PIERRE NAZIMOW

Sur quelques applications de la théorie des fonctions elliptiques à la théorie des nombres

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 5 (1888), p. 23-48
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1888_3_5__23_0>

SUR QUELQUES APPLICATIONS

DE LA

THÉORIE DES FONCTIONS ELLIPTIQUES

A LA

THÉORIE DES NOMBRES,

PAR M. PIERRE NAZIMOW,

DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES PURES.

AVANT-PROPOS.

Au commencement de l'année 1885, j'ai publié en langue russe un Traité intitulé : *Sur les applications de la théorie des fonctions elliptiques à la théorie des nombres*, 424 pages in-8°. Le présent article est une analyse de ce Traité. Comme quelques Chapitres de mon Ouvrage ont pour objet des théories étudiées assez en détail dans plusieurs Recueils français ou allemands, je n'en exposerai qu'une partie. Ainsi le Chapitre II, où est résumé un Mémoire de Jacobi (¹), le Chapitre V, où est résumé un Mémoire d'Eisenstein (²), le Chapitre VII et dernier, qui traite des méthodes suivies par MM. Kronecker et Gierster pour déduire les formules qui portent leurs noms, ne seront pas analysés complètement; le Chapitre VII sera laissé de côté, parce que divers articles de M. Gierster (³) contiennent un exposé assez détaillé des travaux qui en font l'objet. Pour les quatre autres Chapitres, nous

(¹) *Ueber unendliche Reihen, deren Exponenten zugleich in zwei verschiedenen quadratischen Formen enthalten sind* (*Journal de Crelle*, t. 37).

(²) *Ueber die Irreductibilität und einige andere Eigenschaften der Gleichung, von welcher die Theilung der ganzen Lemniscate abhängt* (*Journal de Crelle*, t. 39).

(³) *Mathematische Annalen*, t. XVII, XXI et XXII.

allons les résumer en faisant correspondre à chacun d'eux un Chapitre de cet article.

Nous ferons usage des notations suivantes :

$$K=\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \qquad k'^2=1-k^2,$$

$$K'=\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k'^2x^2)}}, \qquad q=e^{-\frac{\pi K'}{K}}.$$

Les fonctions de Jacobi seront représentées par ϑ, ϑ_1, ϑ_2 et ϑ_3 :

$$(1)\quad \vartheta(x,q)=\vartheta(x)=1-2q\cos 2x+2q^4\cos 4x-2q^9\cos 6x+\ldots+(-1)^n 2q^{n^2}\cos 2nx+\ldots,$$

$$(2)\quad \vartheta_3(x,q)=\vartheta_3(x)=1+2q\cos 2x+2q^4\cos 4x+2q^9\cos 6x+\ldots+2q^{n^2}\cos 2nx+\ldots,$$

$$(3)\quad \vartheta_1(x,q)=\vartheta_1(x)=2q^{\frac{1}{4}}\sin x-2q^{\frac{9}{4}}\sin 3x+2q^{\frac{25}{4}}\sin 5x-\ldots+(-1)^n 2q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}\sin(2n+1)x+\ldots$$

$$(4)\quad \vartheta_2(x,q)=\vartheta_2(x)=2q^{\frac{1}{4}}\cos x+2q^{\frac{9}{4}}\cos 3x+2q^{\frac{25}{4}}\cos 5x+\ldots+2q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}\cos(2n+1)x+\ldots.$$

Les trois fonctions elliptiques seront représentées d'une des manières suivantes :

$$\sin\operatorname{am}\left(\frac{2Kx}{\pi},q\right)=\sin\operatorname{am}\left(\frac{2Kx}{\pi},k\right)=\sin\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}=\operatorname{sn}\frac{2Kx}{\pi}=\frac{1}{\sqrt{k}}\frac{\vartheta_1(x)}{\vartheta(x)},$$

$$\cos\operatorname{am}\left(\frac{2Kx}{\pi},q\right)=\cos\operatorname{am}\left(\frac{2Kx}{\pi},k\right)=\cos\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}=\operatorname{cs}\frac{2Kx}{\pi}=\sqrt{\frac{k'}{k}}\frac{\vartheta_2(x)}{\vartheta(x)},$$

$$\Delta\operatorname{am}\left(\frac{2Kx}{\pi},q\right)=\Delta\operatorname{am}\left(\frac{2Kx}{\pi},k\right)=\Delta\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}=\Delta\frac{2Kx}{\pi}=\frac{\sqrt{k'}\vartheta_3(x)}{\vartheta(x)}.$$

CHAPITRE I.

LA PREMIÈRE MÉTHODE DE JACOBI.

Les séries trigonométriques qu'on étudie dans la théorie des fonctions elliptiques peuvent être employées de deux manières différentes pour obtenir des théorèmes arithmétiques. La première consiste à prendre ces séries sous leurs formes générales et à en déduire des théorèmes, où interviennent des fonctions arbitraires; en spécialisant ces fonctions, on a divers théorèmes particuliers. La seconde consiste à déduire les théorèmes particuliers par une méthode directe, que M. Bougaïeff a très bien caractérisée en l'appelant la *méthode des constantes elliptiques*. Cette seconde méthode a été suivie de préférence par divers auteurs, qui ont abordé, après Jacobi, ces sortes de questions. Jacobi, dans le troisième Volume du *Journal de Crelle*, a indiqué en quelques lignes le principe de cette méthode. Qu'on prenne quelque constante elliptique, fonction de K et k; cette constante peut être regardée comme provenant de telle ou telle fonction, dont le développement en série trigonométrique est donné dans certains cas par la théorie des fonctions elliptiques, et dans d'autres cas peut se déduire par des opérations élémentaires de séries trigonométriques connues. On obtiendra ainsi des relations contenant des séries trigonométriques dont l'argument aura une valeur particulière. En comparant les coefficients des mêmes puissances de q dans les deux membres de ces identités, on trouvera des théorèmes arithmétiques.

Dans ce Chapitre, nous nous occuperons seulement d'une classe toute spéciale de théorèmes arithmétiques, savoir ceux qui concernent le nombre des solutions de certaines équations indéterminées du second ordre, propositions de la nature de celles dont Liouville a publié un si grand nombre dans les premiers Volumes de la seconde série de son Journal. Mais d'abord nous devons rappeler les séries trigonométriques qui reviendront le plus souvent au cours de cet article. Nous donnons à ces séries deux formes différentes : dans l'une, les termes seront ordonnés suivant les multiples croissants de la variable qui entre dans les arguments des fonctions trigonométriques; dans l'autre, les termes seront ordonnés suivant les puissances croissantes de q.

$$(5)\qquad \frac{2Kk}{\pi}\,\mathrm{sin\,am}\,\frac{2Kx}{\pi} = 4\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{\sqrt{q^{2n-1}}}{1-q^{2n-1}}\sin(2n-1)x = 4\sum_{n=1}^{n=\infty}\left(\sqrt{q^{2n-1}}\sum_{2n-1=d\delta}^{n=\infty}\sin dx\right),$$

