R+O$.

Première solution : $J+D$. — La cubique présente à distance finie deux points d'inflexion à tangente isotrope, et le dénominateur C de ses coordonnées admet une racine double, ce qui correspond soit à un contact simple avec la droite de l'infini, soit à un rebroussement à l'infini. Mais, en vertu des formules de Plücker, les deux inflexions excluent le rebroussement. La cubique a donc un point double ordinaire, et ce point est à distance finie.

La racine double et la racine simple de C étant réelles, une transformation homographique réelle permet de ramener le dénominateur de u et v au premier degré. D'autre part, si $u=a$, $v=b$ sont les équations des deux tangentes isotropes inflexionnelles, on aura

$$u-a=\frac{(z+\alpha+i\beta)^3}{z}, \qquad v-b=\frac{(z+\alpha-i\beta)^3}{z},$$

puisqu'aux valeurs $u=a$, $v=b$ doivent correspondre trois valeurs égales de z. Si maintenant on pose

$$u-a=\beta^2\lambda(x+iy), \qquad v-b=\beta^2\lambda(x-iy),$$

on ne fera que changer la courbe cherchée en une courbe (x,y) qui lui sera semblable. Par les substitutions

$$\alpha=c\beta, \qquad z+\alpha=\beta t,$$

on obtiendra ces formules :

$$x+iy=\lambda\frac{(t+i)^3}{t-c}, \qquad x-iy=\lambda\frac{(t-i)^3}{t-c};$$

d'où l'on tire

$$x=\lambda\frac{t^3-3t}{t-c}, \qquad y=\lambda\frac{3t^2-1}{t-c}.$$

Ainsi est définie la première classe de cubiques unicursales rectifiables par l'intégration d'un radical circulaire. L'origine est au foyer où concourent les deux tangentes isotropes inflexionnelles; c et λ sont deux paramètres arbitraires. En éliminant t entre les relations qui donnent x et y, on trouve l'équation

$$(x^2+y^2)[x-3cy+3\lambda(9c^2+1)]-(x-cy+4\lambda)^3=0.$$

18. *Seconde solution :* R + E. — La cubique présente un rebroussement à distance finie et le dénominateur C de ses coordonnées admet une racine triple, ce qui veut dire ici que la droite de l'infini est une tangente d'inflexion. Si l'on prend pour origine le point de rebroussement, l'équation de la courbe ne contiendra pas de terme constant ni

de terme de premier degré, et les termes du second degré formeront un carré parfait. A raison des trois intersections confondues avec la droite de l'infini, les termes du troisième degré forment un cube parfait. On aura donc

$$x^3 - \lambda(y - mx)^2 = 0,$$

en coordonnées rectangulaires, λ désignant une longueur arbitraire et m un nombre arbitraire. En coordonnées obliques, cette équation peut s'écrire

$$x'^3 - \mu y'^2 = 0.$$

Les courbes cherchées sont donc celles qui, en coordonnées obliques, ont la même équation que les paraboles semi-cubiques en coordonnées rectangulaires. Il est naturel de les appeler *paraboles semi-cubiques obliques*. L'une d'elles est la parabole semi-cubique droite ($m = 0$), développée de la parabole du second degré.

19. *Troisième solution :* R + O. — La cubique présente un point de rebroussement à distance finie et passe par les points cycliques. Si l'on prend pour origine le point de rebroussement et pour axe des y une parallèle à l'asymptote réelle, l'équation cherchée sera

$$x(x^2 + y^2) - \lambda(y - mx)^2 = 0,$$

λ désignant une longueur arbitraire et m un nombre arbitraire. Cette équation est l'équation générale des cissoïdes. Les cissoïdes droites correspondent à $m = 0$.

20. En résumé, nous arrivons à cette conclusion :

THÉORÈME. — *Les seules cubiques unicursales qui soient rectifiables par l'intégration d'un radical circulaire sont :* 1° *les courbes représentées par le système*

$$x = \lambda \frac{t^3 - 3t}{t - c}, \qquad y = \lambda \frac{3t^2 - 1}{t - c};$$

2° *les paraboles semi-cubiques obliques ou droites;* 3° *les cissoïdes obliques ou droites.*

III. — Détermination des cubiques unicursales dont l'arc est de genre 1 ou de genre 2.

21. Arc de genre 1. — Les cubiques dont l'arc est de genre 1 sont celles pour lesquelle $\delta\theta = 4$; on les obtient en abaissant $\delta\theta$ de quatre unités. Le Tableau du n° 11 montre que cet abaissement résulte des trois singularités J, E, O prises séparément et des deux singularités R et D prises ensemble.

Remarquons que E (racine triple de C) correspond à deux branches paraboliques formant inflexion ou rebroussement à l'infini. Quant à D (racine double de C), cette singularité correspond soit à un contact simple avec la droite de l'infini, soit à une asymptote double dont le point à l'infini est un rebroussement pour la cubique. Cette hypothèse est contradictoire avec le rebroussement R à distance finie. Donc les cubiques affectées simultanément des deux singularités R et D sont celles qui présentent un rebroussement à distance finie et un contact simple avec la droite de l'infini. Ces remarques permettent d'énoncer ainsi nos résultats :

Théorème. — *Les seules cubiques unicursales dont l'arc soit de genre 1 (intégrale elliptique) sont celles qui présentent une des singularités suivantes à l'exclusion des trois autres :*

1° *Deux points d'inflexion à tangente isotrope, situés à distance finie;*

2° *Rebroussement à distance finie et contact simple avec la droite de l'infini;*

3° *Branches paraboliques formant inflexion ou rebroussement à l'infini;*

4° *Passage par les points cycliques.*

22. Nous allons chercher les équations de ces quatre classes de courbes.

Cubiques J. — Elles sont caractérisées par deux points d'inflexion à tangente isotrope, situés à distance finie. En vertu des formules de Plücker, elles ne peuvent présenter de point de rebroussement. Or l'équation d'une cubique à point double ordinaire peut, comme on sait, être mise sous l'une des deux formes équivalentes

$$X^{\frac{1}{3}} + Y^{\frac{1}{3}} + Z^{\frac{1}{3}} = 0, \qquad (X + Y + Z)^3 - 27\,XYZ = 0,$$

$X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$ représentant les trois tangentes d'inflexion. Dans le cas où deux des tangentes d'inflexion sont isotropes, on peut, en mettant l'origine au foyer où elles concourent, prendre

$$X = x + iy, \qquad Y = x - iy,$$

et, pour la troisième tangente inflexionnelle,

$$Z = \alpha x + \beta y + \gamma.$$

Dès lors, l'équation de la cubique pourra s'écrire

$$(ax + by + c)^3 - (\alpha x + \beta y + \gamma)(x^2 + y^2) = 0,$$

à condition qu'on établisse entre les paramètres a, b, c, α, β, γ les relations qui expriment l'existence d'un point double.

