ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

JULES RIEMANN

Sur le problème de Dirichlet

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 5 (1888), p. 327-410
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1888_3_5__327_0>

SUR LE

PROBLÈME DE DIRICHLET,

PAR M. JULES RIEMANN,

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

INTRODUCTION.

Un des géomètres qui ont fait le plus avancer la solution du problème de Dirichlet, tout au moins dans le cas de deux variables, est, sans contredit, M. Schwarz. Le travail le plus important et le plus complet qu'il ait publié sur cette matière se trouve dans les *Monatsberichte* de 1870 (¹). A en juger par l'extrême concision du texte, ce Mémoire ne devait être, dans l'intention primitive de son auteur, que provisoire; c'est du reste ce qu'il dit lui-même dans un travail ultérieur, inséré au *Journal de Crelle* (²), dans lequel il développe, avec une élégance et une précision rares, la partie de la théorie relative au cercle. Depuis, M. Schwarz semble avoir renoncé à son projet : c'est ce qui m'a conduit à essayer d'expliquer, au moins en partie, ce que son Mémoire pouvait présenter de trop concis.

Ce Mémoire comprend d'abord une méthode générale de combinaison, permettant de passer d'aires simples à d'autres plus compliquées; puis des applications de cette méthode. En premier lieu, le théorème général de M. Schwarz m'a paru susceptible d'extension.

(¹) Pages 767-795. Nous ne nous sommes guère occupé que des treize premiers paragraphes.

(²) T. 74 (année 1872), p. 218-253.

Convenons d'employer les expressions suivantes, qui abrégeront le langage : lorsque les valeurs données sur le contour n'éprouveront pas de discontinuité, nous dirons qu'il s'agit du problème *classique;* au cas où ces valeurs éprouveraient des discontinuités en un nombre limité de points *singuliers* du contour, nous dirons qu'il s'agit du problème *généralisé*. Le problème généralisé renferme une condition qui se trouve remplie d'elle-même dans le cas du problème classique : c'est que la fonction inconnue ne doit pas croître indéfiniment dans le voisinage d'un point singulier. Ceci posé, M. Schwarz énonce ainsi son théorème : « Soient S_1 et S_2 deux aires se recouvrant en partie, S l'aire constituée par leur ensemble. Si l'on sait résoudre le problème *généralisé* pour S_1 et pour S_2, on sait aussi le résoudre pour S, *à condition que* S_1 *et* S_2 *soient limitées par des lignes analytiques.* »

J'ai remarqué que, lorsqu'on savait résoudre pour une aire S le problème classique, il était très facile de construire, à l'aide d'un nombre limité de fonctions $\operatorname{arc\,tang}\frac{y-y_0}{x-x_0}$, une fonction U résolvant le problème généralisé. Cette remarque permet déjà de remplacer, dans l'énoncé du théorème, le mot *généralisé* par le mot *classique*. Ensuite, M. Schwarz se sert dans son raisonnement de ce que le problème généralisé ne peut avoir plus d'une solution, et c'est pour cela qu'il est obligé de supposer que S_1 et S_2 sont limitées par des lignes analytiques. Or la construction que j'indique ne peut fournir qu'une seule fonction U; à cette fonction s'étendent les propriétés des fonctions harmoniques dans une aire et continues sur son contour : en particulier, lorsqu'une série de fonctions U ayant les mêmes points singuliers converge uniformément dans une aire S, elle définit, pour cette aire, une nouvelle fonction U. Ces fonctions U sont donc la généralisation naturelle des fonctions harmoniques dans S et continues sur s : c'est en leur appliquant le raisonnement de M. Schwarz que je résous le problème pour l'aire formée par l'ensemble de S_1 et de S_2, sans qu'il soit nécessaire de supposer analytiques les contours s_1 et s_2.

En second lieu, M. Schwarz énonce que, grâce à ce théorème, on peut résoudre le problème pour toute aire limitée par un nombre fini d'arcs de lignes analytiques. Je développe ce point très important en supposant, comme il paraît indispensable pour la démonstration, que les arcs de lignes analytiques soient réguliers.

Un problème à peu près inséparable du précédent est celui qui consiste à représenter d'une manière conforme une aire simplement connexe S sur un cercle ou sur un demi-plan. Ce problème, M. Schläfli (1) a essayé de le résoudre directement quand l'aire S est un polygone donné : partant de la formule déjà trouvée par M. Schwarz et par M. Christoffel, il cherche à y déterminer les constantes de manière à obtenir la représentation conforme demandée. Les calculs de M. Schläfli ne m'ont pas semblé démontrer d'une façon suffisante la possibilité de cette représentation ; en cherchant à les compléter, j'ai été arrêté par une difficulté très sérieuse. Ils ne sont pas, néanmoins, dépourvus d'intérêt ; car, si l'on admet cette possibilité (et après les théories générales de M. Schwarz, elle ne saurait être révoquée en doute), la difficulté dont je viens de parler disparaît, et l'on se trouve en possession d'un procédé pratique pour déterminer les constantes. Aussi ai-je jugé utile d'exposer les principaux résultats de M. Schläfli, ainsi que les remarques que j'y ai ajoutées.

En revanche, je n'ai rien dit du rôle que peut jouer le problème de Dirichlet dans la théorie de la représentation conforme. Les géomètres qui se sont occupés de ce sujet sont Riemann et M. Schwarz, dans le cas de la connexion simple; M. Schottky pour la connexion multiple. Ces auteurs admettent tous, sans démonstration, que, lorsqu'une fonction u est harmonique dans S et continue sur s, la fonction v conjuguée de u, laquelle est harmonique dans S, est aussi continue sur s. C'est là un fait qui est loin d'être évident. Dans un très remarquable Ouvrage tout récemment paru, M. Harnack (2) démontre ce théorème dans le cas du cercle et l'énonce dans le cas d'une aire dont les parties sont représentables sur le cercle, à condition toutefois que les valeurs de u sur le contour aient, par rapport à l'arc, une dérivée intégrable.

La même objection pourrait être adressée à un Mémoire de M. Schwarz (3) où, partant de la possibilité de représenter un poly-

---

(1) *Journal de Crelle*, t. 78, p. 63-80; 1874.

(2) *Die Grundlagen der Theorie des logarithmischen Potentiales*. Teubner, 1887.

(3) *Zur Theorie der Abbildung* (*Programm der pol. Schule*. Zurich, 1869-70).

gone sur la surface d'un cercle, il cherche à établir la même possibilité pour une aire S quelconque à connexion simple. Au fond, la conclusion à tirer de cet intéressant Mémoire est l'existence, pour l'aire S, de la fonction de Green relative à un point intérieur quelconque, dans le cas où l'aire S est *convexe* vers l'extérieur. M. Harnack a traité la même question, en partant également du polygone, mais d'une façon plus simple et qui n'exige pas que l'aire S soit convexe ; sa méthode s'étend même aux aires à connexion multiple. Du reste, il m'a semblé que sa démonstration était encore susceptible de simplification.

J'ai divisé mon travail en quatre Parties. Dans la première, je m'occupe d'abord du problème de Dirichlet classique et des propriétés des fonctions harmoniques dans une aire et continues sur son contour. Je passe ensuite à la représentation conforme, et je m'efforce d'établir, avec toute la précision possible, les principes fondamentaux de cette théorie. Enfin j'arrive au problème généralisé : je développe ma solution, et j'étudie les propriétés des fonctions U. La deuxième Partie est consacrée exclusivement à la discussion du Mémoire de M. Schläfli. Dans la troisième Partie, je commence par définir les arcs réguliers de lignes analytiques et j'étudie leurs propriétés les plus importantes. J'expose ensuite, avec les modifications que j'ai indiquées, la méthode de combinaison de M. Schwarz ; puis je m'en sers pour résoudre le problème de Dirichlet pour toute aire limitée par des arcs réguliers de lignes analytiques. Enfin la quatrième Partie est consacrée aux travaux récents de M. Harnack. Je donne d'abord la méthode par laquelle le savant géomètre construit, à l'égard d'une aire quelconque, la fonction de Green. Je n'ai pas cru pouvoir me dispenser ensuite de montrer comment, tirant parti de ce premier résultat, il résout le problème de Dirichlet dans toute sa généralité et démontre en outre que le problème généralisé ne peut avoir plus d'une solution. Mais, sur ces derniers points, j'ai été fort bref : j'ai surtout cherché à faire ressortir la marche générale des idées, et ne me suis pas astreint à passer par tous les intermédiaires.

PREMIÈRE PARTIE.

I. — Problème de Dirichlet.

1. Dans le plan dont les points représentent les valeurs de la variable complexe $z = x + yi$, considérons une aire limitée extérieurement par une ligne fermée L_0, intérieurement par $n - 1$ lignes fermées $L_1, L_2, \ldots, L_{n-1}$, extérieures les unes aux autres. Ces n lignes sont supposées *simples*, c'est-à-dire que chacune d'elles ne passe plus d'une fois par aucun de ses points. Une telle aire est dite à *connexion multiple d'ordre n*. S'il n'y a pas de lignes intérieures, elle est dite à *connexion simple*. Nous la désignerons dans la suite par la lettre S, et nous appellerons s l'ensemble des lignes qui forment le contour de l'aire S. A l'égard de chaque ligne L, nous supposerons qu'elle a en chaque point une tangente déterminée et variant d'une manière continue, sauf en certains points isolés où cette tangente peut changer brusquement de direction.

Ceci posé, voici l'énoncé du problème qui va nous occuper :

A chaque point M du contour s faisons correspondre une valeur déterminée m. Il s'agit de trouver une fonction réelle $u(x, y)$ satisfaisant aux conditions suivantes :

1° A l'*intérieur* de l'aire S, cette fonction doit être uniforme et continue, admettre des dérivées partielles des deux premiers ordres, également uniformes et continues, enfin satisfaire à l'équation

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Pour abréger le langage, nous dirons qu'une fonction qui remplit ces conditions est *harmonique* dans l'aire S.

2° *Sur le contour s*, cette fonction doit prendre les valeurs données. Dire que la fonction u prend au point M du contour la valeur m, c'est dire que, lorsque le point (x, y) intérieur à S tend vers le point M de s par un chemin *quelconque*, $u(x, y)$ prend des valeurs qui tendent vers m.

C'est à ce problème que nous donnerons le nom de *problème de Dirichlet*. Pour qu'il puisse admettre une solution, il est nécessaire que la valeur m relativè au point M soit, lorsque le point M décrit la ligne du contour dont il fait partie, une fonction *continue* de l'arc de cette ligne. Cela résulte d'un théorème général dont je me contente de rappeler l'énoncé (¹) :

Soit AB un arc appartenant au contour s. Si une fonction $u(x,y)$, uniforme et continue dans S, prend en chaque point M de AB une valeur déterminée m, m est une fonction continue de l'arc AM. En outre, $u(x,y)$ tend vers m *uniformément tout le long de* AB.

Voici un autre théorème dont nous nous servirons : Si l'on peut faire correspondre à chaque point M de l'arc AB un chemin (intérieur à S et variant avec M d'une manière continue), tel que, le point (x,y) tendant vers M par ce chemin, u tende vers m *uniformément tout le long de* AB, cela suffit pour en conclure que $u(x,y)$ prend la valeur m en chaque point M de AB qui ne soit ni A ni B.

Enfin nous emploierons souvent l'expression suivante. Quand une fonction continue dans S prendra en chaque point de s une valeur déterminée, nous dirons que cette fonction est *continue dans* S *et sur* s.

2. Voici encore quelques résultats bien connus que je rappelle : u étant une fonction harmonique non seulement dans S, mais dans une aire Σ renfermant l'aire S tout entière *à son intérieur*, on a

$$\int_s \frac{du}{dn}\,dl = 0,$$

$\dfrac{d}{dn}$ désignant la dérivée suivant la normale menée à l'intérieur de l'aire. On a aussi, en chaque point A intérieur à S,

$$u = \frac{1}{2\pi}\int_s \left(u\frac{d\log\frac{1}{r}}{dn} - \log\frac{1}{r}\,\frac{du}{dn}\right) dl,$$

(¹) Je renvoie, pour la démonstration de ce théorème et du suivant, à un Mémoire fort remarquable de M. Painlevé, publié dans le tome II des *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, p. B.19 et suiv.

r représentant le module de $z - a$. De là nous déduisons un premier résultat intéressant. Supposons que S soit l'aire d'un cercle ayant pour centre le point z_0 et pour rayon ρ. Posons $re^{i\varphi} = z - z_0$. Soit $u(x, y) = v(r, \varphi)$ une fonction harmonique dans S et continue sur s; appelons $f(\varphi)$ la valeur qu'elle prend au point (ρ, φ) : $f(\varphi)$ est une fonction uniforme de l'angle polaire φ; cette fonction est continue pour toute valeur de la variable et admet la période 2π. Soit u_0 la valeur de u au centre du cercle ; je dis qu'on a

$$u_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\psi)\, d\psi \text{ (1)}.$$

Soit, en effet, S′ un cercle concentrique à S et de rayon r moindre que ρ. On a

$$u_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{s'}\left(u\frac{d\log\frac{1}{r}}{dn} - \log\frac{1}{r}\frac{du}{dn}\right)dl = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v(r, \psi)\, d\psi,$$

d'où

$$(1) \qquad u_0 - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\psi)\, d\psi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} [v(r, \psi) - f(\psi)]\, d\psi.$$

Maintenant, comme la fonction u tend vers $f(\varphi)$ uniformément tout le long de s, à chaque nombre ε on peut faire correspondre un nombre η tel que l'on ait

$$|v(r, \psi) - f(\psi)| < \varepsilon, \quad \text{quel que soit } \psi,$$

sous la condition $\rho - r < \eta$. Sous cette condition, le second membre de l'égalité (1) est donc, en valeur absolue, moindre que ε. Or le premier membre de cette égalité ne dépend pas de r : il est donc rigoureusement nul, c'est-à-dire que l'on a bien

$$u_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\psi)\, d\psi.$$

Si $f(\psi)$ est une constante C, u_0 est égal à C. Si $f(\psi)$ n'est pas une constante, u_0 est inférieur à la plus grande et supérieur à la plus petite des valeurs de $f(\psi)$. On déduit de là qu'une fonction harmo-

---

(1) *Voir* SCHWARZ, *Journal de Crelle*, t. 74, § 3.

nique dans une aire ne peut avoir ni maximum ni minimum à l'intérieur de cette aire.

3. Revenons à une aire quelconque S. Soit encore $u(x, y)$ une fonction harmonique dans S et continue sur s. Les valeurs de cette fonction sur s, formant un ensemble fini, ont une limite supérieure g et une limite inférieure k. Je dis que, pourvu que $u(x, y)$ ne soit pas une constante, ses valeurs à l'intérieur de S sont toutes plus petites que g et toutes plus grandes que k. (Ce théorème sera souvent appliqué sous cette forme : si l'on a en tous les points de s l'inégalité $|u| < \varepsilon$, on a aussi cette inégalité à l'intérieur de S.)

En effet [1], les valeurs de la fonction u dans S et sur s forment aussi un ensemble fini : elles ont donc une limite supérieure g' et une limite inférieure k'. Considérons la limite supérieure g'. On a $u \leqq g'$ dans S et sur s. Je dis que, dans S, l'égalité $u = g'$ est impossible.

Supposons, en effet, qu'au point A on ait $u = g'$. Alors les valeurs de u le long d'un cercle quelconque ayant A pour centre et intérieur à S seraient égales à g'; car, s'il n'en était pas ainsi, une des valeurs de u le long de ce cercle serait supérieure à g'. u serait donc égal à g' dans tout le cercle ayant A pour centre et tangent intérieurement à s. On pourrait ensuite recommencer le même raisonnement en remplaçant le point A par un point A' du contour de ce cercle. On parviendrait donc à démontrer que u est égal à g' dans toute l'aire S, ce qui est contraire à l'hypothèse. Ainsi donc on a, en chaque point intérieur à S, l'inégalité $u < g'$.

Mais, d'après un théorème connu, il doit exister au moins un point M, situé dans S ou sur s, tel que les valeurs de la fonction u dans le voisinage de M aient toujours g' pour limite supérieure, quelque restreint que soit ce voisinage. Que ce point M soit à l'intérieur de S ou sur s, g' est la valeur de la fonction en ce point, parce que u est une fonction continue dans S et sur s. Nous venons de voir qu'un tel point M ne peut être à l'intérieur de S : il est donc sur s. g' est donc la plus grande des valeurs de u sur s, c'est-à-dire $g' = g$. On a donc, dans S, l'inégalité $u < g$.

---

(1) Schwarz, *loc. cit.*, § 10.

On démontre de même l'inégalité $u > k$.

De ces deux inégalités on déduit la suivante : $g > k$. Une fonction harmonique dans S ne peut donc prendre sur s des valeurs toutes égales que si elle est une constante. De cette dernière remarque résulte une conséquence importante : pour une aire S donnée et pour un système donné de valeurs m attachées aux points M de s, le *problème de Dirichlet ne peut avoir plus d'une solution*. C'est démontré lorsque les valeurs m sont toutes égales. Soient, dans le cas général, u et v deux solutions du problème. La fonction $w = u - v$ résout le problème, lorsque les valeurs m sont toutes nulles. Mais, dans ce cas, l'*unique fonction* résolvant le problème est nulle dans S. Donc u coïncide avec v dans S.

Ainsi les conditions du n° 1 suffisent à déterminer complètement la fonction. Toute condition nouvelle rentrera dans les précédentes ou les contredira. Par exemple, il ne faudrait pas exiger que les dérivées $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, qui sont continues dans S, le fussent aussi *sur s*. Car on peut démontrer ([1]) qu'une fonction continue, ainsi que ses dérivées partielles du premier ordre, dans S et sur s, prend sur s des valeurs admettant une dérivée par rapport à l'arc l de s. Or les valeurs données m sont bien supposées former une fonction continue de l, mais non avoir une dérivée.

4. Dans le cas du cercle, le problème de Dirichlet a été complètement résolu par M. Schwarz. Je garde les notations du n° 2, et je considère la fonction $u(x,y) = v(r, \varphi)$ définie pour l'intérieur de S par l'intégrale

$$\mathrm{I} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{(\rho^2 - r^2)\, f(\psi)\, d\psi}{\rho^2 + r^2 - 2\rho r \cos(\psi - \varphi)}, \qquad \text{avec } r < \rho.$$

Il s'agit de montrer ([2]), à l'égard de cette fonction :

1° Qu'elle est harmonique dans S;

2° Qu'elle prend sur s les valeurs données $f(\varphi)$.

La première partie de la démonstration se base sur cette remarque évidente que, si $\mathrm{F}(z)$ est une fonction analytique holomorphe dans S,

---

([1]) Painlevé, *loc. cit.*, p. B.26.

([2]) Schwarz, *loc. cit.*, § 5.

la partie réelle de $F(z)$ est harmonique dans S. Or considérons l'intégrale $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\psi)\frac{\rho e^{i\psi}+z-z_0}{\rho e^{i\psi}-(z-z_0)}\,d\psi$. Sous la condition $|z-z_0|<\rho$, cette intégrale a un sens : elle définit une fonction analytique holomorphe dans S. La partie réelle de cette fonction ne cesse de coïncider avec $u(x, y)$.

En second lieu, M. Schwarz considère la différence $I-f(\varphi)$, où φ est quelconque, r étant supposé plus petit que ρ. Il démontre qu'à chaque nombre positif ε on peut faire correspondre un nombre positif η, tel qu'on ait l'inégalité

$$|I-f(\varphi)|<\varepsilon,$$

quel que soit φ, sous la condition $\rho - r < \eta$. Autrement dit, à chaque point M de s on peut faire correspondre un chemin intérieur à S et variant d'une manière continue avec M, savoir le rayon qui aboutit à M, tel que, (x, y) tendant vers M par ce chemin, $u(x, y)$ tende vers $f(\varphi)$ *uniformément tout le long de* s. La fonction u prend donc sur le cercle les valeurs données.

Nous avons vu que la fonction u coïncide, à l'intérieur de S, avec la partie réelle d'une certaine fonction holomorphe dans S. Cette fonction a été représentée par une intégrale définie; mais on peut aussi la représenter par une série ordonnée suivant les puissances entières et croissantes de $z-z_0$, et absolument convergente dans S :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\psi)\,d\psi+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(z-z_0)^n}{\pi\rho^n}\int_0^{2\pi} f(\psi)e^{-ni\psi}\,d\psi\right].$$

Considérons les valeurs de u sur le cercle de rayon r. Leurs modules ont une limite supérieure qu'il peut être utile de connaître. On a

$$u-u_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi+\psi)\,\frac{-r(r-\rho\cos\psi)\,d\psi}{\rho^2+r^2-2\rho r\cos\psi}.$$

$-\frac{r(r-\rho\cos\psi)\,d\psi}{\rho^2+r^2-2\rho r\cos\psi}$ est la différentielle de $\arcsin\frac{r\sin\psi}{\sqrt{\rho^2+r^2-2\rho r\cos\psi}}$. ψ croissant de o à π, cette fonction part de zéro, croît jusqu'à la valeur $\arcsin\frac{r}{\rho}$ qu'elle atteint pour $\psi_0=\arccos\frac{r}{\rho}$, puis décroît de nouveau jusqu'à zéro. On peut écrire

$$u - u_0 = \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\psi_0} f(\varphi+\psi)\,\frac{-r(r-\rho\cos\psi)\,d\psi}{\rho^2+r^2-2\rho r\cos\psi} + \int_{\psi_0}^{\pi} + \int_{\pi}^{2\pi-\psi_0} + \int_{2\pi-\psi_0}^{2\pi}\right].$$

Si l'on appelle g le maximum de $|f(\varphi)|$, on voit que chacun des termes entre parenthèses a un module inférieur à $g \arcsin\frac{r}{\rho}$. Donc

$$|u - u_0| < \frac{4g}{\pi}\arcsin\frac{r}{\rho} \quad (^1).$$

5. Nous pouvons maintenant démontrer la proposition suivante. Soit $u(x, y)$ une fonction harmonique à l'intérieur d'une aire S. Il suffit de connaître les valeurs de cette fonction dans une portion Σ de S aussi petite qu'on veut pour pouvoir déterminer sa valeur en un point quelconque de S [2].

Car soit A (x_0, y_0) un point intérieur à Σ. De A comme centre décrivons un cercle c qui soit tout entier intérieur à Σ. Comme nous connaissons les valeurs de u sur le contour de ce cercle c, nous savons, d'après le numéro précédent, former une série (s) absolument convergente dans c et dont la partie réelle coïncide avec la fonction u. Je dis que cette série (s) est convergente dans tout cercle C ayant A pour centre et compris tout entier à l'intérieur de S, et que, pour tout l'intérieur de ce cercle C, sa partie réelle représente la valeur de la fonction u. En effet, d'après ce qui précède, il existe une série (S) procédant suivant les puissances de $z - z_0$, et qui, à l'égard du cercle C, jouit des propriétés que nous venons de dire. Les deux séries (s) et (S) sont l'une et l'autre convergentes à l'intérieur de c et ont même partie réelle. Autrement dit, la série $(s - \mathrm{S})$ est convergente dans ce cercle, et sa somme ne cesse pas d'être purement imaginaire. Cela exige que cette série se réduise à son premier terme, qui doit être une constante purement imaginaire. Ainsi les séries (s) et (S) ne diffèrent que par leurs premiers termes, et cela d'une quantité purement imaginaire. La série

(1) SCHWARZ, § 6. Le résultat y est énoncé sans démonstration. Le calcul ci-joint est indiqué à la page 64 de l'Ouvrage de M. Harnack.

(2) SCHWARZ, § 9. La démonstration qui s'y trouve diffère de la nôtre par ce qu'elle se fonde sur la théorie des séries trigonométriques, au lieu de mettre en jeu les propriétés des séries entières.

(s) est donc convergente dans le cercle C, et sa partie réelle donne la valeur de u pour tous les points de ce cercle. La même conclusion s'applique au cercle ayant A pour centre et tangent intérieurement à s.

