P. APPELL

Sur les équations linéaires intégrables à l'aide de la fonction $\chi_m(x,y)$

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 5 (1888), p. 211-218
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1888_3_5__211_0>

SUR DES ÉQUATIONS LINÉAIRES

INTÉGRABLES A L'AIDE DE LA FONCTION

$\chi_m(x, y)$,

PAR M. P. APPELL.

Nous avons introduit précédemment [1] une fonction de deux variables $\chi_m(x, y)$ qui joue un rôle fondamental dans la décomposition des fonctions doublement périodiques de troisième espèce en éléments simples et dans le développement de ces fonctions en séries. M. Halphen nous a fait l'honneur de donner une place à ces recherches dans son *Traité des fonctions elliptiques*, t. I, p. 468 et suiv.

Nous nous proposons, dans cette Note, d'indiquer une équation différentielle linéaire avec second membre dont les coefficients sont composés avec des fonctions Θ et leurs dérivées, et dont l'intégrale générale s'exprime à l'aide de fonctions Θ et de la fonction $\chi_m(x, y)$.

1. Prenons d'abord la fonction $\chi_1(a, z)$ définie par la série

$$\chi_1(a, z) = \frac{\pi}{2K} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{\frac{n\pi z i}{K}} q^{n(n-1)} \cot \frac{\pi}{2K}(a - z - 2niK'),$$

où l'on désigne, comme d'habitude, par q la quantité $e^{-\pi\frac{K'}{K}}$.

Cette fonction χ_1 admet la période $2K$ pour chacune des variables a

(1) *Annales de l'École Normale*, 3e série, t. I, II et III.

et z: elle vérifie de plus les deux relations

$$\chi_1(a, z+2iK') = e^{-\frac{\pi z i}{K}} \chi_1(a, z),$$

$$\chi_1(a+2iK', z) = e^{\frac{\pi a i}{K}} \chi_1(a, z) - \frac{\pi i}{2K}\left(1+e^{\frac{\pi a i}{K}}\right) g_0^{(1)}(z),$$

dans la seconde desquelles la fonction $g_0^{(1)}(z)$ est la fonction entière

$$g_0^{(1)}(z) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{\frac{n\pi z i}{K}} q^{n(n-1)} = \frac{1}{\sqrt[4]{q}} e^{\frac{\pi z i}{2K}} H_1(z)$$

admettant la période $2K$ et vérifiant la relation

$$g_0^{(1)}(z+2iK') = e^{-\frac{\pi z i}{K}} g_0^{(1)}(z).$$

On déduit facilement de ces relations l'identité

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} \chi_1(a, z) & \chi_1(a, t) \\ g_0^{(1)}(z) & g_0^{(1)}(t) \end{vmatrix} = A e^{\frac{\pi i}{2K}(z+t-a)} \frac{H(z+t-a-K)\, H(t-z)}{H(a-z)\, H(a-t)},$$

où A désigne une constante indépendante de a, z, t. Cette identité ([1]), que nous avons démontrée dans un Mémoire antérieur (*Annales de l'École Normale*, 3e série, t. I, p, 155), résulte immédiatement des propriétés du déterminant du premier membre considéré successivement comme fonction de a, z, t.

Si l'on divise les deux membres de la relation (1) par $(t-z)$ et si l'on fait tendre t vers z, on obtient la nouvelle relation

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} \chi_1(a, z) & \dfrac{d}{dz}\chi_1(a, z) \\ g_0^{(1)}(z) & \dfrac{d}{dz} g_0^{(1)}(z) \end{vmatrix} = B e^{\frac{\pi i}{2K}(2z-a)} \frac{H(2z-a-K)}{H^2(a-z)},$$

B désignant une constante que l'on peut déterminer en multipliant les

([1]) Des identités du même genre dont le premier membre est un déterminant de fonctions Z ont été indiquées par M. Hermite (*Journal de Crelle*, t. 82).