On peut toujours représenter par $x = 0$, $y = q$, les coordonnées du point double, sauf à supposer $q = \infty$ si le point double est rejeté à l'infini. Le premier membre de l'équation étant rendu homogène par l'introduction d'une troisième variable z, nous écrirons que ses trois dérivées partielles du premier ordre sont nulles pour $x = 0$, $y = q$, $z = 1$. On trouve ainsi sans difficulté

$$\alpha = 3a\left(b + \frac{c}{q}\right)^2, \qquad \beta = \left(b + \frac{c}{q}\right)^2\left(b - 2\frac{c}{q}\right), \qquad \gamma = 3c\left(b + \frac{c}{q}\right)^2,$$

et l'équation cherchée devient

$$(1) \quad (ax + by + c)^2 - \left(b + \frac{c}{q}\right)^2\left[3ax + \left(b - 2\frac{c}{q}\right)y + 3c\right](x^2 + y^2) = 0.$$

Si le point double est rejeté à l'infini, $c : q$ est nul, et il reste

$$(2) \qquad (ax + by + c)^3 - b^2(3ax + by + 3c)(x^2 + y^2) = 0.$$

Comme b est essentiellement différent de zéro, nous ferons $b = 1$. L'équation (2) peut alors s'écrire

$$(2') \qquad y = (ax + c)\frac{3x^2 - (ax + c)^2}{3(ax + c)^2 - x^2};$$

mais l'équation (1) suffit, puisqu'elle convient à tous les cas.

23. *Cubiques* R + D. — Les cubiques ont un rebroussement à distance finie et touchent la droite de l'infini. L'origine étant placée au point de rebroussement, les termes de moindre degré sont du second degré et forment un carré. A raison des deux intersections confondues avec la droite de l'infini les termes du troisième degré admettent un diviseur carré parfait. On a donc pour les courbes cherchées l'équation générale

$$x^2(y - gx) = a(y - mx)^2.$$

24. *Cubiques* E. — L'existence de branches paraboliques formant inflexion ou rebroussement à l'infini tient à ce fait analytique que les coordonnées de la cubique peuvent être représentées par deux polynômes entiers en t. Soient donc les coordonnées rectangulaires

$$X = lt^3 + \ldots, \qquad Y = mt^3 + \ldots.$$

On peut supposer $l^2 + m^2 = 1$, sauf à multiplier t par un facteur constant. On a alors

$$lX + mY = t^3 + \ldots, \qquad mX - lY = at^2 + 2bt + c.$$

Les deux droites

$$lX + mY = 0, \qquad mX - lY = 0$$

sont rectangulaires. Prenons-les pour nouveaux axes : les nouvelles coordonnées

$$x = lX + mY, \qquad y = mX - lY$$

seront l'une du troisième, l'autre du second degré en t. Si le point double est à distance finie, on peut supposer qu'il coïncide avec l'origine des coordonnées. Dans ce cas, le polynôme qui représente x est divisible par celui qui représente y. On peut donc, en augmentant t d'une quantité convenable, écrire

$$x = \frac{t}{a}(at^2 + 2bt + c), \qquad y = at^2 + 2bt + c.$$

L'élimination de t entre ces deux équations est immédiate, puisque $t = ax : y$. On trouve

$$y^3 = a^3x^2 + 2ab\,xy + cy^2,$$

ce qui peut s'écrire

$$y^3 = \alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2. \tag{1}$$

Si le point double est à l'infini, auquel cas c'est un point de rebroussement, il faut que y soit du premier degré en t; car deux équations telles que

$$x = t^3 + \ldots, \qquad y = at^2 + 2bt + c$$

ont toujours deux solutions communes en t pour deux valeurs finies de x et y et donnent, par suite, un point double à distance finie. Mais, y étant du premier degré en t, et réciproquement, x sera un polynôme en y et l'on aura

$$x = \alpha y^3 + \beta y^2 + \gamma y + \delta.$$

En transportant l'origine en un point convenable, on fera disparaître le terme en y^2, ainsi que le terme constant, et il viendra

$$(2) \qquad x - \gamma y = \alpha y^3,$$

ce qui montre que la courbe est une parabole cubique oblique, puisque son équation, rapportée à des axes obliques, est de la forme

$$\lambda x' = y'^3.$$

En résumé, les cubiques unicursales à coordonnées entières sont représentées par les équations (1) et (2).

25. *Cubiques* O. — Ce sont celles qui passent par les points cycliques. Leur point double est nécessairement à distance finie, sans quoi la droite de l'infini les couperait en quatre points. Si l'on prend le point double pour origine et pour axe des y une parallèle à l'asymptote réelle, l'équation générale des cubiques circulaires sera de la forme

$$x(x^2 + y^2) = \alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2.$$

26. Arc de genre 2. — Les cubiques dont l'arc est de genre 2 sont celles pour lesquelles $\delta 0$ éprouve un abaissement de 2 unités et devient égal à 6. D'après le Tableau du n° 11, les deux seules singularités qui produisent cet abaissement sont le rebroussement à distance finie et la racine double du dénominateur des coordonnées. A cette dernière singularité D correspond, comme on sait, un contact simple avec la droite de l'infini ou une asymptote double. D'où ce théorème :

Théorème. — *Les seules cubiques unicursales dont l'arc soit de genre 2* *sont celles qui présentent un rebroussement à distance finie et celles qui ont un contact simple avec la droite de l'infini ou qui admettent une asymptote double.*

Il est facile d'obtenir les équations de ces trois classes de courbes. Celles qui présentent un point de rebroussement à distance finie ont pour équation générale

$$\alpha x^3 + 3\beta x^2 y + 3\gamma x y^2 + \delta y^3 = \lambda y^2.$$

Celles qui sont tangentes à la droite de l'infini ont leur point double à distance finie, et c'est un point double ordinaire. Leur équation générale peut être mise sous la forme

$$y^2(\alpha x + \beta y) = a x^2 + 2 b x y + c y^2.$$

Celles qui ont une asymptote double $x = 0$ ne sont rencontrées qu'en un point à distance finie par toute parallèle à l'axe des y. Ainsi y est une fonction rationnelle de x, ayant pour dénominateur x^2. On a donc, pour équation générale de ces courbes,

$$y = \frac{\alpha x^3 + 3\beta x^2 + 3\gamma x + \delta}{x^2}.$$

CHAPITRE III.