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{4K^2k^2}{\pi^2}\,\mathrm{sin^2am}\,\frac{2Kx}{\pi} &= 8\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{nq^n}{1-q^{2n}}(1-\cos 2nx)\\ &= 8\sum_{n=1}^{n=\infty}\left[q^n\sum_{n=d(2\delta-1)} d(1-\cos 2dx)\right],\end{aligned}\right.$$

$$
(7)\quad \left\{
\begin{aligned}
\frac{2\mathrm{K}}{\pi} : \sin \operatorname{am} \frac{2\mathrm{K}x}{\pi} &= \frac{1}{\sin x} + 4\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{q^{2n-1}}{1-q^{2n-1}} \sin(2n-1)x \\
&= \frac{1}{\sin x} + 4\sum_{n=1}^{n=\infty} \left[q^n \sum_{n=(2d-1)\delta} \sin(2d-1)x \right],
\end{aligned}
\right.
$$

$$
(8)\quad \left\{
\begin{aligned}
\log \Delta \operatorname{am} \frac{2\mathrm{K}x}{\pi} - \log\sqrt{k'} = \log \frac{\vartheta_3(x)}{\vartheta(x)} &= 4\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{q^{2n-1}}{1-q^{4n-2}} \, \frac{\cos(4n-2)x}{2n-1} \\
&= 4\sum_{n=1}^{n=\infty} \left(q^{2n-1} \sum_{2n-1=d\delta} \frac{1}{d} \cos 2dx \right),
\end{aligned}
\right.
$$

$$
(9)\quad \left\{
\begin{aligned}
\log \vartheta(x) &= -\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n} \, \frac{q^{2n}}{1-q^{2n}} - 2\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n} \, \frac{q^n}{1-q^{2n}} \cos 2nx \\
&= -\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n} \, \frac{q^{2n}}{1-q^{2n}} - 2\sum_{n=1}^{n=\infty} \left(q^n \sum_{n=d(2\delta-1)} \cos 2dx \right),
\end{aligned}
\right.
$$

$$
(10)\quad \left\{
\begin{aligned}
\sqrt{\frac{2\mathrm{K}k}{\pi}} \sin \operatorname{am} \frac{2\mathrm{K}x}{\pi} \, \vartheta_2(x) &= 4\sum_{n=1}^{n=\infty} q^{n^2} \sin 2nx \left[q^{-\frac{1}{4}} + q^{-\frac{9}{4}} + \ldots + q^{-\left(n-\frac{1}{2}\right)^2} \right] \\
&= 2\sum_{n=0}^{n=\infty} \left(q^{n+\frac{3}{4}} \sum_{4n+3=d\delta} \sin \frac{d+\delta}{2} x \right),
\end{aligned}
\right.
$$

$$
(11)\quad \left\{
\begin{aligned}
\sqrt{\frac{2\mathrm{K}k}{\pi}} \sin \operatorname{am} \frac{2\mathrm{K}x}{\pi} \, \vartheta_3(x) &= 2\sum_{n=0}^{\infty} q^{\frac{1}{4}(2n+1)^2} \sin(2n+1)x \left(1 + 2q^{-1} + \ldots + 2q^{-n^2}\right) \\
&= 2\sum_{n=0}^{\infty} \left(q^{n+\frac{1}{4}} \sum_{4n+1=d\delta} \sin \frac{d+\delta}{2} x \right).
\end{aligned}
\right.
$$

Étant donnée une équation indéterminée du second degré, telle que

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey = n,$$

on peut toujours mettre cette équation sous la forme

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = n,$$

où a, b, c et n sont des nombres entiers. Pour déterminer le nombre des solutions entières de cette dernière équation, considérons la somme double

$$\sum\sum q^{ax^2+2bxy+cy^2} = \sum\sum q^{\frac{1}{a}(ax+by)^2} q^{\frac{1}{a}(ac-b^2)y^2}, \tag{12}$$

dans laquelle x et y prennent toutes les valeurs entières depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$. Faisons $y = at + \lambda$; il vient

$$ax + by = a(x+bt) + b\lambda = a\zeta + b\lambda;$$

la somme (12) prendra la forme

$$\sum\sum\sum q^{\frac{1}{a}(a\zeta+b\lambda)^2} q^{\frac{1}{a}(ac-b^2)(at+\lambda)^2};$$

t et ζ doivent varier depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$ et λ de 0 jusqu'à $a-1$. Dans le cas où a, c et $ac-b^2$ sont positifs, la dernière somme peut être représentée par une somme de a termes, contenant les produits des fonctions de Jacobi :

$$\sum_{\lambda=0}^{=a-1} q^{c\lambda^2} \vartheta_3(b\lambda i \log q,\, q^a)\, \vartheta_3[(ac-b^2)\lambda i \log q,\, q^{a(ac-b^2)}]. \tag{13}$$

Dans beaucoup de cas, on pourra donner à (13) une forme plus simple. Mais à ces produits de fonctions ϑ on peut substituer le produit de $\frac{2K}{\pi}$ soit par une fonction du module k, soit par des fonctions elliptiques à arguments particuliers. Sous cette dernière forme, on peut évidemment considérer la somme (13) comme provenant d'une fonction elliptique dans laquelle on a donné à l'argument une valeur particulière.

Dans le cas où a et $ac-b^2$ sont des puissances de 2, on trouvera dans les formules de Landen le moyen de représenter (13) par une fonction de k. Après ces calculs, on saura dans beaucoup de cas de quelle fonction elliptique se déduit cette fonction de k. Pour les fonctions elliptiques, on a des séries trigonométriques. En comparant les coefficients des mêmes puissances de q dans la première somme (12) et dans la nouvelle série trigonométrique, on aura des théorèmes concernant le nombre des solutions de l'équation indéterminée en question. Ainsi

$$\sum\sum q^{x^2+2y^2} = \vartheta_3(0, q)\vartheta_3(0, q^2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{2K}{\pi}\sqrt{1+k'}.$$

Faisons maintenant $x = \frac{\pi}{4}$ dans la formule (7); alors la série (7) nous donnera précisément la fonction cherchée de K et k'. On obtient ainsi

$$\sum_{\lambda=-\infty}^{\lambda=+\infty}\sum_{y=-\infty}^{y=+\infty} q^{x^2+2y^2} = 1 + 2\sqrt{2}\sum_{n=1}^{n=\infty}\left[q^n \sum_{n=(2d-1)\delta} \sin(2d-1)\frac{\pi}{4}\right]$$

$$= 1 - 2\sum_{n=1}^{n=\infty}\left[q^n \sum_{n=(2d-1)\delta} (-1)^{\frac{1}{2}(d^2+d)}\right].$$

La comparaison des coefficients de q^n dans les deux membres de la dernière égalité donne aisément ce théorème :

Théorème. — *La moitié du nombre des solutions de l'équation*

$$x^2 + 2y^2 = n$$

est égale au nombre des diviseurs de n, ayant la forme $8p+1$ et $8p+3$, diminué du nombre des diviseurs de n, dont la forme est $8p+5$ ou $8p+7$.

Ce qu'on a dit dans le cas où a et $ac - b^2$ sont des puissances de 2 subsiste quand a et $ac - b^2$ sont quelconques; seulement les formules de Landen doivent alors être remplacées par d'autres, celles, par exemple, que donne la théorie de la transformation.

Si l'on veut étudier le nombre des solutions entières de l'équation

$$nx^2 + my^2 = p,$$

n et m représentant des nombres impairs positifs et p un entier positif quelconque, il faut recourir au produit $\vartheta_3(0, q^n)\,\vartheta_3(0, q^m)$. La théorie de la transformation nous donne immédiatement

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned} \vartheta_3(0, q^n)\vartheta_3(0, q^m) &= \frac{1}{\sqrt{nm}}\frac{2K}{\pi}F\left(\frac{\pi}{nm}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{nm}}\frac{2K}{\pi}\prod_{h=1}^{h=\frac{n-1}{2}}\frac{\operatorname{sin am}\frac{2hK}{n}}{\operatorname{sin am}\frac{(2h-1)K}{n}}\prod_{h=1}^{h=\frac{m-1}{2}}\frac{\operatorname{sin am}\frac{2hK}{m}}{\operatorname{sin am}\frac{(2h-1)K}{m}}.\end{aligned}\right.$$

Remplaçons $\frac{2K}{nm}$ par $\frac{2Kx}{\pi}$ et supposons que les nombres n et m n'ont pas de diviseur commun. Le second membre de l'équation (14) sera une fonction doublement périodique de x aux périodes π et $\frac{K'\pi i}{K}$; cette fonction aura seulement des infinis simples. On peut donc lui appliquer le théorème énoncé à la page 257 de la *Théorie des fonctions elliptiques* de Briot et Bouquet; on a ainsi

$$(15)\qquad \frac{2K}{\pi}F(x)=\sum A_h\left[\frac{d\log\vartheta_1(x-\alpha_h)}{dx}-\left(\frac{d\log\vartheta_1(x-\alpha_h)}{dx}\right)_{x=0}\right],$$

α_h désignant l'affixe d'un infini de $F(x)$ compris dans le parallélogramme élémentaire. La somme indiquée doit être étendue à tous les α_h. Dans cette somme, les A_h sont généralement des fonctions du module k; dans les rares cas où les A_h sont des quantités numériques, notre problème sera résolu complètement.