Dès lors, soit B un point quelconque à l'intérieur de S. Proposons-nous d'avoir la valeur de u en B. Pour cela, traçons de A à B une ligne L qui reste à l'intérieur de S. Nous connaissons la valeur de u en tous les points du cercle C. Prenons sur la ligne L un point D intérieur à ce cercle; nous pourrons répéter sur ce point D le raisonnement fait sur A, et connaître les valeurs de u pour tous les points d'un cercle C' ayant D pour centre et tout entier intérieur à S. On peut, par un choix convenable du point D, faire en sorte que C' ait des points extérieurs à C et situés sur L. On partira alors d'un de ces points, et, continuant ainsi, on est sûr de parvenir à un cercle dans lequel les valeurs de u sont connues et qui renferme le point B.

Ainsi se trouve déterminée *sans ambiguïté* la valeur de u en un point quelconque de l'aire. En d'autres termes, deux fonctions harmoniques dans S ne peuvent coïncider dans une portion Σ de S aussi petite qu'on veut sans coïncider dans toute l'étendue de S En particulier, si une fonction harmonique dans S est constante dans Σ, elle est, par cela même, constante dans toute l'étendue de S.

6. La somme de plusieurs fonctions harmoniques dans S et continues sur s est évidemment une nouvelle fonction harmonique dans S et continue sur s. Soit maintenant une série

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots, \tag{1}$$

dont les termes sont des fonctions harmoniques dans S et continues sur s. J'admets qu'*elle converge uniformément dans* S : c'est-à-dire qu'à chaque nombre positif ε on peut faire correspondre un nombre entier n tel qu'on ait

$$| u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+p} | < \varepsilon, \tag{2}$$

quel que soit p, et pour tous les points de S. Il est clair que cette inégalité a lieu aussi en tous les points de s; car, lorsqu'on tend vers un point M de s, son premier membre tend vers une limite qui ne peut dépasser ε. La série converge donc uniformément sur s. Mais, inversement, si elle converge uniformément sur s, elle converge uniformément dans S; car, la fonction $u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+p}$ étant harmonique dans S et continue sur s, si sa valeur absolue est moindre que ε en chaque point de s, elle est moindre que ε en chaque point de S.

Cela étant, la série (1) définit, pour l'intérieur de S, une fonction u. Je dis qu'elle est harmonique dans S et continue sur s, et que la valeur qu'elle prend en un point M de s est la somme de la série (1) en ce point [1].

On montre d'abord, par un raisonnement bien connu, qu'elle est continue dans S. Pour démontrer qu'elle est harmonique, traçons d'un point A de S comme centre un cercle Σ intérieur à S, et résolvons le problème de Dirichlet pour ce cercle, ce que nous savons faire, en prenant, comme valeurs données le long de σ, les valeurs mêmes de la fonction u. Nous obtenons ainsi une fonction u' que je dis être identique à u.

En effet, à tout nombre ε on peut faire correspondre un nombre entier n tel que l'on ait

$$|u - s_{n'}| < \varepsilon, \quad \text{sous la condition } n' > n,$$

pour tous les points de Σ et de σ. Comme u coïncide avec u' sur σ, on a *pour tous les points de* σ

$$|u' - s_{n'}| < \varepsilon, \quad \text{sous la condition } n' > n.$$

Mais, $u' - s_{n'}$ étant harmonique dans Σ, cette inégalité subsiste *à l'intérieur de* Σ; s_n tend donc vers la fonction u', qui n'est autre que la fonction u. Et comme A est un point quelconque de S, cela prouve que la fonction u est harmonique dans S.

En second lieu, soit m la somme de la série (1) en un point M de s. ε étant un nombre positif quelconque, il existe un entier n tel que $|r_n|$ soit inférieur à $\frac{\varepsilon}{3}$ pour tous les points de S et de s. Considérons la différence $u - m$, u étant la valeur de la fonction en un point N de S. On

[1] Ce théorème n'est pas énoncé explicitement dans les travaux de M. Schwarz; mais le principe de cette démonstration se trouve dans son procédé alterné (*Monatsberichte*, p. 783, 1870). Une démonstration du même genre occupe, dans l'Ouvrage de M. Harnack, la plus grande partie du § 20.

peut l'écrire

$$u - m = (s_n + r_n) - (s'_n + r'_n) = (s_n - s'_n) + r_n - r'_n.$$

On a

$$|r'_n| < \frac{\varepsilon}{3}; \qquad |r_n| < \frac{\varepsilon}{3},$$

quel que soit N; enfin on peut déterminer un cercle C de centre M tel que $|s_n - s'_n| < \frac{\varepsilon}{3}$, pourvu que le point N soit dans ce cercle. On a donc, sous cette condition,

$$|u - m| < \varepsilon.$$

II. — Théorie de la représentation conforme.

7. Le problème de Dirichlet est en liaison intime avec la théorie de la *représentation conforme*. Avant d'expliquer en quoi elle consiste, je crois utile de revoir quelques propriétés de la théorie générale des fonctions, dont nous ferons d'ailleurs un usage continuel dans la suite.

Soit $z_1 = F(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$ une fonction holomorphe (c'est-à-dire uniforme et continue ainsi que sa dérivée) à l'intérieur d'une aire S *simplement connexe*, dont le contour s est une ligne fermée simple. Soit a_1 une valeur prise par $F(z)$ en un point a *intérieur* à S. L'équation $z_1 = F(z)$ définit une fonction z de z_1 prenant la valeur a pour $z_1 = a_1$ et représentable dans le voisinage de $z_1 = a_1$ par une série de la forme

$$z - a = b(z_1 - a_1)^{\frac{1}{m}} + c(z_1 - a_1)^{\frac{2}{m}} + \ldots,$$

dans laquelle b n'est pas nul, et où m désigne l'ordre de la première dérivée de $F(z)$ qui n'est pas nulle pour $z = a$. Cette fonction inverse est continue dans le voisinage de $z_1 = a_1$. Il est donc possible de trouver un cercle C_1 de centre a_1 tel qu'en chaque point b_1 situé à l'intérieur de ce cercle les m déterminations de z soient représentées par des points *intérieurs* à l'aire S. En chacun de ces points, $F(z)$ a la même valeur b_1. On peut donc trouver un cercle C_1 de centre a_1 qui ne renferme que des valeurs effectivement atteintes par $F(z)$ dans S. D'une façon plus précise, à chaque cercle C ayant a pour centre on peut faire correspondre un cercle C_1 de centre a_1 tel que toutes les valeurs intérieures à C_1 soient atteintes par $F(z)$ à l'intérieur de C.

Je fais maintenant, à l'égard de la fonction $F(z)$, une nouvelle hypothèse. J'admets qu'elle prend une valeur bien déterminée en chaque point de s. C'est ce qu'on exprime d'ordinaire en disant que la fonction est *holomorphe dans* S *et continue sur* s. Alors on voit, en se reportant aux principes énoncés dans le n° 1, que la valeur x_1 de $P(x, y)$ et la valeur y_1 de $Q(x, y)$ en un point de s sont des fonctions *continues* de l'arc de s. Il s'ensuit que, lorsque le point z parcourt la ligne s tout entière, le point z_1 parcourt une certaine ligne s_1. D'après la définition même de s_1, on voit qu'à chaque point de s correspond un point de s_1, et que, réciproquement, chaque point de s_1 correspond à un point au moins de s. Cette ligne s_1 joue un rôle capital dans l'important théorème que voici :

Soit a_1 une valeur, située ou non sur s_1, mais prise par la fonction $F(z)$ en un point a intérieur à S. Soit d'ailleurs b_1 une autre valeur non située sur s_1 que l'on puisse joindre à a_1 par une ligne L ne renfermant aucun point de s_1 (sauf peut-être a_1). Il existe dans S un point b tel que $F(b) = b_1$.

En effet, nous avons vu qu'au point a_1 on peut faire correspondre un cercle C_1 ne renfermant que des valeurs atteintes par $F(z)$ dans S. Si le point b_1 est à l'intérieur de ce cercle, le théorème est démontré; sinon, soit a'_1 le point de la ligne L situé sur le contour du cercle. Ce point a'_1 est une valeur atteinte par $F(z)$ à l'intérieur de S; car la fonction $|F(z) - a'_1|$ est continue dans S et sur s; la limite inférieure de ses valeurs dans S et sur s est zéro : il y a donc, dans S ou sur s, un point a' tel que $F(a') = a'_1$. Mais, a'_1 n'étant pas sur s_1, a' ne peut être sur s : il est donc dans S. Dès lors nous pouvons recommencer sur a'_1 l'opération faite sur a_1 et, sinon atteindre, du moins nous rapprocher de b_1. En continuant ainsi, et prenant chacun de ces cercles $C_1, C'_1, \ldots$ aussi grand que possible, on parviendra certainement à la valeur b_1. Il est en effet impossible que les points $a'_1, a''_1, \ldots$ se rapprochent indéfiniment d'un certain point l_1 situé entre a_1 et b_1. Pour que cela fût, il faudrait que la valeur l_1 ne fût pas atteinte dans S; et comme, par le raisonnement précédent, on peut montrer qu'elle est atteinte dans S ou sur s, il faudrait que l_1 fût situé sur s_1, ce qui est contre l'hypothèse.

Ce théorème nous donne quelques indications sur la nature de la ligne s_1 et la manière dont sont placées, par rapport à cette ligne, les valeurs de $F(z)$ à l'intérieur de S. Tout d'abord, les valeurs de $F(z)$ dans S et sur s forment un ensemble *fini* : par suite d'une valeur a_1 de $F(z)$ dans S il doit être impossible de s'éloigner indéfiniment dans le plan des z_1 sans passer par un point de s_1. La ligne s_1 partage donc le plan en deux régions : l'une comprend les points d'où l'on peut aller à l'infini sans passer par un point de s_1, l'autre comprend les points du plan pour lesquels cela n'est pas possible. Toute valeur de $F(z)$ dans S est située dans la seconde région. La première région renferme une partie ou la totalité de s_1, et c'est cette partie de s_1 qui forme le contour de la seconde région. Enfin la seconde région a cette propriété importante qu'il est possible d'aller d'un de ses points à un autre sans passer par un point de s_1 appartenant à la première région ([1]).

8. Nous pouvons maintenant faire comprendre en quoi consiste la représentation conforme. Envisageons une fonction $z_1 = F(z)$ holomorphe dans S et continue sur s, mais possédant en outre cette propriété essentielle : *ses valeurs en deux points différents quelconques intérieurs à* S *sont différentes*. A cette fonction s'appliqueront tout d'abord tous les résultats du numéro précédent, mais l'hypothèse nouvelle que nous venons de faire va leur donner plus de précision. En premier lieu, en chaque point a de S, le nombre m indiquant l'ordre de la première dérivée qui ne s'annule pas doit être égal à 1; sinon, comme on l'a vu, $F(z)$ prendrait la même valeur en des points différents de S. Ainsi la dérivée $F'(z)$ n'a la valeur zéro en aucun point de l'aire S. De là suit que la propriété géométrique qu'a la fonction analytique $F(z)$ de conserver la grandeur et le sens de rotation des angles ne souffre d'exception en aucun point de l'intérieur de S. C'est cette propriété qu'est destinée à rappeler l'épithète de *conforme* attachée à la représentation dont il s'agit.

([1]) Autrement dit, cette seconde région est *connexe*, c'est-à-dire se compose d'une seule aire, et non de plusieurs aires séparées.

Dans le numéro précédent, nous avons été amené à partager en deux régions le plan des z_1, et c'est dans la seconde région seule que nous avons eu à chercher les valeurs dans S de $F(z)$. Mais cette région pouvait contenir des points de s_1, et rien n'empêchait un de ces points de représenter une des valeurs de $F(z)$ à l'intérieur de S. Il n'en est plus de même ici. Aucune des valeurs de $F(z)$ à l'intérieur de S ne peut être représentée par un point de s_1. Imaginons en effet que le point a_1 de s_1 corresponde à un point a intérieur à S. Il correspond aussi à un point a' de s. Traçons dans S une ligne L qui ne passe pas par a et qui aboutisse à a', et soit C un cercle ayant a pour centre et qui ne renferme aucun point de L. Au cercle C on peut faire correspondre un cercle C_1 de centre a_1 et ne renfermant que des valeurs atteintes dans C. A la ligne L correspond une ligne L_1 aboutissant à a_1; soit b_1 un point de L_1 intérieur à C_1. La valeur b_1 serait atteinte en deux points différents de S.

On voit par là que l'ensemble S_1 des valeurs de $F(z)$ dans S est tel qu'on peut aller d'un quelconque de ses points à un autre sans passer par un point de s_1. Comme d'ailleurs on ne peut sortir de S_1 qu'en passant par un point de s_1, on voit que S_1 est constitué par les points d'une aire *simplement connexe* limitée par la ligne s_1 tout entière. La fonction $z_1 = F(z)$ établit entre les points des deux aires S et S_1 une correspondance *univoque* : à chaque point de l'une correspond un point et un seul de l'autre.

Voyons maintenant comment se correspondent les points des lignes s et s_1. A chaque point de s correspond un point, et un seul, de s_1; inversement, chaque point de s_1 correspond au moins à un point de s. Il s'agit de voir si un point de s_1 peut correspondre à plus d'un point de s. Pour cela, imaginons que la variable z parte d'un point quelconque de s et parcoure s tout entier, mais une seule fois, dans le sens direct. Que fera la variable z_1? Elle ne pourra pas garder la même valeur pendant que z parcourra un arc de s, car alors $F(z)$ serait constant dans S [1]; elle ne cesse donc pas de se mouvoir sur s_1. En second lieu, le principe de la conservation du *sens* des angles apprend

(1) *Voir* PAINLEVÉ, p. B.28.

que z_1 marche constamment dans le sens direct. Enfin il n'est pas difficile de montrer que, si z_1 revenait avant z à son point de départ, les valeurs de $F(z)$ dans S ne seraient pas toutes distinctes. Un point de s_1 ne peut donc correspondre qu'à un point de s.

En résumé, à chaque fonction $z_1 = F(z)$ holomorphe dans S, continue sur s, et dont les valeurs dans S sont toutes distinctes, correspond une aire simplement connexe S_1 telle que $F(z)$ établit entre les points de S et de S_1, de s et de s_1, une correspondance *univoque*. On dit que $F(z)$ *représente d'une manière conforme* S *sur* S_1.

9. Si une fonction $z_1 = F(z)$ représente d'une manière conforme une aire simplement connexe S sur une aire simplement connexe S_1, la fonction inverse $z = F_1(z_1)$ représente S_1 sur S.

Car soit a un point intérieur à S, et posons $a_1 = F(a)$. Comme la dérivée $F'(a)$ n'est pas nulle, la fonction z de z_1, prenant la valeur a pour $z_1 = a_1$, que définit l'équation $z_1 = F(z)$, est représentée dans le voisinage de $z_1 = a_1$ par une série entière (S). Soit C un cercle de centre a_1 dans lequel cette série est convergente. Pour tout point b_1 intérieur à la fois à ce cercle et à S_1, la somme de la série (S) est la valeur b intérieure à S pour laquelle $F(b) = b_1$. Soit maintenant a'_1 un point quelconque appartenant au contour du cercle C et à l'intérieur de S_1. Soit a' la valeur de z intérieure à S pour laquelle $F(a') = a'_1$. Nous pourrons répéter, à l'égard du point a'_1 et de la valeur correspondante a', tout ce que nous avons dit du point a_1 et de la valeur correspondante a. Nous aurons ainsi une série entière (S') : soit C' un cercle de centre a'_1 où elle est convergente. Dans la partie commune aux cercles C et C' et intérieure à S_1, les sommes des séries (S) et (S') coïncident ; par suite, la fonction représentée par la série (S') continue analytiquement la fonction représentée par la série (S), pour laquelle, en conséquence, le point a'_1 n'est pas un point singulier. En résumé, la série (S) est convergente à l'intérieur du cercle ayant a_1 pour centre et tangent intérieurement à s_1 ; la fonction représentée par cette série peut être continuée analytiquement dans tout l'intérieur de l'aire S_1 sans qu'elle cesse, pour un point particulier de cette aire, d'avoir le caractère d'une fonction entière. C'est donc une fonction *holomorphe* de z_1 dans S_1.

Il est maintenant très aisé de reconnaître que cette fonction

$$z = F_1(z_1)$$

représente effectivement S_1 sur S. Ses valeurs dans S_1 sont toutes distinctes; il suffit donc de montrer qu'en un point b_1 de s_1 elle prend une valeur représentée par un point de s. Or soit b le point de s auquel la fonction $F(z)$ fait correspondre b_1. Au nombre positif ε je vais faire correspondre un nombre positif η tel que l'on ait l'inégalité $|F_1(z_1) - b| < \varepsilon$, pour toutes les valeurs de z_1 intérieures à S_1 et telles que $|z_1 - b_1|$ soit $< \eta$.

A cet effet, je décris, du point b comme centre, un cercle de rayon ε: il découpe dans S une aire simplement connexe Σ que la fonction $F(z)$ représente sur une aire Σ_1 qui est une portion de S_1 et qui contient sur son contour le point b_1. Soit η le rayon d'un cercle ayant b_1 pour centre et tel que l'aire qu'il découpe dans S_1 soit une portion de Σ_1. Ce nombre η répond évidemment à la question.

10. Nous avons vu (n° 8) que, lorsqu'une fonction holomorphe dans une aire y prend des valeurs toutes distinctes, sa dérivée n'y est jamais nulle. Nous allons démontrer une sorte de réciproque de ce théorème. Il est évident d'abord que, si $F(z)$ est holomorphe dans une aire S, si $F'(z)$ n'est jamais nul dans S, il ne s'ensuit pas que les valeurs de $F(z)$ dans S soient toutes distinctes.

Mais voici ce qu'on peut dire : si $F(z)$ est holomorphe dans S, si $F'(z)$ est différent de zéro en un point a de S, alors, *dans le voisinage immédiat du point a*, les valeurs de $F(z)$ sont distinctes.

Pour le montrer, posons $z_1 = F(z)$, et considérons encore la fonction inverse z de z_1. Elle est représentée dans le voisinage de la valeur $a_1 = F(a)$ par une série (S) procédant suivant les puissances entières de $z_1 - a_1$. On peut déterminer un cercle Σ_1 de centre a_1 dans lequel la série (S) soit convergente, et tel en outre que les valeurs de z aux différents points intérieurs à ce cercle soient représentées par des points intérieurs à S. Ces valeurs sont toutes distinctes : car la valeur b de z en un point b_1 de Σ_1 est telle que l'on a $F(b) = b_1$. On peut, de plus, prendre Σ_1 assez petit pour que la fonction représentée par la série (S) prenne une valeur déterminée en chaque point de σ_1 : alors elle représente d'une manière conforme l'aire Σ_1 sur une portion Σ de S simplement connexe et renfermant le point a. Inversement, la fonction $F(z)$ représente Σ sur Σ_1, et ses valeurs aux différents points de Σ sont toutes distinctes.

11. Voici une autre propriété intéressante de la représentation conforme : *elle conserve l'ordre des contacts*. Ainsi, soit $z_1 = F(z)$ une fonction qui représente d'une manière conforme une aire S sur une aire S_1. Soit A un point intérieur à S, et considérons deux courbes C', C'', issues du point A, et ayant en ce point un contact d'ordre c. Il s'agit de faire voir que les courbes C'_1, C''_1 ont en A_1 un contact du même ordre c.

Posons $z - a = re^{i\varphi}$, de sorte qu'on aura, dans le voisinage du point A,

$$z_1 - a_1 = rF'(a)e^{i\varphi} + \sum_{n=2}^{n=\infty}\left[r^n \frac{F^{(n)}(a)}{1.2\ldots n} e^{ni\varphi}\right]. \tag{1}$$

A chaque valeur de r correspondent, sur C' et C'', deux points déterminés $M'(z' - a = re^{i\varphi'})$ et $M''(z'' - a = re^{i\varphi''})$; sur C'_1 et C''_1, deux points déterminés M'_1 et M''_1. Je dis que, r tendant vers zéro, le rapport $\dfrac{M'_1 M''_1}{\overline{A_1 M'_1}^{c+1}}$ tend vers une limite différente de zéro.

Tout d'abord, $A_1M'_1 = |z'_1 - a_1|$ est du même ordre infinitésimal que r :

$$\frac{z'_1 - a_1}{z' - a} = F'(a) + \sum_{n=1}^{n=\infty}\left[r^n \frac{F^{(n+1)}(a)}{1.2\ldots n(n+1)} e^{ni\varphi'}\right].$$

Tout revient à évaluer l'ordre infinitésimal de $M'_1M''_1$, r étant pris comme infiniment petit principal. Or $M'_1M''_1 = |z'_1 - z''_1|$, et

$$z'_1 - z''_1 = rF'(a)(e^{i\varphi'} - e^{i\varphi''}) + \sum_{n=2}^{n=\infty}\left[r^n \frac{F^{(n)}(a)}{1.2\ldots n}(e^{ni\varphi'} - e^{ni\varphi''})\right].$$

On tire de là

$$\frac{z'_1 - z''_1}{z' - z''} = F'(a) + \sum_{n=1}^{n=\infty}\left[r^n \frac{F^{(n+1)}(a)}{1.2\ldots n(n+1)}(e^{ni\varphi'} + e^{(n-1)i\varphi' + i\varphi''} + \ldots + e^{ni\varphi''})\right].$$

Cette formule montre que l'ordre infinitésimal de $M'_1 M''_1$ est le même que celui de $M'M''$. Mais ce dernier est $c+1$ par hypothèse. Il en est donc de même de celui de $M'_1 M''_1$.

12. Le théorème suivant permet de décomposer en deux le problème qui consiste à représenter l'une sur l'autre deux aires simplement connexes S et S_1 : Si l'on sait représenter séparément chacune d'elles sur une aire simplement connexe Σ, on sait représenter S sur S_1.

Car soit $\zeta = f(z)$ une fonction qui représente S sur Σ, et soit $z_1 = \varphi(\zeta)$ une fonction qui représente Σ sur S_1. On vérifie sans peine que $z_1 = \varphi[f(z)]$ est une fonction qui représente S sur S_1.

D'après cela, on peut, au lieu de chercher à représenter directement l'une sur l'autre deux aires simplement connexes S et S_1, se proposer de représenter chacune d'elles sur une aire simplement connexe Σ. L'aire Σ qu'il est le plus naturel de choisir est la surface d'un cercle. Prenons, pour fixer les idées, le cercle ayant l'origine pour centre et l'unité pour rayon.

Quand on a trouvé une manière de représenter une aire simplement connexe S sur le cercle Σ, il est facile d'en obtenir une infinité d'autres. Car toutes les fonctions comprises dans la formule

$$\zeta_1 = \frac{\zeta - \zeta_0}{1 - \zeta\zeta'_0} e^{i\alpha} \quad [1], \tag{1}$$

où α est une constante arbitraire réelle, ζ_0 l'affixe d'un point *intérieur* au cercle, ζ'_0 la quantité imaginaire conjuguée, réalisent une représentation conforme du cercle Σ sur lui-même. Par suite, toutes les fonctions

$$\zeta = \frac{f(z) - \zeta_0}{1 - f(z).\zeta'_0} e^{i\alpha} \tag{2}$$

représentent S sur Σ. En outre, nous démontrerons dans le numéro suivant que la formule (1) renferme *toutes* les manières de représenter le cercle Σ sur lui-même. On en conclut que la formule (2) renferme

---

[1] SCHWARZ, *Monatsberichte*, p. 790; 1870.

toutes les manières de représenter S sur Σ. La solution générale dépend, comme on le voit, de trois constantes arbitraires réelles.

Pareillement, quand on sait représenter deux aires simplement connexes S et S_1 sur le cercle Σ, on sait, par cela même, les représenter l'une sur l'autre d'une infinité de manières ; et il suffit d'associer une manière particulière de représenter S sur Σ successivement à toutes les manières de représenter Σ sur S_1 pour avoir ainsi toutes les manières de représenter S sur S_1.

Au lieu du cercle, on peut prendre aussi, comme aire intermédiaire, le demi-plan. Mais, comme cette nouvelle aire est d'un genre un peu différent de celles que nous avons considérées jusqu'à présent, quelques définitions me paraissent nécessaires.