DÉTERMINATION DES CUBIQUES UNICURSALES A ARC ALGÉBRIQUE.

27. Nous nous proposons de trouver toutes les cubiques unicursales dont l'arc est une fonction algébrique du paramètre t. Nous diviserons cette étude en deux articles : dans le premier nous chercherons les cubiques dont l'arc est algébrique et de genre zéro; dans le second nous prouverons que, si l'arc d'une cubique est algébrique, il est de genre zéro.

I. — Cubiques à arc algébrique et de genre zéro.

28. Nous avons déterminé dans les articles I et II du Chapitre précédent toutes les cubiques unicursales dont l'arc est de genre zéro. Ce sont d'abord les caustiques-podaires des paraboles du second degré, leur arc est un polynôme entier en t; ce sont ensuite les courbes trouvées au n° 17, les paraboles semi-cubiques obliques ou droites, enfin les cissoïdes obliques ou droites. Nous avons à chercher parmi ces trois dernières classes de courbes celles dont l'arc est algébrique.

29. Théorème I. — *Les courbes représentées par les équations*

$$x = \lambda \frac{t^3 - 3t}{t - c}, \qquad y = \lambda \frac{3t^2 - 1}{t - c}$$

ne sont pas rectifiables algébriquement.

En effet, on déduit de ces formules

$$\frac{ds}{\lambda} = \frac{(t^2 + 1)\sqrt{(2t - 3c)^2 + 1}}{(t - c)^2} dt.$$

L'intégration donne

$$\frac{4s}{\lambda} = \frac{2t^2 + 3ct - 9c^2 - 4}{t - c}\sqrt{(2t - 3c)^2 + 1} + 9\log\left[2t - 3c + \sqrt{(2t - 3c)^2 + 1}\right].$$

Ainsi l'arc n'est pas algébrique.

30. Théorème II. — *La seule parabole semi-cubique dont l'arc soit algébrique est la parabole semi-cubique droite.*

L'équation des paraboles semi-cubiques obliques

$$x^3 - \lambda(y - mx)^2 = 0$$

peut être remplacée par les deux suivantes

$$x = \lambda t^2, \qquad y = \lambda(mt^2 + t^3);$$

d'où l'on déduit

$$\frac{ds}{\lambda} = t\sqrt{(3t + 2m)^2 + 4}\, dt.$$

Si l'intégrale du second membre est algébrique, on sait qu'elle est nécessairement de la forme

$$(at^2 + bt + c)\sqrt{(3t + 2m)^2 + 4}.$$

Exprimant que la dérivée de cette fonction est égale à $s' : \lambda$, on trouve que m doit être nul; c'est-à-dire que la parabole semi-cubique est droite. C'est alors la développée d'une parabole du second degré.

31. Théorème III. — *L'arc des cissoïdes n'est pas algébrique.*

L'équation des cissoïdes obliques

$$x(x^2 + y^2) - \lambda(y - mx)^2 = 0$$

peut être remplacée par les deux suivantes

$$x = \lambda\frac{(t-m)^2}{t^2+1}, \qquad y = \lambda\frac{t(t-m)^2}{t^2+1};$$

d'où l'on déduit

$$\frac{ds}{\lambda} = \frac{(t-m)}{t^2+1}\sqrt{(t+m)^2+4}\,dt.$$

Cette différentielle n'est intégrable algébriquement pour aucune valeur de m, car elle admet les deux pôles simples $t = \pm i$.

32. De tout ce qui précède résulte immédiatement ce théorème :

Théorème IV. — *Les seules cubiques dont l'arc soit à la fois algébrique et de genre zéro sont : 1° les caustiques-podaires des paraboles du second degré; 2° les développées de ces mêmes paraboles.*

II. — Genre de l'arc supposé algébrique.

33. Lemme. — *Si une fonction irrationnelle de t, de la forme* $P\sqrt{R} : Q$, *où* P, Q, R *sont trois polynômes entiers, est d'ordre m, c'est-à-dire de l'ordre de grandeur de t^m pour t infini, sa dérivée est d'ordre $m - 1$, à moins que m ne soit nul, auquel cas la dérivée est d'ordre égal ou inférieur à -2.*

En effet, on a identiquement

$$2\frac{d}{dt}\frac{P\sqrt{R}}{Q}=\frac{2R(QP'-PQ')+PQR'}{Q^2\sqrt{R}}.$$

Soient, en ordonnant suivant les puissances décroissantes de t,

$$P=at^p+\ldots,\qquad Q=bt^q+\ldots,\qquad R=ct^{2r}+\ldots.$$

Le dénominateur est d'ordre $2q+r$. Au numérateur, le terme du plus haut degré est

$$2abc(p-q+r)t^{p+q+2r-1}=2abcmt^{p+q+2r-1},$$

puisque $p-q+r$ est l'ordre m de la fonction $P\sqrt{R}:Q$. Si m n'est pas nul, la dérivée est d'ordre

$$p+q+2r-1-(2q+r)=p-q+r-1=m-1,$$

ce qui démontre la proposition.

Supposons $m=0$; le terme en $t^{p+q+2r-1}$ au numérateur disparait. La dérivée est donc d'ordre au plus égal à -2. Elle peut être d'ordre inférieur à -2. Considérons, par exemple, l'expression $\sqrt{t^2+1}:t$, qui est d'ordre zéro. En la différentiant, on trouve

$$\frac{d}{dt}\frac{\sqrt{t^2+1}}{t}=-\frac{1}{t^2\sqrt{t^2+1}}.$$

On voit que cette dérivée est d'ordre -3.

