ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

G. KOENIGS

Détermination de toutes les surfaces plusieurs fois engendrées par des coniques

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 5 (1888), p. 177-192
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1888_3_5__177_0>

DÉTERMINATION

DE

TOUTES LES SURFACES

PLUSIEURS FOIS ENGENDRÉES PAR DES CONIQUES,

Par M. G. KOENIGS,

MAITRE DE CONFÉRENCES A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

Le plan et les quadriques sont les seules surfaces qui puissent contenir deux séries de droites, ou par chaque point desquelles il passe plusieurs droites tracées sur elles. Dans le même ordre d'idées, on peut se proposer de chercher les surfaces par chaque point desquelles il passe deux ou plusieurs coniques tracées sur elles. Les surfaces qui contiennent plusieurs séries de coniques ont déjà offert plusieurs spécimens aux géomètres; je ne parle pas du plan et des quadriques, mais la surface de Steiner, les surfaces cubiques, les surfaces du quatrième ordre à conique double, une surface du cinquième ordre étudiée par M. Darboux au Tome II de son *Bulletin*, indiquent assez tout l'intérêt qui s'attache à l'étude de la surface la plus générale doublement engendrée par des coniques.

Le problème se divise en deux.

Lorsqu'une famille de courbes algébriques décrit une surface algébrique, il y a lieu de distinguer selon que par chaque point de la surface il passe *une seule* courbe de la famille ou selon qu'il en passe plusieurs, n par exemple. On peut dire, dans le premier cas, que la famille ne recouvre qu'une fois la surface ou que la *famille* est *simple;* et, dans le second, que la *famille* est *multiple d'ordre* n, et qu'elle recouvre n fois la surface. Dans ce dernier cas, en effet, si l'on fait varier le paramètre dont dépendent les courbes de la famille, tout point de la surface se trouve balayé n fois par ces courbes.

Nous distinguerons donc deux cas :

1° Surfaces qui admettent *au moins deux familles simples* de génératrices du second degré;

2° Surfaces recouvertes par une *famille multiple* de courbes du second degré.

PREMIER CAS. — *Surfaces qui admettent deux ou plusieurs générations* simples *par des coniques.*

Considérons une surface S recouverte par deux familles simples de coniques 1 et 2. Toute conique X_1 d'un système coupe nécessairement toute conique X_2 de l'autre système. Cette rencontre peut avoir lieu en un seul point variable avec X_1 et X_2, ou bien en deux points variables avec X_1 et X_2.

Supposons d'abord que :

A. *La rencontre de deux coniques* X_1, X_2 *de systèmes différents n'a lieu qu'en un seul point variable avec ces coniques.*

Je m'appuierai sur la remarque suivante :

Si l'on prend trois points fixes p, q, r sur une conique et que λ soit le rapport anharmonique $(xpqr)$ que forme avec ces trois points un quatrième point mobile x pris sur la conique, les coordonnées x_1, x_2, x_3, x_4 du point x sont proportionnelles à des polynômes du second degré en λ.

Prenons alors deux coniques X_1, Y_1 du système 1 et une conique variable X_2 du système 2; appelons x et y les points où X_2 coupe X_1 et Y_1 respectivement. Le point x étant pris arbitrairement sur la conique X_1, il ne passe par x qu'une seule conique X_2 (puisque le système 2 est simple), qui coupera Y_1 en un seul point variable y [puisque les coniques des systèmes 1 et 2 ne se coupent qu'en un seul point variable (¹)].

A un point x, pris sur X_1, ne répond sur Y_1 qu'un seul point y, et

---

(¹) Rien n'empêcherait qu'elles eussent un point *fixe* commun, en dehors d'un point variable.

inversement. *Les points x et y se correspondent donc homographiquement.* De là ce théorème :

Quatre coniques de l'un des systèmes coupent les coniques de l'autre en quatre points variables dont le rapport anharmonique est constant.

Cela posé, soient A_1, B_1, C_1 trois coniques du système 1; A_2, B_2, C_2 trois coniques du système 2. Prenons un point p sur la conique A_1, et soit λ le rapport anharmonique

$$\lambda = (p, \overline{A_1A_2}, \overline{A_1B_2}, \overline{A_1C_2}),$$

où $\overline{A_1A_2}$ est le *point* de rencontre de A_1 et de A_2, $\overline{A_1B_2}$ celui de A_1 et de B_2, $\overline{A_1C_2}$ celui de A_1 et de C_2. Appelons de même, avec des notations analogues, μ le rapport anharmonique

$$\mu = (q, \overline{B_2A_1}, \overline{A_2B_1}, \overline{A_2C_1}),$$

où q est un point pris sur la conique A_2.