Soit S la moitié supérieure du plan de la variable complexe z. Soit $z_1 = F(z)$ une fonction holomorphe dans S ; à cette fonction s'appliquent les conclusions énoncées au commencement du n° 7. Supposons en outre que $F(z)$ prend une valeur déterminée en chaque point de s, et qu'elle prend aussi une valeur déterminée au *point à l'infini*, en entendant par là que, lorsque z s'éloigne à l'infini dans le demi-plan S par un chemin quelconque, $F(z)$ prend des valeurs qui tendent vers une limite l toujours la même. Alors, z s'éloignant indéfiniment sur s soit vers la droite, soit vers la gauche, les valeurs de $F(z)$ tendent vers l. La fonction $F(z)$ fait correspondre à l'axe réel s une certaine ligne s_1, et tout ce qui a été dit à la fin du n° 7 s'applique au cas actuel. Enfin, si l'on admet en outre que les valeurs de $F(z)$ dans S sont toutes distinctes, on peut reprendre les raisonnements du n° 8, et dire que la fonction $F(z)$ fait correspondre au demi-plan S une aire simplement connexe S_1, de manière qu'à un point de l'une quelconque des deux aires corresponde un seul point de l'autre. Le point z parcourant d'ailleurs l'axe réel tout entier de gauche à droite, le point z_1 parcourt la ligne s_1 tout entière, en marchant toujours dans le sens direct, et sans passer plus d'une fois par le même point. On dit que la fonction $z_1 = F(z)$ *représente d'une manière conforme le demi-plan* S *sur l'aire* S_1. La fonction inverse $z = F_1(z_1)$ est holomorphe dans l'aire S_1, comme le montre un raisonnement semblable à celui du n° 9, et l'on dit qu'*elle représente d'une manière conforme l'aire* S_1 *sur le demi-plan* S.

Ces définitions posées, on a encore le théorème suivant :

Soit $\zeta = f(z)$ *une fonction qui représente une aire* S *sur le demi-plan* Σ, *et* $z_1 = \varphi(\zeta)$ *une fonction qui représente* Σ *sur une aire* S_1 ; *la fonction* $z_1 = \varphi[f(z)]$ *représente* S *sur* S_1.

Plus généralement, ce théorème subsiste quelle que soit celle des trois aires S, S_1 ou Σ qui est un demi-plan.

D'après cela, le demi-plan peut remplacer le cercle dans la décomposition du problème de la représentation de S sur S_1. D'ailleurs il est facile de passer d'une de ces aires particulières à l'autre. La fonction

$$z = \frac{\zeta - i}{\zeta + i} \quad (3)$$ [1]

représente la moitié supérieure Σ du plan ζ sur l'aire S du cercle ayant l'origine pour centre et l'unité pour rayon. Il y a une infinité d'autres fonctions représentant Σ sur S, et nous avons appris à les former toutes. Associons la manière (3) de représenter Σ sur S successivement à toutes les manières de représenter S sur Σ ; nous obtiendrons une infinité de fonctions ζ_1 de ζ. On dit de chacune d'elles *qu'elle représente le demi-plan sur lui-même*. Il n'y a aucune difficulté à faire le calcul, et voici quelle expression générale on trouve pour ces fonctions :

$$\zeta_1 = \frac{a\zeta + b}{c\zeta + d},$$

où a, b, c, d sont des constantes réelles vérifiant la condition

$$ad - bc > 0.$$

Le théorème énoncé au début de ce paragraphe subsiste lors même que plusieurs des aires qui y figurent coïncident avec le demi-plan.

Enfin, $\zeta = f(z)$ étant une fonction particulière représentant une aire S sur le demi-plan Σ, l'expression générale des fonctions qui représentent S sur Σ est

$$\zeta = \frac{af(z) + b}{cf(z) + d}, \quad \text{avec } ad - bc > 0.$$

Ici encore, on retrouve la triple indétermination.

---

[1] SCHWARZ, *Journal de Crelle*, t. 70, p. 112.

13. Nous avons encore à faire voir que la formule donnée au n° 12 renferme *toutes* les manières de représenter sur lui-même le cercle Σ ayant l'origine pour centre et l'unité pour rayon. Nous déduirons ce résultat d'un théorème plus général ([1]). Observons à cet effet qu'on peut disposer des constantes que renferme la formule du n° 12 de manière à faire correspondre au point $\zeta_1 = 0$ un point quelconque de l'intérieur de Σ, au point $\zeta_1 = +1$ un point quelconque du contour de Σ. La proposition sera donc établie, si nous faisons voir que, A étant un point quelconque de l'intérieur et B un point quelconque du contour de Σ, il ne peut exister plus d'une fonction représentant Σ sur lui-même de manière à faire correspondre au point A le centre du cercle, au point B le point $\zeta_1 = +1$.

Or je dis que, S étant une aire simplement connexe quelconque, A un point quelconque de S, B un point quelconque de s, il ne peut exister plus d'une fonction qui représente S sur Σ de manière qu'au point A corresponde le centre du cercle, au point B le point $\zeta = 1$.

Négligeons, pour commencer, cette dernière condition, et soit $\zeta = F(z)$ une fonction qui représente S sur Σ de manière à faire correspondre au point A le centre du cercle Σ. Cette fonction est holomorphe dans S, et s'annule au seul point A. La fonction $\frac{F(z)}{z-a}$ est, elle aussi, holomorphe dans S et ne s'annule en aucun point de S. On peut donc aussi considérer la fonction $\log \frac{F(z)}{z-a}$ comme holomorphe dans S : il suffit pour cela de fixer, pour un point particulier de S, la valeur du coefficient de i ([2]). J'appelle u la partie réelle de cette fonction ; u est une fonction de x et de y uniforme et continue, ainsi que ses dérivées partielles des deux premiers ordres, et satisfait à $\Delta u = 0$, à l'intérieur de S. Sur s, u prend une suite de valeurs qui nous est connue : car, $F(z)$ ayant un module qui tend vers 1 lorsque z tend vers un point de s,

---

([1]) Cette démonstration est au fond identique à celle que donne Riemann à la fin de sa *Dissertation inaugurale;* mais elle est débarrassée de tout postulatum, et par suite parfaitement rigoureuse.

([2]) Car, si l'on décrit un contour fermé quelconque intérieur à S, ce coefficient revient à sa valeur initiale, vu que le nombre des zéros de $\frac{F(z)}{z-a}$ intérieurs à ce contour est nul.

u ne cesse pas sur s de coïncider avec $-\log r$, en posant $r = |z-a|$. Ces propriétés déterminent la fonction u *sans ambiguïté*, ainsi que cela résulte du n° 3. Si maintenant j'appelle v le coefficient de i dans la fonction $\log \frac{F(z)}{z-a}$, v est déterminé à une constante près c :

$$v = c + \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \left(\frac{\partial u}{\partial x} dy - \frac{\partial u}{\partial y} dx \right),$$

où (x_0, y_0) est un point particulier de S, et où l'intégrale est à prendre le long d'un chemin quelconque intérieur à S allant de (x_0, y_0) à (x, y). On a donc

$$\log \frac{F(z)}{z-a} = ci + g(z),$$

$g(z)$ étant une fonction holomorphe dans S et continue sur s, puisque la fonction $F(z)$ est continue sur s.

L'expression $F(z) = (z-a) e^{g(z)} e^{ic}$ renferme certainement toutes les fonctions représentant S sur Σ de manière à faire correspondre à A le centre de Σ. Si maintenant nous exprimons qu'au point B correspond le point $\zeta = +1$, nous ne trouvons évidemment qu'*une* valeur pour le facteur e^{ic}. Il ne peut donc y avoir qu'*une* fonction satisfaisant aux conditions du problème.

14. Tout le rôle de la représentation conforme dans la résolution du problème de Dirichlet est renfermé dans le théorème suivant :

Si l'on sait représenter une aire simplement connexe S *sur une aire simplement connexe* S_1, *et si en outre on sait résoudre le problème de Dirichlet pour* S, *on sait le résoudre pour* S_1 [1].

Car soit

$$z = F_1(z_1) = P_1(x_1, y_1) + i Q_1(x_1, y_1)$$

une fonction qui représente S_1 sur S. Chaque point M de s correspond à un point bien déterminé M_1 de s_1; soit m la valeur attachée à ce dernier point. A chaque point M de s faisons correspondre cette valeur m; soit $u(x, y)$ la fonction qui résout le problème pour ce sys-

---

[1] SCHWARZ, *Monatsberichte*, p. 771; 1870.

tème de valeurs m. Il n'est pas difficile de voir que la fonction

$$u[P_1(x_1,y_1),\ Q_1(x_1,y_1)] = u_1(x_1,y_1)$$

résout le problème pour l'aire S_1. Car elle est bien définie pour l'intérieur de S_1, uniforme et continue ainsi que ses dérivées partielles. Un calcul simple montre que l'on a

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y_1^2} = \left[\left(\frac{\partial P_1}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial P_1}{\partial y_1}\right)^2\right]\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right).$$

Donc Δu_1 est nul à l'intérieur de S_1. Enfin, lorsque le point (x_1, y_1) de S_1 tend vers le point M_1 de s_1, le point (x, y) de S tend vers le point M de $s : u(x, y)$ et, par suite, $u_1(x_1, y_1)$ tend vers la valeur donnée m. $u_1(x_1, y_1)$ est donc la fonction qui résout le problème.

Ainsi l'on sait résoudre le problème de Dirichlet pour toute aire simplement connexe qu'on sait représenter sur un cercle.

III. — Problème de Dirichlet généralisé.

15. Le problème de Dirichlet, tel qu'il a été énoncé au n° 1, est susceptible d'une généralisation importante. Choisissons sur le contour s des points A_1, A_2, ... quelconques, mais en nombre limité. Faisons maintenant correspondre, comme au n° 1, une valeur déterminée m à chaque point M du contour s, en exceptant les points A, auxquels nous ne faisons correspondre aucune valeur. Nous pouvons dès lors nous proposer de déterminer une fonction u satisfaisant, pour l'intérieur de l'aire S, aux conditions énoncées dans le n° 1, et prenant en outre, en chaque point M du contour, la valeur m que nous y avons attachée.

Nous savons déjà que le problème ainsi énoncé n'est possible qu'à la condition que m soit une fonction continue de l'arc le long de toute portion de s qui ne renferme aucun point singulier A. Nous supposerons donc remplie cette condition. Mais il y a plus : nous nous bornerons à examiner le cas où, pour chaque point singulier A, m tend vers une limite lorsque le point M de s tend vers le point A en marchant dans le sens direct, et vers une autre limite lorsque le point M tend vers A en marchant dans le sens inverse.

Enfin à l'énoncé précédent j'ajoute la condition suivante : la fonction u doit rester *finie* dans le voisinage de chaque point singulier A. Cela veut dire que, si de A comme centre on décrit un petit cercle C, on doit pouvoir fixer un nombre positif g auquel restent inférieures les valeurs de $|u|$ pour tous les points intérieurs à la fois à S et à C.

C'est au problème ainsi précisé que nous donnerons le nom de *problème de Dirichlet généralisé*. Par opposition, nous appellerons *problème de Dirichlet classique* celui qui a été énoncé au n° 1.

16. Supposons que, pour une aire S, à connexion simple ou multiple, on sache résoudre le problème de Dirichlet classique. Il est dès lors très facile de résoudre le problème généralisé, ainsi que nous allons le faire voir.

Nous emploierons, dans tout ce qui va suivre, les notations suivantes. Nous appellerons a l'affixe du point singulier A, α l'angle, *compté à l'intérieur de l'aire*, que font les tangentes en A aux deux branches de s issues de A ; α est en général égal à π ; il est toujours compris entre o et 2π. Enfin, à chaque point A correspondent, d'après l'énoncé, deux valeurs limites pour la valeur donnée m ; nous appellerons δ l'excès de la première valeur limite sur la seconde, en suivant l'ordre du numéro précédent.

Cela étant, supposons d'abord S à connexion simple ; ou, s'il est à connexion multiple, admettons que s n'ait de points singuliers que sur la ligne extérieure L_0 : soient a_0, a'_0, a''_0, ... leurs affixes. Il n'est pas difficile de construire une fonction harmonique dans S et ayant sur s, sinon les valeurs, du moins les discontinuités de la fonction cherchée. Car soit u le coefficient de $\sqrt{-1}$ dans $\log(z-a)$: la fonction

$$U'(x,y) = \frac{\delta_0}{\alpha_0}u_0 + \frac{\delta'_0}{\alpha'_0}u'_0 + \frac{\delta''_0}{\alpha''_0}u''_0 + \dots,$$

dans laquelle on a fixé, pour un point particulier de l'aire, les valeurs de u_0, u'_0, u''_0, ..., répond évidemment à cette condition. Cela posé, soit $U(x,y)$ la fonction cherchée : la différence $U - U'$, harmonique dans S, prend en chaque point non singulier de s une valeur déterminée, différence entre la valeur donnée et celle de la fonction U'. Cette valeur n'éprouve pas de discontinuité aux points singuliers. Mais on ne sait rien sur la manière dont la fonction se comporte dans le voisinage d'un point singulier, si ce n'est que sa valeur reste finie. Admettons qu'elle prenne une valeur déterminée même aux points singuliers; on sait alors la déterminer sans ambiguïté, et l'on a, en la désignant par $w(x, y)$,

$$U = w(x, y) + \frac{\delta_0}{\alpha_0} u_0 + \frac{\delta'_0}{\alpha'_0} u'_0 + \frac{\delta''_0}{\alpha''_0} u''_0 + \ldots.$$

Réciproquement, cette fonction satisfait à toutes les conditions de l'énoncé. On a donc ainsi une solution du problème. Si l'on essaye d'appliquer le même mode de raisonnement au cas où il y aurait des points singuliers a_i, a'_i, a''_i, ... sur la ligne L_i (i désignant l'un des nombres 1, 2, 3, ..., $n-1$), on se trouve tout d'abord arrêté par une difficulté : la fonction u correspondant à l'un de ces points n'est pas uniforme dans l'aire S. Transformons l'aire S en une aire simplement connexe S_1 par des coupures C_1, C_2, ..., C_{n-1} assujetties à ne pas se rencontrer et à ne passer par aucun point singulier de s : alors, il est vrai, l'uniformité des fonctions u sera assurée, si l'on a eu soin de fixer la valeur de chacune d'elles en un point particulier de l'aire; mais, le long de la coupure C_i, chaque fonction u_i éprouve une discontinuité : ses valeurs sur le bord droit de la coupure surpassent de 2π ses valeurs sur le bord gauche. Posons encore

$$\begin{aligned} U'(x, y) = {} & \frac{\delta_0}{\alpha_0} u_0 + \frac{\delta'_0}{\alpha'_0} u'_0 + \frac{\delta''_0}{\alpha''_0} u''_0 + \ldots \\ & + \sum_{i=1}^{i=n-1} \left(\frac{\delta_i}{\alpha_i} u_i + \frac{\delta'_i}{\alpha'_i} u'_i + \frac{\delta''_i}{\alpha''_i} u''_i + \ldots \right), \end{aligned}$$

et considérons de nouveau la différence $U - U'$. Elle est harmonique dans S_1, prend en chaque point non singulier de s une valeur déterminée qui reste continue même aux points singuliers, reste finie dans le voisinage d'un point singulier, enfin éprouve le long de chaque coupure C_i une discontinuité

$$k_i = -2\pi \left(\frac{\delta_i}{\alpha_i} + \frac{\delta'_i}{\alpha'_i} + \frac{\delta''_i}{\alpha''_i} + \ldots \right).$$

Si la fonction elle-même éprouve une discontinuité le long de C_i, il n'en est pas de même de ses dérivées partielles des deux premiers ordres, qui, elles, restent continues dans l'aire S tout entière. Nous sommes ainsi amené à nous poser le problème suivant [1] :

La valeur m étant donnée d'une manière arbitraire, mais cependant de façon à varier d'une manière continue tant qu'on ne franchit aucune coupure, et à varier brusquement de k_i lorsqu'on franchit la coupure C_i, on demande de trouver une fonction $V(x, y)$ harmonique dans S_1, prenant en chaque point de s la valeur donnée, enfin prenant sur le bord droit de la coupure C_i des valeurs qui dépassent de la quantité constante k_i ses valeurs sur le bord gauche. On ajoute la condition que ses dérivées partielles des deux premiers ordres doivent être continues dans l'aire S tout entière.

Pour résoudre ce nouveau problème, nous allons suivre une marche toute semblable à la précédente. Il n'est pas difficile de former une fonction ayant les propriétés de la fonction $V(x,y)$, éprouvant les mêmes discontinuités k_i le long des coupures, et ne différant de V que par ses valeurs sur s. Soit v_i le coefficient de $\sqrt{-1}$ dans $\log(z-b_i)$, b_i étant l'affixe d'un point *intérieur* à L_i. v_i est une fonction uniforme dans S_1, pourvu que l'on ait fixé sa valeur en un point particulier de cette aire. La fonction

$$V'(x,y) = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^{i=n-1} k_i v_i$$

a les propriétés énoncées. Dès lors, la différence $V - V'$ est une fonction de même nature, mais pour laquelle tous les k sont nuls : par suite, on peut supprimer les coupures, et cette fonction se trouve déterminée sans ambiguïté, puisqu'elle est harmonique dans S et qu'elle prend sur s des valeurs connues. Soit $w(x,y)$ cette fonction. La fonction

$$V(x,y) = w(x,y) + \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^{i=n-1} k_i v_i$$

---

[1] Ce problème est posé par M. Schwarz dans les *Monatsberichte*, p. 787, et résolu par lui dans les *Mathematische Annalen*, t. **21**, p. 157 et suiv.; mais sa solution repose sur le procédé alterné.

est la seule pouvant résoudre le problème. Inversement, on reconnaît qu'elle satisfait bien à toutes les conditions de l'énoncé.

Revenons maintenant à la différence $U - U'$. Si elle prend une valeur déterminée même aux points singuliers, elle a nécessairement pour expression, d'après ce qui précède,

$$V(x,y) = w(x,y) - \sum_{i=1}^{i=n-1} \left(\frac{\delta_i}{\alpha_i} + \frac{\delta'_i}{\alpha'_i} + \frac{\delta''_i}{\alpha''_i} + \ldots \right) v_i,$$

w étant déterminée sans ambiguïté, et, par suite,

$$U = V + U'.$$

Inversement, cette fonction est bien une solution du problème généralisé, ainsi qu'on s'en assure en remontant la chaîne des raisonnements.

17. Si l'on écrit tout au long la somme $V + U'$, on est amené à formuler, pour la construction de la fonction U, la règle suivante :

1° Traçons des coupures $C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}$; 2° choisissons, dans chaque ligne L_i, un point b_i ; 3° fixons, pour un point particulier de l'aire S_1, les valeurs de toutes les fonctions u et de toutes les fonctions v. Cela fait, l'expression

$$\frac{\delta_0}{\alpha_0} u_0 + \frac{\delta'_0}{\alpha'_0} u'_0 + \frac{\delta''_0}{\alpha''_0} u''_0 + \ldots$$
$$+ \sum_{i=1}^{i=n-1} \left[\frac{\delta_i}{\alpha_i} (u_i - v_i) + \frac{\delta'_i}{\alpha'_i} (u'_i - v_i) + \frac{\delta''_i}{\alpha''_i} (u''_i - v_i) + \ldots \right]$$

représente pour l'aire S une fonction ayant les propriétés de la fonction cherchée, ayant les mêmes discontinuités aux points singuliers, et ne différant de la fonction cherchée que par ses valeurs sur le bord. Par l'addition à l'expression précédente d'une fonction $w(x,y)$ harmonique dans S et continue sur s, déterminée d'ailleurs sans ambiguïté, on obtient une solution du problème. Et, sous cette forme, on voit bien le rôle des fonctions v_i. La fonction v_i est, pour chaque fonction $u_i, u'_i, \ldots$, une fonction *compensatrice ;* c'est-à-dire qu'elle fait disparaître la multiformité de la fonction u, sans toutefois introduire de nouvelles singularités sur le bord s.

Dans la construction que nous venons d'énoncer, on dispose arbitrairement des coupures, des points b_i, enfin des valeurs des fonctions u et v en un point particulier de l'aire. On pourrait être tenté de croire que la variation de ces conditions entraîne un changement dans la fonction U à laquelle on parvient. Il n'en est rien : car imaginons que, en choisissant ces conditions autrement que nous ne l'avons fait jusqu'ici, nous obtenions une nouvelle fonction U_1. La différence $U_1 - U'$, U' étant la même fonction que dans le numéro précédent, a évidemment une valeur déterminée même aux points singuliers; elle a donc pour expression V, d'après ce paragraphe. Donc U_1 n'est autre chose que U. Cette fonction déterminée sans ambiguïté par la construction qui précède, nous l'appellerons *fonction* U *relative aux valeurs données m*.

Mais ce qui n'est nullement prouvé, c'est qu'il n'existe pas une fonction T répondant au problème et telle que la différence $T - U'$ ne prenne pas de valeur déterminée aux points singuliers. Démontrer l'impossibilité de l'existence d'une telle fonction est une question difficile et à laquelle nous aurons l'occasion de revenir.

18. Voyons comment la fonction U se comporte dans le voisinage d'un point singulier A. On peut mettre son expression sous la forme

$$U(x,y) = U_1(x,y) + \frac{\delta}{\alpha} u(x,y),$$

$U_1(x,y)$ prenant en A une valeur bien déterminée. Par suite, la fonction U se comporte dans le voisinage du point A comme la fonction u, qui est une fonction élémentaire bien connue.

Ainsi la valeur vers laquelle tend U lorsque le point (x,y) tend vers A par un chemin intérieur à S dépend de ce chemin, ou, plus exactement, de la tangente At en A à ce chemin. Soit MAM′ le sens direct, AT, AT′ les deux demi-tangentes à AM et à AM′ ; appelons l' la valeur limite correspondant à AT′ ; à une direction At faisant avec AT′ un angle égal à $\beta' (0 \leqq \beta' \leqq \alpha)$ correspond la valeur limite

$$\lambda = l' + \frac{\beta'}{\alpha} \delta.$$

β' variant de o à α, on voit que cette valeur varie, toujours dans le même sens, de l' à $l' + \delta$. Elle reste donc toujours comprise entre ces deux valeurs limites ([1]).

On peut mettre l'expression précédente sous une forme plus symétrique en introduisant la valeur limite l relative à AT, et l'angle β que At fait avec AT. On a

$$l = l' + \delta, \qquad \beta + \beta' = \alpha,$$

et l'expression précédente s'écrit

$$l' + \frac{\beta'}{\alpha}(l - l') = l\left(1 - \frac{\beta}{\alpha}\right) + l'\left(1 - \frac{\beta'}{\alpha}\right).$$

Le théorème démontré au n° 3 pour une fonction harmonique dans S et continue sur s s'applique à la fonction U relative à des valeurs données m qui éprouvent des discontinuités. J'appelle encore g et k les limites supérieure et inférieure des valeurs données m. Chacun de ces nombres est, ou la valeur correspondant à un point non singulier de s, ou une des deux valeurs limites correspondant à un point singulier. Les valeurs de U dans S sont toutes plus petites que g et toutes plus grandes que k.

Raisonnons comme au n° 3. Appelons g' la limite supérieure des valeurs de U dans S et sur s. On voit tout d'abord que, *dans* S, on a $U < g'$. Il existe un point M situé dans S ou sur s tel que les valeurs de la fonction dans le voisinage de M aient encore g' pour limite supérieure, quelque restreint que soit ce voisinage. Ce point M est nécessairement sur s. Si c'est un point non singulier, g' est la valeur correspondant à ce point, et $g' = g$. Si M est un point singulier de s, g' est la plus grande des valeurs limites de U lorsqu'on tend vers M par les différents chemins possibles intérieurs à S. Mais, d'après ce que nous avons vu, ces valeurs limites appartiennent toutes à l'intervalle (l, l'). g' est donc le plus grand des deux nombres l, l', et l'on a encore $g' = g$, ce qui démontre le théorème.

