ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

PIERRE NAZIMOW

Sur quelques applications de la théorie des fonctions elliptiques à la théorie des nombres (suite et fin)

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 5 (1888), p. 147-176
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1888_3_5__147_0>

DE LA

THÉORIE DES FONCTIONS ELLIPTIQUES

A LA

THÉORIE DES NOMBRES

(SUITE ET FIN),

PAR M. PIERRE NAZIMOW,

DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES PURES.

CHAPITRE III.

LES THÉORÈMES GÉNÉRAUX CONCERNANT LES FONCTIONS ARBITRAIRES.

Dans quatorze articles, imprimés dans les premiers Volumes du *Journal de Mathématiques pures et appliquées* (2[e] série), Liouville donna des théorèmes concernant les fonctions arbitraires. Ce sont des identités entre sommes qui contiennent des fonctions arbitraires à arguments variables; ces arguments sont des fonctions linéaires, contenant les solutions entières de certaines équations indéterminées du second degré. Dès 1862, M. Hermite a indiqué (¹) une méthode pour obtenir des théorèmes de cette nature, où interviennent des fonctions à un argument.

La plupart des fonctions qu'on étudie dans la théorie des fonctions elliptiques peuvent être représentées par des séries trigonométriques, soit immédiatement, soit comme fonction des autres fonctions; de là

(¹) *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 2[e] série, t. VII.

résultent des relations où entrent seulement des séries trigonométriques, sur lesquelles on fait diverses opérations. On égale les coefficients des puissances de q dans ces identités; d'où autant d'égalités distinctes les unes des autres. Ainsi nous trouvons des théorèmes concernant des fonctions trigonométriques; dans ces théorèmes figurent des sommes qui s'étendent à toutes les solutions entières ayant un caractère défini de certaines équations indéterminées.

La plupart des fonctions analytiques peuvent être représentées entre certaines limites par des séries trigonométriques. En remplaçant, dans l'identité trigonométrique dont il vient d'être question, la variable par des valeurs déterminées convenables et en sommant, nous pouvons étendre le théorème établi pour les fonctions trigonométriques à toutes les fonctions représentables dans des conditions convenables par des séries convergentes contenant la fonction trigonométrique pour laquelle le théorème est démontré; mais, dans les théorèmes de cette sorte, les arguments des fonctions sont toujours des nombres entiers. D'autre part, toute fonction analytique ou arithmétique, finie et déterminée pour les arguments entiers qui figurent dans le théorème, peut être remplacée par une autre fonction qui lui soit égale pour toutes les valeurs considérées de l'argument. Pour cette raison, les théorèmes qui nous occupent peuvent être étendus aussi aux fonctions arithmétiques d'un caractère convenable et à des fonctions analytiques qu'on ne peut pas représenter dans les limites exigées par des séries trigonométriques. Les seules conditions pour que le théorème s'applique à une fonction sont les suivantes : 1° la fonction doit être finie et déterminée pour les arguments qui figurent dans le théorème; 2° la fonction doit satisfaire à quelques conditions qui résultent de ce que le théorème n'est pas vrai pour toutes les fonctions trigonométriques. (Si, par exemple, le théorème est démontré seulement pour les cosinus et non pour les sinus, la fonction doit être paire.)

Toutes ces considérations générales deviendront plus claires quand nous les appliquerons à des exemples particuliers.

Exemple I. — De l'égalité (5) on déduit facilement

$$(47)\qquad \frac{4K^2k^2}{\pi^2}\sin^2\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi} = 8\sum_{n=1}^{n=\infty}\left\{ q^n \Sigma[\cos(d'-d'')x - \cos(d'+d'')x] \right\}.$$

La somme qui multiplie q^n doit être étendue à toutes les solutions impaires et positives de l'équation à quatre inconnues $d'\delta' + d''\delta'' = 2n$.