deux membres de la relation (2) par $(a-z)^2$ et faisant ensuite $a=z$. Comme le produit

$$(a-z)^2 \frac{d}{dz} \chi_1(a, z)$$

tend vers l'unité quand a tend vers z, on trouve ainsi

$$-g_0^{(1)}(z) = \mathrm{B} e^{\frac{\pi z i}{2\mathrm{K}}} \frac{\mathrm{H}(z-\mathrm{K})}{\eta'^2},$$

en désignant par η' la constante $\mathrm{H}'(0)$. Mais on a

$$\mathrm{H}(z-\mathrm{K}) = \mathrm{H}_1(z), \qquad g_0^{(1)}(z) = \frac{1}{\sqrt[4]{q}} e^{\frac{\pi z i}{2\mathrm{K}}} \mathrm{H}_1(z),$$

d'où

$$\mathrm{B} = -\frac{\eta'^2}{\sqrt[4]{q}}.$$

La relation (2) peut alors s'écrire

$$(3)\qquad \begin{vmatrix} \frac{d}{dz}\chi_1(a, z) & \chi_1(a, z) \\ \frac{d}{dz} g_0^{(1)}(z) & g_0^{(1)}(z) \end{vmatrix} = \eta'^2 \frac{g_0^{(1)}(2z-a)}{\mathrm{H}^2(a-z)}$$

ou encore, en développant,

$$(4)\qquad \frac{d}{dz}\chi_1(a, z) - \chi_1(a, z) \frac{d \log g_0^{(1)}(z)}{dz} = \eta'^2 \frac{g_0^{(1)}(2z-a)}{g_0^{(1)}(z)\mathrm{H}^2(a-z)}.$$

Cette dernière relation montre que l'équation différentielle linéaire avec second membre

$$(5)\qquad \frac{du}{dz} - u \frac{d \log g_0^{(1)}(z)}{dz} = \eta'^2 \frac{g_0^{(1)}(2z-a)}{g_0^{(1)}(z)\mathrm{H}^2(a-z)}$$

a pour intégrale générale

$$u = \chi_1(a, z) + \mathrm{C} g_0^{(1)}(z),$$

C désignant une constante arbitraire.

En remplaçant $g_0^{(1)}(z)$ par son expression

$$\frac{1}{\sqrt[4]{q}} e^{\frac{\pi z i}{2K}} H_1(z),$$

on peut encore dire que l'équation

$$(6) \qquad \frac{du}{dz} - u\left[\frac{H_1'(z)}{H_1(z)} + \frac{\pi i}{2K}\right] = \eta'^2 \frac{e^{\frac{\pi i}{2K}(z-a)} H_1(2z-a)}{H_1(z) H^2(z-a)}$$

a pour intégrale générale

$$u = \chi_1(a, z) + \lambda e^{\frac{\pi z i}{2K}} H_1(z),$$

λ étant une constante arbitraire.

La formule (4) pourrait aussi être obtenue par la décomposition en éléments simples de la fonction de a

$$\varphi(a) = \frac{g_0^{(1)}(2z-a)}{H^2(a-z)},$$

qui est doublement périodique de troisième espèce et admet, dans un parallélogramme élémentaire, le seul pôle $a = z$.

2. L'équation différentielle (4) que vérifie la fonction $\chi_1(a, z)$ est immédiatement intégrable à l'aide des méthodes élémentaires. Écrivons-la

$$\frac{d}{dz}\left[\frac{\chi_1(a, z)}{g_0^{(1)}(z)}\right] = \eta'^2 \frac{g_0^{(1)}(2z-a)}{[g_0^{(1)}(z)]^2 H^2(a-z)}$$

et nous serons ramenés à une quadrature.