19. Nous allons maintenant étendre aux fonctions U les résultats du n° 6. Je considère plusieurs de ces fonctions *ayant toutes les mêmes*

([1]) En particulier, si $\delta = 0$, λ est indépendant de β'.

points singuliers : $U_1, U_2, \ldots, U_n$. Je dis que leur somme est une nouvelle fonction U. En effet, lorsqu'on tend vers un point singulier A par un chemin quelconque L, la somme $U_1 + U_2 + \ldots + U_n$ tend vers la limite

$$\lambda = (l_1 + l_2 + \ldots + l_n)\left(1 - \frac{\beta}{\alpha}\right) + (l'_1 + l'_2 + \ldots + l'_n)\left(1 - \frac{\beta'}{\alpha}\right).$$

Soit U *la fonction* U coïncidant sur s avec $U_1 + U_2 + \ldots + U_n$. La différence $U_1 + U_2 + \ldots + U_n - U$ est harmonique dans S et prend la valeur zéro même aux points singuliers de s : elle est donc identiquement nulle dans S.

Soit maintenant une série

$$(1) \qquad U_1 + U_2 + U_3 + \ldots + U_n + \ldots$$

dont les termes sont des fonctions U ayant toutes les mêmes points singuliers. Je suppose que cette série converge uniformément dans S : on voit alors, comme au n° 6, qu'elle converge uniformément pour l'ensemble des points non singuliers de s. Réciproquement, si elle converge uniformément pour l'ensemble des points non singuliers de s, elle converge uniformément dans S : car la fonction

$$U_{n+1} + U_{n+2} + \ldots + U_{n+p}$$

est une fonction U.

Appelons U' la fonction que définit la série (1) pour l'intérieur de S. Cette fonction est harmonique dans S et prend en chaque point non singulier de s une valeur déterminée, somme de la série (1) en ce point. Considérons maintenant un point singulier A. Lorsqu'on tend vers ce point par un chemin L quelconque intérieur à S, les termes de la série (1) tendent vers des limites $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n, \ldots$, qui forment une série convergente, de somme λ. En particulier, les séries

$$l_1 + l_2 + \ldots + l_n + \ldots \quad \text{et} \quad l'_1 + l'_2 + \ldots + l'_n + \ldots$$

sont convergentes, et l'on a

$$\lambda = l\left(1 - \frac{\beta}{\alpha}\right) + l'\left(1 - \frac{\beta'}{\alpha}\right).$$

Je dis que, lorsqu'on tend vers le point A par le chemin L, U' tend vers λ. Car soit ε un nombre quelconque. La différence $U' - \lambda$, U' étant la valeur de la fonction en un point N de L, peut s'écrire

$$U' - \lambda = (S_n + R_n) - (\sigma_n + \rho_n) = (S_n - \sigma_n) + R_n - \rho_n.$$

On peut d'abord choisir n assez grand pour qu'on ait

$$|\rho_n| < \frac{\varepsilon}{3}; \qquad |R_n| < \frac{\varepsilon}{3},$$

quel que soit N ; puis on peut déterminer un cercle C de centre A tel que

$$|S_n - \sigma_n| < \frac{\varepsilon}{3},$$

pourvu que le point N de L soit dans ce cercle. On a donc, sous cette condition,

$$|U' - \lambda| < \varepsilon.$$

La fonction U' n'est donc autre chose que la fonction U relative aux valeurs sur s de la série (1). Car la différence $U - U'$ est harmonique dans S et prend la valeur zéro même aux points singuliers de s.

20. Pour un système donné de valeurs m, ne peut-il exister, outre la fonction U relative à ce système, une autre fonction T répondant au problème [1]? Pour répondre à cette question, on est conduit naturellement à considérer la différence $U - T = W$. Cette fonction est harmonique dans S, prend la valeur zéro en chaque point non singulier de s, enfin garde une valeur finie dans le voisinage de chaque point singulier. Démontrer qu'il ne peut exister de fonction T autre que la fonction U revient donc à faire voir qu'une fonction qui jouit de ces trois propriétés est forcément nulle dans S.

Il ne faudrait pas s'imaginer que la troisième propriété est une conséquence nécessaire des deux premières. Un exemple très simple va montrer qu'il y a des fonctions harmoniques dans une aire, s'annulant en chaque point non singulier du contour, et qui néanmoins croissent indéfiniment dans le voisinage d'un point singulier.

---

[1] Il n'est pas inutile de faire observer que jamais dans la suite nous ne nous appuierons sur les résultats contenus dans ce paragraphe.

Soit $z_1 = F(z)$ une fonction qui représente d'une manière conforme une aire S à connexion simple sur la moitié supérieure du plan des z_1. Posons

$$F(z) = P(x, y) + Q(x, y)\sqrt{-1}.$$

La fonction $Q(x, y)$ est harmonique dans S et prend la valeur zéro en chaque point de s, sauf au point A correspondant au point à l'infini du demi-plan. Ses valeurs dans S sont toutes positives, et, quelque grand que soit g, il existe dans S une courbe $Q(x, y) = g$: c'est une courbe fermée simple partant de A et y revenant. $Q(x, y)$ ne reste donc pas finie dans le voisinage de A.

Cette remarque faite, nous allons établir le théorème en question pour le cercle. Soient encore z_0 le centre du cercle et ρ son rayon, et posons

$$re^{i\varphi} = z - z_0.$$

Soit $u(x, y) = v(r, \varphi)$ une fonction harmonique dans S, et nulle en chaque point de s, sauf aux points correspondant aux valeurs φ_1, $\varphi_2, \ldots, \varphi_m$ de l'angle polaire, qu'on peut supposer comprises entre o et 2π. Soit enfin g une grandeur positive à laquelle $|u|$ reste inférieur.

r, φ étant les coordonnées polaires d'un point quelconque intérieur au cercle ($r < \rho$), il s'agit de démontrer que l'on a $v(r, \varphi) = 0$. A cet effet, j'intercale entre r et ρ un nombre fixe R_1, et j'appelle R un nombre variable assujetti à vérifier les inégalités $R_1 \leqq R < \rho$. On a, quel que soit R,

$$v(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{(R^2 - r^2)v(R, \psi)\,d\psi}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\psi - \varphi)}.$$

Je décompose ainsi cette intégrale :

$$\frac{1}{2\pi}\left[\int_0^{\varphi_1-\delta} + \int_{\varphi_1+\delta}^{\varphi_2-\delta} + \int_{\varphi_2+\delta}^{\varphi_3-\delta} + \ldots + \int_{\varphi_m+\delta}^{2\pi}\right]$$
$$+ \frac{1}{2\pi}\int_{\varphi_1-\delta}^{\varphi_1+\delta} + \frac{1}{2\pi}\int_{\varphi_2-\delta}^{\varphi_2+\delta} + \ldots + \frac{1}{2\pi}\int_{\varphi_m-\delta}^{\varphi_m+\delta}.$$

Soit ε un nombre positif quelconque. On peut disposer de δ de manière à rendre chacune des m dernières intégrales plus petite que $\frac{\varepsilon}{m+1}$, et sans qu'il soit nécessaire de restreindre le champ de la variation de R, car on a

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_{\varphi_i-\delta}^{\varphi_i+\delta}\frac{(R^2-r^2)\,v(R,\psi)\,d\psi}{R^2+r^2-2Rr\cos(\psi-\varphi)}\right| < \frac{g}{\pi}\,\frac{R+r}{R-r}\,\delta \leqq \frac{g}{\pi}\,\frac{R_1+r}{R_1-r}\,\delta.$$

Il suffit de déterminer δ par l'inégalité $\frac{g}{\pi}\frac{R_1+r}{R_1-r}\delta < \frac{\varepsilon}{m+1}\cdot$ δ étant ainsi déterminé, je considère la somme

$$\frac{1}{2\pi}\left[\int_0^{\varphi_1-\delta}+\int_{\varphi_1+\delta}^{\varphi_2-\delta}+\int_{\varphi_2+\delta}^{\varphi_3-\delta}+\ldots+\int_{\varphi_m+\delta}^{2\pi}\right].$$

On peut prendre pour R une valeur suffisamment voisine de ρ pour que le module de cette somme soit, lui aussi, inférieur à $\frac{\varepsilon}{m+1}\cdot$ Il suffit, pour s'en convaincre, d'observer qu'à chacune des intégrales composant cette somme correspond un arc de s le long duquel la fonction v tend *uniformément* vers zéro.

Les quantités δ et le nombre R étant ainsi choisis, la somme de toutes nos intégrales a un module plus petit que ε. Mais cette somme n'est autre chose que $v(r,\varphi)$. D'ailleurs ε est aussi petit qu'on veut. Donc $v(r,\varphi)=0$.

Le principe de cette démonstration a été donné par M. Schwarz [1].

Le même théorème s'étend à toute aire S_1 représentable sur le cercle S. Soit $z_1=F(z)=P(x,y)+\sqrt{-1}\,Q(x,y)$ une fonction qui représente S sur S_1. Soit d'ailleurs $u_1(x_1,y_1)$ une fonction harmonique dans S_1 et prenant sur s_1 la valeur zéro, sauf aux points A_1, B_1, C_1, ..., dans le voisinage desquels elle reste simplement finie. La fonction $u_1[P(x,y), Q(x,y)]=u(x,y)$ est harmonique dans S et prend en chaque point de s la valeur zéro, sauf aux points A, B, C, ..., dans le voisinage desquels elle reste simplement finie. Donc la fonction u a la valeur zéro en chaque point de S. Par suite, la fonction u_1 a la valeur zéro en chaque point de S_1.

Enfin, dans le cas du cercle, il importe de faire la remarque suivante :

---

[1] *Journal de Crelle*, t. 74, § 7. L'éminent géomètre fait la démonstration pour un exemple particulier, en ajoutant qu'elle s'étend sans peine au cas général.

La fonction qui résout le problème de Dirichlet classique a été donnée par l'intégrale

$$I = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{(\rho^2 - r^2) f(\psi)\, d\psi}{\rho^2 + r^2 - 2\rho r \cos(\psi - \varphi)}.$$

La fonction qui résout le problème généralisé est encore représentée par cette intégrale; seulement ici $f(\varphi)$ éprouve des discontinuités pour les valeurs $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_m$ de la variable. En effet, la fonction définie par cette intégrale pour l'intérieur du cercle satisfait à toutes les conditions de l'énoncé : elle est harmonique dans S; elle prend la valeur $f(\varphi)$ en chaque point non singulier de s, car on montre, en reprenant le raisonnement de M. Schwarz, qu'à tout nombre positif ε on peut faire correspondre un nombre positif η tel qu'on ait $|I - f(\varphi)| < \varepsilon$, sous la condition $\rho - r < \eta$, et cela pour toutes les valeurs de φ correspondant à un arc de s ne renfermant pas de points singuliers. Enfin le calcul fait à la fin du n° 4, et qui s'applique encore au cas actuel, nous apprend que cette fonction ne croît pas indéfiniment dans le voisinage d'un point singulier.

DEUXIÈME PARTIE.

1. Nous avons vu que l'on sait résoudre le problème de Dirichlet pour toute aire S représentable sur la surface d'un cercle. De là une manière indirecte d'aborder le problème de Dirichlet, dans le cas où l'aire proposée est simplement connexe. Mais, en général, cette voie est beaucoup plus compliquée que l'autre et ne peut guère servir que pour des aires très particulières. C'est ce que nous allons montrer en nous occupant spécialement du cas où S est *un polygone limité par des lignes droites*.

Cette limitation rectiligne nous conduit à remplacer le cercle par le demi-plan Σ (*voir* le n° 12 de la première Partie). Nous avons vu que ce demi-plan est représentable sur lui-même d'une infinité de façons, contenues dans la formule

$$(1) \qquad \zeta_1 = \frac{a\zeta + b}{c\zeta + d} \ (ad - bc > 0).$$

Soient α, β, γ trois nombres réels satisfaisant à l'une des trois inégalités suivantes :

$$\alpha < \beta < \gamma \quad \text{ou} \quad \beta < \gamma < \alpha \quad \text{ou} \quad \gamma < \alpha < \beta.$$

Si α_1, β_1, γ_1 sont trois autres nombres réels rangés par ordre de grandeur croissante, il y a, parmi les fonctions renfermées dans la formule (1), une fonction et une seule qui fasse correspondre aux valeurs α, β, γ de ζ les valeurs α_1, β_1, γ_1 de ζ_1. De là résulte que, s'il est possible de représenter une aire S sur Σ, on peut faire correspondre à trois points A, B, C de s les points de σ d'abscisses α_1, β_1, γ_1 ; pourvu que, si l'on part de A pour décrire s dans le sens direct, on rencontre d'abord B, puis C. En outre, la représentation conforme de S sur Σ, dans ces conditions, n'est possible que d'une seule manière.

Cela étant, soit S un polygone de n côtés dont le contour s est supposé former une ligne fermée simple. Soient A, B, C, ..., I, K les sommets de ce polygone dans l'ordre où on les rencontre quand on marche dans le sens direct. Soient $\alpha\pi$, $\beta\pi$, $\gamma\pi$, ..., $\iota\pi$, $\varkappa\pi$ les angles intérieurs du polygone : $\alpha\pi$ est le plus petit angle positif de AB avec AK, $\beta\pi$ le plus petit angle positif de BC avec BA, etc. Chacun de ces nombres α, β,... est compris entre 0 et 2, et aucun d'eux n'est égal à 1. On a de plus la relation

$$\alpha + \beta + \gamma + \ldots + \iota + \varkappa = n - 2.$$

Pour préciser le problème, proposons-nous de faire correspondre aux sommets K, A, B les points de l'axe réel d'abscisses $-\infty$, 0, 1.

Enfin il suffit de résoudre le problème pour une position particulière du polygone dans son plan. Car si $f(z)$ est la fonction qui résout le problème pour cette position particulière, $f(e^{i\varphi}z + \lambda + \mu i)$ est l'expression générale des fonctions répondant à la question pour toutes les positions possibles du polygone. Faisons coïncider le sommet A avec l'origine, puis dirigeons le côté AB dans le sens du demi-axe des abscisses positives. Il n'y a plus alors aucune indétermination.

2. Σ étant l'aire du demi-plan, S l'aire du polygone, on démontre que, s'il existe une fonction représentant Σ sur S dans les conditions indiquées, elle est nécessairement de la forme

$$(1)\qquad P = M\int_0^\omega \omega^{\alpha-1}(1-\omega)^{\beta-1}(1-s\omega)^{\gamma-1}(1-t\omega)^{\delta-1}\ldots(1-z\omega)^{\iota-1}d\omega,$$

avec

$$(2)\qquad M > 0 \quad \text{et} \quad 1 > s > t > u > v > \ldots > x > y > z > 0.$$

La fonction sous le signe $\int$ est parfaitement définie par la condition que chaque facteur $\omega^{\alpha-1}$, $(1-\omega)^{\beta-1}$, ... soit positif pour ω compris entre 0 et 1. On voit sans peine alors que la fonction sous le signe $\int$ est holomorphe dans Σ et prend une valeur déterminée en chaque point de σ, sauf aux points

$$0,\ 1,\ \frac{1}{s},\ \frac{1}{t},\ \ldots,\ \frac{1}{z},$$

où elle peut devenir infinie. La fonction P de ω, elle, est holomorphe dans toute l'aire Σ, et prend une valeur déterminée en chaque point de σ, même au point à l'infini.

Je n'ai pas à rappeler ici comment on arrive à l'expression de cette fonction ([1]). Ce qui nous importe, c'est de voir s'il est possible de déterminer les constantes M, $-s$, t, ..., z, au nombre de $n-2$, satisfaisant aux inégalités (2), de manière que la fonction (1) représente le demi-plan Σ sur le polygone donné S.

Prenons d'abord pour M, $-s$, t, ..., z un système quelconque de $n-2$ valeurs vérifiant les inégalités (2), et voyons quelle est la ligne s_1 que la fonction (1) fait correspondre à σ.

Faisons partir ω de l'origine et imaginons qu'il aille dans le sens direct. Le point P part aussi de l'origine A_1 et se meut sur l'axe des abscisses positives, de gauche à droite. ω arrivant au point 1, P arrive en un certain point B_1, et l'on a

$$A_1B_1 = M\int_0^1 \omega^{\alpha-1}(1-\omega)^{\beta-1}(1-s\omega)^{\gamma-1}\ldots(1-z\omega)^{\iota-1}d\omega.$$

([1]) On pourra consulter à cet égard le Chapitre que, dans ses *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, M. Darboux consacre à la représentation conforme.

ω décrivant la portion de l'axe réel allant du point 1 au point $\frac{1}{s}$, P décrit un nouveau segment rectiligne B_1C_1. Le plus petit angle positif de B_1C_1 avec B_1A_1 est $\beta\pi$: B_1C_1 et BC sont donc parallèles et de même sens. Enfin on a

$$B_1C_1 = M\int_1^{\frac{1}{s}} \omega^{\alpha-1}(\omega-1)^{\beta-1}(1-s\omega)^{\gamma-1}\ldots(1-z\omega)^{\iota-1}d\omega.$$

ω allant de $\frac{1}{s}$ à $\frac{1}{t}$, P décrit un segment rectiligne C_1D_1 parallèle à CD et de même sens. La longueur de cette ligne a pour expression

$$C_1D_1 = M\int_{\frac{1}{s}}^{\frac{1}{t}} \omega^{\alpha-1}(\omega-1)^{\beta-1}(s\omega-1)^{\gamma-1}(1-t\omega)^{\delta-1}\ldots(1-z\omega)^{\iota-1}d\omega.$$

Continuons ainsi, et arrivons tout de suite à l'intervalle de $\frac{1}{y}$ à $\frac{1}{z}$. P décrit un segment rectiligne L_1I_1, parallèle à LI et de même sens, et dont la longueur a pour expression

$$L_1I_1 = M\int_{\frac{1}{y}}^{\frac{1}{z}} \omega^{\alpha-1}(\omega-1)^{\beta-1}(s\omega-1)^{\gamma-1}\ldots(y\omega-1)^{\theta-1}(1-z\omega)^{\iota-1}d\omega.$$

Enfin, ω s'éloignant à l'infini, P décrit un segment I_1K_1 parallèle à IK et de même sens [1]. De même, ω allant de 0 à ∞ dans le sens indirect, P décrit A_1K_1 parallèle à AK et de même sens. En résumé, on voit que s_1 est une ligne brisée fermée de n côtés ayant les mêmes angles que le contour s du polygone S, à condition de prendre le plus petit angle positif de chaque côté avec le précédent.

Pour que la ligne s_1 coïncide avec la ligne s, il faut évidemment que les $n-2$ longueurs dont nous avons écrit les expressions soient égales respectivement aux longueurs AB, BC, CD, ..., LI. Ces conditions sont

---

[1] Nous aurons besoin dans la suite de l'expression de I_1K_1 : c'est

$$M\int_{\frac{1}{z}}^{\infty} \omega^{\alpha-1}(\omega-1)^{\beta-1}(s\omega-1)^{\gamma-1}\ldots(z\omega-1)^{\iota-1}d\omega.$$

d'ailleurs suffisantes : car, s'il en est ainsi, les $n-1$ sommets A_1, B_1, C_1, ..., I_1 coïncident avec A, B, C, ..., I : donc I_1K_1 prend la direction IK; de même A_1K_1 prend la direction AK : donc K_1 coïncide aussi avec K.

Ainsi les conditions nécessaires et suffisantes pour que s_1 coïncide avec s sont les suivantes :

$$(3)\quad \left\{\begin{array}{l} M\displaystyle\int_0^1 \omega^{\alpha-1}(1-\omega)^{\beta-1}(1-s\omega)^{\gamma-1}\ldots(1-z\omega)^{\iota-1}d\omega = AB, \\ M\displaystyle\int_1^{\frac{1}{s}} \omega^{\alpha-1}(\omega-1)^{\beta-1}(1-s\omega)^{\gamma-1}\ldots(1-z\omega)^{\iota-1}d\omega = BC, \\ M\displaystyle\int_{\frac{1}{s}}^{\frac{1}{t}} \omega^{\alpha-1}(\omega-1)^{\beta-1}(s\omega-1)^{\gamma-1}(1-t\omega)^{\delta-1}\ldots(1-z\omega)^{\iota-1}d\omega = CD, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ M\displaystyle\int_{\frac{1}{y}}^{\frac{1}{z}} \omega^{\alpha-1}(\omega-1)^{\beta-1}(s\omega-1)^{\gamma-1}\ldots(y\omega-1)^{\theta-1}(1-z\omega)^{\iota-1}d\omega = LI. \end{array}\right.$$

3. La résolution directe des équations (3), à laquelle se trouve ramené le problème, ne paraît pas pouvoir se faire facilement. Voici l'artifice qu'emploie M. Schläfli [1]. Il considère les premiers membres des équations (3) comme des fonctions de M, $-s, t, u, v, \ldots, x, y, z$ prises pour variables indépendantes. Au lieu d'étudier ces fonctions elles-mêmes, il les désigne par de nouvelles lettres, et il considère les fonctions inverses, c'est-à-dire les fonctions M, $-s$, t, ..., z des nouvelles lettres définies par les équations (3). Si le problème est possible, les valeurs de ces nouvelles fonctions pour les valeurs AB, BC, CD, ..., LI des variables seront les valeurs cherchées.

Une première condition pour que l'inversion puisse se faire est que le déterminant fonctionnel des $n-2$ fonctions de M, $-s$, t, ..., z ne soit pas nul. Supposons donc que l'on ait

$$(2)\qquad 1 > s > t > \ldots > z > 0,$$

et posons avec M. Schläfli, dont nous avons du reste conservé toutes les

(1) *Zur Theorie der conformen Abbildung* (*Journal de Crelle*, t. 78).

notations,

$$(\alpha\beta) = \int_0^1 \omega^{\alpha-1}(1-\omega)^{\beta-1}(1-s\omega)^{\gamma-1}\ldots(1-z\omega)^{\iota-1}d\omega,$$

$$(\beta\gamma) = \int_1^{\frac{1}{s}} \omega^{\alpha-1}(\omega-1)^{\beta-1}(1-s\omega)^{\gamma-1}\ldots(1-z\omega)^{\iota-1}d\omega,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$(\theta\iota) = \int_{\frac{1}{y}}^{\frac{1}{z}} \omega^{\alpha-1}(\omega-1)^{\beta-1}\ldots(y\omega-1)^{\theta-1}(1-z\omega)^{\iota-1}d\omega.$$

Nous avons là $n-2$ fonctions bien définies des $n-3$ variables indépendantes $s, t, \ldots, z$ satisfaisant aux inégalités (2). Il s'agit de montrer que le déterminant

$$\Delta[(\alpha\beta),(\beta\gamma),\ldots,(\theta\iota)] = \begin{vmatrix} (\alpha\beta) & \frac{\partial(\alpha\beta)}{\partial s} & \frac{\partial(\alpha\beta)}{\partial t} & \ldots & \frac{\partial(\alpha\beta)}{\partial z} \\ (\beta\gamma) & \frac{\partial(\beta\gamma)}{\partial s} & \frac{\partial(\beta\gamma)}{\partial t} & \ldots & \frac{\partial(\beta\gamma)}{\partial z} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (\theta\iota) & \frac{\partial(\theta\iota)}{\partial s} & \frac{\partial(\theta\iota)}{\partial t} & \ldots & \frac{\partial(\theta\iota)}{\partial z} \end{vmatrix}$$

est différent de zéro. C'est exclusivement à démontrer ce point qu'est consacré le Mémoire de M. Schläfli, dont je donne ici une analyse rapide.

I. Parmi les fonctions de $s, t, \ldots, z$ dont nous avons écrit les expressions, la plus simple est $(\alpha\beta)$, parce que les limites de l'intégrale qui la définit sont constantes. M. Schläfli (¹) démontre que cette fonction $(\alpha\beta)$ est une intégrale d'un certain système d'équations aux dérivées partielles du second ordre, linéaires et homogènes. Voici ces équations résolues par rapport aux dérivées partielles du second ordre :

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial s^2} &= \left(\frac{\alpha+\gamma-2}{s} + \frac{\beta+\gamma-2}{s-1} + \frac{\delta-1}{s-t} + \ldots + \frac{\iota-1}{s-z}\right)\frac{\partial f}{\partial s} \\ &\quad + \frac{1-\gamma}{s(s-1)}\left[\frac{t(t-1)}{s-t}\frac{\partial f}{\partial t} + \ldots + \frac{z(z-1)}{s-z}\frac{\partial f}{\partial z} - \alpha f\right], \\ \frac{\partial^2 f}{\partial s\,\partial t} &= \frac{1-\delta}{s-t}\frac{\partial f}{\partial s} - \frac{1-\gamma}{s-t}\frac{\partial f}{\partial t} \quad (^2). \end{aligned}\right.$$

(¹) N^os 3, 4, 5.