Les quantités λ et μ étant données, un point p est déterminé sur A_1 et un point q sur A_2, ainsi que la conique (unique) X_2 qui passe en p et la conique X_1 qui passe en q; les coniques X_1, X_2 se coupent en un point variable *unique* ω, dont les coordonnées homogènes x_1, x_2, x_3, x_4 sont évidemment proportionnelles à des polynômes entiers en λ, μ, en sorte que

$$\rho x_i = f_i(\lambda, \mu) \quad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Comme ω est un point quelconque de la surface S, on voit déjà que *cette surface est représentable sur le plan*. Il s'agit maintenant de trouver les quatre polynômes $f_i(\lambda, \mu)$.

Laissons μ constant; le point q est fixe, et le point ω, lorsque λ varie, décrit la conique X_1, qui passe au point q. Or considérons les points de rencontre $\overline{X_1A_2}$, $\overline{X_1B_2}$, $\overline{X_1C_2}$ de X_1 avec les coniques A_2, B_2, C_2; le point ω, ou $\overline{X_1X_2}$, forme avec eux un rapport anharmonique, que nous représenterons par

$$\Lambda = (\overline{X_1X_2}, \overline{X_1A_2}, \overline{X_1B_2}, \overline{X_1C_2}).$$

D'autre part, le point p, ou $\overline{A_1X_2}$, forme avec les points $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_1B_2}$,

$\overline{A_1C_2}$ sur la conique A_1 le rapport anharmonique

$$\lambda = (\overline{A_1X_2}, \overline{A_1A_2}, \overline{A_1B_2}, \overline{A_1C_2}),$$

et puisque, d'après un théorème précédent, les coniques X_2, A_2, B_2, C_2 doivent couper A_1 et X_1 suivant le même rapport anharmonique, on voit que l'on a

$$\Lambda = \lambda.$$

Ainsi le paramètre λ est le rapport anharmonique que forme le point variable ω de la conique X_1 avec les trois points où cette conique rencontre les coniques A_2, B_2, C_2. D'après une remarque précédente, les coordonnées de ω sont proportionnelles à des polynômes du second degré en λ.

Cela fait donc voir que, pour toute valeur constante de μ, les polynômes en λ doivent être du second degré; de même, pour toute valeur de λ, ils doivent être du second degré en μ. On a donc la forme générale

$$f_i(\lambda, \mu) = (a_i\lambda^2 + b_i\lambda + c_i)\mu^2 + (a'_i\lambda^2 + b'_i\lambda + c'_i)\mu + (a''_i\lambda^2 + b''_i\lambda + c''_i).$$

Réciproquement, si l'on prend une surface dont les coordonnées soient proportionnelles à des polynômes en λ, μ de cette forme, il est clair que l'on obtiendra sur cette surface deux familles simples de coniques en y laissant successivement constants λ et μ.

La surface ainsi obtenue est du huitième ordre; je lui attribuerai dans ce qui suit le symbole $\mathfrak{C}$ et le nom de *conicoïde* [1], qui rappelle sa propriété caractéristique.

Je continue la discussion des systèmes simples, et je vais étudier l'hypothèse où les coniques des deux systèmes se coupent en *deux points variables*.

Soit X_1 une conique du système 1, et x, x' ses deux points de rencontre avec la conique X_2 du système 2. Lorsque X_2 varie, les points x et x' décrivent évidemment une involution sur la conique X_1. En effet, x étant pris sur X_1, il y a une conique X_2 unique qui y passe et qui va

(1) Tout le monde s'accorde aujourd'hui à donner aux surfaces du second ordre le nom de *quadriques*, au lieu de celui de *conicoïdes* proposé par quelques auteurs; ce nom peut donc être appliqué aux surfaces que nous étudions ici.

couper une seconde fois X_1 en x'; donc à un point x répond un point x', et réciproquement; de plus, x répond à x' comme x' répond à x. Ainsi la correspondance entre x et x' est bien une homographie involutive. Il en résulte [1] que la droite xx' passe par un point fixe ξ_1 du plan de X_1. Appelons ce point ξ_1 le *pôle d'involution* de X_1.

Tous les plans des coniques du système 2 doivent passer par ξ_1.