En comparant les coefficients des mêmes puissances de q dans les séries (47) et (6), on trouvera l'identité

$$(48) \qquad 2^{\alpha-1}\Sigma\, d[1 - \cos 2^\alpha dx] = \Sigma[\cos(d' - d'')x - \cos(d' + d'')x].$$

En supposant que l'entier n de l'équation $d'\delta' + d''\delta'' = 2n$ soit égal à $2^{\alpha-1}m$, m étant un nombre impair, on devra étendre la sommation du premier membre à toutes les solutions de l'équation $d\delta = m$.

Soit $f(y)$ une fonction paire, qui reste finie et déterminée entre $-h$ et $+h$; on a entre ces limites

$$(49) \quad f(y) = \tfrac{1}{2}A_0 + A_1 \cos\frac{y\pi}{h} + A_2\cos\frac{2y\pi}{h} + \ldots + A_m \cos\frac{my\pi}{h} + \ldots,$$

en posant

$$A_m = \frac{1}{h}\int_{-h}^{+h} f(y)\cos\frac{m\pi y}{h}\,dy.$$

Dans le développement (49), faisons y égal à 0, $2d$, $d' - d''$ et $d' + d''$; dans l'égalité (48), faisons $x = \frac{\pi}{h}, \frac{2\pi}{h}, \frac{3\pi}{h}, \ldots, \frac{m\pi}{h}, \ldots.$ Puis multiplions par A_1 les deux membres de l'identité obtenue en faisant $x = \frac{\pi}{h}$ dans (48); par A_2 l'identité obtenue en faisant $x = \frac{2\pi}{h}, \ldots$; par A_m l'identité obtenue en faisant $x = \frac{m\pi}{h}$. Si l'on additionne tous ces résultats en ayant égard aux formules (49), on aura évidemment

$$(50) \qquad \Sigma[f(d' - d'') - f(d' + d'')] = 2^{\alpha-1}\Sigma\, d[f(0) - f(2^\alpha d)].$$

Supposons maintenant que $f(y)$ soit une fonction paire, analytique ou arithmétique, qui reste finie et déterminée pour chacune des quatre valeurs $d' - d''$, $d' + d''$, 0 et $2d$ qui entrent dans la relation (50). Dans ce cas, on peut toujours trouver une fonction analytique $f_1(y)$ qui sera égale à $f(y)$ pour ces quatre valeurs de l'argument et qui pourra être représentée entre les limites $-h$ et $+h$ par une série de cosinus; on peut choisir h plus grand que les quatre arguments précédents. Alors l'identité (50) a lieu pour $f_1(y)$ et, par conséquent aussi, pour $f(y)$. Le théorème qu'elle exprime a été donné par Liouville ([1]).

Les théorèmes semblables à celui-là présentent des caractères différents; leur caractère dépend essentiellement de celui des séries d'où ils dérivent. Si l'on considère les séries que nous avons affectées des n^{os} 1 à 11, on les groupera naturellement en trois groupes. Au premier groupe appartiennent les séries qui représentent les fonctions de Jacobi; dans ces séries, les arguments des fonctions trigonométriques croissent suivant une progression arithmétique simple, tandis que les exposants du module q croissent suivant une progression arithmétique du second degré. Au second groupe appartiennent les séries qui représentent les fonctions elliptiques et les logarithmes des fonctions de Jacobi; ici, chaque puissance de q est multipliée par une somme de fonctions trigonométriques, et l'indéterminée, qui entre dans les arguments de ces fonctions trigonométriques, est multipliée par divers diviseurs d'un nombre proportionnel à l'exposant de la puissance de q. Telles sont les sommes $\Sigma \sin dx, \Sigma d \cos 2dx, \Sigma(-1)^{\frac{1}{2}(d-1)} \cos dx, \Sigma \delta \cos dx, \ldots$, où d représente un diviseur d'un nombre déterminé n et δ le diviseur complémentaire. Enfin, les séries de M. Hermite (troisième groupe) ressemblent aux séries du deuxième groupe, en ce que les coefficients des diverses puissances de q sont des sommes étendues à tous les diviseurs d'un nombre n proportionnel à l'exposant de q; mais ici les arguments des fonctions trigonométriques contiennent, comme multiplicateurs, les sommes de deux diviseurs complémentaires du nombre n; telles sont les sommes $\sum \sin \frac{d+\delta}{2} x$, $\Sigma \sin(d+\delta)x$, $\Sigma \cos(d+\delta)x$, ...