Je donne, avec quelques remarques concernant les propriétés de ces infinis α_h, cinq théorèmes relatifs à des cas où les A_h ont des valeurs numériques, et j'applique ces théorèmes aux équations

$$x^2+5y^2=n,\qquad x^2+7y^2=n.$$

Comme ces théorèmes ont une application très restreinte, tout en pouvant être appliqués aussi aux équations

$$\begin{aligned} x^2+3y^2&=n, & x^2+xy+y^2&=n,\\ 2x^2+2xy+3y^2&=n, & x^2+xy+2y^2&=n, \end{aligned}$$

je les passe sous silence, d'autant plus volontiers que cette méthode peut toujours être suppléée par d'autres procédés plus rapides et qui s'appliquent encore à des cas où elle tombe en défaut.

Cherchons, comme exemple, le nombre des solutions entières de l'équation $x^2+3y^2=n$. Nous avons

$$(16)\qquad \left\{\begin{aligned} \sum\sum q^{x^2+3y^2}&=\frac{1}{\sqrt{3}}\,\frac{2K}{\pi}\left(\frac{\sin\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}\,\Delta\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}}{\cos\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}}\right)_{x=\frac{\pi}{3}}\\ &=-\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{d\log\cos\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}}{dx}\right)_{x=\frac{\pi}{3}}. \end{aligned}\right.$$

Mais la théorie des fonctions elliptiques nous donne

$$(17) \qquad -\frac{d\log\cos\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}}{dx} = \operatorname{tang} x + 4\sum_{r=1}^{r=\infty}\frac{q^r}{1+(-q)^r}\sin 2rx;$$

on aura donc

$$(18) \qquad \sum\sum q^{x^2+3y^2} = 1 + 2\sum_{n=1}^{n=\infty}\varkappa(2n-1)\left[q^{2n-1} + 3q^{4(2n-1)} + 3q^{16(2n-1)} + 3q^{64(2n-1)} + \ldots\right]$$

$\varkappa(2n-1)$ est la différence entre le nombre des diviseurs de $2n-1$, qui sont de la forme $6r+1$, et celui des diviseurs de la forme $6r+5$.

Théorème. — *Pour déterminer la moitié du nombre des solutions de l'équation*

$$x^2 + 3y^2 = 2n - 1,$$

il faut du nombre des diviseurs de $2n-1$ *qui sont de la forme* $6r+1$ *soustraire celui des diviseurs de la forme* $6r+5$.

L'équation

$$x^2 + 3y^2 = 2^{2\alpha-1}(2n-1) \qquad (\alpha \geqq 1)$$

n'a pas de solution. L'équation

$$x^2 + 3y^2 = 2^{2\alpha}(2n-1) \qquad (\alpha \geqq 1)$$

a trois fois plus de solutions que

$$x^2 + 3y^2 = 2n - 1.$$

Passons maintenant aux équations indéterminées, contenant quatre ou six inconnues.

Pour les équations à quatre inconnues, on pourra réduire la somme infinie, dont dépend la résolution du problème, au produit de $\frac{4K^2}{\pi^2}$, soit par une fonction du module k, soit par une fonction doublement périodique d'un argument particulier. Dans tous les cas, la difficulté consiste seulement dans le choix de la fonction doublement périodique, dont la valeur trouvée doit provenir après le remplacement de l'argument variable par l'argument particulier. Soit $f(x)$ cette fonction; elle doit avoir des infinis doubles; mais ces infinis doubles peuvent être tels qu'au voisinage de l'un d'eux la fonction $\frac{4K^2}{\pi^2}f(x)$ soit de la forme $\frac{A}{z^2}$, z étant l'accroissement infiniment petit de x et A une constante, ou bien tels que $\frac{4K^2}{\pi^2}f(x)$ soit de la forme $\frac{A}{z^2}+\frac{B}{z}$. Dans le premier cas seulement, et encore si A est un nombre, le problème sera résolu par la fonction elliptique $f(x)$; dans tout autre cas, on devra recourir à d'autres moyens pour résoudre la question.

Pour les équations à six inconnues, les considérations qui précèdent changent seulement en ce qu'on est ramené au produit $\frac{8K^3}{\pi^3}f(x)$, $f(x)$ étant une fonction doublement périodique à infinis triples. Ces infinis doivent être tels que $\frac{8K^3}{\pi^3}f(x)$ soit de la forme $\frac{A}{z^3}$ aux environs de chacun d'eux; pour que le problème se résolve immédiatement, il faut que A ait une valeur numérique. Je donne beaucoup d'exemples qui éclairent les considérations précédentes; tous ces exemples sont pris parmi ceux que Liouville a publiés en si grand nombre dans les premiers Volumes de la seconde série de son Journal.

Exemple. — Soit à étudier le nombre des solutions entières de l'équation

$$x^2+y^2+z^2+2t^2=n.$$

Pour résoudre ce problème, il faut considérer le produit

$$\vartheta_3^3(0,q)\,\vartheta_3(0,q^2)=\frac{2K^2\sqrt{2}}{\pi^2}\sqrt{1+k'}.$$

Je cherche premièrement une série trigonométrique pour la fonction $\Delta^2\operatorname{am}\frac{3K'i}{4}-\Delta^2\operatorname{am}\frac{K'i}{4}$. De l'égalité (6) et de l'identité

$$\Delta^2\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}=1-k^2\sin^2\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}$$

on déduit aisément

$$(19)\quad \frac{4K^2}{\pi^2}\left(\Delta^2\operatorname{am}\frac{3K'i}{4}-\Delta^2\operatorname{am}\frac{K'i}{4}\right)=4\sum_{r=1}^{r=\infty}\frac{r\left(\sqrt[4]{q^r}-\sqrt[4]{q^{3r}}-\sqrt[4]{q^{5r}}+\sqrt[4]{q^{7r}}\right)}{1-q^{2r}}.$$

Mais on connaît la formule [1]

$$(20)\quad \Delta^2 \operatorname{am} \frac{K'i}{4} = \frac{\cos\operatorname{am} \frac{K'i}{2} + \Delta \operatorname{am} \frac{K'i}{2}}{1 + \cos\operatorname{am} \frac{K'i}{2}} = \frac{(1+\sqrt{k})\sqrt{1+k}}{\sqrt{k}+\sqrt{1+k}}$$
$$= (1+k)(1+\sqrt{k}) - (k+\sqrt{k})\sqrt{1+k}.$$

De même on trouvera

$$\Delta^2 \operatorname{am} \frac{3K'i}{4} = (1+k)(1+\sqrt{k}) + (k+\sqrt{k})\sqrt{1+k},$$
$$\frac{4K^2}{\pi^2}\left(\Delta^2 \operatorname{am} \frac{3K'i}{4} - \Delta^2 \operatorname{am} \frac{K'i}{4}\right) = \frac{8K^2}{\pi^2}(k+\sqrt{k})\sqrt{1+k}.$$

Remplaçons dans la dernière formule q par q^4; le second membre devient $\frac{K^2\sqrt{2}}{\pi^2}(1-k')\sqrt{1+k'}$, et la formule (19) donne

$$(21)\qquad \frac{K^2\sqrt{2}}{\pi^2}(1-k')\sqrt{1+k'} = 4\sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{r(q^r - q^{3r} - q^{5r} + q^{7r})}{1-q^{8r}}.$$

D'autre part, en différentiant l'égalité (5), on trouve

$$(22)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{4K^2}{\pi^2} k'\sqrt{1+k'} &= -\frac{4K^2}{\pi^2} k \cos\operatorname{am}\left(\frac{K}{2}+K'i\right) \Delta \operatorname{am}\left(\frac{K}{2}+K'i\right) \\ &= \sqrt{2} - 4\sum \frac{(2r-1)q^{2r-1}}{1-q^{2r-1}} \cos(2r-1)\frac{\pi}{4}. \end{aligned}\right.$$