Conséquence. — Nous allons rencontrer des expressions irrationnelles d'ordre négatif, dont l'intégrale, supposée algébrique, sera de la forme $P\sqrt{R}:Q$. Si une telle dérivée est d'ordre $-\delta$, l'intégrale $P\sqrt{R}:Q$ sera d'ordre $-\delta+1$, à moins qu'elle ne soit d'ordre zéro. Nous devrons donc chaque fois discuter ces deux hypothèses.

34. Cela posé, nous allons chercher dans quelles conditions l'arc représenté par l'intégrale

$$s=\int\frac{\sqrt{(CA'-AC')(CB'-BC')}}{C^2}dt=\int\frac{\sqrt{T}}{C^2}dt$$

peut être algébrique. Nous distinguerons trois cas, suivant que C a ses trois racines distinctes, ou une racine double, ou une racine triple.

35. Premier cas : *Le polynôme* C *a ses trois racines distinctes.* — Si la courbe ne passe pas par les points cycliques, C est premier avec T; si elle passe par les points cycliques, C a deux racines imaginaires communes avec T.

Première hypothèse. — C est premier avec T. Comme T peut avoir des racines multiples, nous poserons $T = \tau^2\theta$, θ étant un polynôme de degré $2r$ sans racines multiples. On aura

$$s' = \frac{\tau\sqrt{\theta}}{C^2}.$$

Or, T étant du degré 8, et C du degré 3, s' est d'ordre -2. Si donc l'arc est algébrique, il sera de la forme

$$s = \frac{P\sqrt{\theta}}{C},$$

P étant un polynôme entier de degré p tel que s soit d'ordre -1 ou d'ordre zéro. Mais, en exprimant que $\tau\sqrt{\theta} : C^2$ est la dérivée de $P\sqrt{\theta} : C$, on arrive à l'identité

$$2(CP' - PC' - \tau)\theta + PC\theta' = 0.$$

On voit que θ divise P; par suite, on a

$$p \geqq 2r.$$

D'autre part, si s est d'ordre -1, on doit avoir

$$p + r - 3 = -1$$

ou bien

$$p + r = 2.$$

A raison de l'inégalité précédente, cette équation n'admet d'autre solution en nombres entiers positifs que

$$r = 0, \qquad p = 2.$$

La condition $r = 0$ signifie que la dérivée s' est rationnelle, ce qui a été reconnu impossible quand C n'a pas ses trois racines égales. Donc cette hypothèse est à rejeter.

Supposons maintenant s d'ordre zéro. On doit avoir

$$p + r - 3 = 0;$$

d'où, à cause de $p \geqq 2r$, la seule solution

$$r = 1, \qquad p = 2.$$

Alors θ est du second degré; mais nous avons vu (n° 16) qu'il n'en peut être ainsi quand C a ses trois racines distinctes, à moins que la cubique ne passe par les points cycliques. La présente hypothèse est donc à rejeter.

36. *Deuxième hypothèse.* — C n'est pas premier avec T. La courbe passe par les points cycliques. On sait qu'alors l'arc est de genre 1; C est de la forme $t\tau$, τ étant un trinôme du second degré à racines imaginaires, et l'on a $T = \tau^2\theta$. Il vient

$$s' = \frac{\tau\sqrt{\theta}}{t^2\tau^2} = \frac{\theta}{t^2\tau\sqrt{\theta}}.$$

Dans l'intégration, les deux racines simples de τ donneront lieu à des infinis logarithmiques pour l'arc, à moins que θ ne soit divisible par τ. Si $\theta = \zeta\tau$, il viendra

$$s' = \frac{\zeta}{t^2\sqrt{\theta}}.$$

Si l'arc était algébrique, il serait de la forme

$$s = \frac{P\sqrt{\theta}}{t};$$

mais une pareille expression ne peut être d'ordre -1 ou d'ordre zéro que si le degré de P est négatif, puisque $\delta\theta = 4$. On n'échappe à la contradiction qu'en supposant que θ est carré parfait; c'est-à-dire que la dérivée s' est rationnelle. Or c'est impossible, C ayant ses racines distinctes. Donc cette hypothèse est encore à rejeter.

37. Deuxième cas : *Le polynôme* C *admet une racine double.* — Cette racine étant nécessairement réelle, ainsi que la racine simple, une

transformation homographique réelle permettra de ramener u et v au dénominateur t :

$$u = \frac{a_3 t^3 + a_2 t^2 + a_1 t + a}{t}, \qquad v = \frac{b_3 t^3 + b_2 t^2 + b_1 t + b}{t},$$

les b étant conjugués des a. De là on déduit

$$u' v' = \frac{(2 a_3 t^3 + a_2 t^2 - a)(2 b_3 t^3 + b_2 t^2 - b)}{t^4} = \frac{T}{t^4}.$$

Ayant mis T sous la forme $\tau^2 \theta$, où θ désigne un polynôme de degré $2r$ ($r = 0, 1, 2, 3$) sans racines multiples, on aura

$$s' = \frac{\tau \sqrt{\theta}}{t^2}.$$

Cette dérivée est d'ordre 1 par rapport à t, car a_3 et b_3 ne peuvent être nuls. Si donc l'arc est algébrique, il sera de la forme

$$s = \frac{P \sqrt{\theta}}{t},$$

P étant un polynôme entier de degré p tel que s soit d'ordre 2; on a donc

$$p + r = 3.$$

Mais on voit, comme au n° 35, que θ divise P; d'où l'inégalité

$$p \geqq 2r.$$

L'équation précédente n'admet donc d'autres solutions en nombres entiers positifs que

1° $\qquad r = 0, \quad p = 3;$

2° $\qquad r = 1, \quad p = 2.$

La condition $r = 0$ signifie que la dérivée s' est rationnelle, ce qui n'est possible que quand C admet une racine triple. Ainsi ce cas ne peut se présenter.

Dans l'hypothèse $r = 1$, $p = 2$, θ est du second degré. C'est le cas des cubiques trouvées au n° 17. Mais nous avons vu (n° 29) que l'arc de ces courbes n'est pas algébrique.