Conformément aux divers caractères des séries d'où ils procèdent, les théorèmes arithmétiques doivent se distinguer et se distinguent : 1° par la forme des équations qui régissent les sommations à faire; 2° par la forme des arguments des fonctions arbitraires. Si, par exemple, au cours d'une démonstration, on multiplie une série représentant une fonction de Jacobi par une série qui représente une fonction elliptique, dans l'énoncé du théorème figurera une somme de fonctions arbi-

([1]) *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 2^e série, t. III.

traires ayant des arguments de la forme $\rho M + \sigma d$; ρ et σ sont des nombres constants quelconques, M et d sont des solutions entières de l'équation

$$aM^2 + b\,d\delta = n,$$

où a, b et n sont des entiers positifs ou nuls. La sommation s'étend à toutes les solutions d'un certain caractère de cette dernière équation. Si l'on a multiplié une série de M. Hermite par une série elliptique, on aura, dans l'énoncé du théorème, une somme telle que $\sum f[\mu(d+\delta)+\lambda d']$, étendue à toutes les solutions d, δ, d' et δ' d'un certain caractère de l'équation

$$\zeta\,d\delta + \eta\,d'\delta' = n;$$

ici μ, λ, ζ, η et n sont des nombres constants; les trois derniers sont des entiers positifs ou nuls. Je ne crois pas utile d'analyser tous les cas qui peuvent se présenter dans la recherche de théorèmes arithmétiques. Ces considérations générales sont éclaircies dans mon Ouvrage par huit exemples, dont le premier a déjà été exposé plus haut. En voici trois autres :

Exemple IV. — Liouville a énoncé (¹) le théorème suivant :

Si $f(-x) = f(x)$, si d', δ', d'', δ'', d, δ et m sont des nombres impairs positifs, on a

$$2\Sigma[f(d' - 2^\alpha d'') - f(d' + 2^\alpha d'')] = \Sigma(\delta - d)\,f(d), \tag{51}$$

la première somme s'étendant à toutes les solutions de l'équation

$$d'\delta' + 2^\alpha d''\delta'' = m,$$

où α est une variable et m une constante, et la seconde somme à toutes les solutions de $d\delta = m$.

Démonstration. — Dans la formule (8), remplaçons x par $\frac{x}{2}$ et effectuons sur les deux membres de la nouvelle égalité l'opération

$$q\frac{d}{dq} + \frac{d^2}{dx^2};$$

(¹) *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 2ᵉ série, t. III.

comme on a

$$q\frac{d\,\mathfrak{I}_3\left(\frac{x}{2}, q\right)}{dq} + \frac{d^2\,\mathfrak{I}_3\left(\frac{x}{2}, q\right)}{dx^2} = 0, \qquad q\frac{d\,\mathfrak{I}\left(\frac{x}{2}, q\right)}{dq} + \frac{d^2\,\mathfrak{I}\left(\frac{x}{2}, q\right)}{dx^2} = 0,$$

on trouve, après des réductions faciles,

$$(52) \quad \left[\frac{d}{dx}\log\mathfrak{I}_3\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2 - \left[\frac{d}{dx}\log\mathfrak{I}\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2 = 4\sum\left[q^m \sum_{m=d\delta}(\delta - d)\cos dx\right];$$

m est impair. D'autre part, la combinaison des égalités (8) et (9) nous donnera

$$(53) \quad \frac{d}{dx}\log\mathfrak{I}_3\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{d}{dx}\log\mathfrak{I}\left(\frac{x}{2}\right) = 4\sum_{m=1}^{m=\infty}\sum_{\alpha=1}^{\alpha=\infty}\left(q^{2^\alpha m}\sum_{m=d\delta}\sin 2^\alpha dx\right).$$