Des formules (21) et (22) on déduit

$$(23)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{2K^2\sqrt{2}}{\pi^2}\sqrt{1+k'} &= 1 - 2\sum_{r=0}^{r=\infty} (-1)^{\frac{1}{2}(r^2+r)} \frac{(2r+1)q^{2r+1}}{1-q^{2r+1}} \\ &\quad + 8\sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{r(q^r - q^{3r} - q^{5r} + q^{7r})}{1-q^{8r}}. \end{aligned}\right.$$

Soit m un nombre impair. Le coefficient de q^m dans la seconde des

---

[1] BRIOT et BOUQUET, *Théorie des fonctions elliptiques*, p. 565.

deux séries précédentes est

$$8\Sigma(-1)^{\frac{1}{8}(\delta^2-1)}d = \omega_1(m),$$

en supposant $m = d\delta$ et étendant la sommation à toutes les solutions positives et entières de $m = d\delta$. Le coefficient de q^m dans la première série est

$$-2\omega(m) = -2\Sigma(-1)^{\frac{1}{8}(d^2-1)}d.$$

Si $m = 8l \pm 1$, on aura

$$\omega(m) = \omega_1(m)$$

et, si $m = 8l \pm 3$,

$$\omega(m) = -\omega_1(m).$$

D'où les théorèmes suivants :

THÉORÈME I. — *Le nombre des solutions entières de l'équation*

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2t^2 = m$$

est égal à $6\omega_1(m)$, *quand* $m = 8l \pm 1$, *et à* $10\omega_1(m)$, *quand* $m = 8l \pm 3$.

THÉORÈME II. — *Le nombre des solutions entières de l'équation*

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2t^2 = 2^\alpha m \qquad (\alpha > 0)$$

est donné par la formule

$$2\left[2^{\alpha+2} - (-1)^{\frac{1}{8}(m^2-1)}\right]\omega_1(m).$$

Les mêmes séries trigonométriques interviennent dans la recherche du nombre des solutions entières de l'équation

$$x^2 + 2y^2 + 16z^2 + 16t^2 = 8l + 3.$$

Seulement, outre les séries précédentes, il faut en considérer une autre d'un caractère tout à fait différent; car on aura à déterminer $\frac{1}{2}\vartheta_2(0, q^2)\vartheta_1'(0, q)$, ce qui nous donnera dans le coefficient de q^{8l+3} une somme $2\Sigma(-1)^{\frac{1}{2}(r-1)}r$, étendue à toutes les solutions positives entières de l'équation

$$r^2 + 2n^2 = 8l + 3.$$

J'ai déjà fait remarquer que le présent procédé ne peut pas généralement être regardé comme praticable.

Relativement aux équations à six inconnues, semblables aux précédentes, je résous les trois problèmes qui consistent à déterminer le nombre des solutions des équations

$$\begin{aligned} x^2+y^2+z^2+t^2+u^2+v^2 &= n, \\ x^2+y^2+z^2+t^2+2u^2+2v^2 &= n, \\ x^2+y^2+z^2+t^2+u^2+2v^2 &= n. \end{aligned}$$

Les deux premiers se résolvent par les mêmes formules; on détermine en série de q les sept fonctions $\left(\frac{2K}{\pi}\right)^3 (\sqrt{k'})^n$, $(n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6)$. Ces sept formules donnent aussi le nombre des représentations d'un entier n par six carrés lorsque quelques-uns de ces carrés doivent être pairs.

Passons aux problèmes encore plus compliqués.

Problème I. — *Trouver le nombre des solutions entières de l'équation*

$$x^2 + y^2 + 3(z^2 + t^2) = n.$$

On a

$$\begin{aligned} \vartheta_3^2(0,q)\,\vartheta_3^2(0,q^3) &= \frac{1}{3}\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 \frac{\operatorname{sn}^2\frac{2K}{3}\,\Delta^2\frac{2K}{3}}{\operatorname{cs}^2\frac{2K}{3}} = \frac{4K^2}{3\pi^2}\left(\frac{\Delta^2\frac{2K}{3}}{\operatorname{cs}^2\frac{2K}{3}} - \Delta^2\frac{2K}{3}\right) \\ &= \frac{4K^2}{3\pi^2}\left[k^2\sin^2\operatorname{am}\left(\frac{2K}{3}+K+K'i\right) - 1 + k^2\sin^2\operatorname{am}\frac{2K}{3}\right]. \end{aligned}$$

Ainsi l'on trouve, en employant la série (6) et la série bien connue pour $\frac{4K^2}{\pi^2}$,

$$(24)\qquad \sum\sum\sum\sum q^{x^2+y^2+3z^2+3t^2} = 1 + \frac{8}{3}\sum \frac{nq^n}{1-(-q)^n}\left(1 - \cos\frac{2n\pi}{3}\right).$$

Théorème. — *Le nombre des solutions de l'équation*

$$x^2 + y^2 + 3z^2 + 3t^2 = 2^\alpha 3^\beta (6n \pm 1),$$

dans laquelle α et β sont positifs ou nuls, est égal à $4\Phi(6n\pm 1)$, *quand* $\alpha = 0$, *et à* $4(2^{\alpha+1}-3)\Phi(6n\pm 1)$, *quand* $\alpha > 0$, *en représentant par* $\Phi(n)$ *la somme de tous les diviseurs du nombre* n.

La même égalité (24) peut donner un théorème sur le nombre des solutions de l'équation $x^2+xy+y^2+z^2+zt+t^2=n$.

Problème II. — *Déterminer le nombre des solutions entières de l'équation*

$$x^2+y^2+z^2+5t^2=n,$$

ainsi que de l'équation

$$x^2+5y^2+5z^2+5t^2=n.$$

En désignant par $\frac{2K}{\pi}$, $\frac{2L}{\pi}$ et $\frac{1}{M}$ les expressions $\vartheta_3^2(0, q)$, $\vartheta_3^2(0, q^5)$ et $\frac{5L}{K}$, on trouve

$$\left(\frac{1}{M}-1\right)\sqrt{\frac{1}{M}}=\frac{\operatorname{sn} u \operatorname{sn} 2u\, \Delta u\, \Delta 2u\,(1-k^2\operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 2u)^2}{\operatorname{cs}^2 u \operatorname{cs}^2 2u}, \qquad u=\frac{2K}{5}.$$

On peut mettre cette dernière sous une autre forme, comme il suit :

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{10L}{\pi}-\frac{2K}{\pi}\right)\sqrt{\frac{20LK}{\pi^2}}\\
&=\frac{4K^2k^2}{\pi^2}\left[\sin^2\operatorname{am}\frac{4K}{5}-\sin^2\operatorname{am}\frac{2K}{5}+\sin^2\operatorname{am}\left(\frac{9K}{5}+K'i\right)-\sin^2\operatorname{am}\left(\frac{7K}{5}+K'i\right)\right]\\
&=\frac{4K^2k^2}{\pi^2}\left(\sin^2\operatorname{am}\frac{4K}{5}-\sin^2\frac{2K}{5}\right)+\frac{4K^2}{\pi^2}\left(\frac{1}{\sin^2\operatorname{am}\frac{9K}{5}}-\frac{1}{\sin^2\operatorname{am}\frac{7K}{5}}\right).
\end{aligned}$$

En ayant égard aux relations (6) et (7), on obtient

$$(25)\qquad \left(\frac{10L}{\pi}-\frac{2K}{\pi}\right)\sqrt{\frac{4KL}{\pi^2}}=4+4\sum_{r=1}^{r=\infty}\frac{rq^r}{1-q^{2r}}\left(\frac{r}{5}\right)+4\sum_{r=1}^{r=\infty}\frac{(-1)^r rq^{2r}}{1-q^{2r}}\left(\frac{r}{5}\right).$$

Le symbole $\left(\frac{r}{5}\right)$ est égal à $0, +1$ ou -1, suivant que $r\equiv 0, \pm 1$ ou $\pm 2 \pmod{5}$.