(²) Le système (4) renferme $n-3$ équations du premier type et $\frac{(n-3)(n-4)}{2}$ équations du second.

L'étude de l'intégrale générale (¹) de ce système est très facile. Soit $s_0, t_0, \ldots, z_0$ un sytème de valeurs des variables satisfaisant aux inégalités $1 > s_0 > t_0 > \ldots > z_0 > 0$. Soient d'ailleurs f_0, $\left(\frac{\partial f}{\partial s}\right)_0$, $\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_0$, $\ldots$, $\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_0$ $n-2$ quantités arbitraires. Le système (4) admet une intégrale, et une seule, régulière dans le voisinage du système $(s_0, t_0, \ldots, z_0)$, prenant pour ce système de valeurs la valeur f_0, enfin dont les dérivées prennent, pour ce même système de valeurs, les valeurs $\left(\frac{\partial f}{\partial s}\right)_0$, $\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_0$, $\ldots$, $\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_0$. Le développement de cette fonction en série de Taylor, dans le voisinage de $(s_0, t_0, \ldots, z_0)$, est de la forme

$$f = f_0 f_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial s}\right)_0 f_2 + \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_0 f_3 + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_0 f_{n-2},$$

et les fonctions $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_{n-2}$ sont linéairement indépendantes.

Soient maintenant $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_{n-2}$ $n-2$ intégrales particulières quelconques. Le déterminant $\Delta[f_1, f_2, \ldots, f_{n-2}]$ peut se mettre sous la forme (²)

$$C[f_1, f_2, \ldots, f_{n-2}] \times K,$$

avec

$$\begin{aligned} K = {} & s^{\alpha+\gamma-2} t^{\alpha+\delta-2} \ldots z^{\alpha+\iota-2} \\ & \times (1-s)^{\beta+\gamma-2}(1-t)^{\beta+\delta-2} \ldots (1-z)^{\beta+\iota-2} \\ & \times (s-t)^{\gamma+\delta-2} \ldots (s-z)^{\gamma+\iota-2} \\ & \times \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & \times (y-z)^{\theta+\iota-2}. \end{aligned}$$

Quant à $C[f_1, f_2, \ldots, f_{n-2}]$, c'est un facteur constant qui change quand on passe d'un système de fonctions intégrales à un autre. On voit que, les variables $s, t, \ldots, z$ vérifiant toujours les inégalités (2), K a une valeur essentiellement positive. Donc ou bien C n'est pas nul, et alors Δ est essentiellement différent de zéro; ou bien C est nul, et alors Δ est nul identiquement. Ce dernier cas se présentera toutes les fois que les intégrales particulières $f_1, f_2, \ldots, f_{n-2}$ ne seront pas linéairement

(¹) N° 5.
(²) N° 6.

indépendantes, et plus généralement lorsqu'elles seront liées par une relation *homogène* d'un degré quelconque.

II. Après avoir fait cette étude préliminaire du système (4), M. Schläfli revient aux fonctions $(\alpha\beta)$, $(\beta\gamma)$, ..., $(\theta\iota)$. C'est là la partie la plus originale du Mémoire; son auteur y emploie des artifices extrêmement ingénieux, mais que nous devons renoncer à exposer ici. Nous savons déjà que $(\alpha\beta)$ est une intégrale du système (4); M. Schläfli étend la même propriété aux fonctions $(\beta\gamma)$, ..., $(\theta\iota)$ (¹), de sorte que l'on a

$$\Delta[(\alpha\beta), (\beta\gamma), \ldots, (\theta\iota)] = C[(\alpha\beta), (\beta\gamma), \ldots, (\theta\iota)] \times K.$$

De plus, un calcul très long et très compliqué (²) donne

$$C[(\alpha\beta), (\beta\gamma), \ldots, (\theta\iota)] = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\ldots\Gamma(\iota)}{(-1)^{n-3}\Gamma(1-\varkappa)}.$$

La valeur de la constante n'est pas nulle. Il est ainsi démontré que, sous les conditions (2), le déterminant Δ est différent de zéro.

4. Tels sont les principaux résultats contenus dans le Mémoire de M. Schläfli. Complétons ces considérations par quelques remarques simples. Dans ce qui précède, les fonctions $(\alpha\beta)$, $(\beta\gamma)$, ..., $(\theta\iota)$ n'ont été définies que pour les valeurs réelles des variables; mais il est facile maintenant de généraliser leur définition. Car ces $n-2$ fonctions, étant des intégrales particulières du système (4), sont développables par la série de Taylor dans le voisinage de tout système $(s_0, t_0, \ldots, z_0)$ vérifiant les inégalités $1 > s_0 > t_0 > \ldots > z_0 > 0$. Ce sont ces développements qui serviront de définition à nos fonctions pour le cas des variables complexes. Appelons $f_1, f_2, \ldots, f_{n-2}$ les fonctions ainsi généralisées, et posons, en changeant un peu la signification de $(\alpha\beta)$, $(\beta\gamma)$, ..., $(\theta\iota)$,

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} (\alpha\beta) &= \mathrm{M}f_1(s, t, \ldots, z),\\ (\beta\gamma) &= \mathrm{M}f_2(s, t, \ldots, z),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ (\theta\iota) &= \mathrm{M}f_{n-2}(s, t, \ldots, z). \end{aligned}\right.$$

(¹) N° 7.
(²) N° 8.

Soit $(M_0, -s_0, t_0, u_0, \ldots, z_0)$ un système de valeurs des variables vérifiant les inégalités (2). Pour ce système, les valeurs $(\alpha\beta)_0$, $(\beta\gamma)_0, \ldots, (\theta\iota)_0$ des fonctions sont positives; ces fonctions sont régulières dans le voisinage de ce système de valeurs; enfin leur déterminant fonctionnel est $M^{n-3}\Delta[f_1, f_2, \ldots, f_{n-2}]$: il est différent de zéro pour $M_0, -s_0, t_0, \ldots, z_0$. Par suite, on peut faire l'inversion pour ce système de valeurs des variables. Considérons donc les fonctions inverses $M, -s, t, \ldots, z$ de $(\alpha\beta), (\beta\gamma), \ldots, (\theta\iota)$. Elles sont représentées par des séries procédant suivant les puissances de $(\alpha\beta)-(\alpha\beta)_0$, $(\beta\gamma)-(\beta\gamma)_0, \ldots, (\theta\iota)-(\theta\iota)_0$, et qui convergent tant que les modules de ces différences sont respectivement inférieurs à des quantités $R_1, R_2, \ldots, R_{n-2}$. Parmi les valeurs de $(\alpha\beta), (\beta\gamma), \ldots, (\theta\iota)$ comprises dans la région de convergence, celles qui ont de l'intérêt pour nous sont les valeurs positives. Pour un système de valeurs positives des variables comprises dans la région de convergence, les fonctions M, $-s, t, \ldots, z$ ont des valeurs réelles. La question est de savoir si ces valeurs sont encore liées par les inégalités (2). Il est clair que ces inégalités sont vérifiées dans le voisinage immédiat de $(\alpha\beta)_0, (\beta\gamma)_0, \ldots, (\theta\iota)_0$. Tant qu'elles sont vérifiées, on a entre les valeurs des variables $(\alpha\beta), \ldots$ et celles des fonctions $M, -s, \ldots$ les relations (5). Cela posé, soit $(\alpha\beta)_1, (\beta\gamma)_1, \ldots, (\theta\iota)_1$ un système de valeurs positives des variables appartenant à la région de convergence et tel que, pour $(\alpha\beta)$ compris entre $(\alpha\beta)_0$ et $(\alpha\beta)_1$, pour $(\beta\gamma)$ compris entre $(\beta\gamma)_0$ et $(\beta\gamma)_1$, etc., les inégalités (2) soient vérifiées. A ce système de valeurs des variables correspond pour les fonctions un système de valeurs M_1, $-s_1, t_1, \ldots, z_1$. Nous nous proposons d'examiner si ces valeurs satisfont encore aux inégalités (2); autrement dit, s'il est possible que l'on ait $M_1 = 0$, ou bien l'une des égalités

$$1 = s_1, \quad s_1 = t_1, \quad \ldots, \quad y_1 = z_1, \quad z_1 = 0.$$

Ce qui nous guidera dans cet examen, c'est la remarque suivante: $M, -s, t, \ldots, z$ tendant respectivement vers $M_1, -s_1, t_1, \ldots, z_1$, les seconds membres des relations (5) tendent vers $(\alpha\beta)_1, (\beta\gamma)_1, \ldots, (\theta\iota)_1$. Ceci montre immédiatement l'impossibilité de l'égalité $M_1 = 0$, car alors $(\alpha\beta)_1, (\beta\gamma)_1, \ldots, (\theta\iota)_1$ seraient tous nuls. Passons à l'égalité

$s_1 = 1$. Dans cette hypothèse, on a

$$(\alpha\beta)_1 = M_1 \int_0^1 \omega^{\alpha-1}(1-\omega)^{\beta+\gamma-2}(1-t_1\omega)^{\delta-1}\ldots(1-z_1\omega)^{\iota-1}\,d\omega,$$

$$(\beta\gamma)_1 = M_1 \int_1^1 \omega^{\alpha-1}(1-\omega)^{\beta+\gamma-2}(1-t_1\omega)^{\delta-1}\ldots(1-z_1\omega)^{\iota-1}\,d\omega.$$

Pour que la première intégrale ait un sens, il faut que $\beta+\gamma$ soit plus grand que 1; mais alors la seconde intégrale est nulle, ce qui est contraire à l'hypothèse. Ainsi on ne peut avoir $s_1 = 1$. On démontrera de même l'impossibilité des égalités $s_1 = t_1, \ldots, y_1 = z_1$.

Enfin supposons $z_1 = 0$. On a, dans cette hypothèse,

$$(\theta\iota)_1 = M_1 \int_{\frac{1}{y_1}}^{\infty} \omega^{\alpha-1}(\omega-1)^{\beta-1}(s_1\omega-1)^{\gamma-1}\ldots(y_1\omega-1)^{\theta-1}\,d\omega.$$

La condition pour que cette intégrale ait un sens est

$$1-\alpha+1-\beta+1-\gamma+\ldots+1-\theta > 1$$

ou

$$\alpha+\beta+\gamma+\ldots+\theta < n-3,$$

ce qui, en vertu de l'égalité $\alpha+\beta+\gamma+\ldots+\iota+\varkappa = n-2$, peut s'écrire

$$\iota+\varkappa > 1.$$

Voyons ce que devient, dans cette hypothèse, la fonction P de ω considérée au n° 2. Elle s'écrit

$$P_1 = M_1 \int_0^{\omega} \omega^{\alpha-1}(1-\omega)^{\beta-1}(1-s_1\omega)^{\gamma-1}\ldots(1-y_1\omega)^{\theta-1}\,d\omega.$$

Elle est encore holomorphe dans le demi-plan Σ et prend une valeur déterminée en chaque point de σ, même au point à l'infini; mais la ligne brisée qu'elle fait correspondre à l'axe réel σ se compose de $n-1$ côtés seulement. Les $n-2$ premiers de ces côtés sont $(\alpha\beta)_1$, $(\beta\gamma)_1, \ldots, (\theta\iota)_1$, et les $n-2$ premiers angles sont, comme dans le polygone proposé, $\alpha\pi, \beta\pi, \ldots, \theta\pi$. Ainsi les nombres $(\alpha\beta)_1, (\beta\gamma)_1, \ldots, (\theta\iota)_1$ satisfont à cette condition, que si l'on construit une ligne brisée $A_1B_1C_1\ldots I_1$ ayant ces longueurs pour côtés et pour angles $\beta\pi, \gamma\pi, \ldots, \theta\pi$, la ligne menée par le point A_1 de manière à faire avec A_1B_1 un angle $\alpha\pi$ vient passer par le point I_1. On peut encore exprimer ce fait en disant qu'il y a une ligne brisée fermée de n côtés ayant les angles du polygone proposé et dont les $n-2$ premiers côtés ont pour longueurs $(\alpha\beta)_1$, $(\beta\gamma)_1$, ..., $(\theta\iota)_1$, mais que le $(n-1)^{\text{ième}}$ côté de cette ligne est évanouissant.

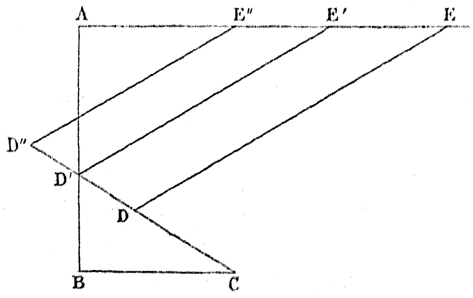
Cherchons maintenant à parvenir au polygone proposé, dont nous désignerons le contour par L. D'après le n° 2, au système de valeurs $(M_0, -s_0, t_0, \ldots, z_0)$ correspond une ligne brisée fermée L_0 de n côtés, ayant les mêmes angles que L, et dont les $n-2$ premiers côtés ont pour longueurs $(\alpha\beta)_0$, $(\beta\gamma)_0$, ..., $(\theta\iota)_0$. On peut admettre que, $(\alpha\beta)_1$, $(\beta\gamma)_1$, ... étant $n-2$ nombres quelconques compris respectivement entre $(\alpha\beta)_0$ et AB, $(\beta\gamma)_0$ et BC, etc., il y a une ligne brisée fermée de n côtés, dont aucun côté n'est évanouissant, ayant les angles du polygone proposé, et dont les $n-2$ premiers côtés ont pour longueurs $(\alpha\beta)_1$, $(\beta\gamma)_1$, ... Si les lignes L_0 et L ne remplissaient pas cette condition, on intercalerait entre L_0 et L des lignes intermédiaires telles que, pour deux lignes consécutives quelconques, la condition fût remplie. Si maintenant nous considérons les fonctions inverses, nous voyons que, pour tout système $(\alpha\beta)$, $(\beta\gamma)$, ... de valeurs positives des variables comprises respectivement entre $(\alpha\beta)_0$ et AB, $(\beta\gamma)_0$ et BC, ..., et situées d'ailleurs dans la région de convergence, les valeurs des fonctions satisfont nécessairement aux inégalités (2). La fonction P de ω correspondante fait correspondre à l'axe réel σ la ligne brisée de n côtés ayant les angles donnés et pour longueurs des $n-2$ premiers côtés $(\alpha\beta)$, $(\beta\gamma)$, ... Si, en particulier, le système AB, BC, ... est compris dans la région de convergence, les valeurs correspondantes des fonctions résolvent le problème. Au cas contraire, nous partirons d'un système $(\alpha\beta)_1$, $(\beta\gamma)_1$, ... de valeurs comprises respectivement entre $(\alpha\beta)_0$ et AB, etc., et appartenant à la région de convergence; nous répéterons sur ces valeurs et les valeurs correspondantes M_1, $-s_1$, t_1, ... ce qui a été fait sur $(\alpha\beta)_0$, $(\beta\gamma)_0$, ... et les valeurs M_0, $-s_0$, t_0, ... Nous continuerons ainsi, et à chaque opération nous nous serons rapprochés de la ligne brisée L.

5. Mais ce qui n'est pas prouvé par le raisonnement précédent, c'est que, au bout d'un nombre limité de telles opérations, nous arriverons

à avoir une région de convergence à laquelle appartiendront les valeurs AB, BC, ..., LI. On peut craindre, en effet, qu'il y ait entre le système initial $[(\alpha\beta)_0, (\beta\gamma)_0, \ldots]$ et le système (AB, BC, ...) un système intermédiaire $[(\alpha\beta)_1, (\beta\gamma)_1, \ldots]$ critique pour les fonctions inverses; ou encore, s'il n'en est pas ainsi, que le système (AB, BC, ...) lui-même soit un système critique. Dans le premier cas, on ne pourra pas approcher autant qu'on voudra du polygone donné; dans le second cas, on pourra bien en approcher autant qu'on voudra, mais on ne pourra pas l'atteindre.

Cette difficulté sera évidemment surmontée, si l'on parvient à faire voir qu'il n'y a pas de système $[(\alpha\beta), (\beta\gamma), \ldots, (\theta\iota)]$ de valeurs positives qui soit critique pour les fonctions inverses. Mais un peu de réflexion fait comprendre qu'une telle proposition n'est nullement conforme à la réalité. Considérons de nouveau une fonction P de ω du genre de celles dont il a été question dans le n° 2. La ligne brisée que cette fonction fait correspondre à l'axe réel σ n'est pas nécessairement simple : elle peut se couper elle-même. Mais elle est assujettie à une condition qui a été énoncée dans le n° 7 de la première Partie : c'est que, si l'on considère la partie de cette ligne d'où l'on peut aller à l'infini sans passer de nouveau par un point de la ligne, cette partie doit limiter une région du plan *connexe*, c'est-à-dire composée d'une seule aire, et non de plusieurs aires séparées les unes des autres.

La figure ci-jointe donne un exemple de lignes ne satisfaisant pas à



cette condition : telles sont les lignes ABCD′E′, ABCD″E″, limitant la première *deux*, la seconde *trois* triangles séparés.

Ceci posé, il va nous être facile de mettre en évidence l'existence forcée de systèmes de valeurs critiques. Imaginons qu'on ait déterminé les constantes pour la ligne ABCDE ; prenons cette ligne pour point de départ, et, des trois côtés AB, BC, CD, faisons varier seulement le troisième. Il est certain, pour les raisons que nous avons dites, que nous ne pourrons arriver à la valeur CD″; il y a donc à coup sûr, entre CD et CD″, une valeur critique. Cette valeur est au plus égale à CD′.

Il est vrai que l'on peut s'arranger de manière qu'entre L_0 et L il n'y ait pas de ligne intermédiaire présentant cette impossibilité géométrique, de sorte qu'on sera ramené à prouver qu'il ne peut y avoir d'autres systèmes critiques que ceux qui donnent une transition de lignes brisées possibles à des lignes brisées impossibles. Mais la question ainsi posée, difficile à traduire algébriquement, ne semble pas simple à résoudre dans l'état actuel de la Science.

Remarque. — On peut envisager la question à un autre point de vue. Des considérations très générales, dont il sera question plus loin, ont permis à M. Schwarz d'énoncer, comme cas très particulier, la possibilité de la représentation d'un polygone quelconque sur un demi-plan. Si l'on se propose d'obtenir effectivement cette représentation, on pourra procéder comme nous venons de l'indiquer, en ayant bien soin d'éviter et les polygones à côtés évanouissants et les lignes brisées géométriquement impossibles, et l'on sera sûr de n'être pas arrêté en chemin. C'est ce qui fait que, malgré leur imperfection comme mode de démonstration, les considérations précédentes peuvent compléter utilement, dans le cas du polygone, la théorie générale que nous abordons maintenant.

TROISIÈME PARTIE.

1. Nous venons de voir à quelles difficultés on a affaire et en présence de quelles complications on se trouve lorsqu'on essaye de résoudre le problème de Dirichlet pour un polygone en cherchant à

représenter celui-ci sur un demi-plan. Ce sont encore des considérations de représentation conforme, mais jointes à d'autres plus générales, qui ont permis à M. Schwarz, de la manière la plus élémentaire, de résoudre le problème pour tout polygone limité par un nombre fini d'*arcs réguliers de lignes analytiques*. Il y a plus : on n'est pas arrêté à la connexion simple, et l'on peut considérer une aire dont le contour est formé par un nombre quelconque de tels polygones.

Il importe avant tout de préciser ce que nous entendrons par un arc régulier de ligne analytique (1). Considérons une série entière, ordonnée suivant les puissances de $t - t_1$, t_1 *étant un nombre réel, et ayant des coefficients tous réels,*

$$a_0 + a_1(t - t_1) + a_2(t - t_1)^2 + \dots.$$

Cette série est convergente dans un certain cercle ayant le point t_1 pour centre. C'est un élément fonctionnel d'une certaine fonction analytique de t. Si l'on cherche à l'étendre analytiquement le long de l'axe réel, on sera en général arrêté à deux valeurs de t, situées de part et d'autre de t_1, et qui seront des valeurs singulières pour la fonction analytique. Sur toute la portion de l'axe réel comprise entre ces deux points limites, la fonction ainsi définie a une valeur réelle. J'appelle $\varphi(t)$ cette fonction.

Considérons maintenant une seconde série de même nature

$$b_0 + b_1(t - t_1) + b_2(t - t_1)^2 + \dots,$$

définissant une fonction analytique $\psi(t)$ régulière dans le voisinage de chaque point d'une certaine portion de l'axe réel, les extrémités étant exceptées, et réelle tout le long de cette portion. J'admets enfin que les deux portions de l'axe réel relatives l'une à $\varphi(t)$, l'autre à $\psi(t)$, aient une portion commune $\alpha\beta$. Posons

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t),$$

et faisons varier t de α' à β', α' étant aussi voisin qu'on veut de α, et β' aussi voisin qu'on veut de β. Le point (x, y) décrira alors un arc de courbe que nous appellerons *arc de ligne analytique*.

(1) SCHWARZ, *Monatsberichte*, § 5; 1870.

J'envisage l'intervalle (α', β'). Une valeur de t appartenant à cet intervalle sera dite *singulière* si l'on a à la fois

$$\varphi'(t) = 0, \qquad \psi'(t) = 0.$$

Soit (α'', β'') un intervalle inclus dans (α', β') et dépourvu de valeurs singulières, les limites α'', β'' ne devant pas non plus être singulières. t variant de α'' à β'', le point (x, y) décrira une portion AB de l'arc de ligne analytique considéré plus haut. Cette portion a une tangente déterminée en chaque point *sans exception;* de plus, à chacun de ses points correspond *une seule* valeur de t appartenant à l'intervalle (α'', β''). C'est là ce que nous appellerons un *arc régulier de ligne analytique.*

Citons comme exemples de tels arcs : 1° un segment rectiligne aussi grand que l'on veut; 2° un arc de cercle aussi voisin que l'on veut du cercle tout entier.

2. De la définition donnée d'un arc régulier de ligne analytique résultent très simplement d'importantes propriétés, que nous allons maintenant exposer.

Gardons les notations qui précèdent, sauf que nous remplacerons α'' et β'' par α et β. Posons

$$f(t) = \varphi(t) + i\psi(t).$$

Cela étant, soit S une aire renfermant l'arc AB tout entier à son intérieur, et soit $z_1 = F(z)$ une fonction qui représente l'aire S sur une autre aire S_1. A AB cette fonction fait correspondre un arc A_1B_1 intérieur tout entier à S_1. Je dis que A_1B_1 aussi est un arc régulier de ligne analytique.

Considérons en effet la fonction

$$f_1(t) = F[f(t)].$$

Elle est régulière dans le voisinage de chaque point du segment $\alpha\beta$. En outre, sa dérivée ne s'annule pour aucun de ces points, car elle est égale au produit $F'(z) \times f'(t)$, z étant l'affixe du point correspondant de AB. On peut donc mettre $f_1(t)$ sous la forme $\varphi_1(t) + i\psi_1(t)$, φ_1 et ψ_1 étant deux fonctions analytiques régulières dans le voisinage de chaque point de $\alpha\beta$, prenant l'une et l'autre des valeurs réelles en tous ces points, enfin dont les dérivées ne sont simultanément nulles pour aucun point de $\alpha\beta$. Si l'on pose

$$x_1 = \varphi_1(t), \qquad y_1 = \psi_1(t),$$

au segment $\alpha\beta$ correspond l'arc A_1B_1, qui est par suite un arc régulier de ligne analytique.

De ce théorème résulte la conséquence suivante. S'il est possible d'enfermer un arc de courbe AB dans une aire simplement connexe S et de représenter ensuite cette aire sur une aire S_1 de manière à faire correspondre à AB un segment *rectiligne* A_1B_1, l'arc AB est nécessairement un arc régulier de ligne analytique.