Considérons alors une autre conique Y_1 du système 1, et son pôle d'involution η_1; tous les plans des coniques du système 2 doivent passer par η_1, et, par suite, si ξ_1 et η_1 ne coïncident pas, doivent passer par la droite $\xi_1\eta_1$, que nous représenterons par D_1. Cette droite D_1 est alors le lieu des pôles d'involution des coniques du système 1, en même temps que l'axe autour duquel tournent les plans des coniques du système 2. Prenons de même les pôles d'involution ξ_2, η_2 de deux coniques du système 2; si ξ_2 et η_2 sont distincts, la droite $\xi_2\eta_2$, que j'appellerai D_2, est le lieu des pôles d'involution des coniques 2, en même temps que l'axe des plans du système 1. Nous dirons alors que D_1 et D_2 sont deux *axes d'involution*.

Maintenons l'hypothèse de l'existence de la droite D_1 et voyons si ξ_2 et η_2 peuvent alors coïncider. Si toutes les coniques du système 2 ont le même pôle d'involution O, tous les plans du système 2 et tous les plans du système 1 doivent passer par ce point. La droite D_1 doit donc le contenir, puisqu'elle est l'intersection commune des plans 2. Considérons alors une conique X_1. Son pôle est situé sur D_1 par hypothèse; il est donc au point où D_1 coupe le plan de X_1, c'est-à-dire au point O; car il est impossible que tous les plans du système 1 passent par D_1, étant donné que tous ceux du système 2 contiennent déjà cette droite.

Donc, si les coniques d'un système ont un pôle d'involution fixe O, ce point O est aussi un pôle d'involution pour toutes les coniques de l'autre système. Deux cas seulement subsistent donc : le cas de deux axes d'involution [2] et le cas d'un pôle d'involution unique.

---

(1) On sait, en effet, que les droites de jonction des couples de points correspondants d'une involution sur une conique passent par un point fixe.

(2) On peut toujours supposer que les axes d'involution ne se coupent pas, car, s'ils avaient un point O commun, ce point serait évidemment un pôle d'involution pour les coniques des deux systèmes.

B. *Cas de deux axes d'involution.*

La surface S ne peut être qu'une quadrique. Prouvons d'abord que les coniques 2 coupent la droite D_1, axe de leurs plans, en deux points fixes. Soit, en effet, P_2 un point de rencontre de D_1 avec la conique X_2; ce point P_2 est le pôle d'involution de la conique X_1, dont le plan passe par la droite D_2 et par le point P_2. L'intersection P_2I des plans des coniques X_1 et X_2 doit couper ces deux coniques aux deux mêmes points. La conique X_1 doit donc passer par le point P_2, où la droite P_2I coupe déjà la conique X_2. Mais considérons alors une autre conique quelconque Y_2 du système 2, elle doit passer par les deux points où son plan rencontre X_2; or, le plan de Y_2, passant par D_1, contient le point P_2 de X_1, et, par suite, Y_2 doit passer par P_2. Cela prouve bien que toutes les coniques 2 coupent D_1 en deux points fixes P_2, Q_2; de même, les coniques 1 coupent D_2 en deux points fixes P_1, Q_1. Considérons alors deux coniques X_2, Y_2 du système 2 et une conique quelconque X_1 du système 1; ces trois coniques se coupent deux à deux en deux points; elles définissent donc une certaine quadrique Q; toute conique Y_1 du système 1 coupe cette quadrique d'abord en P_1, Q_1, et en quatre autres points situés sur X_2 et Y_2, en tout six points : donc toutes les coniques 1 et, par suite, aussi toutes les coniques 2 sont situées sur cette surface Q, qui n'est autre, dès lors, que la surface S considérée.

Reste le cas beaucoup plus intéressant où il existe

C. *Un pôle d'involution unique.*

Je vais prouver que la surface est du quatrième ordre et possède une conique double.

Appelons O le pôle d'involution et prenons trois coniques A_1, B_1, C_1 du système 1, dont les plans, que j'appellerai α_1, β_1, γ_1 passent par le point O; soit aussi a_1, b_1, c_1 les polaires du point O par rapport aux coniques A_1, B_1, C_1. On peut toujours éliminer le cas où les coniques d'un système passeraient toutes au point O; en effet, les coniques du second système passeraient aussi par ce point, et nous n'aurions plus alors qu'*un seul point variable d'intersection* possible. Il résulte de là que les trois droites a_1, b_1, c_1 ne se rencontrent pas.

Ceci posé, soit X_2 une conique quelconque du système 2, dont le plan ξ_2 doit passer par le point O, et soit x_2 la polaire du point O par rapport à cette conique. Je dis que la droite x_2 rencontre les trois droites a_1, b_1, c_1.