En multipliant la dérivée de (8) par (53), nous aurons une autre série trigonométrique pour exprimer la fonction qui figure au premier membre de (52). En comparant les coefficients de q^m dans (52) et dans la nouvelle série, on aura

$$(54) \quad 2\Sigma[\cos(d' - 2^\alpha d'')x - \cos(d' + 2^\alpha d'')x] = \Sigma(\delta - d)\cos dx.$$

De l'égalité (54) on passe aisément à l'identité (51).

En représentant par $f(x)$ une fonction qui satisfait à la condition $f(-x) = f(x)$ et qui est égale à des nombres finis et déterminés pour tout argument qui figure dans le théorème, on démontre, dans l'exemple V, l'identité

$$(55) \quad \Sigma(-1)^{\frac{1}{2}(d-1)} f(d - 2n) = \Sigma(-1)^{\frac{1}{2}(d'-1)} f(m_1).$$

Dans cette dernière égalité, on suppose que d, δ, d', δ', m_1 et m sont des nombres impairs positifs dont les cinq premiers sont variables et le dernier constant; n est un entier quelconque. Les sommations s'étendent à toutes les solutions entières des équations

$$d\delta + 2n^2 = m, \qquad d'\delta' + m_1^2 = 2m.$$

Exemple VI. — Si, dans la formule (4), on fait $x = 0$ et qu'on multiplie l'égalité ainsi obtenue par l'égalité (11), on aura une série trigonométrique représentant la fonction $\frac{2Kk}{\pi}\sin\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}\,\mathfrak{I}_3(x)$.

On obtiendra une autre série pour cette fonction en multipliant (2) par (5). Ces calculs donnent

$$\sum_{n=0}^{n=\infty}\left(q^{n+\frac{1}{2}}\sum\sin\frac{d+\delta}{2}x\right)=\sum_{n=0}^{n=\infty}\left[q^{n+\frac{1}{2}}\sum\sin(d'+2n')x\right].$$

Les sommations doivent s'étendre à tous les entiers impairs positifs m, d, δ, d', δ' et à tous les entiers quelconques n' qui satisfont aux équations

$$d\delta+m^2=4n+2,\qquad d'\delta'+2n'^2=2n+1,$$

n étant un entier constant positif ou nul. De là on déduit

$$(56)\quad \sum\sin(d'+2n')x=\sum\sin\frac{d+\delta}{2}x,\qquad \sum F(d'+2n')=\sum F\left(\frac{d+\delta}{2}\right).$$

La fonction $F(x)$ doit satisfaire aux conditions $F(-x)=-F(x)$, $F(0)=0$, et prendre des valeurs finies et déterminées pour toutes les valeurs considérées de $d'+2n'$ et de $\frac{d+\delta}{2}$.

Exemple VIII. — Si, dans (2), on fait $x=0$ et qu'on multiplie le résultat par (5), par $\cos x$ et par (10), on aura

$$(57)\left\{\begin{aligned}&\frac{4K^2k^2}{\pi^2}\sin^2\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}\,\mathfrak{I}_2(x)\cos x\\&=2\sum\left\{q^{n^2+\frac{1}{4}d\delta+\frac{1}{2}d_1\delta_1}\sum\left[\cos\left(\frac{d+\delta}{2}-d_1-1\right)x-\cos\left(\frac{d+\delta}{2}+d_1+1\right)x\right.\right.\\&\qquad\left.\left.+\cos\left(\frac{d+\delta}{2}-d_1+1\right)x-\cos\left(\frac{d+\delta}{2}+d_1-1\right)\right]\right\}.\end{aligned}\right.$$