Inversement, si AB est un arc régulier de ligne analytique, l'opération précédemment décrite est possible. Cette propriété fondamentale et, d'après ce qui précède, caractéristique pour une ligne analytique, peut se démontrer comme il suit :

Tout d'abord il est facile de renfermer le segment rectiligne $\alpha\beta$ dans une aire Σ où $f(t)$ est holomorphe : il suffit de prendre la partie du plan recouverte par les cercles de convergence de $f(t)$ relatifs aux divers points de $\alpha\beta$. Rappelons-nous maintenant ce que nous avons démontré au n° 10 de la Ire Partie. La dérivée $f'(t)$ n'étant pas nulle au point α, on peut déterminer un cercle C de centre A sur lequel la fonction $z = f(t)$ représente d'une manière conforme une portion Γ de Σ renfermant le point α. Les courbes γ et c coupent $\alpha\beta$ et AB en des points correspondants α_1 et A_1. Opérons sur α_1 comme sur α : nous obtiendrons une nouvelle aire Γ_1 renfermant α_1 à son intérieur et que la fonction $f(t)$ représente sur un cercle C_1 de centre A_1. Les deux aires Γ et Γ_1 ont une portion commune : c'est celle qui correspond à l'aire commune aux deux cercles C et C_1; dans l'aire (Γ, Γ_1), $f(t)$ ne prend pas deux fois la même valeur : la fonction $z = f(t)$ représente donc cette aire sur l'aire (C, C_1).

Les courbes γ_1 et c_1 donnent les points α_2 et A_2 situés l'un entre α_1 et β, l'autre entre A_1 et B. Recommençons sur α_2 la même opération, en ayant soin de choisir C_2 assez petit pour qu'il n'ait avec l'aire (C, C_1) d'autre portion commune que celle qu'il a en commun avec C_1. Dans ces conditions, les aires (Γ, Γ_1) et Γ_2 n'ont en commun que l'aire qui correspond à la portion commune à C_1 et à C_2; de plus, dans l'aire $(\Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2)$, $f(t)$ ne prend pas deux fois la même valeur. La fonction $z = f(t)$ représente par conséquent l'aire $(\Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2)$ sur l'aire (C, C_1, C_2). En continuant ainsi, et en ayant soin de choisir chaque cercle assez petit pour que la portion qu'il a nécessairement en commun avec le cercle précédent soit la seule qu'il ait en commun avec l'aire formée par l'ensemble des cercles précédents, on parvient à une aire, renfermant à son intérieur $\alpha\beta$, que la fonction $z = f(t)$ représente sur une aire contenant AB, de manière qu'à $\alpha\beta$ corresponde AB.

3. Dans la I^{re} Partie, nous avons résolu le problème de Dirichlet généralisé (en supposant déjà résolu le problème classique) par une fonction que nous avons appelée U. Il est facile de voir que notre solution tombe en défaut dans un cas particulier. Soit A un point singulier; appelons AM et AM′ les deux branches de s issues de A, et soit MAM′ le sens direct. Supposons que AM et AM′ aient la même tangente AT; admettons en outre que AT pénètre à l'intérieur de l'aire, si AM et AM′ sont de part et d'autre de cette tangente; qu'elle reste au contraire extérieure à S, si AM et AM′ sont du même côté. On dit alors que le point A est *une pointe*. Dans ce cas, l'angle α relatif à ce point est égal à zéro, de sorte que les formules données deviennent inapplicables.

Je me propose de traiter le cas de la pointe, lorsque AM et AM′ sont deux arcs réguliers de lignes analytiques.

Soit a l'affixe du point singulier, et soit α l'argument de la tangente AT. Posons $z - a = re^{i\theta}$. La courbe AM est définie par les équations

$$r\cos\theta = \varphi(t), \qquad r\sin\theta = \psi(t),$$

φ et ψ étant des fonctions analytiques régulières dans le voisinage de $t = 0$ et dont les dérivées ne sont pas nulles simultanément pour $t = 0$. L'ordre c du contact de AM avec AT est l'ordre infinitésimal de $\theta - \alpha$ par rapport à r. D'ailleurs r est du même ordre que t, $\theta - \alpha$ est du même ordre que $\sin(\theta - \alpha)$: il suffit donc d'évaluer, par rapport à t, l'ordre infinitésimal de

$$\psi(t)\cos\alpha - \varphi(t)\sin\alpha,$$

et de retrancher 1 au nombre obtenu. c est donc un nombre *entier* au moins égal à 1. Soit de même c' l'ordre du contact de AM' avec AT.

Soit enfin μ l'ordre du contact de AM avec AM' : μ est l'ordre infinitésimal de $\theta - \theta'$ par rapport à r. Or

$$\theta - \theta' = (\theta - \alpha) - (\theta' - \alpha).$$

Si donc c et c' sont différents, μ est le plus petit de ces deux nombres. Soit maintenant $c = c'$. Alors, si $\theta - \alpha$ et $\theta' - \alpha$ sont de signes contraires, c'est-à-dire si AM et AM' sont de part et d'autre de leur tangente commune, on a *toujours* $\mu = c = c'$. Cette égalité subsiste *en général* lorsque AM et AM' sont du même côté de leur tangente commune, mais il pourrait se faire que μ fût supérieur à c. Dans tout ce qui suivra, *nous exclurons ce cas exceptionnel.*

Je considère maintenant la fonction rationnelle $\left(\frac{e^{i\alpha}}{z-a}\right)^{\mu}$. Dans cette fonction, le coefficient de i changé de signe est

$$u = \frac{\sin\mu(\theta - \alpha)}{r^{\mu}} \quad (^1).$$

C'est lui qui va remplacer la fonction u du cas général. On voit tout d'abord qu'il tend vers une limite lorsqu'on tend vers A sur MA ou sur M'A, car

$$\frac{\mu(\theta-\alpha)}{r^{\mu}} = \frac{\mu(\theta-\alpha)}{r^{c}} r^{c-\mu}, \qquad \frac{\mu(\theta'-\alpha)}{r^{\mu}} = \frac{\mu(\theta'-\alpha)}{r^{c'}} r^{c'-\mu},$$

et μ ne dépasse ni c ni c'. Lorsqu'on tend vers A par un chemin quelconque intérieur à S, u tend encore vers une limite, car on a

$$\theta > \omega > \theta', \qquad \text{d'où} \qquad \frac{\mu(\theta-\alpha)}{r^{\mu}} > \frac{\mu(\omega-\alpha)}{r^{\mu}} > \frac{\mu(\theta'-\alpha)}{r^{\mu}}.$$

Enfin les deux valeurs limites relatives, l'une à MA, l'autre à M'A, sont différentes, et l'excès de la première sur la seconde est

$$\lim\left[\frac{\mu(\theta-\theta')}{r^{\mu}}\right] = \mathrm{A};$$

A est un nombre *positif.*

Le terme qui, dans l'expression de U, correspondra au point singu-

(1) Schwarz, *loc. cit.*, p. 777.

lier a, sera $\frac{\delta}{A}u$. De plus, la fonction u étant *uniforme*, il n'y a pas lieu de lui adjoindre une fonction compensatrice φ.

La valeur vers laquelle tend U quand on tend vers A par un chemin intérieur à S peut s'écrire comme il suit :

$$\lambda = l' + \frac{B'}{A}\delta,$$

en posant

$$B' = \lim\left[\frac{\mu(\omega - \theta')}{r^{\mu}}\right], \qquad B' \geqq 0.$$

Cette valeur appartient toujours à l'intervalle $(l', l' + \delta)$. On peut encore écrire son expression comme il suit :

$$\lambda = l\left(1 - \frac{B}{A}\right) + l'\left(1 - \frac{B'}{A}\right),$$

en posant

$$B = \lim\left[\frac{\mu(\theta - \omega)}{r^{\mu}}\right], \qquad \text{d'où} \qquad B \geqq 0, \qquad B + B' = A.$$

On voit l'analogie de ces formules avec celles du cas général. Aussi toutes les propriétés établies pour les fonctions U subsistent-elles dans le cas actuel.

La solution que nous venons de donner du problème généralisé dans le cas où, parmi les points singuliers, se trouve une pointe, suppose : 1° que cette pointe est formée par deux arcs réguliers de lignes analytiques; 2° que l'ordre de leur contact mutuel n'est pas supérieur à l'ordre du contact de chacun d'eux avec leur tangente commune. Toutes les fois que dans la suite nous construirons une fonction U pour une aire S, nous supposerons remplie cette double condition pour toutes les pointes de S.

4. Le théorème sur lequel M. Schwarz base sa résolution du problème de Dirichlet repose sur le lemme suivant [1] :

Soit S une aire pour laquelle on sait résoudre le problème de Dirichlet. Partageons le contour s en un nombre limité de parties et

---

[1] Ce lemme occupe, dans le Mémoire de M. Schwarz, les §§ 10 et 11.

répartissons celles-ci en deux groupes que nous appellerons A et B. Désignons par L des lignes intérieures à S et pouvant rencontrer s en des points intérieurs à A ou appartenant à la fois à A et à B, mais *non en des points intérieurs à* B. De plus, si M est un point commun à A, à B et à L, L *ne doit pas être tangent à* B *en* M, si ce point est un point ordinaire de S; si M est une pointe, l'ordre du contact entre B et L, lequel ne saurait être inférieur à l'ordre du contact entre A et B, *ne doit pas non plus lui être supérieur*.

Je dis qu'il existe un nombre q, positif et plus petit que 1, jouissant de la propriété que voici : construisons pour l'aire S la fonction U relative aux valeurs suivantes : le long de A, la valeur zéro; le long de B, des valeurs quelconques; soit g la limite supérieure de leurs modules. Quelles que soient ces valeurs, les valeurs de $|U|$ le long de L ne dépassent jamais gq.

Pour le voir, prenons le long de A la valeur zéro, le long de B la valeur $+1$. Soit V la fonction correspondante. Ses valeurs dans S sont toutes positives. En particulier, ses valeurs le long de L ont une limite supérieure positive q. Je vais montrer que ce nombre q répond aux conditions de l'énoncé.

En premier lieu, q est inférieur à 1; car il existe sur L un point M tel que la limite supérieure des valeurs de V pour les points de L situés dans le voisinage de M soit toujours q, quelque restreint que soit ce voisinage. Si ce point M est dans S, q est la valeur de la fonction V en ce point, et nous savons qu'elle est inférieure à 1. Si M est sur le contour s, q est la limite vers laquelle tend V lorsqu'on tend vers le point M par ce chemin. M ne peut être à l'intérieur de A, c'est donc un point commun à A et à B. D'après ce qui a été vu, q appartient à l'intervalle $(0, 1)$. Il ne peut être égal à 1, car cela exige que L soit tangent à B, si M est un point ordinaire de S; que l'ordre du contact de L avec B soit supérieur à l'ordre du contact de A avec B, si M est une pointe. L'une et l'autre de ces circonstances ont été exclues dans l'hypothèse. Le nombre q est donc plus petit que 1.

Prenons, en second lieu, des valeurs quelconques le long de B, et soit U la fonction correspondante. Envisageons la somme $gV + U$, qui est, comme on sait, une nouvelle fonction U. Elle est nulle sur A, elle n'est jamais négative sur B : par suite, elle n'est jamais négative dans S.

En particulier, ses valeurs sur L ne sont jamais négatives. Mais on peut écrire

$$gV + U = gq + U + g(V - q).$$

Le terme $g(V - q)$ n'étant jamais positif le long de L, cela exige que la somme $gq + U$ ne soit jamais négative. On montre de même, en considérant la fonction $gV - U$, que la différence $gq - U$ n'est jamais négative sur L. Autrement dit, les valeurs de $|U|$ le long de L ne sont jamais supérieures à gq.

5. J'arrive à la partie fondamentale de la théorie de M. Schwarz [1]. Soient deux aires S_1 et S_2 ayant en commun une ou plusieurs aires, dont nous désignerons l'ensemble par S_0. Les deux contours s_1 et s_2 peuvent coïncider en partie. J'appelle L_1 la portion de s_1 qui n'est pas intérieure à S_2, L_2 la portion de s_2 qui n'est pas intérieure à S_1. Je désigne par L_3 et L_4 les restes de s_1 et de s_2. La portion du plan que recouvre l'ensemble des deux aires S_1 et S_2 est une aire S dont le contour s se compose de L_1 et de L_2. J'admets en outre que tout point commun à L_3 et à L_4 appartient aussi à L_1 et à L_2, et que, M étant un tel point, L_3 n'est pas tangent en M à L_4, si M est un point ordinaire de S; si M est une pointe, nous supposerons que l'ordre de contact entre L_3 et L_4, qui ne peut être inférieur à l'ordre du contact entre L_1 et L_2, ne lui soit pas non plus supérieur.

Cela étant, je suppose que l'on sache résoudre le problème de Dirichlet et pour S_1 et pour S_2, et je me propose de le résoudre pour S.

La marche que nous allons suivre à cet effet a reçu de son inventeur le nom de *passage à la limite par procédé alterné*. Aux valeurs données le long de L_1 je joins des valeurs absolument quelconques le long de L_3, et je construis la fonction U relative à ce système de valeurs; soit U_1 cette fonction définie pour S_1. Elle a des valeurs déterminées sur L_4; joignons ces valeurs aux valeurs données le long de L_2, et construisons la fonction U correspondante; soit U_2 cette fonction définie pour S_2. Joignons les valeurs de U_2 sur L_3 aux valeurs données sur L_1 pour construire une nouvelle fonction U, U_3, définie pour

---

[1] SCHWARZ, *Monatsberichte*, § 12; 1870.

l'aire S_1. Poursuivons indéfiniment cette opération. Nous obtenons deux suites de fonctions

(1) $$U_1,\ U_3,\ U_5,\ \ldots,\ U_{2n-1},\ \ldots,$$

(2) $$U_2,\ U_4,\ U_6,\ \ldots,\ U_{2n},\ \ldots.$$

Ce sont des fonctions U, celles de la suite (1), pour l'aire S_1; celles de la suite (2) pour l'aire S_2. Considérons les deux séries

(3) $$U_1+(U_3-U_1)+(U_5-U_3)+\ldots+(U_{2n+1}-U_{2n-1})+\ldots,$$

(4) $$U_2+(U_4-U_2)+(U_6-U_4)+\ldots+(U_{2n+2}-U_{2n})+\ldots.$$

D'après la loi de formation des fonctions U, on voit qu'il y a coïncidence, le long de L_4, entre deux termes de même rang des deux séries; le long de L_3, entre un terme de la série (3) et le terme de rang immédiatement inférieur de la série (4). Je vais montrer que ces deux séries convergent uniformément, la première dans l'aire S_1, la seconde dans l'aire S_2.

Le lemme du n° 4 s'applique à l'aire S_1, si l'on prend pour A la portion L_1, pour B la portion L_3, enfin pour L les lignes L_4. En effet, d'après l'hypothèse, L_4 ne rencontre L_3 qu'en des points appartenant aussi à L_1. Soit M un de ces points : si M est un point ordinaire pour S_1, c'est un point ordinaire pour S, de sorte que L_3 et L_4 ne sont pas tangents en ce point. Si M est une pointe pour S_1, c'est aussi une pointe pour S, sans quoi la condition de l'énoncé ne serait pas remplie; l'ordre du contact entre L_3 et L_4 n'est pas supérieur à l'ordre (L_1, L_3), sans quoi il serait supérieur *a fortiori* à l'ordre (L_1, L_2). Le lemme fournit alors un nombre positif plus petit que 1, que nous appellerons q_1. Il s'applique de même à l'aire S_2, où L_2, L_4 et L_3 jouent respectivement le rôle de A, B, L : soit q_2 le nombre positif plus petit que 1 correspondant.

Ceci posé, examinons les différents termes des séries (3) et (4). Partons de U_3-U_1. Cette fonction est nulle sur L_1; sur L_3, elle prend certaines valeurs : soit G la limite supérieure de leurs modules. $|U_3-U_1|$ est inférieur à G dans S_1.

Le terme U_4-U_2 est nul sur L_2 et coïncide sur L_4 avec U_3-U_1; d'après le lemme, $|U_4-U_2|$ ne dépasse pas Gq_1 le long de L_4 : donc $|U_4-U_2|$ est inférieur à Gq_1 dans S_2.

Pareillement, $U_5 - U_3$ est nul sur L_1 et coïncide sur L_3 avec $U_4 - U_2$. D'après le lemme, $|U_5 - U_3|$ ne dépasse pas Gq_1q_2 le long de L_3 : donc $|U_5 - U_3|$ est inférieur à Gq_1q_2 dans S_1.

Il n'y a aucune difficulté à poursuivre ce raisonnement, qui conduit à la conclusion générale suivante :

$|U_{2n+1} - U_{2n-1}|$ est inférieur à $G(q_1q_2)^{n-1}$ dans S_1.

$|U_{2n+2} - U_{2n}|$ est inférieur à $Gq_1(q_1q_2)^{n-1}$ dans S_2.

Le produit q_1q_2 étant un nombre positif plus petit que 1,

$$G(q_1q_2)^{n-1} \quad \text{et} \quad Gq_1(q_1q_2)^{n-1}$$

sont les termes généraux de deux progressions géométriques décroissantes. La convergence uniforme des séries (3) et (4) est ainsi mise en évidence.

Nous pouvons dès lors appliquer à ces deux séries les résultats qui ont été démontrés dans la Ire Partie, n° 19. La série (3) définit une fonction U pour l'aire S_1; appelons-la U'. On voit immédiatement qu'elle prend sur L_1 les valeurs données. Cette fonction n'a pas de points singuliers sur L_3; elle en a sur L_1, aux points où les valeurs données subissent une rupture de continuité; enfin elle peut en avoir aux points communs à L_1 et à L_3. De même, la série (4) définit une fonction U'', qui est une fonction U pour l'aire S_2; cette fonction U'' prend les valeurs données sur L_2 et a, comme points singuliers, d'abord les points de L_2 où les valeurs données éprouvent une rupture de continuité, ensuite peut-être les points communs à L_2 et à L_4.

Les fonctions U' et U'' sont définies toutes deux pour l'aire S_0 commune à S_1 et à S_2. Comparons leurs valeurs sur s_0. Ce contour se compose de L_3, de L_4 et des parties communes à L_1 et à L_2. Considérons d'abord cette dernière partie de s_0 : nos deux fonctions prennent la même valeur en chaque point non singulier, savoir la valeur donnée, et tendent vers la même limite lorsqu'on tend vers un point singulier par un chemin quelconque. Nos deux fonctions coïncident aussi sur L_3 et sur L_4. Soit, par exemple, A un point de L_3, et appelons a_n, a', a'' les valeurs en ce point de U_n, U', U''. On a

$$a' = \lim a_{2n+3}, \qquad a'' = \lim a_{2n+2}.$$

Mais, d'après la loi de formation des fonctions U, $a_{2n+2} = a_{2n+3}$. Donc

$a' = a''$. Les deux fonctions coïncident donc sur L_3. On verrait de même qu'elles coïncident sur L_4.

Il reste à examiner ce qui se passe à l'extrémité A d'un arc L_3 ou L_4. Supposons d'abord que ce point A soit une extrémité d'un arc L_3 et ne soit pas en même temps sur L_4, c'est-à-dire sépare L_3 d'une partie commune à L_1 et à L_2. Alors, si ce point n'est pas un point singulier pour U'', il n'est pas non plus un point singulier pour U'; U' et U'' y prennent la même valeur, la valeur donnée.

Supposons à présent que A soit un point singulier pour U''. Il pourra se faire que ce ne soit pas un point singulier pour U'. Cela arrivera lorsque L_3 sera tangent à L_1, si A est un point ordinaire de S; si A est une pointe, lorsque l'ordre de contact (L_1, L_3) sera supérieur à l'ordre (L_1, L_2). Dans ce cas-là encore, U' et U'', considérés seulement dans S_0, prennent en A la même valeur. Hors de ce cas particulier, A est aussi un point singulier pour U'. Je vais montrer alors que, par quelque chemin intérieur à S_0 que l'on tende vers A, U' et U'' tendent vers la même valeur limite.

Supposons que le point A soit un point ordinaire de S. Alors la valeur limite de U' correspondant à un chemin qui fait avec L_1 et L_3 des angles β_1 et β_3 a pour expression

$$\lambda' = l_1\left(1 - \frac{\beta_1}{\alpha_1}\right) + l_3\left(1 - \frac{\beta_3}{\alpha_1}\right).$$

La valeur limite de U'' correspondant au même chemin est

$$\lambda'' = l_1\left(1 - \frac{\beta_1}{\alpha_2}\right) + l_2\left(1 - \frac{\beta_2}{\alpha_2}\right).$$

Je dis que λ'' est égal à λ'. Pour cela, observons que l'on a

$$l_3 = l_1\left(1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right) + l_2\frac{\alpha_1}{\alpha_2}.$$

Par suite

$$\lambda''\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = l_1\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\left(1 - \frac{\beta_1}{\alpha_2}\right) + \left(1 - \frac{\beta_2}{\alpha_2}\right)\left[l_3 - l_1\left(1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)\right] = l_1\frac{\alpha_1 - \beta_1}{\alpha_2} + l_3\frac{\beta_1}{\alpha_2},$$

d'où

$$\lambda'' = l_1\left(1 - \frac{\beta_1}{\alpha_1}\right) + l_3\frac{\beta_1}{\alpha_1} = \lambda'.$$

Un calcul tout semblable conduit à la même conclusion lorsque le point A est une pointe.

On traiterait de la même façon le cas où A est une extrémité d'un arc L_4, sans être en même temps sur L_3.

Je suppose, en second lieu, que le point A est commun à la fois à L_1, L_2, L_3 et L_4. Si A est un point ordinaire de S, L_3 et L_4 ne sont pas tangents; soit α_0 leur angle. Si l'on tend vers A par un chemin L intérieur à S_0, U' et U'' tendent vers des limites

$$\lambda' = l_1\left(1-\frac{\beta_1}{\alpha_1}\right) + l_3\left(1-\frac{\beta_3}{\alpha_1}\right),$$
$$\lambda'' = l_2\left(1-\frac{\beta_2}{\alpha_2}\right) + l_4\left(1-\frac{\beta_4}{\alpha_2}\right).$$

En refaisant deux fois le calcul précédent, on arrive à mettre l'une et l'autre de ces expressions sous la forme

$$l_3\left(1-\frac{\beta_3}{\alpha_0}\right) + l_4\left(1-\frac{\beta_4}{\alpha_0}\right).$$

Donc $\lambda' = \lambda''$. On arrive à la même conclusion lorsque le point A est une pointe de S.

En résumé, les fonctions U' et U'', harmoniques toutes deux dans S_0, prennent la même valeur en chaque point de s_0, à l'exception d'un nombre limité de points A, où ni l'une ni l'autre ne prend de valeur déterminée. Mais qu'on tende vers un de ces points A par un chemin quelconque, et toutes deux tendront vers la même limite. On en conclut que U' et U'' sont identiques dans S_0.

Soit U la fonction égale à U' dans S_1, à U'' dans S_2. La valeur vers laquelle tend cette fonction lorsqu'on tend vers un point A commun à L_3 et à L_4 par un chemin L intérieur à S se met, par un calcul inverse du précédent, sous la forme

$$\lambda = l_1\left(1-\frac{\beta_1}{\alpha}\right) + l_2\left(1-\frac{\beta_2}{\alpha}\right).$$

L'analyse qui précède nous permet d'énoncer les conclusions suivantes :

1° Si les valeurs données n'éprouvent pas de discontinuité le long de s, la fonction trouvée U, harmonique dans S, prend en chaque point de s la valeur donnée. Le problème de Dirichlet est donc résolu pour l'aire S.

2° Si les valeurs données éprouvent des discontinuités, on sait construire la fonction U relative à ces valeurs ; mais ici l'application de la règle générale est inutile, car il résulte de nos calculs que la fonction U formée par le procédé alterné est identique à la fonction cherchée.

3° Dans un cas comme dans l'autre, la fonction U à laquelle on parvient est la même quelles que soient les valeurs initiales choisies le long de L_3.

6. L'importance pratique du théorème qui précède est manifeste. Si S_1 et S_2 sont deux aires représentables sur le cercle, se recouvrant en partie et satisfaisant aux autres conditions de l'énoncé, on sait résoudre le problème pour l'aire S constituée par leur ensemble. Si S_3 est une nouvelle aire représentable sur le cercle et ayant une portion commune avec S, on sait résoudre le problème pour l'aire S′ provenant de la fusion des aires S et S_3. On peut poursuivre ce procédé aussi longtemps qu'on veut et arriver ainsi à des aires très compliquées. Je me propose de faire voir que l'on peut atteindre une aire quelconque dont le contour se compose de n polygones limités par des droites, ou par des arcs de cercle, ou, plus généralement, par des arcs réguliers de lignes analytiques.