En effet, le plan ξ_2 coupe ces trois droites en trois points p, q, r, tandis qu'il coupe les coniques A_1, B_1, C_1 respectivement aux points (l, l'), (m, m'), (n, n'); ces six points l, l', m, m', n, n' sont aussi ceux où la conique X_2 coupe respectivement A_1, B_1, C_1. Or p et O divisent harmoniquement le segment ll', puisque p est un point de la polaire a_1 du point O par rapport à A_1; il en résulte que le point p est aussi un point de la polaire x_2 du point O par rapport à X_2, attendu que les points l et l' sont sur X_2. De la même manière, q et r sont sur la droite x_2.

Si donc on prend les polaires du point O par rapport aux coniques X_2 du système 2, ces polaires x_2 engendrent un hyperboloïde H, dont les trois droites a_1, b_1, c_1 sont les directrices.

Que l'on prenne maintenant trois coniques A_2, B_2, C_2 du système 2 et qu'on refasse le même raisonnement, on arrivera à la conclusion suivante :

Les polaires du point O *par rapport aux coniques des systèmes* 1 *et* 2 *constituent les deux systèmes de génératrices rectilignes d'un même hyperboloïde* H.

Les plans des coniques 1, par exemple, contenant chacun une génératrice de l'hyperboloïde, sont tangents à cette surface; ils enveloppent donc le cône du second degré Γ circonscrit à H et qui a le point pour sommet. Donc :

Les plans des coniques des deux systèmes enveloppent le même cône, à savoir le cône du second degré Γ, *de sommet* O *circonscrit à l'hyperboloïde* H.

Réciproquement, prenons arbitrairement trois coniques A_1, B_1, C_1; appelons O l'intersection de leurs plans, et a_1, b_1, c_1 les polaires de O par rapport à ces courbes. Considérons l'hyperboloïde H dont a_1, b_1, c_1 sont trois génératrices; puis prenons une génératrice x_2 du second système et coupons par le plan Ox_2 les coniques A_1, B_1, C_1 aux six points l, l', m, m'; n, n'. Ces six points sont sur une même conique X_2, dans laquelle x_2 est la polaire de O. Le lieu de X_2 est une surface S qui peut être évidemment engendrée de la même manière par des coniques X_1 obtenues en partant de trois coniques A_2, B_2, C_2 prises parmi les coniques variables X_2.

Nous obtenons donc ainsi une solution nouvelle de notre problème général.

Pour évaluer le degré de la surface ainsi trouvée, coupons-la par une droite Δ issue du point O. Ce point ne peut appartenir à la surface, sans quoi toutes les coniques des deux systèmes y passeraient. Par la droite Δ, menons deux plans tangents au cône Γ; ces deux plans tangents contiennent : l'un une conique X_1 et une conique X_2; l'autre, de même, une conique Y_1 et une conique Y_2. Soient P_1, Q_1 et P_2, Q_2 respectivement les traces de X_1, X_2 sur la droite Δ; il est clair que la conique Y_2 vient couper X_1 en P_1 et Q_1, et que Y_1 coupe X_2 en P_2 et Q_2. La droite Δ ne coupe donc qu'en quatre points P_1, Q_1, P_2, Q_2 la surface S, qui est ainsi du quatrième degré. Un plan ξ tangent au cône Γ, suivant une génératrice Δ de ce cône, coupe la surface suivant deux coniques X_1, X_2 qui se coupent sur Δ en deux points où le plan ξ est tangent; mais les deux autres points d'intersection de X_1, X_2 sont des points doubles de la surface qui possède ainsi un lieu de points doubles du second degré. Les surfaces du quatrième ordre à conique double (¹) constituent donc notre nouvelle solution.

Mais ces surfaces contiennent, on le sait, dix séries de coniques qui s'associent en couples $(1, 1')$, $(2, 2')$, $(3, 3')$, $(4, 4')$, $(5, 5')$. Les coniques d'un même couple (i, i') se coupent en deux points variables; mais les coniques de la famille 1, par exemple, coupent chacune en un seul point toutes les coniques des familles 2, $2'$, 3, $3'$, 4, $4'$, 5, $5'$. Ces surfaces réalisent donc de quarante manières une double génération simple par des coniques avec rencontre en *un seul point* variable. Ces surfaces doivent donc, à ce titre, être comprises dans notre surface du huitième ordre, ainsi d'ailleurs que les quadriques. Donc, on peut déjà énoncer le théorème suivant :

Si une surface admet deux ou plusieurs systèmes simples de génération par des coniques, cette surface est une conicoïde.