En multipliant (6) par (4) et par $\cos x$, on aura

$$(58)\left\{\begin{aligned}&\frac{4K^2k^2}{\pi^2}\sin^2\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}\,\mathfrak{I}_2(x)\cos x\\&=8\Sigma\left\{q^{d(2\delta-1)+\frac{1}{4}(2n-1)^2}\Sigma d[\cos 2nx+\cos 2(n-1)x]\right\}\\&-4\Sigma\left\{q^{d(2\delta-1)+\frac{1}{4}(2n-1)^2}\Sigma d[\cos 2(n+d)x+\cos 2(n-d)x\right.\\&\qquad\left.+\cos 2(n+d-1)x+\cos 2(n-d-1)x]\right\}.\end{aligned}\right.$$

Des égalités (57) et (58) on peut, en suivant les méthodes exposées dans notre premier exemple et dans les considérations générales qui le précèdent, déduire aisément l'égalité que voici, où $f(-x)=f(x)$:

$$(59)\quad \left\{\begin{aligned} &\Sigma\left[f\left(\frac{d+\delta}{2}-d_1-1\right)-f\left(\frac{d+\delta}{2}+d_1+1\right)+f\left(\frac{d+\delta}{2}-d_1+1\right)-f\left(\frac{d+\delta}{2}+d_1-1\right)\right]\\ &\quad=4\,\Sigma d_2[f(2n')+f(2n'-2)]\\ &\qquad-2\,\Sigma d_2[f(2n'+2d_2)+f(2n'-2d_2)+f(2n'+2d_2-2)+f(2n'-2d_2-2)]. \end{aligned}\right.$$

Soient h, d_2 et n' des entiers positifs quelconques, n un entier quelconque, d, δ, d_1, δ_1, δ_2 des entiers positifs impairs, d et δ étant tels que $d+\delta$ soit divisible par 4. La première des trois sommes (59) est relative à toutes les solutions, ayant le caractère indiqué, de l'équation

$$4n^2+d\delta+2d_1\delta_1=4h+1$$

et les deux dernières sommes à toutes les solutions de l'équation

$$4d_2\delta_2+(2n'-1)^2=4h+1.$$

Si dans l'équation (59) on suppose $f(0)=1$ et $f(x)=0$ pour toute valeur de x autre que zéro, on en déduit aisément les trois formules I, II et V de M. Kronecker (¹). En général, des formules qui sont établies dans les huit exemples du présent Chapitre, aussi bien que des formules analogues, on peut déduire une multitude de théorèmes arithmétiques particuliers, entre autres ceux qui font l'objet des Chapitres I et II du présent article. Ainsi, la formule (50) donne un théorème, déjà déduit dans cet article, sur le nombre des solutions entières de l'équation

$$x^2+y^2+3z^2+3t^2=4n+2,$$

ainsi qu'un autre théorème, concernant le nombre des solutions, d'un caractère spécial, de l'équation

$$x^2+y^2+3z^2+3t^2=2^\alpha(2n+1),\quad \text{où } \alpha>1.$$

Pour voir combien ces conséquences sont variées, on n'a qu'à lire ce que Liouville écrivait dans le troisième Volume de la seconde Série de son Journal (p. 145-150).

(¹) *Journal de Crelle*, t. 57.

Liouville a donné encore des théorèmes semblables aux précédents, mais dans lesquels figurent des fonctions à plusieurs variables. Ces théorèmes peuvent être déduits de quatre manières différentes; la quatrième méthode reposant sur des considérations algébriques élémentaires, je ne donnerai qu'un court aperçu des trois autres.