Le second membre de cette dernière relation est une fonction de z aux périodes $2K$ et $2iK'$: décomposons-le en éléments simples par la méthode de M. Hermite, l'élément simple étant la fonction

$$Z(z) = \frac{d \log H(z)}{dz}.$$

Nous aurons

$$g_0^{(1)}(a) \frac{d}{dz}\left[\frac{\chi_1(a, z)}{g_0^{(1)}(z)}\right] = Z'(z-K) - Z'(z-a);$$

d'où, en intégrant,

$$(7)\qquad \frac{g_0^{(1)}(a)}{g_0^{(1)}(z)}\chi_1(a,z) = Z(z-K) - Z(z-a) + \psi(a),$$

$\psi(a)$ désignant une constante par rapport à z, c'est-à-dire une fonction de a. Cette fonction $\psi(a)$ est une fonction entière que l'on peut déterminer en développant les deux membres de la formule (7) en séries procédant suivant les puissances ascendantes de $(z-a)$. On trouve, de cette façon,

$$\psi(a) = \frac{\pi i}{2K} - \frac{\pi}{K}\sum_{n=1}^{n=\infty} q^{n^2}\frac{1+q^{2n}}{1-q^{2n}}\sin\frac{n\pi}{K}(a-iK').$$

La formule (7) à laquelle on est ainsi conduit n'est autre chose qu'une formule que M. Halphen a établie directement dans son *Traité des fonctions elliptiques*, pages 481 et 482, formules (45) et (46), et dont on pourrait par différentiation déduire l'équation (4).

3. La méthode que nous venons de suivre pour la fonction $\chi_1(a,z)$ permet de former une équation différentielle linéaire d'ordre m, avec second membre, que vérifie la fonction $\chi_m(a,z)$, m désignant un entier positif.

Cette fonction est définie par la série

$$\chi_m(a,z) = \frac{\pi}{2K}\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{\frac{mn\pi z i}{K}} q^{mn(n-1)}\cot\frac{\pi}{2K}(a-z-2niK');$$

elle admet la période $2K$ par rapport à chacune des variables a et z, et vérifie les deux relations

$$\chi_m(a, z+2iK') = e^{-\frac{m\pi z i}{K}}\chi_m(a,z),$$

$$\chi_m(a+2iK', z) = e^{\frac{m\pi a i}{K}}\chi_m(a,z) - \frac{\pi i}{2K}\left(1+e^{\frac{m\pi a i}{K}}\right)g_0^{(m)}(z)$$
$$- \frac{\pi i}{K}\sum_{\nu=1}^{\nu=m-1} e^{\frac{(m-\nu)\pi a i}{K}} g_\nu^{(m)}(z),$$

où l'on désigne par $g_\nu^{(m)}(z)$ la fonction entière

$$g_\nu^{(m)}(z) = e^{\frac{\nu\pi z i}{K}} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{\frac{mn\pi z i}{K}} q^{mn(n-1)+2n\nu},$$

$$\nu = 0, 1, 2, \ldots, (m-1).$$

Dans ce qui suit, pour simplifier l'écriture, nous laisserons de côté l'indice supérieur m, et nous écrirons

$$g_0(z), \quad g_1(z), \quad \ldots, \quad g_{m-1}(z)$$

au lieu de

$$g_0^{(m)}(z), \quad g_1^{(m)}(z), \quad \ldots, \quad g_{m-1}^{(m)}(z).$$

Nous avons démontré (*Annales de l'École Normale*, 3e série, t. I, p. 155) que le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} \chi_m(\beta, \alpha_1) & \chi_m(\beta, \alpha_2) & \ldots & \chi_m(\beta, \alpha_{m+1}) \\ g_0(\alpha_1) & g_0(\alpha_2) & \ldots & g_0(\alpha_{m+1}) \\ g_1(\alpha_1) & g_1(\alpha_2) & \ldots & g_1(\alpha_{m+1}) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ g_{m-1}(\alpha_1) & g_{m-1}(\alpha_2) & \ldots & g_{m-1}(\alpha_{m+1}) \end{vmatrix}$$

a pour expression

$$(8) \qquad \Delta = A e^{\frac{m\pi i}{2K}(\Sigma\alpha - \beta)} \frac{H(\Sigma\alpha - \beta - mK) \prod_{ij} H(\alpha_i - \alpha_j)}{H(\beta - \alpha_1) H(\beta - \alpha_2) \ldots H(\beta - \alpha_{m+1})},$$

A désignant une constante, $\Sigma\alpha$ la somme $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{m+1}$, et le produit $\prod_{ij}$ étant étendu à toutes les combinaisons des quantités α_1, $\alpha_2, \ldots, \alpha_{m+1}$ deux à deux.