Quelle que soit l'aire dont il s'agit, on pourra toujours commencer par tracer à son intérieur assez de cercles pour réaliser, par leur ensemble, une aire différant d'aussi peu que l'on veut de l'aire proposée. Mais, une fois arrivé près du bord, il faut employer d'autres aires, plus ou moins compliquées suivant la nature du bord. Nous allons distinguer différents cas, en commençant par les plus simples [1] :

1° *Le bord est formé de segments rectilignes.* — Deux sortes d'aires suffiront pour résoudre la question : le *segment* et le *secteur circulaires.*

Soient z_0, z'_0 les sommets du segment, α son angle. La transfor-

---

(1) Nous développons, dans ce paragraphe, les affirmations contenues dans le § 13 du Mémoire de M. Schwarz. Les aires auxiliaires dont nous nous servons sont énumérées au § 4 du même Mémoire.

mation

$$z' = \frac{z - z_0}{z - z'_0}$$

revient à une inversion dont l'origine est le point z'_0. Elle représente par suite le segment sur l'aire comprise entre deux demi-droites faisant entre elles un angle égal à α. La transformation

$$z'' = z'^{\frac{\pi}{\alpha}}$$

représente à son tour cet espace sur un demi-plan.

Le cas du secteur se ramène au précédent. Si α est l'angle et z_0 le sommet du secteur, la fonction

$$z' = (z - z_0)^{\frac{\pi}{\alpha}}$$

représente le secteur sur un demi-cercle.

On voit le parti à tirer de ces aires. Un segment par côté et un secteur par sommet, joints aux cercles tracés à l'intérieur de l'aire, donnent la solution pour l'aire considérée.

2° *Le bord est formé d'arcs de cercle.* — Alors au segment circulaire nous substituerons l'espace compris entre deux arcs de cercle, et que l'on peut appeler un *croissant*. Cette aire se représente sur le demi-plan absolument comme le segment de cercle.

Le croissant et le secteur circulaire suffisent à résoudre la question tant qu'il n'y a pas de pointes : on n'a qu'à faire correspondre à chaque sommet deux croissants reliés entre eux, s'il y a lieu, par un secteur circulaire. Néanmoins, si l'angle α relatif au sommet A n'est égal ni à π ni à 2π, on peut procéder plus rapidement. On peut tracer un arc de cercle coupant orthogonalement les deux arcs de cercle issus de A; on obtient ainsi un triangle curviligne d'angles $\alpha, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$. Si z_0 est l'affixe du point A, et si z'_0 est l'affixe du second point A' où se coupent les deux arcs de cercle, la transformation

$$z' = \frac{z - z_0}{z - z'_0}$$

revient à une inversion d'origine A'. Elle transforme le triangle curviligne en un secteur circulaire. Nous sommes ainsi ramenés à un cas déjà examiné.

Reste le cas de la pointe ($\alpha = 0$). Ici encore on peut couper orthogonalement les deux arcs de cercle issus de A par un troisième, mais ce dernier prolongé passe par la pointe. Le triangle curviligne ainsi formé peut encore être représenté sur un secteur circulaire, mais une fonction transcendante va être nécessaire. Soit z_0 l'affixe de la pointe, et soit α l'argument de la tangente. Posons d'abord

$$z - z_0 = z' e^{i\alpha},$$

de manière à amener la tangente à être parallèle à l'axe des x' positifs. La transformation

$$z'' = \frac{1}{z'}$$

revient alors à une inversion ayant la pointe pour origine; elle représente le triangle sur l'espace (E) compris entre deux demi-droites parallèles à l'axe des x'' positifs et un segment de droite parallèle à l'axe des y''. Soit enfin

$$\zeta = e^{-z''}.$$

A une parallèle à l'axe des x'' cette fonction fait correspondre une demi-droite issue de ω (ω correspond à $x'' = +\infty$); à une parallèle à l'axe des y'' correspond un cercle de centre ω. Par suite, cette fonction représente l'espace (E) sur un secteur circulaire.

3° *Le bord est formé d'arcs réguliers de lignes analytiques.* — Alors les aires élémentaires dont on aura à se servir seront, bien entendu, de nature bien plus variée; mais elles se ramènent toutes aux précédentes par voie de représentation conforme. Tant que l'aire considérée ne contiendra pas de pointe, une seule aire nouvelle sera nécessaire. Soit AB un arc régulier de ligne analytique; enfermons-le dans une aire S, et représentons celle-ci sur une aire Σ de manière que $\alpha\beta$ soit rectiligne. Joignons α à β par un arc de cercle Λ formant avec $\alpha\beta$ un segment de cercle. A Λ correspond dans la première figure un arc régulier L de ligne analytique joignant A à B. L'aire comprise entre AB et L est représentable sur un cercle.

Telle est l'aire qui, dans le cas général, jouera le même rôle que le segment de cercle dans le cas des lignes droites et le croissant dans le cas des arcs de cercle. Ici, comme dans le cas précédent, cette aire ne suffit plus lorsqu'il y a des pointes. Soit donc A une pointe, et appelons L et L' les deux arcs qui la forment. Nous allons traiter la question en supposant que l'ordre du contact entre L et L' est égal à 1. Faisons, comme tout à l'heure, une représentation conforme transformant L en une portion rectiligne L_1. L'ordre du contact se conservant dans une représentation conforme, L'_1 a un contact du premier ordre avec sa tangente L_1. On peut donc faire passer par A_1 un arc de cercle C_1 *entre* L_1 et L'_1. Soit maintenant D_1 un arc de cercle coupant orthogonalement L_1 et C_1 : le triangle LCD, limité par trois arcs réguliers de lignes analytiques, est représentable sur un cercle. Pareillement, à L' on fera correspondre un triangle L'C'D' obtenu comme il suit : ayant représenté le voisinage du point A de manière à faire correspondre à L' un segment rectiligne L'_2, on trace par A_2 un arc de cercle C'_2 *entre* L_2 et C_2, puis un arc de cercle D'_2 coupant orthogonalement L'_2 et C'_2. Tous les contacts qui ont lieu en A étant du premier ordre, on est sûr que le procédé alterné s'appliquera.

En résumé, on peut considérer le problème de Dirichlet comme résolu pour toute aire limitée par un nombre fini de segments rectilignes, ou d'arcs de cercle, ou plus généralement d'arcs réguliers de lignes analytiques ; à condition de supposer, dans ce dernier cas, qu'il n'y a pas, entre deux de ces arcs, de contact d'ordre supérieur au premier.

QUATRIÈME PARTIE.

I. — De la fonction de Green.

1. Soit S une aire quelconque, et soit A un point *intérieur* à cette aire. Si l'on résout le problème de Dirichlet en prenant pour valeur, le long de s, $\log\frac{1}{r}$, r étant le module de $z-a$, on obtient une certaine

fonction g qui est ce que nous appellerons la *fonction de Green relative au point* A. La propriété fondamentale de cette fonction est la suivante : sa valeur en un point quelconque de S est inférieure à la valeur en ce point de $\log\frac{1}{r}$. Soit en effet B un point quelconque de S autre que A. Entourons A d'un petit cercle s' auquel B soit extérieur. La différence $u - \log\frac{1}{r}$ est harmonique dans l'aire limitée par s et s'; elle prend sur s la valeur zéro, sur s' des valeurs négatives (si l'on a pris s' suffisamment petit); sa valeur en B est donc négative.

On a résolu le problème de Dirichlet pour toute aire limitée par un nombre fini de segments rectilignes. Ce résultat permet à M. Harnack de construire la fonction de Green relative au point A, *quelle que soit l'aire* S. Sa démonstration repose d'abord sur la propriété que nous venons d'établir, ensuite sur le remarquable théorème dont voici l'énoncé [1] :

Soit $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots$ *une série dont les termes sont des fonctions harmoniques dans* S *et positives dans toute l'étendue de l'aire. Si cette série converge en un point* A *intérieur à* S, *elle converge en tout point de* S *et définit une fonction harmonique dans* S.

Ce théorème résulte de la remarque [2] que voici :

Soit u une fonction harmonique dans un cercle C, de rayon ρ, et continue sur son contour. J'admets que ses valeurs $f(\psi)$ sur le contour, et par suite ses valeurs dans C, sont toutes positives. On sait que sa valeur en un point quelconque (r, φ), avec $r < \rho$, a pour expression

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{(\rho^2 - r^2) f(\psi)\, d\psi}{\rho^2 + r^2 - 2\rho r \cos(\psi - \varphi)}.$$

$f(\psi)$ étant constamment positif, cette intégrale est comprise entre

$$\frac{\rho + r}{\rho - r}\,\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\psi)\, d\psi \quad \text{et} \quad \frac{\rho - r}{\rho + r}\,\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\psi)\, d\psi.$$

---

(1) HARNACK, *Die Grundlagen der Theorie des logarithmischen Potentiales*, fin du § 20.

(2) HARNACK, *loc. cit.*, p. 62.

Ainsi, a étant la valeur de u au centre du cercle C, ses valeurs sur le cercle Σ concentrique à C et ayant r pour rayon sont toutes inférieures à $a\frac{\rho+r}{\rho-r}$. Il en est de même *a fortiori* de ses valeurs à l'intérieur de ce cercle Σ.

Revenons maintenant à notre théorème. De A comme centre je décris un cercle Σ tout entier intérieur à S, et je dis que la série converge uniformément dans Σ. Soit en effet r le rayon du cercle Σ, et soit ρ le rayon d'un cercle C concentrique à Σ, enveloppant Σ, mais intérieur à S. Notre hypothèse est que la série

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$$

est convergente. Autrement dit, à chaque nombre positif ε on peut faire correspondre un entier n tel que

$$a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p} < \varepsilon\frac{\rho-r}{\rho+r},$$

quel que soit p. Cette inégalité peut s'écrire

$$a_{n+1}\frac{\rho+r}{\rho-r} + a_{n+2}\frac{\rho+r}{\rho-r} + \ldots + a_{n+p}\frac{\rho+r}{\rho-r} < \varepsilon.$$

D'après notre remarque, les valeurs dans Σ de $u_{n+1}, u_{n+2}, \ldots, u_{n+p}$ sont inférieures respectivement à $a_{n+1}\frac{\rho+r}{\rho-r}, a_{n+2}\frac{\rho+r}{\rho-r}, \ldots, a_{n+p}\frac{\rho+r}{\rho-r}$. Par suite, on a l'inégalité

$$u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+p} < \varepsilon,$$

quel que soit p, pour tous les points de Σ. Par suite, la somme de la série est harmonique dans Σ et continue sur σ.

Maintenant rien ne nous empêche de répéter le même raisonnement en prenant comme point de départ un point A′ de σ. En opérant ainsi de proche en proche, nous parvenons à démontrer que la série converge uniformément dans le voisinage de tout point B intérieur à S, d'où il suit que la fonction u est harmonique dans l'aire S tout entière ([1]).

([1]) On peut dire aussi que la série converge uniformément dans une aire S′ différant de S d'aussi peu que l'on veut, mais dont le contour s' est tout entier *intérieur* à S.

Le même théorème s'applique évidemment aux séries à termes tous négatifs. Je n'insiste pas là-dessus, et j'arrive au procédé par lequel M. Harnack construit, à l'égard d'une aire quelconque S, la fonction de Green relative à un point intérieur A. On peut considérer l'aire S comme la limite d'une série illimitée d'aires S_1, S_2, S_3, ..., S_n, ..., toutes de même connexion que S, mais dont les contours se composent *de segments rectilignes*. Il n'y a pour cela qu'à former une série ε_1, ε_2, ε_3, ..., ε_n, ... de nombres positifs tendant vers zéro quand n croît indéfiniment, et à tracer chacun des polygones dont se compose s_n à une distance moindre que ε_n de la ligne correspondante de s. On peut, en outre, assujettir ces aires S_n à la double condition suivante : 1° chacune d'elles doit être *intérieure* à S; 2° chacune d'elles doit être intérieure à la suivante. Autrement dit, le contour s_n est tout entier intérieur à l'aire S, et même intérieur à l'aire S_{n+1} (¹).

Ceci posé, nous savons former, pour ces différentes aires, les fonctions de Green g_1, g_2, g_3, ..., g_n, ... relatives au point A. La fonction g_n est définie pour l'aire S_n; ses valeurs sur s_{n-1} sont inférieures à celles de g_{n-1}, puisque ces dernières sont celles de $\log\frac{1}{r}$ et que les points considérés sont intérieurs à S_n. On a donc, dans S_{n-1} et sur s_{n-1}, l'inégalité

$$g_n < g_{n-1}.$$

Cela étant, on a, pour tout point B intérieur à S_p, les inégalités

$$g_p > g_{p+1} > g_{p+2} > \ldots > g_{p+n} > \ldots.$$

D'ailleurs, quelque grand que soit n, g_{p+n} est supérieur à $\log\frac{1}{M}$, M étant la plus grande des distances de A à s. De là résulte que g_{p+n} tend vers une limite g. Cette fonction g est harmonique dans S_p, car la série

$$(g_{p+1} - g_p) + (g_{p+2} - g_{p+1}) + \ldots + (g_{p+n} - g_{p+n-1}) + \ldots$$

a ses termes harmoniques et négatifs dans toute l'étendue de S_p, et converge en outre en un point quelconque de S_p. Comme d'ailleurs p est aussi grand qu'on veut, g est une fonction harmonique dans S.

(¹) HARNACK, § 39, p. 118 et 119.

2. Avant d'aller plus loin et de démontrer que la fonction trouvée prend sur s la valeur $\log\frac{1}{r}$, traitons la question suivante. Soit S une aire quelconque, et soit g la fonction de Green relative au point intérieur A. Posons

$$\varphi = re^g.$$

La fonction φ est continue dans S et sur s. Elle est nulle en A, elle a une valeur positive moindre que 1 en chaque point de S autre que A, enfin elle prend la valeur 1 en chaque point de s. Il s'agit d'étudier le lieu $\varphi = \alpha$, α étant compris entre 0 et 1.

La réponse à cette question va résulter de trois remarques : 1° Il est impossible d'aller du point A à un point quelconque de s sans passer par un point du lieu; car φ, variant d'une manière continue depuis 0 jusqu'à 1, doit passer au moins une fois par la valeur α. 2° Il est impossible que ce lieu ou qu'une partie de ce lieu limite une aire ne renfermant pas A; car, s'il en était ainsi, la fonction $\log\varphi = \log r + g$ serait harmonique dans cette aire et prendrait sur son contour des valeurs outes égales; $\log\varphi$ et, par suite, φ, seraient donc constants dans cette aire, ce qui est absurde. 3° Enfin ce lieu ne peut renfermer ni un point isolé, ni une ligne ayant un point d'arrêt; car, en un tel point, la fonction harmonique $\log\varphi$ aurait un maximum ou un minimum, ce que nous savons être impossible.

Si S est une aire à connexion simple, le lieu $\varphi = \alpha$ est une ligne fermée simple entourant le point A. A l'intérieur de cette ligne, φ est inférieur à α; à l'extérieur, φ est plus grand que α; α variant de 0 à 1, la courbe, d'abord réduite au point A, s'élargit constamment et se confond enfin avec s.

Les choses se présentent moins simplement lorsque S est à connexion multiple. On voit d'abord que le lieu peut comprendre *plusieurs* lignes fermées simples. Lorsque α est très petit, il se compose d'une ligne fermée simple entourant A; au contraire, lorsque α est très voisin de 1, il diffère peu de s et comprend autant de lignes que s. Dans l'intervalle, il se compose d'un nombre de lignes au plus égal à celui de s. Dans tous les cas, une de ces lignes enveloppe toutes les autres, qui sont extérieures les unes aux autres. Le nombre de ces dernières est égal au plus au nombre des lignes limitant intérieurement S comprises dans la première; chacune d'elles entoure au moins une de ces lignes. Enfin le point A est à l'intérieur de l'aire ainsi limitée. Dans cette aire, φ est plus petit que α; il est plus grand que α à son extérieur.

Ici encore on se rend compte comment se transforme le lieu $\varphi = \alpha$, lorsque α varie d'une manière continue de o à 1. Il est d'abord réduit au point A, puis se compose d'une seule ligne L. α continuant à croître, une partie de L entoure peu à peu un espace comprenant une ou plusieurs des lignes limitant intérieurement S; puis cette partie se détache du reste de L, et nous avons deux lignes au lieu d'une. Cette scission se répétant plusieurs fois, et chacune des lignes intérieures se décomposant elle-même en autant de lignes séparées qu'elle renferme de lignes L_i, nous finissons par avoir n lignes. Enfin, α tendant vers 1, ces dernières se rapprochent indéfiniment de celles qui composent s.

3. Je reviens maintenant à la fonction g obtenue au n° 1. Il s'agit de montrer qu'elle coïncide sur s avec $\log\frac{1}{r}$. J'introduis à cet effet les fonctions suivantes :

$$\varphi_1 = re^{g_1}, \qquad \varphi_2 = re^{g_2}, \qquad \ldots, \qquad \varphi_n = re^{g_n}, \qquad \ldots,$$

et de même

$$\varphi = re^{g}.$$

On voit immédiatement que φ_n tend vers φ lorsque n croît indéfiniment, et cela sans cesser de décroître. D'après cela, le lieu $\varphi_n = \alpha$ (α étant compris entre o et 1) limite une aire renfermant à son intérieur le lieu $\varphi_{n-1} = \alpha$; car, en tous les points de celui-ci, on a $\varphi_n < \alpha$.

La fonction φ est continue dans S, a la valeur zéro au seul point A, enfin a en tout autre point de S une valeur positive moindre que 1. Je me propose de montrer qu'en chaque point de s elle prend la valeur 1 ([1]). Soit, à cet effet, α un nombre positif plus petit que 1, mais différant assez peu de l'unité pour que le lieu $\varphi_p = \alpha$ comprenne,

([1]) Harnack, § 39, p. 120 et 121. Le cas de la connexion simple y est seul traité.

comme s, n lignes fermées simples. Étudions le lieu $\varphi = \alpha$. Il faut montrer tout d'abord que ce lieu existe. Pour cela, je considère une aire Σ limitée par des lignes droites, de même connexion que S, et contenant S à son intérieur, mais de manière que chaque ligne de σ ait des points communs avec la ligne correspondante de s. Soit γ la fonction de Green qui, pour cette aire Σ, correspond au point A. Posons $\psi = re^{\gamma}$. En un point quelconque de S, ψ est inférieur à φ_p, quelque grand que soit p, et, par suite, au plus égal à φ. D'après cela, le lieu $\psi = \alpha$ se compose de n lignes, dont une et une seule entre chaque ligne de $\varphi_p = \alpha$ et la ligne correspondante de σ. Chacune des lignes de $\psi = \alpha$ a des points intérieurs à S, puisque la ligne correspondante de σ a des points sur s. En ces points de S, φ est au moins égal à α. Ainsi, entre chaque ligne de $\varphi_p = \alpha$ et la ligne correspondante de s, il y a des points où φ a la valeur α. Pour voir comment sont distribués ces points, observons d'une part que $\log\varphi$ est une fonction harmonique dans S, sauf au point A; d'autre part, qu'une ligne où φ est égal à α ne peut aboutir à un point P de s; car, s'il en était ainsi, en choisissant l'aire Σ de manière que P fût sur σ, il y aurait sur cette ligne des points extérieurs à l'aire limitée par $\psi = \alpha$, ce qui est absurde. Le lieu $\varphi = \alpha$ se compose donc aussi de n lignes, tout entières intérieures à S ; chacune d'elles est comprise entre une ligne de $\varphi_p = \alpha$ et la ligne correspondante de s. La disposition de ces n lignes est identique à celle des n lignes de s.

Cela étant, soit ε un nombre positif aussi petit qu'on veut. Construisons le lieu $\varphi = 1 - \varepsilon$; mesurons la distance à s de chaque point de ce lieu, et soit η la plus petite de ces distances, qui, nous le savons, est plus grande que zéro. En chaque point de S distant de s de moins de η, on a

$$\varphi > 1 - \varepsilon, \qquad \text{d'où} \qquad 1 - \varphi < \varepsilon.$$

φ prend donc la valeur 1 en chaque point de s. g prend donc la valeur $\log\frac{1}{r}$; autrement dit, g est, pour l'aire S, la fonction de Green relative au point A.

Nous avons donné, avec de légères modifications, la démonstration de M. Harnack. Observons maintenant que l'on peut établir le même résultat beaucoup plus rapidement. Je veux démontrer que la fonction φ

prend la valeur 1 en un point P de s. Tendons vers P par un chemin L intérieur à S. Choisissons notre aire Σ de manière que P soit sur σ. Tout le long de L, on a les inégalités

$$\psi \leqq \varphi < 1.$$

D'ailleurs, lorsqu'on tend vers P, ψ tend vers 1, puisque P est sur σ : donc φ tend aussi vers 1, ce qu'il fallait démontrer.

II. — Solution générale du problème de Dirichlet.

4. Nous avons appris, à l'égard d'une aire quelconque, à former la fonction de Green relative à n'importe quel point intérieur. Ce résultat peut servir à la résolution du problème de Dirichlet, ainsi que nous allons le faire voir maintenant.

Soit (comme au n° 2 de la première Partie) u une fonction harmonique non seulement dans S, mais dans une aire Σ renfermant l'aire S tout entière à son intérieur. On a, en chaque point A intérieur à S,

$$u = \frac{1}{2\pi} \int_s \left(u \frac{d \log \frac{1}{r}}{dn} - \log \frac{1}{r} \frac{du}{dn} \right) dl,$$

r représentant le module de $z - a$. Soit d'ailleurs g la fonction de Green relative au point A, et soit S′ une aire de même connexion que S, mais intérieure à S. On a, par le théorème de Green,

$$0 = \frac{1}{2\pi} \int_{s'} \left(u \frac{dg}{dn'} - g \frac{du}{dn'} \right) dl'.$$

Par suite, on peut écrire

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} u = {} & \frac{1}{2\pi} \int_s u \frac{d \log \frac{1}{r}}{dn} dl - \frac{1}{2\pi} \int_{s'} u \frac{dg}{dn'} dl' \\ & - \frac{1}{2\pi} \left(\int_s \log \frac{1}{r} \frac{du}{dn} dl - \int_{s'} g \frac{du}{dn'} dl' \right). \end{aligned} \right.$$

Or faisons tendre maintenant s' vers s; alors l'intégrale

$$\int_{s'} g \frac{du}{dn'} dl'$$

tend vers l'intégrale $\int_s \log \frac{1}{r} \frac{du}{dn} dl$. Il suit de là que l'intégrale

$$\int_{s'} u \frac{dg}{dn'} dl'$$

a une limite, et que cette limite satisfait à la relation

$$(2) \qquad u = \frac{1}{2\pi} \int_s u \frac{d \log \frac{1}{r}}{dn} dl - \frac{1}{2\pi} \lim \int_{s'} u \frac{dg}{dn'} dl' \text{ (1)}.$$

La formule (2) donne la solution du problème lorsqu'on connaît les valeurs de u sur s. Car on peut établir entre s et s' une correspondance point par point, et la limite de l'intégrale $\int_{s'} u \frac{dg}{dn'} dl'$ ne sera pas modifiée, si en chaque point de s' nous prenons pour u non la valeur en ce point même de la fonction, qui nous est inconnue, mais sa valeur au point correspondant de s. Nous n'avons ainsi besoin de connaître que les valeurs de u sur s.

Tout ceci suppose l'existence de la fonction u et ne peut, par suite, servir à la démontrer. Mais inversement, soit $f(l)$ la valeur donnée pour chaque point de s, et soit $f_1(l')$ la fonction définie par cette condition, qu'en deux points correspondants de s et de s' on doit avoir $f(l) = f_1(l')$. La différence

$$\frac{1}{2\pi} \int_s f(l) \frac{d \log \frac{1}{r}}{dn} dl - \frac{1}{2\pi} \int_{s'} f_1(l') \frac{dg}{dn'} dl'$$

définit une fonction pour tout l'intérieur de S. Je me propose de montrer que, s' tendant vers s, cette fonction tend vers une limite répondant au problème de Dirichlet.