Par des procédés tout semblables on trouvera

$$(26)\quad \left\{\begin{aligned}&\left(\frac{2K}{\pi}-\frac{2L}{\pi}\right)\sqrt{\frac{4KL}{\pi^2}}\\&=4\sum_{r=1}^{r=\infty}\frac{r(q^r-q^{3r}-q^{7r}+q^{9r})}{1-q^{10r}}-4\sum_{r=1}^{r=\infty}\frac{(-1)^r r(q^{2r}-q^{4r}-q^{6r}+q^{8r})}{1-q^{10r}}.\end{aligned}\right.$$

Les égalités (25) et (26) donnent les théorèmes que Liouville a énoncés dans son Journal (2^e^ série, t. IX, p. 1-12 et 17-22).

Problème III. — *Trouver le nombre des solutions entières des équations*

$$x^2+y^2+z^2+t^2+u^2+3v^2=n,\quad x^2+3(y^2+z^2+t^2+u^2+v^2)=n.$$

Pour résoudre ce problème, j'exprime par des séries trigonométriques les constantes

$$\left(\frac{1}{M^2}-1\right)\frac{1}{\sqrt{M}},\quad \left(\frac{1}{M_1^2}-1\right)\frac{1}{\sqrt{M_1}},$$

en posant

$$\vartheta_3(0,q)=\frac{2K}{\pi},\qquad \vartheta_3(0,q^3)=\frac{2L}{\pi},\qquad \frac{1}{M}=\frac{3L}{K},\qquad \frac{1}{M_1}=\frac{K}{L}.$$

Problème IV. — *Trouver le nombre des représentations du nombre n par huit carrés.*

Différentions deux fois, par rapport à x, la série (6) et faisons $\frac{2Kx}{\pi}=u$; il viendra

$$(27)\quad \left\{\begin{aligned}&\left(\frac{2K}{\pi}\right)^4(k^2\cos^2\operatorname{am}u\,\Delta^2\operatorname{am}u-k^2\sin^2\operatorname{am}u\,\Delta^2\operatorname{am}u-k^4\sin^2\operatorname{am}u\cos^2\operatorname{am}u)\\&=16\sum_{r=1}^{r=\infty}\frac{r^3q^r}{1-q^{2r}}\cos 2rx.\end{aligned}\right.$$

En faisant successivement $x=0$ et $x=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi K' i}{2K}$, on trouvera $\frac{16K^4k^2}{\pi^4}$ et $\frac{16K^4k'^2}{\pi^4}$; en additionnant ces deux dernières valeurs, on aura $\left(\frac{2K}{\pi}\right)^4$. En désignant par m un nombre impair, par $\zeta_3(m)$ la somme des cubes de tous les diviseurs du nombre m, on trouve que le nombre des représentations de m par une somme de huit carrés est égal à $16\zeta_3(m)$ et que ce même nombre pour $2^\alpha m$ est égal à

$$\tfrac{16}{7}(8^{\alpha+1}-15)\zeta_3(m).$$

Cette dernière formule peut se déduire par des calculs tout élémentaires d'une formule due à M. Bougaïeff [1].

Par des considérations élémentaires, on peut toujours, des théorèmes obtenus au moyen des formules de la théorie des fonctions elliptiques, déduire divers autres théorèmes intéressants. Mais je n'insisterai pas ici sur ce sujet.

CHAPITRE II.

LA MÉTHODE DE M. HERMITE.

Quand M. Hermite publia sa démonstration des formules de M. Kronecker, celui-ci fit connaître [2] qu'il avait obtenu ses formules [3] par de tout autres considérations. A la fin du même article, M. Kronecker donne un moyen pour déduire ses huit formules fondamentales conformément aux idées de M. Hermite. M. Kronecker croit qu'en donnant à l'intégrale définie

$$\frac{k^2 K\sqrt{K}}{\pi^2\sqrt{2\pi}}\int_0^\pi \sin^2 \operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}\,\vartheta_2(x)\cos x\,dx$$

diverses formes, on peut établir les huit formules qu'il désigne dans le *Journal de Crelle* par les numéros (I) à (VIII); il indique les formes qu'on doit donner à cette intégrale pour arriver aux six premières formules; en ce qui concerne les formules (VII) et (VIII), il affirme qu'on peut aussi les déduire de la même intégrale, « car on en peut déduire

(1) *Sur quelques applications de la théorie des fonctions elliptiques à la théorie des fonctions discontinues*, première Partie, p. 79.
(2) *Annales de l'École Normale*, 1866.
(3) Publiées dans le *Journal de Crelle*, t. 57.

l'identité (XI) ». Mais l'identité (XI) n'est autre chose que l'identité (IX) écrite d'une autre manière, et celle-ci est une conséquence arithmétique des formules (V) et (VI); cette affirmation est donc fautive. N'ayant pas vu jusqu'ici comment on peut déduire les formules (VII) et (VIII) de l'intégrale en question, j'en déduis seulement les six premières; quant aux deux autres, je les obtiens par des considérations toutes différentes.

Déterminons le coefficient de $\cos x$ dans le produit des égalités (5) et (10):

$$(28)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{k^2 K\sqrt{K}}{\pi^2\sqrt{2\pi}}\int_0^\pi \sin^2\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}\,\vartheta_2(x)\cos x\,dx \\ &= q^{\frac14}\sum_{n=1}^{n=\infty} q^{n^2}\left(\frac{\sqrt{q^{2n-2}}}{1-q^{2n-1}}+\frac{\sqrt{q^{2n}}}{1-q^{2n+1}}\right)[1+q^{-2}+q^{-6}+\ldots+q^{-n(n-1)}] \\ &= q^{\frac14}\sum_{n=1}^{n=\infty}\sum_{b=0}^{b=\infty}\sum_{a=1}^{a=n}[q^{\varepsilon(n,b,a)}+q^{\varepsilon_1(n,b,a)}], \end{aligned}\right.$$

en posant

$$\begin{aligned} \varepsilon(n,b,a) &= n^2+n-1+(2n-1)b-a^2+a \\ &= (n+a+b)(n-a+b+1)-(b+1)^2 \\ &= (2n-1)(n+b-a+1)-(n-a)^2, \\ \varepsilon_1(n,b,a) &= n^2+n+(2n+1)b-a^2+a \\ &= (n+a+b)(n-a+b+1)-b^2 \\ &= (2n+1)(n+b-a+1)-(n-a+1)^2. \end{aligned}$$

On peut regarder $-\varepsilon(n,b,a)$ et $-\varepsilon_1(n,b,a)$ comme les déterminants de formes quadratiques binaires réduites; par exemple, si

$$n-a+b+1 \geqq b,$$

$-\varepsilon_1(n,b,a)$ sera le déterminant de la forme réduite

$$(b+n-a+1)x^2 \pm 2bxy+(n+a+b)y^2.$$

Donnons à $\varepsilon(n,b,a)$ et à $\varepsilon_1(n,b,a)$ une valeur constante; alors on pourra faire varier n, b et a entre certaines limites et l'on obtiendra ainsi deux fois (sauf quelques formes particulières) toutes les formes réduites ayant au moins un coefficient extrême impair. Je n'insiste pas sur ce point ni sur les exceptions, à raison de la facilité du sujet. Ainsi, ayant égard aux exceptions, on trouve

$$(29)\qquad \frac{k^2 K\sqrt{K}}{\sqrt[4]{q}\,\pi^2\sqrt{2\pi}}\int_0^\pi \sin^2\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}\,\mathfrak{S}_2(x)\cos x\,dx = 2\sum_{n=1}^{n=\infty} F(n)\,q^n - \sum_{n=1}^{n=\infty} q^{(2n-1)^2},$$

où $F(n)$ représente le nombre des classes de formes dont le déterminant est $-n$ et dont un au moins des coefficients extrêmes est impair. Multiplions maintenant la série (4) par la série (6) et par $\cos x$, et cherchons dans ce produit le terme indépendant de x; on trouve ainsi que l'intégrale (29) est égale à

$$(30)\qquad \sqrt{\frac{\pi}{2K}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{q^n - q^{-n}}\,(q^{n^2+n} - 2 + q^{n^2-n}).$$