Si, dans cette identité (8), on remplace β par a et si l'on fait tendre toutes les quantités $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m+1}$ vers une limite commune z, après avoir divisé les deux membres par

$$\prod_{ij} (\alpha_i - \alpha_j),$$

on obtient la nouvelle identité

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} &\begin{vmatrix} \chi_m(a,z) & D\chi_m(a,z) & D^2\chi_m(a,z) & \ldots & D^m\chi_m(a,z) \\ g_0(z) & Dg_0(z) & D^2g_0(z) & \ldots & D^m g_0(z) \\ g_1(z) & Dg_1(z) & D^2g_1(z) & \ldots & D^m g_1(z) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ g_{m-1}(z) & Dg_{m-1}(z) & D^2g_{m-1}(z) & \ldots & D^m g_{m-1}(z) \end{vmatrix} \\ &\qquad = B e^{\frac{m\pi i}{2K}[(m+1)z-a]}\frac{H[(m+1)z-a-mK]}{H^{m+1}(a-z)}, \end{aligned}\right.$$

où B représente une constante et où la notation $D^n f$ désigne la dérivée d'ordre n d'une fonction f par rapport à z. La constante B s'obtiendrait facilement en multipliant les deux membres de l'identité (9) par $(a-z)^{m+1}$ et faisant $a=z$.

La relation (9) montre que l'équation différentielle suivante, définissant u en fonction de z,

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} &\begin{vmatrix} u & \dfrac{du}{dz} & \dfrac{d^2u}{dz^2} & \ldots & \dfrac{d^m u}{dz^m} \\ g_0(z) & Dg_0(z) & D^2g_0(z) & \ldots & D^m g_0(z) \\ g_1(z) & Dg_1(z) & D^2g_1(z) & \ldots & D^m g_1(z) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ g_{m-1}(z) & Dg_{m-1}(z) & D^2g_{m-1}(z) & \ldots & D^m g_{m-1}(z) \end{vmatrix} \\ &\qquad = B e^{\frac{m\pi z i}{2K}[(m+1)z-a]}\frac{H[(m+1)z-a-mK]}{H^{m+1}(a-z)} \end{aligned}\right.$$

admet, comme intégrale générale, l'expression

$$u = \chi_m(a,z) + \lambda_0 g_0(z) + \lambda_1 g_1(z) + \ldots + \lambda_{m-1} g_{m-1}(z)$$

avec les m constantes arbitraires

$$\lambda_0,\quad \lambda_1,\quad \ldots,\quad \lambda_{m-1}.$$

Cette équation différentielle (10) est une équation linéaire avec second membre, dont les coefficients sont exprimables à l'aide des fonctions Θ et de leurs dérivées. L'intégrale générale de l'équation sans second membre est

$$\lambda_0 g_0(z) + \lambda_1 g_1(z) + \ldots + \lambda_{m-1} g_{m-1}(z).$$

En employant les méthodes connues pour former une intégrale particulière de l'équation avec second membre, on obtiendrait une expression donnant $\chi_m(a, z)$, qui fournirait la généralisation de la formule (7).

L'équation différentielle (9) peut aussi être obtenue par l'application de la méthode de décomposition en éléments simples à la fonction de a,

$$\Phi(a) = e^{\frac{m\pi i}{2K}[(m+1)z-a]} \frac{H[(m+1)z - a - mK]}{H^{m+1}(a-z)},$$

qui possède, dans un parallélogramme des périodes, le pôle $a = z$ d'ordre $(m+1)$.

Remarque. — La différentiation de l'identité (9) par rapport à a fournit d'autres équations différentielles auxquelles satisfont les fonctions

$$\frac{\partial \chi_m(a, z)}{\partial a}, \quad \frac{\partial^2 \chi_m(a, z)}{\partial a^2}, \quad \ldots.$$