La théorie des fonctions elliptiques présente maintes égalités, où figurent plusieurs indéterminées différentes. Une telle égalité peut être remplacée par une égalité de deux sommes algébriques; ces sommes algébriques sont composées de produits de fonctions, qu'on peut représenter par des séries trigonométriques, sur lesquelles on fait diverses opérations. (La somme algébrique peut, dans quelques cas, se réduire à un seul terme, comme aussi l'un des membres de l'égalité en question peut être zéro.) En comparant les coefficients des mêmes puissances de q, on aura une égalité trigonométrique entre plusieurs indéterminées. Cette égalité est parfois composée de termes de nature diverse et peut alors être divisée en plusieurs autres, quand on y remplace les indéterminées u, v, t, ... par $-u$, $-v$, $-t$, ... Si, par exemple, l'égalité contient des produits de deux cosinus et des produits de deux sinus, elle pourra être divisée en deux autres : l'une contiendra seulement les produits de cosinus, l'autre seulement les produits de sinus.

Toute fonction analytique de plusieurs arguments peut être représentée, entre des limites déterminées pour chaque argument, par une série trigonométrique, pourvu qu'elle soit finie et bien déterminée entre les limites en question. Soient $x, y, z, \ldots$ les arguments de la fonction. Supposons que cette fonction soit représentée par des produits de sinus et cosinus, ayant pour arguments $\frac{n\pi x}{h}$, $\frac{n_1\pi y}{h_1}$, $\frac{n_2\pi z}{h_2}$, ...; n, n_1, n_2, ... sont des nombres entiers qui varient d'un terme de la série à l'autre; $\pm h$, $\pm h_1$, $\pm h_2$, ... représentent les limites entre lesquelles la fonction est égale à la série trigonométrique. Nous avons trouvé plus haut une identité trigonométrique (on peut parfois en obtenir plusieurs analogues) entre diverses indéterminées u, v, t, ...; cette identité est composée de produits trigonométriques homogènes; ainsi, par exemple, dans tous les termes l'indéterminée u entre dans les arguments des cosinus, l'indéterminée v dans les arguments des sinus, et ainsi de suite. Remplaçons u successivement par $\frac{\pi}{h}$, $\frac{2\pi}{h}$, $\frac{3\pi}{h}$, ..., v par $\frac{\pi}{h_1}$, $\frac{2\pi}{h_1}$, $\frac{3\pi}{h_1}$, ..., et ainsi de suite : nous aurons une série de nouvelles identités, dont nous désignerons l'ensemble par (A). Dans la série qui représente la fonction, remplaçons x, y, z, ... par des entiers, tels que les arguments des fonctions trigonométriques deviennent identiques à ceux qui se rencontrent dans les identités (A). [On suppose, bien entendu, que les fonctions trigonométriques qui figurent dans la série et celles qui figurent dans les identités (A) sont les mêmes]. Cette substitution sera répétée plusieurs fois; on obtiendra ainsi plusieurs identités, dont l'ensemble sera désigné par (B). Multiplions les deux membres des égalités (A) par les coefficients communs à toutes les égalités (B) et additionnons; nous aurons une égalité (C), composée de séries trigonométriques, à laquelle nous donnerons pour second membre zéro. Multiplions les deux membres des égalités (B) par les coefficients communs à toutes les égalités (A) et additionnons; nous aurons une égalité (D) dont le second membre sera égal à zéro en vertu de (C). La relation (D) contient une fonction arbitraire; par suite, elle constitue un théorème de Liouville [1]. Les arguments de la fonction dans ce théorème sont des nombres entiers, en sorte que le théorème peut être étendu aux fonctions arithmétiques et à des fonctions analytiques qui sont infinies, ou indéterminées, ou font un saut pour les arguments non entiers ou pour les arguments entiers qui n'entrent pas dans l'identité primitive.