(¹) Lorsque, dans une surface du quatrième ordre admettant un lieu de points doubles du second degré, ce lieu se décompose en deux droites non situées dans un même plan, la surface est réglée et ne contient pas de coniques proprement dites. Il faut donc supposer, comme nous le faisons ici, que le lieu des points doubles est une conique.

Extension au cas de courbes d'ordre supérieur unicursales.

Bien que ce ne soit pas notre but d'étudier le cas général d'une surface rationnelle quelconque, je crois utile de présenter ici quelques remarques relatives à ce cas. M. Nœther a étudié les surfaces engendrées par une famille de courbes unicursales et qui sont représentables sur un cône; il les a ramenées à des types déterminés au moyen de transformations rationnelles. Comme j'aurai occasion de le dire plus loin, M. Nœther, dans ses belles recherches, suppose que le système des courbes génératrices est simple; supposons-le encore ici. Dans ce cas, si, en dehors de la famille de courbes unicursales, il existe une autre courbe unicursale, la surface est représentable point par point sur le plan.

Soit, en effet, D_0 la courbe unicursale considérée, qui est coupée en chacun de ses points par une courbe C de la famille. Chaque point P de D_0 dépend rationnellement d'un paramètre λ, et la courbe C qui passe en P également, c'est-à-dire que C a une représentation de la forme

$$(1) \qquad \rho x_i = a_i(\lambda)\mu^m + b_i(\lambda)\mu^{m-1} + \ldots,$$

où μ est le paramètre dont dépend rationnellement chaque point de C, et a_i, b_i, ... des polynômes en λ.

Reste à savoir maintenant, question qu'on ne se pose pas toujours, si les équations (1), qui font répondre à tout point λ, μ d'un plan un seul point de la surface, font véritablement correspondre à chaque point de la surface un seul point du plan.

Si les courbes C ne coupent D_0 qu'en un point, la question n'est point douteuse; car par un point M de la surface ne passe qu'une courbe C, qui ne coupe D_0 qu'en un point P. Donc λ et μ sont bien déterminés.

Mais, si C coupe D_0 en k points de paramètres λ_1, λ_2, ..., λ_k, il n'en est plus ainsi.

Néanmoins la surface est toujours représentable sur le plan. Remarquons d'abord que les k points, qu'une courbe C définit sur la courbe D_0, forment une involution, et, par suite, leurs paramètres sont racines d'une équation de la forme

$$\varphi(\lambda) - \Lambda\psi(\lambda) = 0,$$

où φ et ψ sont des polynômes en λ du degré k.

Écrivons les k équations suivantes, dont le sens est évident,

$$\begin{aligned}
\rho_1 x_i &= a_i(\lambda_1)\mu^m + b_i(\lambda_1)\mu^{m-1} + \ldots,\\
\rho_2 x_i &= a_i(\lambda_2)\mu^m + b_i(\lambda_2)\mu^{m-1} + \ldots,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\rho_k x_i &= a_i(\lambda_k)\mu^m + b_i(\lambda_k)\mu^{m-1} + \ldots;
\end{aligned}$$

faisons la somme, il viendra

$$\begin{aligned}
(\rho_1 + \rho_2 + \ldots + \rho_k)x_i = &+ \mu^m \quad [a_i(\lambda_1) + a_i(\lambda_2) + \ldots]\\
&+ \mu^{m-1}[b_i(\lambda_1) + b_i(\lambda_2) + \ldots]\\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Il est clair que les fonctions symétriques qui multiplient μ^m, μ^{m-1}, ... sont des fonctions rationnelles de Λ, et l'on a alors la représentation suivante,

$$\sigma x_i = A_i(\Lambda)\mu^m + B_i(\Lambda)\mu^{m-1} + \ldots,$$

qui établit une correspondance univoque *réciproque* entre les points de la surface et ceux du plan Λ, μ.

On est bien maintenant en droit de dire que la surface est représentable sur le plan.