38. Troisième cas : *Le polynôme* C *admet une racine triple.* — On a vu (n° 9) que, dans ce cas, une transformation homographique réelle ramène u et v à la forme entière

$$u = a_3 t^3 + 3 a_2 t^2 + 3 a_1 t + a, \qquad v = b_3 t^3 + 3 b_2 t^2 + 3 b_1 t + b,$$

les b étant conjugués des a. On déduit de là

$$s' = 3\sqrt{(a_3 t^2 + 2 a_2 t + a_1)(b_3 t^2 + 2 b_2 t + b_1)} = 3\sqrt{\mathrm{T}}.$$

Cette dérivée s' est d'ordre 2 par rapport à t. Si donc l'arc est algébrique, il sera d'ordre 3. Or soit encore $\mathrm{T} = \tau^2 \theta$, θ étant de degré $2r$ ($r = 0, 1, 2$) et n'ayant que des racines simples. On aura

$$s = \mathrm{P}\sqrt{\theta},$$

P étant un polynôme entier de degré p tel que

$$p + r = 3.$$

D'autre part, en exprimant que s' est la dérivée de $\mathrm{P}\sqrt{\theta}$, on arrive à l'identité

$$2(\mathrm{P}' - 3\tau)\theta + \mathrm{P}\theta' = 0,$$

qui prouve que, si θ n'est pas une constante, il divise P ; donc

$$p \geqq 2r.$$

L'équation précédente n'admet plus dès lors que deux solutions

1° $\qquad r = 0, \quad p = 3;$

2° $\qquad r = 1, \quad p = 2.$

La première donne, ainsi qu'on l'a vu plus haut (n° 14), les caustiques-podaires des paraboles du second degré (arc rationnel en t). La seconde nous a fourni (n° 18) les paraboles semi-cubiques, et nous avons reconnu (n° 30) que la seule parabole semi-cubique dont l'arc soit algébrique est la parabole semi-cubique droite.

39. Notre discussion aboutit donc à ce résultat final :

Théorème. — *Les seules cubiques unicursales dont l'arc soit algébrique* *sont les caustiques-podaires des paraboles du second degré* (arc rationnel) *et les développées de ces mêmes paraboles* (arc irrationnel).

CHAPITRE IV.

CUBIQUES UNICURSALES RECTIFIABLES EN TERMES FINIS.

40. Nous allons chercher les cubiques dont l'arc peut s'exprimer en termes finis. Il y a d'abord celles dont l'arc est de genre zéro, et que nous avons déterminées au Chapitre II; pour ces courbes, r est égal à o ou à 1. Outre ces courbes il pourrait en exister, parmi celles dont l'arc est de genre 1, 2 ou 3, qu'un changement de variable rendrait rectifiables en termes finis : il y a en effet des intégrales, elliptiques ou hyperelliptiques en apparence, qui peuvent s'exprimer par des fonctions algébriques et logarithmiques. Nous supposerons donc désormais r au moins égal à 2. Il va être prouvé, dans ces conditions, que si r n'est pas égal à 2, c'est-à-dire si l'arc n'est pas de genre 1 (intégrale elliptique), il ne peut pas s'exprimer en termes finis.

41. Lemme I. — *Étant données deux fonctions de t, l'une* C *entière et sans racine multiple, l'autre $f(t)$ quelconque, mais assujettie à la seule condition de n'admettre comme zéro ni comme point singulier aucune des racines de* C, *on considère la fraction $f : C^2$. Pour que ses résidus relatifs aux racines de* C *soient tous nuls, il faut et il suffit que l'expression $C'f' - C''f$ admette toutes les racines de* C.

Soit c l'une des racines de C, qui sont toutes des pôles doubles de la fraction $f : C^2$. Nous poserons

$$C = (t - c)Q(t), \qquad \varphi(t) = \frac{f(t)}{Q^2(t)},$$

en sorte qu'il viendra

$$\frac{f}{C^2} = \frac{\varphi}{(t - c)^2}.$$

Pour avoir le résidu relatif à c, développons φ suivant les puissances de $t-c$:

$$\varphi(t) = \varphi(c) + (t-c)\,\varphi'(c) + \ldots.$$

On voit que le résidu relatif au pôle c est égal à $\varphi'(c)$. Or, d'après la définition de φ, on a

$$\varphi'(t) = \frac{Q(t)f'(t) - 2Q'(t)f(t)}{Q^3(t)}.$$

Pour que le résidu $\varphi'(c)$ soit nul, il faut et il suffit qu'on ait

$$Q(c)f'(c) - 2Q'(c)f(c) = 0;$$

mais l'identité

$$C = (t-c)\,Q(t)$$

donne, par deux différentiations,

$$C' = (t-c)\,Q'(t) + Q(t),$$
$$C'' = (t-c)\,Q''(t) + 2\,Q'(t);$$

d'où l'on déduit

$$Q(c) = C'(c),$$
$$2\,Q'(c) = C''(c).$$

La condition précédente devient alors

$$C'(c)f'(c) - C''(c)f(c) = 0.$$

En conséquence, pour que les résidus de $f : C^2$ relatifs à toutes les racines de C soient nuls, il faut et il suffit que l'expression $C'f' - C''f$ admette toutes les racines de C.

Cas particulier. — Si $f(t)$ est la racine carrée d'un polynôme entier T (premier par hypothèse avec C), on a identiquement

$$C'f' - C''f = \frac{C'T' - 2C''T}{2\sqrt{T}}.$$

Il est donc nécessaire et suffisant que le polynôme $C'T' - 2C''T$ soit divisible par C. Cette conclusion suffit à établir la proposition suivante, qui est due à M. Hermite (¹), et dont nous aurons à faire usage.

(¹) *Cours* autographié de la Faculté des Sciences de Paris, 3ᵉ édition, p. 33-34.

42. Lemme II. — *Si les points d'intersection d'une courbe unicursale d'ordre m avec la droite de l'infini sont donnés par m valeurs différentes du paramètre, et si de plus la courbe ne passe pas par les points cycliques, son arc s'exprime par un terme algébrique, des intégrales de première et des intégrales de deuxième espèce, mais ne contient pas d'intégrale de troisième espèce.*

Les conditions de l'énoncé reviennent à supposer que le polynôme C n'a que des racines simples et qu'il est premier avec T.