Multiplions les formules (29) et (30) par $\sqrt{\dfrac{2K}{\pi}}$ et désignons par $\varphi(n)$ la différence entre le nombre des diviseurs de n, qui ont la forme $4h+1$, et le nombre de ceux qui ont la forme $4h+3$; on aura alors

$$(31)\qquad \left\{\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{n=\infty}[F(n) + 2F(n-1^2) + 2F(n-2^2) + \ldots]q^n\\
&\qquad -\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{n=\infty}\varphi(2n-1)q^{2n-1} - \sum_{n=1}^{n=\infty}\varphi(2n-1)q^{4n-2}\\
&\quad = \frac{1}{2}\sum[\Phi(m) + \psi(m)]q^m + 2\sum\Phi(m)q^{2m}\\
&\qquad + \sum[\Phi(n) + 2\chi(n) + \psi(n)]q^{4n}.
\end{aligned}\right.$$

Dans cette égalité, m représente un nombre impair, n un nombre entier positif quelconque, $\Phi(n)$ la somme de tous les diviseurs de n, $\chi(n)$ la somme des diviseurs impairs de n, $\psi(n)$ l'excès de la somme des diviseurs de n, plus grands que $\sqrt{n}$, sur celle des diviseurs moindres que $\sqrt{n}$. En comparant les coefficients de q^{4n} dans les deux membres de cette égalité, on aura l'identité (I) de M. Kronecker [1]; les coefficients de q^{2m} nous donneront la formule (II) et les coefficients de q^m la formule (V). En utilisant les formules

$$k \sin^2 \operatorname{am} \frac{2Kx}{\pi} \vartheta_2(x) = \frac{\vartheta_1^2(x)}{\vartheta^2(x)} \vartheta_2(x) = \frac{k}{\sqrt{k'}} \sin \operatorname{am} \frac{2Kx}{\pi} \cos \operatorname{am} \frac{2Kx}{\pi} \vartheta_1(x),$$

on pourra donner à l'égalité (29) la forme suivante :

$$(32) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{k^2 K \sqrt{K}}{\pi^2 \sqrt[4]{q} \sqrt{2\pi k'}} \int_0^\pi \sin \operatorname{am} \frac{2Kx}{\pi} \cos \operatorname{am} \frac{2Kx}{\pi} \vartheta_1(x) \cos x \, dx \\ & \quad = 2 \sum F(n) q^n - \sum q^{(2n-1)^2}. \end{aligned} \right.$$

Si l'on traite cette égalité comme on a fait de l'égalité (29), on obtiendra les formules (III) et (VI) de M. Kronecker, ainsi que les identités élémentaires

$$F(4n) = 2F(n)$$

pour tout n qui n'est pas un carré impair, et

$$F(4m) = 2F(m) - 1$$

pour m carré impair. La considération de l'intégrale

$$\int_0^\pi \cos \operatorname{am} \frac{2Kx}{\pi} \Delta \operatorname{am} \frac{2Kx}{\pi} \vartheta_3(x) \cos x \, dx,$$

qu'on déduit de l'intégrale (29) en utilisant la formule

$$\sin^2 \operatorname{am} \frac{2Kx}{\pi} \vartheta_2(x) = \frac{1}{k^2} \vartheta_2(x) - \frac{1}{k\sqrt{k}} \cos \operatorname{am} \frac{2Kx}{\pi} \Delta \operatorname{am} \frac{2Kx}{\pi} \vartheta_3(x),$$

donnera le théorème bien connu sur le nombre des représentations d'un entier quelconque par la somme de trois carrés et la formule (IV) de M. Kronecker.

---

[1] *Journal de Crelle*, t. 57, p. 249 (*Ueber die Anzahl der verschiedenen Classen quadratischer Formen von negativen Determinante*).

Pour démontrer l'identité (VIII) de M. Kronecker, je pars des formules

$$(33)\quad \left\{\begin{aligned}
&\vartheta_3^2(0, q^2) = \frac{2L}{\pi}, \quad \vartheta_2^2(0, q^2) = \frac{2Ll}{\pi},\\
&\frac{4L^2 l}{\pi^2}\sin\operatorname{am}\frac{2Lx}{\pi}\,\Delta\operatorname{am}\frac{2Lx}{\pi} = 4\sum \frac{mq^m}{1+q^{2m}}\sin mx,\\
&\vartheta_2(x, q)\sin 2x = q\sum\left(q^{\frac{m^2}{4}-m} - q^{\frac{m^2}{4}+m}\right)\sin mx,\\
&\frac{4L^2 l}{\pi^3 q}\int_0^\pi \sin\operatorname{am}\frac{2Lx}{\pi}\,\Delta\operatorname{am}\frac{2Lx}{\pi}\,\vartheta_2(x, q)\sin 2x\,dx = 2\sum_{m=1}^{m=\infty} mq^{\frac{m^2}{4}}\frac{1-q^{2m}}{1+q^{2m}}.
\end{aligned}\right.$$

Pour évaluer d'une autre manière l'intégrale (33), on exprime par des séries trigonométriques les deux produits

$$\frac{2Ll}{\pi}\sin\operatorname{am}\frac{2Lx}{\pi}\,\vartheta_2(x, q), \quad \frac{2L}{\pi}\Delta\operatorname{am}\frac{2Lx}{\pi}\sin 2x.$$

J'omets comme trop longues les déductions qui donnent les formules (VIII) et (VII) de M. Kronecker; je dirai seulement que la formule (VII) peut être obtenue au moyen de l'intégrale

$$(34)\qquad \frac{4K^2 k}{\pi^3}\int_0^\pi \sin\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}\,\Delta\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}\,\vartheta_1(2x, q^2)\cos x\,dx.$$

Je passe aussi sous silence la démonstration de quelques autres formules, que M. Kronecker a données dans le Mémoire précité, comme conséquences de ses huit formules fondamentales, ou publiées plus tard dans d'autres Mémoires.

Les huit formules fondamentales de M. Kronecker ont beaucoup de conséquences intéressantes; ces conséquences prennent parfois une forme si inattendue qu'on peut les croire sans aucun rapport avec les formules de M. Kronecker. Ainsi Liouville a donné ([1]) trois théorèmes qui, malgré leur forme tout à fait originale, peuvent être déduits des formules de M. Kronecker. Bien que ces formules jouent un rôle si considérable, il est cependant utile de savoir établir directement tel ou tel des théorèmes qui nous occupent. Premièrement, une déduction directe peut être préférée, pour sa simplicité, à la déduction qui

([1]) *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, t. XIV.

part des formules fondamentales. Secondement, on peut trouver des formules qui ne se déduisent pas de celles de M. Kronecker : telles sont, par exemple, les formules nouvelles et si intéressantes de M. Giersler ([1]). Pour obtenir ces formules, on détermine de deux manières différentes un coefficient quelconque d'une série trigonométrique, qui représente le produit de trois fonctions de Jacobi, divisé par le produit de deux autres. La première manière consiste à multiplier l'une par l'autre une série de M. Hermite (série représentant le produit de deux fonctions de Jacobi divisé par une autre) et une série représentant une fonction elliptique à infinis simples; puis on détermine un coefficient de ce produit. Secondement, on multiplie une série, qui représente une fonction elliptique à infinis doubles, par une série, qui représente une fonction de Jacobi; puis on détermine le coefficient de la même fonction trigonométrique que dans le premier cas. Cette méthode est susceptible de diverses modifications. Ainsi, M. Hermite employait parfois, au lieu des fonctions elliptiques, les dérivées logarithmiques des fonctions de Jacobi.

Je donne dans mon Ouvrage trois exemples destinés à éclaircir les considérations générales qui précèdent.