Si l'on considère deux familles de courbes unicursales ne se coupant qu'en un point variable, on peut encore appliquer la propriété anharmonique qui nous a servi pour les coniques et qui subsiste ici. Si alors les courbes génératrices sont du degré p d'un côté et du degré q de l'autre, on arrive à l'expression générale d'une surface de degré $2pq$, représentée par les équations

$$\begin{aligned}
\rho x_i = &+ (a_i\lambda^p + a'_i\lambda^{p-1} + \ldots)\mu^q\\
&+ (b_i\lambda^p + b'_i\lambda^{p-1} + \ldots)\mu^{q-1}\\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&+ (g_i\lambda^p + g'_i\lambda^{p-1} + \ldots)\mu\\
&+ (h_i\lambda^p + h'_i\lambda^{p-1} + \ldots).
\end{aligned}$$

Par exemple, la surface la plus générale réglée qui contienne une famille de coniques ne coupant chacune qu'une fois les génératrices rectilignes est une surface du quatrième ordre, dont les plans des coniques osculent une cubique gauche et coupent la surface suivant une conique et suivant deux génératrices rectilignes [1].

Dans le cas d'une famille de cubiques et de droites, la surface est du sixième degré, du douzième pour des cubiques et des coniques, etc. Le cas où les courbes génératrices considérées ont plusieurs points variables communs est plus compliqué, il se ramène à un problème sur les transformations Cremona dans le plan.

Second cas. — *Surfaces recouvertes plusieurs fois par une même famille de coniques.*

Supposons qu'une famille $\mathcal{F}$ de coniques recouvre n fois une surface S. Par tout point P pris sur une conique A du système passent $(n-1)$ autres coniques. Donc, il existe une infinité de coniques de $\mathcal{F}$ qui coupent A; donc toutes les coniques de $\mathcal{F}$ coupent A, sans quoi la famille $\mathcal{F}$ serait décomposable en deux autres, les coniques d'un groupe coupant A et celles de l'autre ne la coupant pas. Donc, puisque A est quelconque, *deux coniques quelconques de $\mathcal{F}$ se coupent.*

Si la rencontre a lieu en deux points variables, la surface est une quadrique.

En effet, trois coniques quelconques A, B, C de $\mathcal{F}$ sont alors sur une même quadrique et toute conique de $\mathcal{F}$ coupant A, B, C en deux points chacune coupe cette quadrique en six points; elle est donc sur la quadrique.

Reste donc le seul cas intéressant, celui où les coniques n'ont qu'un point mobile commun, qu'elles aient du reste, ou non, un point fixe commun.

Pour élucider la question, traitons d'abord le cas de $n = 2$.

Je considère une conique A de la famille et le paramètre λ qui correspond anharmoniquement aux points de la conique A. Soit λ le para-

---

(1) Signalons en particulier une surface réglée du cinquième ordre, dont les lignes asymptotiques sont des cubiques gauches.

mètre d'un point P; μ celui d'un point Q, pris tous les deux sur la conique A. Par P, il passe une conique X de la famille, et par Q une autre conique Y; ces coniques X, Y se coupent en un point variable unique x, et, par suite, on a

$$\rho x_i = f_i(\lambda, \mu),$$

où $f_i(\lambda, \mu)$ est un polynôme en λ, μ. Soit réciproquement un point x sur la surface; les coniques X, Y de la famille qui se croisent en x coupent la conique A en des points P, Q respectivement; de plus, rien ne distingue l'une de l'autre les deux coniques X, Y, en sorte que l'échange de P et de Q, ou de λ, μ, laisse le point x immobile. Donc les *polynômes f_i sont symétriques en λ, μ.*

Laissons maintenant λ constant, la conique X se trouve fixée et le point x la décrit; comme le point x de la conique X et le point Q de la conique Y se répondent homographiquement (cela est évident), le paramètre μ du point P répond anharmoniquement au point x et, par suite, f_i doit être du second degré en μ; il doit être de même du second degré en λ. Donc $f_i(\lambda, \mu)$ a la forme que nous avons déjà trouvée

$$\begin{aligned} f_i(\lambda, \mu) = &+ (a_i\lambda^2 + b_i\lambda + c_i)\mu^2 \\ &+ (a'_i\lambda^2 + b'_i\lambda + c'_i)\mu \\ &+ (a''_i\lambda^2 + b''_i\lambda + c''_i); \end{aligned}$$

seulement λ et μ entrent symétriquement. Il en résulte que, si l'on prend pour variables

$$\lambda + \mu = p, \qquad \lambda\mu = q,$$

$f_i(\lambda, \mu)$ pourra se mettre sous la forme

$$A_i p^2 + A'_i q^2 + A''_i + 2B_i q + 2B'_i p + 2B''_i pq,$$

où les A et les B sont des constantes quelconques.