Cela étant, pour que l'arc

$$s = \int \frac{\sqrt{T}}{C^2}\, dt$$

ne contienne pas d'intégrale de troisième espèce ou, ce qui revient au même, n'admette pas d'infini logarithmique, il faut et il suffit que les résidus de l'élément différentiel relatifs aux racines de C soient tous nuls. Cette condition est équivalente en vertu du lemme I (cas particulier) à cette autre, que le polynôme $C'T' - 2C''T$ soit divisible par C. Or on a

$$T = (CA' - AC')(CB' - BC'),$$

ou bien

$$T = C^2 A'B' - CC'(AB)' + C'^2 AB.$$

Différentions et supprimons les termes qui se détruisent :

$$T' = C^2(A'B')' - CC'(AB'' + BA'') - CC''(AB)' + 2C'C''AB.$$

Dans la combinaison $C'T' - 2C''T$, les termes en AB qui, seuls, ne sont pas divisibles par C, disparaissent, de sorte que tous ceux qui restent contiennent C en facteur.

Le lemme est donc démontré.

43. Cela posé, il convient de rappeler une proposition bien connue concernant les intégrales hyperelliptiques.

Soient

θ un polynôme entier de degré $2r$ en t, sans racine multiple;
H un polynôme entier quelconque;
G un polynôme entier *premier avec* θ;

V le plus grand commun diviseur entre G et sa dérivée;
U le quotient G : V.

On sait (¹) qu'on a

$$J = \int \frac{H\,dt}{G\sqrt{\theta}} = \frac{\psi}{V}\sqrt{\theta} + \int \frac{\pi\,dt}{\sqrt{\theta}} + \int \frac{\varphi\,dt}{U\sqrt{\theta}},$$

ψ étant un polynôme entier en t, π un polynôme de degré au plus égal à $2r-2$, et φ un polynôme d'ordre moins élevé que U. La seconde intégrale du second membre n'a que des infinis logarithmiques; la précédente est une somme d'intégrales de première et d'intégrales de seconde espèce; elle peut en outre présenter un infini logarithmique, et un seul, savoir $t=\infty$, si π contient un terme en t^{r-1}. Les termes de π où t figure avec un exposant égal ou supérieur à r donnent des intégrales de seconde espèce. Ainsi, pour qu'il n'entre aucune intégrale de seconde espèce dans l'expression de T, il faut et il suffit que π soit de degré au plus égal à $r-1$.

On sait, d'autre part (²), qu'aucune combinaison linéaire de $r-1$ intégrales de première espèce et de $r-1$ intégrales de seconde espèce ne peut s'exprimer en termes finis. Or le polynôme π donne lieu à $r-1$ intégrales de première espèce et à $r-1$ intégrales de seconde espèce. Pour que J s'exprime en termes finis, il est donc nécessaire (mais non suffisant) que toutes les intégrales de seconde espèce disparaissent, c'est-à-dire que π soit de degré au plus égal à $r-1$.

Nous ferons usage bientôt de la formule de décomposition qui donne J; nous l'écrirons toujours

$$\frac{H}{G\sqrt{\theta}} = \left(\frac{\psi}{V}\sqrt{\theta}\right)' + \frac{\pi}{\sqrt{\theta}} + \frac{\varphi}{U\sqrt{\theta}},$$

et nous supposerons π de degré au plus égal à $r-1$, θ étant de degré $2r$.

44. J'en viens maintenant à l'examen des conditions dans lesquelles

(¹) JORDAN, *Cours d'Analyse*, t. II, p. 35.
(²) HERMITE, *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique*, p. 296.

l'arc d'une cubique unicursale

$$s = \int \frac{\sqrt{(\mathrm{CA}' - \mathrm{AC}')(\mathrm{CB}' - \mathrm{BC}')}}{\mathrm{C}^2}\,dt = \int \frac{\sqrt{\mathrm{T}}\,dt}{\mathrm{C}^2}$$

peut s'exprimer en termes finis. Il y a trois cas à distinguer, suivant que C a ses trois racines distinctes, ou une racine double, ou une racine triple.

45. Premier cas : *Le polynôme* C *a ses trois racines distinctes.* — Il peut être ou n'être pas premier avec T.

Première hypothèse. — C est premier avec T. La courbe ne passe pas par les points cycliques. D'autre part, C ayant ses racines distinctes, la courbe n'est pas tangente à la droite de l'infini. On est dans le cas du lemme II. L'arc ne dépend pas des intégrales de troisième espèce. Il ne peut s'exprimer en termes finis que s'il est algébrique, ce qui exige que C ait ses trois racines égales (n° 39).

Remarque. — Ce qui précède prouve qu'une courbe unicursale *d'ordre quelconque m*, dont les points d'intersection avec la droite de l'infini sont donnés par m valeurs différentes du paramètre et qui ne passe pas par les points cycliques, n'est rectifiable en termes finis que si son arc est algébrique.

Deuxième hypothèse. — C n'est pas premier avec T. La courbe passe par les points cycliques. On sait qu'alors l'arc est de genre 1 ; C est de la forme $t\tau$, τ étant un trinôme du second degré à racines imaginaires, et l'on a $\mathrm{T} = \tau^2\theta$. Il vient

$$s = \int \frac{\theta\,dt}{t^2\tau\sqrt{\theta}}.$$

Ici $\mathrm{G} = t^2\tau$; par suite, $\mathrm{V} = t$ et $\mathrm{U} = \mathrm{G} : \mathrm{V} = t\tau$. On a donc

$$\frac{\theta}{t^2\tau\sqrt{\theta}} = \left(\frac{\psi}{t}\sqrt{\theta}\right)' + \frac{\pi}{\sqrt{\theta}} + \frac{\varphi}{t\tau\sqrt{\theta}},$$

identité dans laquelle π est au plus du premier degré, et φ au plus du second.

Soit p le degré de ψ; la fraction $\psi\sqrt{\theta} : t$ est d'ordre $p+1$, sa dérivée est d'ordre p (car on ne peut supposer $p+1$ nul). Le second membre, dont les deux derniers termes s'annulent pour t infini, est donc d'ordre p, et ne peut être identique au premier qui est d'ordre -2. L'arc ne peut s'exprimer en termes finis.