Le dernier de ces exemples se rapporte aux formules *de la troisième marche* (*dritter Stufe*) de M. Gierster; j'obtiens ces cinq formules par la méthode de M. Hermite. La méthode de M. Gierster, pour établir les formules de la troisième et de la cinquième marche, ainsi que la méthode analogue pour établir les formules de M. Kronecker, sont exposées dans mon septième et dernier Chapitre.

D'une série très connue de la théorie des fonctions elliptiques on tire aisément

$$(35)\qquad \frac{d\log\vartheta_1(x,\sqrt{q})}{dx} = \cot x + 4\sum_{r=1}^{r=\infty}\frac{q^r}{1-q^{3r}}\sin 2rx.$$

Cette série peut être utilisée pour déduire une formule, qui est une conséquence de celles de M. Kronecker et que voici :

$$(36)\qquad \sum \mathrm{H}(4n-h^2) = \Phi(n)+\Psi(n),\quad (h=0,\pm 1,\pm 2,\pm 3,\ldots),\ (h^2\leqq 4n).$$

([1]) *Mathematische Annalen*, passim.

Les symboles Φ et Ψ ont la même signification que dans les formules de M. Kronecker; quant à $\mathrm{H}(n)$, c'est le nombre des formes quadratiques réduites, non équivalentes entre elles, dont le déterminant est $-n$ et dont les deux coefficients extrêmes sont pairs; on compte chaque forme $2px^2+2py^2$ pour une moitié de la forme et chaque forme $2px^2+2pxy+2py^2$ pour un tiers; $\mathrm{H}(0)=-\frac{1}{12}$. Pour établir directement cette formule (37), on évalue de deux manières différentes l'intégrale

$$(37)\qquad \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left\{\mathfrak{S}_3(x)\left[\frac{d\log\mathfrak{S}_1(x,\sqrt{q})}{dx}\right]^2-\mathfrak{S}_3(0)\cot^2 x\right\}dx\,^{(1)}.$$

Considérons maintenant l'intégrale

$$(38)\qquad \left\{\begin{aligned}&\frac{4}{\pi}\int_0^{\pi}\mathfrak{S}_3(x)\frac{d\log\mathfrak{S}_1(x,\sqrt{q})}{dx}\left[\sum\frac{q^{3p+1}}{1-q^{9p+3}}\sin(6p+2)x\right.\\&\qquad\qquad\left.+\sum\frac{q^{6p+4}}{1-q^{9p+6}}\sin(6p+4)x\right]dx.\end{aligned}\right.$$

Dans les parenthèses on a une partie de la série (35), dans laquelle entrent seulement les puissances de q, dont les exposants sont $\equiv 1 \pmod 3$. Il serait aisé de représenter cette série entre parenthèses par la somme algébrique des dérivées logarithmiques des fonctions $\mathfrak{S}_1(x)$ ayant pour modules $\sqrt{q}$, $\sqrt{qe^{\frac{1}{3}\pi i}}$, $\sqrt{qe^{\frac{2}{3}\pi i}}$. Nous avons déjà employé ces fonctions, mais avec des modules différents (q et q^2), aussi bien que des arguments différents (x et $2x$), pour établir les formules (VII) et (VIII) de M. Kronecker. On trouve facilement

$$(39)\qquad \left\{\begin{aligned}&\mathfrak{S}_3(x)\frac{d\log\mathfrak{S}_1(x,\sqrt{q})}{dx}\\&\quad=\mathfrak{S}_3(0)\cot x-8\sum_{n=1}^{n=\infty}nq^{n^2}\sin 2nx+2\mathfrak{S}_3(0)\sum_{n=1}^{n=\infty}\sum_{a=-n+1}^{a=n-1}q^{n^2-a^2}\sin 2nx\\&\quad\quad+4\mathfrak{S}_2(0)\sum_{n=1}^{n=\infty}\sum_{a=1}^{a=n}q^{n^2-\left(a-\frac{1}{2}\right)^2}\sin 2nx.\end{aligned}\right.$$

---

(1) Quand, dans nos formules, une fonction de Jacobi ou toute autre fonction de la théorie des fonctions elliptiques est écrite sans module, il faut entendre que le module est simplement q.

Pour exprimer l'intégrale (38), on devra avoir égard aux formules suivantes :

$$(40)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} \sin 2nx \cot x \, dx = 1, \\ \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} \sin 2px \sin 2nx \, dx = 0 \quad (p \gtrless n), \\ \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} \sin^2 2nx \, dx = 1. \end{cases}$$

Notre but n'est pas de calculer l'intégrale (38) tout entière, mais seulement ceux des termes de cette intégrale, où les exposants de q sont $\equiv 1 \pmod 3$. En ayant égard aux formules (40), on donnera à cette partie cherchée la forme suivante :

$$(41)\quad 4\vartheta_3(0, q^9) \sum_{n=1}^{n=\infty} \sum_{b=1}^{b=\infty} \sum_{a=-n+1}^{a=n} q^{n^2+nb-a^2} + 8\vartheta_2(0, q^9) \sum_{n=1}^{n=\infty} \sum_{b=1}^{b=\infty} \sum_{a=1}^{a=n} q^{n^2+nb-\left(a-\frac{1}{2}\right)^2}.$$

Sont exclues des sommations les valeurs de n et de b multiples de 3. Les exposants de $\sqrt[4]{q}$ dans les différents termes de cette formule peuvent tous être mis sous la forme

$$\Delta = 2n(2n + 2b) - \zeta^2,$$

où ζ est un nombre positif entier, tel que

$$\zeta^2 \equiv 1 \ (\text{mod. } 3), \qquad \zeta \leqq 2n;$$

on voit que $n \equiv b$ (mod. 3). — Δ peut être regardé comme le déterminant d'une des formes réduites

$$\begin{aligned} &2nx^2 \pm 2\zeta xy + (2n + 2b)y^2, \\ &2nx^2 \pm 2(2n - \zeta)xy + (4n + 2b - 2\zeta)y^2, \\ &(4n + 2b - 2\zeta)x^2 \pm 2(2n - \zeta)xy + 2ny^2. \end{aligned}$$

Dans notre cas, $\Delta \equiv 1$ (mod. 3); on verra donc facilement que l'expression (41) peut s'écrire

$$(42)\quad 8\vartheta_3(0, q^9) \sum_{n=0}^{n=\infty} \mathrm{H}(12n + 4) q^{3n+1} + 8\vartheta_2(0, q^9) \sum_{n=0}^{n=\infty} \mathrm{H}(12n + 7) q^{3n+\frac{7}{4}}.$$

Déterminons maintenant d'une autre manière cette partie de l'intégrale (38) qui a pour valeur l'expression (42); à cet effet, on cherchera deux produits : l'un sera multiplié, avant l'intégration, par $\vartheta_3(x, q) - \vartheta_3(x, q^9)$, l'autre par $\vartheta_3(3x, q^9)$. Le premier produit est composé de termes tels que $A_n \cos(6n+2)x$ et $B_n \cos(6n+4)x$. On trouvera

$$A_n = 8 \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{q^{3n+6p+3} + q^{6n+12p+6}}{(1-q^{9p+3})(1-q^{9p+9n+6})} - 8 \sum_{p=0}^{p=n-1} \frac{q^{6n-3p}}{(1-q^{9p+6})(1-q^{9n-9p-3})}$$

$$= \frac{8}{1-q^{9n+3}} \left[\sum_{p=0}^{p=\infty} \left(\frac{q^{3n+6p+3}}{1-q^{9p+3}} - \frac{q^{12n+6p+6}}{1-q^{9n+9p+6}} + \frac{q^{6n+3p+3}}{1-q^{9p+3}} - \frac{q^{6n+3p+3}}{1-q^{9n+9p+6}} \right) \right.$$
$$\left. - \sum_{p=0}^{p=n-1} \left(\frac{q^{6n+6p+6}}{1-q^{9p+6}} + \frac{q^{6n-3p}}{1-q^{9n-9p-3}} \right) \right].$$