En résumé, la surface a la représentation suivante

$$\rho x_i = \varphi_i(p, q),$$

où $\varphi_i(p, q)$ est un polynôme du second degré des deux variables p, q. Toute équation linéaire entre p et q représente une conique sur la surface, qui se trouve ainsi contenir une double infinité de coniques. Je représenterai par la notation $\mathfrak{D}$ toute surface dont la représentation est comprise dans ce type. Ces surfaces sont généralement des surfaces de Steiner, ou exceptionnellement des cubiques réglées, ou plus exceptionnellement encore des quadriques ou des plans.

On doit à M. Darboux d'avoir prouvé que ces surfaces sont les seules qui puissent contenir une double infinité de coniques.

Ainsi, dans le cas de $n = 2$, nous trouvons les surfaces $\mathfrak{D}$ comme solution de notre problème; *mais il est évident que ces surfaces rentrent dans le type conicoïde.*

D'ailleurs, si l'on prend arbitrairement une surface $\mathfrak{D}$, une surface de Steiner par exemple, et si l'on considère une développable de la classe m, circonscrite à la surface, les plans tangents à cette développable couperont chacun la surface $\mathfrak{D}$ suivant deux coniques; or les coniques ainsi définies engendrent une famille $\mathcal{F}$ qui recouvre m fois la surface.

Il en résulte qu'avec une surface $\mathfrak{D}$ quelconque on peut réaliser le fait d'une surface recouverte par une famille de coniques un nombre de fois aussi grand qu'on le voudra. Le problème de la recherche des surfaces qui sont recouvertes plusieurs fois (¹) par des coniques possède donc déjà une infinité de solutions très effectives; reste à savoir si les surfaces $\mathfrak{D}$ les fournissent toutes.

(¹) M. Nœther, dans ses belles recherches, a laissé de côté le cas où la surface est recouverte plusieurs fois par la famille de courbes unicursales génératrices, ou du moins je n'ai pas connaissance que cette question ait été traitée dans toute sa généralité par cet éminent géomètre ni par d'autres. Pour montrer ici par un exemple que la question possède des solutions qui invitent à les rechercher toutes, je prendrai la surface générale du huitième ordre qui a été définie dès le début. Le plan d'une conique la coupe, outre la conique, suivant une courbe unicursale du sixième degré; or, les plans des coniques d'une famille enveloppent une développable de la sixième classe. Par tout point P de la surface du huitième ordre, il passe donc six de ces plans : un contient la conique de la famille qui passe en P, et les cinq autres contiennent cinq courbes sextiques qui se croisent en ce point. Ainsi, comme il y a deux familles de coniques, on peut énoncer le théorème suivant :

Une conicoïde est le lieu de deux familles de courbes planes unicursales du sixième ordre qui recouvrent chacune cinq fois la surface.

Il est d'ailleurs bien aisé de voir qu'on peut construire sur toute surface représentable sur le plan autant de familles de courbes unicursales que l'on voudra qui les recouvrent chacune plusieurs fois; la difficulté n'existerait que si l'on voulait imposer à certaines de ces courbes un degré déterminé, comme nous faisons ici.

Traitons le cas où la surface est représentable point par point sur le plan.

Soient p, q les deux variables dont dépend rationnellement chaque point de la surface, et soit A une conique de la famille; les n coniques qui se croisent au point (p, q) vont couper la conique A en n points P_1, $P_2, \ldots, P_n$, dont je désignerai par $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ les paramètres. Les quantités λ_i sont racines d'une équation d'ordre n, dont les coefficients sont des polynômes entiers en p, q, soit

$$(E)\quad G(p,q,\lambda) = G_0(p,q)\lambda^n + G_1(p,q)\lambda^{n-1} + \ldots + G_{n-1}(p,q)\lambda + G_n(p,q) = 0.$$

Or attribuons à λ une valeur constante, l'équation ci-dessus sera vérifiée pour tous les points (p, q) des $(n-1)$ coniques qui passent au point P de A, dont λ est la valeur paramétrale. Cette équation (E), lorsqu'on y regarde λ comme constant, représente donc ces $(n-1)$ coniques et se décompose en un produit

$$G(p,q,\lambda) = H_1(p,q)\, H_2(p,q) \ldots H_{n-1}(p,q),$$

où les $H_i(p, q)$ sont des polynômes entiers en p, q, dont les coefficients dépendent *algébriquement*, mais non rationnellement, de λ; en introduisant un nouveau paramètre Λ, on pourra écrire

$$G(p,q,\lambda) = K(p,q,\lambda,\Lambda_1)\, K(p,q,\lambda,\Lambda_2) \ldots K(p,q,\lambda,\Lambda_{n-1}),$$

où $K(p, q, \lambda, \Lambda_i)$ est un polynôme en p, q, dont les coefficients sont des fonctions rationnelles de λ, Λ_i; quant à $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots, \Lambda_{n-1}$, ce sont les $(n-1)$ racines d'une équation irréductible

$$g_0(\lambda)\Lambda^{n-1} + g_1(\lambda)\Lambda^{n-2} + \ldots + g_{n-2}(\lambda)\Lambda + g_{n-1}(\lambda) = 0,$$

où les $g_i(\lambda)$ sont des polynômes entiers en λ.