Dans la seconde méthode de déduction des théorèmes en question, on n'emploie les formules fournies par la théorie des fonctions elliptiques que pour démontrer des théorèmes à une variable qui sont des cas particuliers des théorèmes à plusieurs variables. En déduisant un théorème de Liouville à une variable, on obtient une égalité entre des sommes de sinus ou cosinus; ces sinus ou cosinus doivent se détruire mutuellement, car ils contiennent une variable indéterminée x. Les

---

[1] Dans ce Chapitre, on entend par *théorèmes de Liouville* non seulement les théorèmes publiés dans les quatorze articles de Liouville, mais en général tous les théorèmes d'un certain caractère.

arguments des termes qui se détruisent doivent être égaux, ou égaux et de signes contraires. Mais les arguments contiennent la variable x multipliée par des fonctions linéaires de paramètres qui satisfont à certaines équations indéterminées du second degré. Ainsi, nous aurons des relations linéaires entre les diverses solutions d'une même équation du second degré ou de deux équations du même degré. Mais les paramètres en question peuvent être liés encore par d'autres équations linéaires. Ces nouvelles équations linéaires donneront les arguments des fonctions trigonométriques à employer pour multiplier les termes qui se détruisent. Ainsi, nous pouvons déduire des égalités entre des sommes de produits trigonométriques; dans une telle égalité à la variable x s'ajoutent les variables $y, z, t, \ldots$; les sommations s'étendent à toutes les solutions d'un certain caractère des équations indéterminées qui ont figuré dans le théorème à une variable. La marche de déduction est, à partir de là, identique à celle que nous avons indiquée en exposant la première méthode. Évidemment, on peut varier diversement la seconde méthode. Ainsi, dans quelques cas, on aura des égalités contenant deux, trois, ... variables et l'on en déduira des relations contenant un plus grand nombre de variables.

Dans la troisième méthode de déduction des théorèmes en question, on emploie des séries autres que celles que fournit la théorie des fonctions elliptiques; néanmoins, il y a un lien étroit entre cette théorie et la présente méthode. D'abord, en effet, les séries que nous avons étudiées jusqu'ici sont des cas particuliers des nouvelles séries. Celles-ci sont aussi des séries trigonométriques et contiennent l'indéterminée q; mais les puissances de q sont multipliées par des fonctions trigonométriques à plusieurs variables (par exemple, les termes peuvent avoir la forme $q^m \cos m_1 x \cos m_2 y$, où y et x sont des variables). Mais il y a plus. Pour transformer les séries étudiées dans la théorie des fonctions elliptiques, on effectue certaines opérations algébriques; les mêmes opérations, à peine modifiées, se représentent quand, dans les séries en question, on introduit, suivant des lois déterminées, des fonctions trigonométriques des nouvelles variables. Toutes ces considérations générales sont éclaircies dans mon Ouvrage par six exemples (nos 9 à 15).

Exemple IX. — Des formules connues, qui donnent

$$\operatorname{sinam}\frac{2K}{\pi}(x+y) \pm \operatorname{sinam}\frac{2K}{\pi}(x-y),$$

connaissant les trois fonctions elliptiques des arguments $\frac{2Kx}{\pi}$ et $\frac{2Ky}{\pi}$, on déduit facilement

$$(60)\quad \begin{cases} \dfrac{16K^4k^3}{\pi^4}\left[\operatorname{sn}\dfrac{2K}{\pi}(x+y)+\operatorname{sn}\dfrac{2K}{\pi}(x-y)\right]\operatorname{sn}\dfrac{2Ky}{\pi}\operatorname{cn}\dfrac{2Kx}{\pi}\operatorname{dn}\dfrac{2Kx}{\pi} \\ = \dfrac{16K^4k^3}{\pi^4}\left[\operatorname{sn}\dfrac{2K}{\pi}(x+y)-\operatorname{sn}\dfrac{2K}{\pi}(x-y)\right]\operatorname{sn}\dfrac{2Kx}{\pi}\operatorname{cn}\dfrac{2Ky}{\pi}\operatorname{dn}\dfrac{2Ky}{\pi}. \end{cases}$$