Notre décomposition de l'intégrale s suppose essentiellement τ et θ premiers entre eux. Si τ et θ ne sont pas premiers entre eux, τ divise θ. Soit $\theta = \zeta\tau$. Il vient

$$s' = \frac{\theta}{t^2\tau\sqrt{\theta}} = \frac{\zeta}{t^2\sqrt{\theta}}.$$

La décomposition à faire est alors la suivante :

$$\frac{\zeta}{t^2\sqrt{\theta}} = \left(\frac{\psi}{t}\sqrt{\theta}\right)' + \frac{\pi}{\sqrt{\theta}} + \frac{\varphi}{t\sqrt{\theta}},$$

le degré de π est encore l'unité ; φ est une constante. Soit p le degré de ψ. On voit, comme ci-dessus, que p devrait être négatif, pour que cette identité fût possible. Donc encore l'arc ne peut s'exprimer en termes finis.

46. Deuxième cas : *Le polynôme* C *admet une racine double*. — Nous avons vu plus haut (n° 37) que la différentielle de l'arc peut s'écrire

$$ds = \frac{\sqrt{T}\,dt}{t^2},$$

T étant un polynôme du sixième degré qui ne pourrait avoir de racine nulle que si la cubique dégénérait en une conique. Ayant mis T sous la forme $\tau^2\theta$, où θ est un polynôme de degré $2r (r \leqq 3)$ sans racine multiple et sans racine nulle, on aura

$$s' = \frac{\tau\theta}{t^2\sqrt{\theta}}.$$

La décomposition rappelée au n° 43 donne

$$s' = \frac{\tau\theta}{t^2\sqrt{\theta}} = \left(\frac{\psi}{t}\sqrt{\theta}\right)' + \frac{\pi}{\sqrt{\theta}} + \frac{\varphi}{t\sqrt{\theta}},$$

π étant un polynôme de degré au plus égal à $r-1$, et φ une constante.

Remarquons que s' est d'ordre 1 par rapport à t, et que les deux derniers termes du second membre sont d'ordre négatif. Par suite, le premier terme doit être d'ordre 1 ; or, si p est le degré du polynôme ψ, ce premier terme est d'ordre $p+r-2$. On doit donc avoir

$$p+r=3.$$

Cette équation, où p et r sont deux entiers positifs, le second supposé supérieur à 1, n'admet que deux solutions,

1° $$r=3, \qquad p=0;$$
2° $$r=2, \qquad p=1.$$

Nous allons voir que la première est inacceptable. Supposons, en effet, $r=3$ et ψ constant ($p=0$); alors τ est constant. Effectuons les calculs indiqués dans la décomposition de s' et chassons les dénominateurs; nous arrivons à l'identité

$$2\tau\theta = t\psi\theta' - 2\psi\theta + 2t^2\pi + 2t\varphi,$$

qui peut s'écrire

$$2(\tau+\psi)\theta = t(\psi\theta' + 2t\pi + 2\varphi).$$

Or t, premier avec θ, ne peut diviser le premier membre qui est le produit de θ par une constante. Il faut donc supposer ce premier membre nul ($\tau=-\psi$) et par suite aussi le second. Or l'identité

$$\psi\theta' + 2t\pi + 2\varphi = 0$$

est impossible, puisque θ' est du cinquième degré en t, et que $t\pi$ est au plus du troisième.

La seule hypothèse admissible est donc $r=2$ (avec $p=1$), c'est-à-dire que l'arc est de genre 1. En outre, les cubiques actuellement en question ont deux intersections confondues avec la droite de l'infini, puisque C a une racine double. D'après le théorème du n° 21, leur arc sera de genre 1 si elles présentent un rebroussement à distance finie, et alors seulement. Nous discuterons tout à l'heure l'arc de ces courbes.

47. Troisième cas : *Le polynôme* C *admet une racine triple.* — Nous avons vu (n° 9) que, dans ce cas, on peut prendre pour les coordonnées de la cubique des polynômes entiers du troisième degré en t. Il suit immédiatement de là que l'arc est de genre zéro ou de genre 1.

D'autre part, les cubiques considérées sont celles qui présentent des branches paraboliques formant inflexion ou rebroussement à l'infini. Rapprochant ce résultat du précédent, nous pouvons résumer notre discussion en cet énoncé :

48. Théorème. — *En dehors des cubiques dont l'arc est de genre zéro, les cubiques dont l'arc est susceptible de s'exprimer en termes finis ne doivent être cherchées que parmi celles dont l'arc est de genre* 1 *et qui présentent soit un rebroussement à distance finie et un contact simple avec la droite de l'infini, soit des branches paraboliques formant inflexion ou rebroussement à l'infini.*

Il nous reste à étudier l'arc de ces deux classes de courbes pour voir si dans quelque cas leur rectification est possible en termes finis.

49. *Première classe.* — Les cubiques qui présentent un rebroussement à distance finie et un contact simple avec la droite de l'infini ont pour équation générale (n° 23)

$$x^2(y - gx) = a(y - mx)^2.$$

Nous ferons $a = 1$, $g - m = h$, et nous poserons $y = (t + g)x$, ce qui donne

$$x = \frac{(t+h)^2}{t}, \qquad y = \frac{(t+g)(t+h)^2}{t}.$$

On déduit de ces formules

$$s' = \frac{t+h}{t^2}\sqrt{[2t^2 + g(t-h)]^2 + (t-h)^2} = \frac{t+h}{t^2}\sqrt{\theta}.$$

Nous avons vu que la dérivée s' doit pouvoir être mise sous la forme

$$s' = \frac{(t+h)\sqrt{\theta}}{t^2} = \left(\frac{\psi\sqrt{\theta}}{t}\right)' + \frac{\pi}{\sqrt{\theta}},$$

en désignant par ψ un polynôme du premier degré en t, puisque nous supposons $p = 1$, par π un polynôme de degré $r - 1 = 1$. On arrive ainsi à l'identité

$$2(t+h)\theta = t\psi\theta' + 2(t\psi' - \psi)\theta + 2t^2\pi.$$

Posons

$$\psi = \alpha t + \beta, \qquad \pi = \gamma t + \delta;$$

nous pourrons écrire

$$2(t + h + \beta)\theta = t[(\alpha t + \beta)\theta' + 2t(\gamma t + \delta)].$$