Considérons les courbes, au nombre de $(n-1)$, qui, en coordonnées rectilignes planes p, q, seraient représentées par les équations

$$K(p,q,\lambda,\Lambda_i) = 0 \quad [i = 1, 2, \ldots, (n-1)];$$

chacune de ces courbes est l'image de l'une des $(n-1)$ coniques qui se coupent au point P de la conique A. Les points communs à deux quelconques de ces courbes ne peuvent être que des points de base ou le point qui correspond au point P; ils sont dès lors communs à toutes ces courbes qui font ainsi partie d'un même faisceau. On pourra donc toujours, par un choix convenable du paramètre Λ, ramener ces courbes à la forme

$$L(p, q, \lambda) + \Lambda_i M(p, q, \lambda) = 0,$$

où L et M sont des polynômes en p, q, λ.

Considérons maintenant deux courbes

$$L(p, q, \lambda) + \Lambda_i M(p, q, \lambda) = 0,$$
$$L(p, q, \lambda') + \Lambda'_k M(p, q, \lambda') = 0$$

qui correspondent à deux valeurs différentes de λ'; elles ne doivent se couper qu'en un point variable avec λ, λ'.

Or, soit α le degré des courbes

$$L(p, q, \lambda) + \Lambda M(p, q, \lambda) = 0,$$

où l'on a $g_0(\lambda)\Lambda^{n-1} + \ldots = 0$, et β le nombre des points fixes communs à toutes les courbes de cette famille; deux quelconques se couperont encore en $\alpha^2 - \beta$ points variables. Il nous faut avoir ici

$$\beta = \alpha^2 - 1.$$

Or des courbes de degré α qui ont un total de rencontres fixes égal à $\frac{\alpha(\alpha+3)}{2} - 1$ forment un faisceau et n'ont pas de point variable commun; il faut donc, pour la possibilité des hypothèses, que

$$\alpha^2 - 1 < \frac{\alpha(\alpha+3)}{2} - 1,$$

c'est-à-dire $\alpha \leq 2$. Donc, il n'y a que deux cas possibles : $\alpha = 1$ ou $\alpha = 2$.

Si $\alpha = 1$, les lignes planes représentatrices des coniques de la surface sont des droites tangentes à une courbe du plan.

Si $\alpha = 2$, ce sont des coniques qui ont trois points fixes.

Mais alors, en prenant pour référence dans le plan le triangle formé par ces trois points, l'équation de ces coniques prend la forme

$$\frac{A}{p} + \frac{B}{q} + C = 0,$$

en sorte que, en prenant $\frac{1}{p}$, $\frac{1}{q}$ pour paramètres, on retrouve la forme linéaire. Donc, on peut toujours supposer $\alpha = 1$.

On a alors

$$L(p, q, \lambda) + \Lambda' M(p, q, \lambda) = (lp + l'q + l'') + \Lambda'(mp + m'q + m''),$$

où l, l', l'', m, m', m'' sont des polynômes entiers en λ.

Mais revenons aux formules

$$\rho x_i = f_i(p, q);$$

pour avoir les points de rencontre avec le plan

$$\Sigma \xi_i x_i = 0$$

de la conique représentée par l'équation

$$(lp + l'q + l'') + \Lambda'(mp + m'q + m'') = 0,$$

il faudra joindre à cette équation linéaire l'équation

$$\Sigma \xi_i f_i(p, q) = 0.$$

Toute courbe de ce réseau ne doit donc être coupée qu'en deux points par toutes les droites qui représentent les coniques, et, comme ces droites sont tangentes à une courbe ([1]), il est nécessaire que les courbes du réseau soient seulement du second degré. Donc les polynômes $f_i(p, q)$ sont du second degré en p, q, et notre surface est ainsi encore une surface $\mathfrak{D}$.

(*A suivre.*)

([1]) Il est impossible qu'elles forment un faisceau, car alors les coniques représentées n'auraient plus de point variable commun et ne pourraient recouvrir plusieurs fois la surface.