---

(1) HARNACK, § 24.

Supposons d'abord qu'il s'agisse du problème *classique*, c'est-à-dire que $f(l)$ soit une fonction continue de l'arc sur chaque ligne dont se compose s. Étudions d'abord l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi}\int_s f(l)\frac{d\log\frac{1}{r}}{dn}dl \quad (^1),$$

qui ne dépend pas de s'. On voit immédiatement que c'est une fonction harmonique dans S. Je vais faire voir qu'elle prend une valeur déterminée en chaque point M de s.

J'observe que $\dfrac{d\log\frac{1}{r}}{dn}dl$ est l'angle sous lequel du point A on voit l'élément d'arc dl, avec le signe $+$ ou le signe $-$, suivant que cet élément tourne vers A sa face intérieure ou sa face extérieure. Nous représenterons cet angle avec son signe par le symbole $(dl)_a$. Partageons le contour s en deux parties : l'une, s_1, comprendra le point M à son intérieur et sera aussi petite qu'on voudra ; l'autre, s_2, se composera du reste de s.

$$\frac{1}{2\pi}\int_s f(l)(dl)_a = \frac{1}{2\pi}\int_{s_1} f(l)(dl)_a + \frac{1}{2\pi}\int_{s_2} f(l)(dl)_a.$$

Le second terme du second membre tend, lorsque le point A tend vers le point M, vers $\frac{1}{2\pi}\int_{s_2} f(l)(dl)_m$. Dans les mêmes conditions, le premier terme a une limite déterminée. Observons qu'on peut l'écrire $\frac{m}{2\pi}\int_{s_1}(dl)_a + \varepsilon$, m étant la valeur de $f(l)$ au point M, et ε tendant vers zéro en même temps que s_1. Mais $\int_{s_1}(dl)_a$ est l'angle sous lequel, du point A, on voit s_1 ; A tendant vers M, cet angle tend vers $2\pi - \alpha'$, α' étant l'angle intérieur à l'aire formé par les deux demi-droites qui joignent le point M aux deux extrémités de l'arc s_1. On a donc

$$\lim \frac{1}{2\pi}\int_s f(l)(dl)_a = \frac{1}{2\pi}\int_{s_2} f(l)(dl)_m + \left(1 - \frac{\alpha'}{2\pi}\right)m + \varepsilon_1,$$

---

(1) Harnack, § 10.

ε_1 tendant vers zéro en même temps que s_1. Appelons α l'angle intérieur à S formé en M par les tangentes à s. Lorsque s_1 tend vers zéro, α' tend vers α; l'intégrale $\int_{s_2} f(l)(dl)_m$ tend vers une limite que nous appellerons $\int_s f(l)(dl)_m$. Donc

$$\lim \frac{1}{2\pi}\int_s f(l)(dl)_a = \frac{1}{2\pi}\int_s f(l)(dl)_m + \left(1 - \frac{\alpha}{2\pi}\right)m.$$

Cette valeur limite est égale à la valeur donnée m, augmentée de

$$Q = \frac{1}{2\pi}\int_s f(l)(dl)_m - \frac{\alpha}{2\pi}m.$$

Nous sommes donc ramenés à démontrer que le second terme de notre différence,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{s'} f_1(l')\frac{dg}{dn'}dl',$$

tend, lorsque s' tend vers s, vers une fonction limite harmonique dans S et prenant au point M de s la valeur Q.

5. Commençons par étudier quelques propriétés intéressantes de la fonction de Green ([1]).

1° Considérons une aire S et deux points A et A′ intérieurs à cette aire. J'appelle g_a et $g_{a'}$ les fonctions de Green relatives à ces deux points, et je dis que l'on a, en désignant par (x, y), (x', y') les coordonnées des points A et A′,

$$g_a(x', y') = g_{a'}(x, y).$$

Pour le montrer, je vais considérer l'intégrale double

$$\iint\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u'}{\partial y}\right)dx\,dy \left(\begin{array}{l} u = g_a - \log\frac{1}{r} \\ u' = g_{a'} - \log\frac{1}{r'} \end{array}\right)$$

étendue à une aire Σ limitée de la façon suivante : au lieu de s, un

([1]) Ces deux propriétés sont exposées dans le § 23 de l'Ouvrage de M. Harnack.

contour s' très voisin de s, mais intérieur à S ; ensuite, deux cercles C et C′, ayant pour centres A et A′, pour rayons ρ et ρ'. Lorsqu'on fait tendre ρ et ρ' vers zéro d'une part, s' vers s d'autre part, cette intégrale double tend vers une limite que je vais évaluer de deux façons différentes.

En premier lieu, soit α un nombre négatif très voisin de zéro. Prenons pour s' le lieu $u = \alpha$, dont nous avons étudié la nature dans le n° 2. Comme α doit tendre vers zéro, la limite cherchée est la même que celle de l'intégrale double

$$\int\int\left(\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u'}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial u'}{\partial y}\right)dx\,dy,\ v = u-\alpha = g_a - \log\frac{1}{r} - \alpha.$$

D'après un théorème connu, cette intégrale est égale à la suivante :

$$-\int_\sigma v\,\frac{du'}{dn}\,dl.$$

Celle-ci se décompose en trois autres : l'une relative à s', la deuxième à C, la troisième à C′. La première est nulle, parce que v est nul tout le long de s' ; la seconde est égale à

$$-\int_0^{2\pi}\left(g_a - \log\frac{1}{\rho} - \alpha\right)\frac{du'}{dn}\,\rho\,d\theta$$

et tend vers zéro avec ρ. Enfin la troisième s'écrit

$$-\int_0^{2\pi} v\left(\frac{dg_{a'}}{dn}+\frac{1}{\rho'}\right)\rho'\,d\theta$$

et tend, lorsque ρ' tend vers zéro, vers

$$-2\pi\left[g_a(x',y') - \log\frac{1}{\delta} - \alpha\right],$$

δ désignant la distance AA′. Si enfin α tend aussi vers zéro, on obtient pour expression de la limite cherchée

$$-2\pi\left[g_a(x',y') - \log\frac{1}{\delta}\right].$$

Si maintenant on reprend le même raisonnement en introduisant cette fois le lieu $u' = \alpha$ et la fonction $v' = u' - \alpha$, on arrive à donner à la même limite l'expression

$$-2\pi\left[g_{a'}(x, y) - \log\frac{1}{\delta}\right].$$

La comparaison de ces deux expressions donne la propriété énoncée.

2° Supposons que le point A intérieur à S tende vers un point M de s, et examinons ce que deviendra la fonction g_a relative au point A. Soit, à cet effet, A′ un point fixe de S, et considérons comme précédemment la courbe $u' = \alpha$, α étant un nombre négatif voisin de zéro. Supposons que le point A soit sur cette courbe. Alors on a, d'après la propriété démontrée,

$$g_a(x', y') = g_{a'}(x, y) = \log\frac{1}{\delta} + \alpha.$$

Autrement dit, la fonction $u = g_a - \log\frac{1}{r}$ a la valeur α au point A′. D'ailleurs, en tout point de S autre que A, elle a une valeur déterminée *négative*. Dès lors, en employant un mode de raisonnement suivi au n° 1, on fait voir que cette différence tend uniformément vers zéro en même temps que α à l'intérieur de tout cercle ayant A′ pour centre et tout entier intérieur à S. En opérant de proche en proche, on voit que g_a tend uniformément vers $\log\frac{1}{r}$ à l'intérieur de toute aire S′ de même connexion que S, mais dont le contour s' est tout entier *intérieur* à S.

Enfin on montre, par des développements en séries trigonométriques, que toute dérivée partielle de g_a tend vers la dérivée partielle correspondante de $\log\frac{1}{r}$, et cela dans les mêmes conditions que précédemment.

6. Abordons à présent l'étude de l'intégrale (¹)

$$\frac{1}{2\pi}\int_{s'} f_1(l')\frac{dg}{dn'}\,dl'.$$

Le contour variable s' qui doit tendre vers s peut être choisi de la

(¹) Harnack, § 40.

manière suivante : A chaque point M de s faisons correspondre un point M′ en menant par M la parallèle à une direction fixe, par exemple à l'axe des y, et en prenant sur cette parallèle, et vers l'*intérieur* de l'aire, une longueur $MM' = \delta$, δ étant un nombre positif fixe. Cette construction doit être modifiée dans le voisinage d'un point M de s tel que la parallèle à Oy menée par M est d'abord extérieure, ou d'abord intérieure à S, *des deux côtés de* M. Dans le premier cas, on considère la droite NN_1 parallèle à Oy et située dans le voisinage de M telle que $NN_1 = 2\delta$, et c'est le milieu N′ de NN_1 qui correspond, à lui tout seul, à tout l'arc NMN_1. Il est vrai qu'en ce point la fonction $f_1(l')$ éprouvera une variation brusque ; mais cette discontinuité s'évanouira en même temps que δ. Dans le second cas, au point M correspondent deux points M′, M'_1, de sorte que la courbe s' ne se ferme pas : il faut alors joindre ces deux points par un arc de courbe situé tout entier à l'intérieur de S. Tous les points de cet arc de courbe devront être considérés comme correspondant au même point M ; en tous ces points, $f_1(l')$ a la même valeur.

Ceci posé, étudions la fonction u' définie par l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi}\int_{s'} f_1(l')\frac{dg}{dn'}\,dl'.$$

La première propriété de la fonction de Green nous apprend que cette fonction est harmonique dans S : car la valeur de g en un point M′ de s' est égale à la valeur au point A de la fonction de Green relative au point M′. La seconde propriété nous montre que cette fonction est continue sur s : car, lorsque le point A tend vers un point M de s, g et $\frac{dg}{dn'}$ tendent respectivement vers $\log\frac{1}{r}$ et $\frac{d\log\frac{1}{r}}{dn'}$, r désignant la distance du point z au point M, et cela uniformément tout le long de s'. Par suite, la fonction u' prend au point M la valeur

$$Q' = \frac{1}{2\pi}\int_{s'} f_1(l')\frac{d\log\frac{1}{r}}{dn'}\,dl' = \frac{1}{2\pi}\int_{s'} f_1(l')(dl')_m.$$

Voyons ce que devient cette valeur, lorsque l'aire S′ tend vers l'aire

S, autrement dit lorsque δ tend vers zéro. A cet effet, partageons comme précédemment s en s_1 et s_2; à ces deux portions de s correspondent, dans s', les portions s'_1 et s'_2, et l'on a

$$\frac{1}{2\pi}\int_{s'} f_1(l')\,(dl')_m = \frac{1}{2\pi}\int_{s'_1} f_1(l')(dl')_m + \frac{1}{2\pi}\int_{s'_2} f_1(l')(dl')_m.$$

Le second terme du second membre tend, lorsque δ tend vers zéro, vers $\frac{1}{2\pi}\int_{s_2} f(l)\,(dl)_m$. Dans les mêmes conditions, le premier terme a une limite déterminée. On peut l'écrire

$$\frac{m}{2\pi}\int_{s'_1}(dl')_m + \varepsilon,$$

ε tendant vers zéro en même temps que s_1. Or l'intégrale $\int_{s'_1}(dl')_m$ n'est autre chose, au signe près, que l'angle α'' sous lequel du point M on voit s'_1; lorsque s' tend vers s, cet angle tend vers α'. Par suite, on a

$$\lim \frac{1}{2\pi}\int_{s'} f_1(l')(dl')_m = \frac{1}{2\pi}\int_{s_2} f(l)\,(dl)_m - \frac{\alpha'}{2\pi}m + \varepsilon_1,$$

ε_1 tendant vers zéro en même temps que s_1. D'ailleurs, lorsque s_1 tend vers zéro, α' tend vers α; $\int_{s_2} f(l)\,(dl)_m$ tend vers $\int_s f(l)\,(dl)_m$. Donc enfin

$$\lim \frac{1}{2\pi}\int_{s'} f_1(l')\,(dl')_m = \frac{1}{2\pi}\int_s f(l)\,(dl)_m - \frac{\alpha}{2\pi}m = Q.$$

Ainsi, lorsque δ tend vers zéro, Q' tend vers Q.

Mais il y a plus : Q' tend vers Q *uniformément tout le long de s*. Soit ε' un nombre positif quelconque; on peut assigner un nombre positif η tel que, sous la condition $\delta < \eta$, on ait l'inégalité $|Q - Q'| < \varepsilon'$, et *cela pour tout point* M *de s*. Car on a

$$Q' = \varepsilon - \frac{\alpha''}{2\pi}m + \frac{1}{2\pi}\int_{s'_2} f_1(l')\,\frac{d\log\frac{1}{r}}{dn'}\,dl',$$

$$Q = \varepsilon_1 - \frac{\alpha'}{2\pi}m + \frac{1}{2\pi}\int_{s_2} f(l)\,\frac{d\log\frac{1}{r}}{dn}\,dl.$$

On peut d'abord, par un choix convenable de l'arc s_1, faire en sorte que $|\varepsilon - \varepsilon_1|$ soit inférieur à $\frac{\varepsilon'}{3}$ en chaque point de s. Ensuite on peut fixer : 1° un nombre η' tel que, sous la condition $\delta < \eta'$, les seconds termes de Q et de Q' diffèrent de moins de $\frac{\varepsilon'}{3}$; 2° un nombre η'' tel que, sous la condition $\delta < \eta''$, les troisièmes termes diffèrent de moins de $\frac{\varepsilon'}{3}$, et cela tout le long de s. Soit η le plus petit des deux nombres η' et η''; ce nombre η vérifie la condition ci-dessus énoncée.

Dès lors, la proposition que nous avons en vue résulte de notre théorème sur les séries à termes harmoniques (première Partie, n° 6). Considérons une série de quantités positives qui tendent vers zéro : $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots, \varepsilon_n, \ldots$, et soient $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n, \ldots$ les fonctions u' correspondant aux divers termes de cette suite pris comme valeurs de δ. La série

$$v_1 + (v_2 - v_1) + (v_3 - v_2) + \ldots + (v_n - v_{n-1}) + \ldots,$$

dont les termes sont harmoniques dans S et continus sur s, converge uniformément sur s, d'après ce qui vient d'être dit. Elle définit donc une fonction u harmonique dans S, continue sur s, et prenant au point M de s la valeur Q.

7. Dans le cas où la fonction $f(l)$ éprouve des variations brusques en certains points de s, sans cesser cependant d'être finie, c'est-à-dire dans le cas du problème *généralisé*, on est conduit naturellement à penser que le même procédé fournira la fonction U relative aux valeurs $f(l)$. Mais il ne faut pas croire que l'on puisse suivre, pour le démontrer, une marche toute parallèle à celle du numéro précédent, car les fonctions u' que l'on formera seront encore *continues sur s* et ne seront en aucune façon des fonctions U. Aussi n'ai-je pas l'intention de reprendre cette discussion; je me bornerai, et cela en vue d'un théorème ultérieur, à étudier dans ce cas la fonction

$$\frac{1}{2\pi}\int_s f(l)\,(dl)_a \quad (^1).$$

(1) *Voir* HARNACK, § 33.

C'est une fonction harmonique dans S, et l'on voit, comme au n° 4, qu'en un point non singulier de s elle prend la valeur

$$\frac{1}{2\pi}\int_s f(l)\,(dl)_m + \left(1 - \frac{\alpha}{2\pi}\right) m.$$

Soit maintenant M un point singulier, auquel correspondent les deux valeurs limites m' et m''. Supposons que A tende vers M par un chemin intérieur à S faisant avec les deux branches de s issues de M des angles β' et β'', avec $\beta' + \beta'' = \alpha$. Partageons, comme nous l'avons déjà fait, s en s_1 et s_2; puis s_1 lui-même en s'_1 et s''_1, de part et d'autre de M. On a

$$\frac{1}{2\pi}\int_s f(l)\,(dl)_a = \frac{1}{2\pi}\int_{s'_1} f(l)\,(dl)_a + \frac{1}{2\pi}\int_{s''_1} f(l)\,(dl)_a + \frac{1}{2\pi}\int_{s_2} f(l)\,(dl)_a.$$

Le dernier terme du second membre tend vers $\frac{1}{2\pi}\int_{s_2} f(l)\,(dl)_m$. Le premier terme peut s'écrire $\frac{m'}{2\pi}\int_{s'_1}(dl)_a + \varepsilon'$, ε' tendant vers zéro en même temps que s'_1. D'ailleurs $\int_{s'_1}(dl)_a$ est l'angle sous lequel du point A on voit s'_1 ; lorsque A tend vers M sur le chemin considéré, cet angle tend vers $\pi - \gamma'$, γ' étant l'angle intérieur à S formé par la tangente en M au chemin considéré et la demi-droite joignant M à l'autre extrémité de s'_1. On raisonne de même sur le second terme, et l'on arrive à l'égalité suivante :

$$\lim \frac{1}{2\pi}\int_s f(l)\,(dl)_a = \frac{1}{2\pi}\int_{s_2} f(l)\,(dl)_m + \left(\frac{1}{2} - \frac{\gamma'}{2\pi}\right) m' + \varepsilon'_1 + \left(\frac{1}{2} - \frac{\gamma''}{2\pi}\right) m'' + \varepsilon''_1,$$

ε'_1 tendant vers zéro avec s'_1 et ε''_1 avec s''_1. D'ailleurs, lorsque s'_1 et s''_1 tendent simultanément vers zéro, $\int_{s_2} f(l)\,(dl)_m$ tend vers $\int_s f(l)\,(dl)_m$; γ' et γ'' tendent respectivement vers β' et β''. On a donc

$$\lambda = \lim \frac{1}{2\pi}\int_s f(l)\,(dl)_a = \frac{1}{2\pi}\int_s f(l)\,(dl)_m + \left(\frac{1}{2} - \frac{\beta'}{2\pi}\right) m' + \left(\frac{1}{2} - \frac{\beta''}{2\pi}\right) m''.$$

Si le point M est une pointe, β' et β'' sont nuls, et la fonction considérée prend au point M une valeur déterminée. Au contraire, lorsque le point M n'est pas une pointe, λ dépend du chemin par lequel on tend vers M. Les valeurs de la fonction sur s tendent, suivant qu'on se rapproche de M dans un sens ou dans l'autre, vers

$$l' = \frac{1}{2\pi}\int_s f(l)(dl)_m + \frac{m'}{2} + \left(\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2\pi}\right) m''$$

ou vers

$$l'' = \frac{1}{2\pi}\int_s f(l)(dl)_m + \left(\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2\pi}\right) m' + \frac{m''}{2}.$$

On vérifie sans peine l'égalité

$$\lambda = l'\left(1 - \frac{\beta'}{\alpha}\right) + l''\left(1 - \frac{\beta''}{\alpha}\right).$$

On voit que la fonction définie par l'intégrale $\frac{1}{2\pi}\int_s f(l)(dl)_a$ est une fonction U, dont les points singuliers sont ceux de $f(l)$, à l'exception de ceux de ces points qui sont des pointes de S.

III. — Le problème généralisé ne peut admettre plus d'une solution.

8. Nous allons, pour terminer, nous occuper de la question de savoir si le problème généralisé peut admettre plus d'une solution. La réponse à cette question sera négative, si nous parvenons à établir le résultat suivant :

Soit u une fonction harmonique dans S, prenant la valeur zéro en chaque point de s, sauf en un nombre limité de points singuliers A, enfin conservant une valeur finie dans le voisinage de chaque point singulier. Une telle fonction est nécessairement identique à zéro.

Il suffit de démontrer ce théorème pour une aire S *à connexion simple* et dont le contour s renferme *un seul point singulier*. Car supposons cela fait, et envisageons maintenant une aire quelconque Σ, dont le contour possède un nombre quelconque de points singuliers. Soit A l'un quelconque d'entre eux; je dis que la fonction u considérée prend en A la valeur zéro. Car prenons sur σ, de part et d'autre de A, deux points M_1 et M_2 que nous joindrons par une ligne L tracée dans Σ.

L'aire S comprise entre l'arc M_1M_2 et L est simplement connexe, et son contour ne renferme que le seul point singulier A : pour cette aire, le problème généralisé ne peut, par hypothèse, admettre plus d'une solution. u n'est donc autre chose que la fonction harmonique dans S et continue sur s qui prend la valeur zéro en chaque point de M_1M_2 et coïncide avec u le long de L. Ainsi u prend la valeur zéro en chaque point de σ sans exception : elle est donc nulle dans Σ.

Ceci posé, soit N le point singulier unique de s (1). Je me borne au cas où l'angle α relatif à ce point est égal à π (c'est du reste ce qui a lieu ordinairement). Je partage s en deux parties : l'une, s_1, est aussi petite qu'on veut et contient à son *intérieur* le point N; l'autre, s_2, comprend le reste de s. Soient K un nombre positif auquel reste inférieur le module de u, et K′ un nombre supérieur à K. J'appelle $f(l)$ la fonction qui a la valeur K′ sur s_1, la valeur zéro sur s_2, et je pose

$$U = \frac{1}{\pi}\int_s f(l)\,(dl)_a = \frac{K'}{\pi}\int_{s_1}(dl)_a,$$

$$P_m = \frac{1}{\pi}\int_s f(l)\,(dl)_m = \frac{K'}{\pi}\int_{s_1}(dl)_m.$$

Le numéro précédent nous apprend comment se comporte la fonction U. C'est une fonction U pour l'aire S; ses points singuliers sont les deux points Q qui séparent s_1 et s_2; en un point M de s_1 elle prend la valeur $P_m + K'$; en un point M de s_2, la valeur P_m; en un point Q, ses deux valeurs limites sont P_q et $P_q + K'$. Car on peut toujours supposer l'arc s_1 assez petit pour qu'en tous les points de cet arc, y compris les extrémités, l'angle α soit égal à π. Quant à P_m, c'est une fonction de l'arc l qui est continue tout le long de s. Soit δ la limite supérieure des valeurs de son module. Je dis qu'en un point quelconque A de S on a l'inégalité

$$|u| < U + \delta.$$

Je considère à cet effet la différence $U - u$. Comme j'ignore la manière dont cette fonction se comporte dans le voisinage du point N, j'exclus ce voisinage par un arc de cercle de centre N et de rayon très petit, assez petit pour que les valeurs de U sur cet arc de cercle soient

(1) HARNACK, § 41.

supérieures à $P_n + K$; soit S′ l'aire S ainsi réduite. La différence $U - u$ est une fonction U pour l'aire S′; sur s', elle coïncide avec U, sauf peut-être sur l'arc de cercle; mais là elle prend une valeur supérieure à $P_n + K - u$ et par suite supérieure à P_n. P_m étant toujours au moins égal à $-\delta$, on voit que la limite inférieure des valeurs sur s' de $U - u$ est au moins égale à $-\delta$. Donc, dans S′, et en particulier en A, on a

$$U - u > -\delta.$$

La considération de la somme $U + u$ donnera de même

$$U + u > -\delta.$$

L'inégalité $|u| < U + \delta$ est ainsi établie; elle démontre le théorème : car son premier membre ne dépend pas de s_1; dans le second membre au contraire, U et δ en dépendent et peuvent être rendus aussi petits qu'on veut. D'abord U n'est autre chose, au signe près, que le produit de $\frac{K'}{\pi}$ par l'angle sous lequel, du point A, on voit s_1; cet angle tend vers zéro en même temps que s_1. Quant à $P_m : \frac{K'}{\pi}$, c'est l'angle sous lequel, du point M, on voit s_1, lorsque le point M est extérieur à s_1; c'est l'angle formé par la tangente en M avec la corde de l'arc s_1, lorsque M coïncide avec un point Q; enfin c'est la somme ou la différence des angles de la tangente en M avec les demi-droites joignant M aux deux extrémités de l'arc s_1, lorsque M est à l'intérieur de s_1. Lorsque s_1 tend vers zéro, P_m tend aussi vers zéro, et cela *uniformément tout le long de s* : donc δ tend vers zéro. Ainsi la somme $U + \delta$ peut être rendue plus petite que η; et, comme u ne dépend pas de s_1, cela exige que cette valeur soit rigoureusement nulle.