Remplaçons dans la seconde et dans la quatrième fraction du second membre p par $p-n$ et dans la sixième p par $n-p-1$; alors le coefficient A_n pourra s'écrire

$$\frac{8q^{6n+2}}{1-q^{9n+3}} \sum_{p=0}^{p=\infty} \sum_{b=0}^{b=\infty} [q^{(3p+1)(b+1)} - q^{(3p+2)(3b+2)}]$$
$$+ \frac{8q^{3n+1}}{1-q^{9n+3}} \sum_{p=0}^{p=\infty} \sum_{b=0}^{b=\infty} [q^{(3p+1)(3b+2)} - q^{(3p+2)(3b+1)}].$$

La seconde somme est évidemment égale à zéro. De la même manière on trouvera

$$B_n = -\frac{8q^{3n+2}}{1-q^{9n+6}} \sum_{p=0}^{p=\infty} \sum_{b=0}^{b=\infty} [q^{(3p+1)(3b+1)} - q^{(3p+2)(3b+2)}].$$

Multiplions par $\vartheta_3(x, q) - \vartheta_3(x, q^9)$ et effectuons l'intégration; nous avons

$$8 \sum_{n=0}^{n=\infty} \sum_{b=0}^{b=\infty} [q^{(3n+1)(3n+3b+3)} - q^{(3n+2)(3n+3b+3)}] \sum_{p=0}^{p=\infty} \sum_{b=0}^{b=\infty} [q^{(3p+1)(3b+1)} - q^{(3p+2)(3b+2)}].$$

Il est à remarquer que, dans les exposants de la première somme double, le plus grand des deux multiplicateurs est toujours divisible par 3.

Par des considérations tout analogues, on obtiendra pour la partie de (38), qu'on calcule en multipliant avant l'intégration par $\vartheta_3(3x, q^9)$, l'expression suivante :

$$4\sum\sum(2b+1)q^{(3p+1)(3b+1)}+4\sum\sum(2b+1)q^{(3p+2)(3b+2)}$$
$$+8\sum\sum[q^{3n(3n+3p+1)}-q^{3n(3n+3p+2)}]\sum\sum[q^{(3p+1)(3b+1)}-q^{(3p+2)(3b+2)}].$$

Ici, dans la troisième somme double, les plus petits multiplicateurs des exposants sont ceux qui sont divisibles par 3. En ayant égard à la formule (42), on trouve

$$(43)\quad \left\{\begin{aligned} &2\vartheta_3(0,q^9)\sum \mathrm{H}(12n+4)q^{3n+1}+2\vartheta_2(0,q^9)\sum \mathrm{H}(12n+7)q^{3n+\frac{7}{4}}\\ &=\frac{2}{3}\sum\sum[(3p+1)q^{(3p+1)(3b+1)}+(3p+2)q^{(3p+2)(3b+2)}]\\ &\quad+\frac{1}{3}\left\{1+6\sum\sum[q^{3n(3p+1)}-q^{3n(3p+2)}]\right\}\\ &\qquad\times\sum\sum[q^{(3p+1)(3b+1)}-q^{(3p+2)(3b+2)}].\end{aligned}\right.$$

La première somme double de (43) peut être écrite ainsi

$$\frac{2}{3}\sum\Phi(3n+1)q^{3n+1}.$$

On donne une forme plus satisfaisante aux deux autres sommes doubles de (43) en recourant au théorème qui suit l'équation (18); on voit ainsi que la dernière somme de (43) peut s'écrire

$$(44)\quad \left\{\begin{aligned} &\left\{\frac{1}{3}+2\sum_{n=1}^{n=\infty}\varkappa(6n-3)[q^{6n-3}+q^{4(6n-3)}+q^{16(6n-3)}+\ldots]\right.\\ &\qquad\left.\times\sum_{n=0}^{n=\infty}\varkappa(6n+1)[q^{6n+1}+q^{4(6n+1)}+q^{16(6n+1)}+\ldots]\right\}.\end{aligned}\right.$$

On peut démontrer, en ayant égard aux théorèmes qui suivent les équations (18) et (24), que le coefficient de q^{3n+1} dans (44) sera toujours égal à $\frac{1}{3}\Phi(3n+1)$. Pour cette raison, l'identité (43) nous donne le théorème arithmétique suivant

$$2\sum \mathrm{H}(12n+4-9h^2) = \Phi(3n+1), \tag{45}$$
$$(h = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots), \quad (9h^2 < 12n+4).$$

Des égalités (36) et (45) on déduit immédiatement une autre formule de M. Gierster :

$$4\sum \mathrm{H}(12n+4-h_1^2) = \Phi(3n+1) + 2\psi(3n+1), \tag{46}$$
$$(h_1 = 1, 2, 4, 5, \ldots 3p \pm 1, \ldots), \quad (h_1^2 \leqq 12n+4).$$

En évaluant dans l'intégrale

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \mathfrak{S}_3(x)\,\frac{d\log\mathfrak{S}_1(x,\sqrt{q})}{dx}\left[\frac{d\log\mathfrak{S}_1(x,\sqrt{q^3})}{dx} - \frac{1}{3}\,\frac{d\log\mathfrak{S}_1(3x,\sqrt{q^9})}{dx}\right]dx$$

l'ensemble des termes où les exposants de q sont $\equiv 2 \pmod{3}$, on trouvera deux autres formules de M. Gierster.

La cinquième formule de la troisième marche ([1]) s'obtient en exprimant de deux manières différentes l'ensemble des termes de l'intégrale

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \left[\frac{1}{3}\mathfrak{S}_3(x)\,\frac{d\log\mathfrak{S}_1(x,\sqrt{q})}{dx}\,\frac{d\log\mathfrak{S}_1(3x,\sqrt{q^9})}{dx} - \mathfrak{S}_3(0)\cot x\cot 3x\right]dx,$$

dans lesquels les exposants de q sont $\equiv 1 \pmod{3}$.

Les formules de M. Kronecker sont intimement liées avec les problèmes relatifs au nombre des représentations d'un entier positif quelconque par une somme de trois carrés. Les formules dont il vient d'être question donnent aussi des théorèmes concernant le nombre des solutions entières des équations

$$x^2 + 2^m y^2 + 2^n z^2 = p,$$

quand m et n sont des entiers positifs assez petits (m et n peuvent aussi être nuls). Dans mon Ouvrage, je détermine le nombre des solu-

---

([1]) *Mathematische Annalen*, t. XXI, Ier Cahier.

tions des équations suivantes

$$x^2 + y^2 + z^2 = n, \qquad x^2 + y^2 + z^2 = 4n + 1,$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = 4n + 2, \qquad x^2 + y^2 + z^2 = 8n + 3,$$
$$x^2 + y^2 + 2z^2 = n, \qquad x^2 + 2y^2 + 2z^2 = n,$$
$$x^2 + y^2 + 4z^2 = n, \qquad x^2 + y^2 + 8z^2 = n,$$
$$x^2 + y^2 + 16z^2 = n, \qquad x^2 + 4y^2 + 4z^2 = n,$$
$$x^2 + 8y^2 + 8z^2 = n, \qquad x^2 + 4y^2 + 16z^2 = n,$$
$$x^2 + 16y^2 + 16z^2 = n$$

et de quelques autres. Je donne aussi la démonstration de ce théorème, dû à Liouville, que l'équation

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 = m,$$

où m est impair, admet $F(6m)$ solutions entières.

La méthode la plus immédiate pour arriver aux théorèmes en question a été donnée il y a longtemps par M. Hermite. Elle diffère de celle qui conduit aux huit formules fondamentales de M. Kronecker et leurs analogues en ce qu'au lieu des fonctions elliptiques à infinis doubles, on considère un produit de deux fonctions elliptiques telles, que leur produit est égal à une constante. Ainsi, pour établir le théorème concernant le nombre des solutions de l'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4n + 2,$$

on emploie les séries trigonométriques qui représentent les fonctions

$$k\sqrt{\frac{2K}{\pi}} \sin \operatorname{am} \frac{2Kx}{\pi} \,\mathfrak{S}_2(x), \qquad \frac{2K}{\pi} \cos x : \sin \operatorname{am} \frac{2Kx}{\pi}.$$

(*A suivre.*)