Or le second membre est divisible par t et θ ne l'est pas. On a donc

$$\beta = -h,$$

et il reste

$$2\theta = (\alpha t - h)\theta' + 2t(\gamma t + \delta).$$

Dans cette identité remplaçons θ et θ' par leurs valeurs

$$\theta = 4t^4 + 4gt^3 + (g^2 - 4gh + 1)t^2 - 2h(g^2 + 1)t + h^2(g^2 + 1),$$
$$\theta' = 16t^3 + 12gt^2 + 2(g^2 - 4gh + 1)t - 2h(g^2 + 1),$$

et égalons les coefficients des mêmes puissances de t dans les deux membres : on trouve sans difficulté

$$\alpha = \frac{1}{2}, \qquad g = -8h, \qquad \gamma = \frac{1}{2}, \qquad \delta = -\frac{h}{2}.$$

Il vient ainsi

$$\psi = \frac{t - 2h}{2}, \qquad \pi = \frac{t - h}{2};$$

et, par suite,

$$s = \frac{(t - 2h)\sqrt{\theta}}{2t} + \frac{1}{2}\int \frac{(t - h)\,dt}{\sqrt{\theta}},$$

θ représentant maintenant le polynôme

$$[2t^2 - 8h(t - h)]^2 + (t - h)^2 = 4(t - 2h)^4 + (t - h)^2.$$

Si l'on pose $t - 2h = hz$ et qu'on désigne par λ l'inverse de $4h^2$, on trouve

$$s = \frac{1}{4\lambda}\,\frac{z}{z + 2}\sqrt{z^4 + \lambda(z + 1)^2} + \frac{1}{4}\int \frac{(z + 1)\,dz}{\sqrt{z^4 + \lambda(z + 1)^2}}.$$

Pour que s pût s'exprimer en termes finis, il faudrait qu'il en fût de même de l'intégrale

$$\int \frac{(z + 1)\,dz}{\sqrt{z^4 + \lambda(z + 1)^2}}$$

en dehors du cas exclu $\lambda = -16$, où le polynôme soumis au radical aurait une racine double. On est ainsi ramené à un problème qui a été posé par Abel et qui a donné lieu à d'importantes recherches. Dans l'état actuel de la Science, je ne crois pas qu'on puisse répondre à cette question : la différentielle

$$\frac{(z+1)\,dz}{\sqrt{z^4+\lambda(z+1)^2}}$$

est-elle, pour quelque valeur positive de λ, intégrable en termes finis? Néanmoins la réponse doit, suivant toute probabilité, être négative; car on ne dispose que d'un seul paramètre, et les coefficients de la différentielle doivent satisfaire à deux relations.

50. *Seconde classe.* — Nous avons vu (nº 24) que, quand les coordonnées d'une cubique unicursale sont des polynômes entiers en t, on peut prendre pour expression de l'une d'elles, y par exemple, un trinôme du second degré en t. Alors, en augmentant t d'une quantité convenable, on fera disparaître le terme du second degré dans l'expression de x. Soient donc

$$x = t^3 + 3at + x_0, \qquad y = 3bt^2 + 3ct + y_0.$$

On déduit de là

$$s' = 3\sqrt{(t^2+a)^2 + (2bt+c)^2} = 3\sqrt{\theta}.$$

On voit que θ peut s'écrire

$$\theta = t^4 + 2Lt^2 + 4Mt + N,$$

en posant

$$L = a + 2b^2, \qquad M = bc, \qquad N = a^2 + c^2.$$

Pour intégrer $\sqrt{\theta}$, on effectue la décomposition

$$\sqrt{\theta} = (\psi\sqrt{\theta})' + \frac{\pi}{\sqrt{\theta}},$$

dans laquelle π est un polynôme de degré $r - 1 = 1$, car nous supposons $r = 2$. Le premier membre est d'ordre 2 par rapport à t; le dernier terme du second membre est d'ordre négatif; donc le premier est d'ordre 2, ce qui exige que ψ soit du premier degré. Effectuons les opérations indiquées et chassons les dénominateurs; nous arrivons à l'identité

$$2\theta = 2\psi'\theta + \psi\theta' + 2\pi,$$

qui peut s'écrire

$$-2\pi = 2(\psi' - 1)\theta + \psi\theta'.$$

Remplaçons θ et θ' par leurs expressions et posons

$$\psi = \alpha t + \beta;$$

il viendra

$$-\pi = (\alpha - 1)(t^4 + 2Lt^2 + 4Mt + N) + 2(\alpha t + \beta)(t^3 + Lt + M).$$

Le second membre doit s'abaisser au premier degré; on a donc

$$\alpha = \frac{1}{3}, \qquad \beta = 0, \qquad L = 0,$$

et il reste

$$\pi = \frac{2}{3}(3Mt + N), \qquad \psi = \frac{t}{3}.$$

On aura donc, puisque L est nul,

$$\sqrt{\theta} = \sqrt{t^4 + 4Mt + N} = \frac{1}{3}\left(t\sqrt{t^4 + 4Mt + N}\right)' + \frac{2}{3}\,\frac{3Mt + N}{\sqrt{t^4 + 4Mt + N}}.$$

De là résulte, pour l'expression de l'arc,

$$s = \int 3\sqrt{\theta}\,dt = t\sqrt{t^4 + 4Mt + N} + 2\int \frac{(3Mt + N)\,dt}{\sqrt{t^4 + 4Mt + N}}.$$

Or la condition $L = 0$ donne

$$a = -2b^2,$$

et, par suite,

$$N = c^2 + 4b^4.$$

Si l'on se rappelle que $M = bc$ et si l'on pose

$$c = \mu b^2, \qquad t = b\,\frac{\mu^2 + 4}{3\mu}\,z, \qquad \lambda = \frac{27\mu^4}{(\mu^2 + 4)^3},$$

l'intégrale dont dépend l'arc devient

$$\int \frac{(3Mt+N)\,dt}{\sqrt{t^4+4Mt+N}} = 3\,b^3\mu \int \frac{(z+1)\,dz}{\sqrt{z^4+4\lambda z+3\lambda}}.$$

Pour que l'arc pût s'exprimer en termes finis, il faudrait qu'il en fût de même de cette intégrale pour quelque valeur positive de λ autre que $\lambda = 1$ qui donne au polynôme en z une racine double. Nous sommes encore ramenés au problème d'Abel. Mais ici, comme précédemment, on ne dispose que d'un seul paramètre pour satisfaire à deux équations. D'où cette conclusion générale :

Il est extrêmement probable qu'en dehors des cubiques unicursales dont l'arc est de genre zéro, il n'en existe aucune qui soit rectifiable en termes finis.