Employons maintenant l'égalité (5) et celle qui s'en déduit en différentiant par rapport à x; nous trouvons aisément

$$\sum_{n=1}^{n=\infty}\left(q^{n-\frac{1}{2}}\sum d''\sin dx\cos dy\sin d'y\cos d''x\right)$$
$$=\sum_{n=1}^{n=\infty}\left(q^{n-\frac{1}{2}}\sum d''\sin dy\cos dx\sin d'x\cos d''y\right).$$

En comparant les coefficients des mêmes puissances de q, nous aurons, après une transformation tout élémentaire,

$$(61)\quad \begin{cases} \sum d''[\sin(d+d'')x+\sin(d-d'')x][\sin(d+d')y-\sin(d-d')y] \\ =\sum d''[\sin(d+d')x-\sin(d-d')x][\sin(d+d'')y+\sin(d-d'')y]. \end{cases}$$

Les deux sommations ci-dessus s'étendent à toutes les valeurs impaires et positives de d, δ, d', δ', d'' et δ'' qui vérifient l'équation

$$d\delta + d'\delta' + d''\delta'' = 2n-1,$$

n étant un nombre positif constant. L'égalité (61) peut être étendue, par les méthodes décrites plus haut, à une fonction quelconque impaire $F(x, y)$:

$$(62)\quad \begin{cases} \sum d''[F(d+d'', d+d')+F(d-d'', d+d')-F(d+d'', d-d')-F(d-d'', d-d')] \\ =\sum d''[F(d+d', d+d'')+F(d+d', d-d'')-F(d-d', d+d'')-F(d-d', d-d'')]. \end{cases}$$

L'identité (62) a été donnée par Liouville [1] dans le dernier des six articles insérés dans le même Volume de son Journal et qui avaient le même objet que le présent Chapitre.

Exemple XI. — Dans les exemples IX et X, on a employé la première méthode de déduction; l'exemple XI est consacré à la seconde méthode. Prenons la première des formules (56) et la formule (55); posons dans cette dernière $f(x) = \cos x$. Si ces deux égalités ont lieu, c'est que certaines des fonctions trigonométriques qui entrent dans ces formules ont des arguments ou égaux ou égaux et de signes contraires. Ainsi les formules (56) et (55) nous montrent que certaines solutions des équations

$$m^2 + d\delta = 4n + 2, \tag{63}$$

$$2n'^2 + d'\delta' = 2n + 1 \tag{64}$$

sont liées par les conditions

$$\tfrac{1}{2}(d + \delta) = d' + 2n', \qquad m = \pm(\delta' - 2n'). \tag{65}$$

Dans l'équation (63) remplaçons m et d par les valeurs tirées de (65); alors, en ayant égard à (64), on voit que d, δ, d', δ', m et n' sont liées encore par la relation

$$\tfrac{1}{4}(d - \delta)^2 = (2n' + d' - \delta')^2.$$

Ainsi certaines solutions de l'équation (63) sont liées aux solutions de (64) par les relations

$$d' + 2n' = \tfrac{1}{2}(d + \delta), \qquad \delta' - 2n' = \pm m, \qquad 2n' + d' - \delta' = \pm\tfrac{1}{2}(d - \delta). \tag{66}$$

Une analyse très facile montre que ces trois dernières relations ne peuvent subsister que si $4n' + 2d' - \delta' > 0$, et que réciproquement, si l'inégalité précédente a lieu, les solutions des équations (63) et (64) seront liées par les relations (66). Si l'inégalité précédente n'a pas lieu, les fonctions trigonométriques, qui contiennent d', δ' et n' dans (55) et (56), doivent se réduire avec d'autres fonctions trigonométriques où d', δ' et n' ont d'autres valeurs. Une analyse très simple montrerait

---

(1) *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 2e série, t. III, p. 335.

que, en posant

$$(67)\qquad \begin{cases} d' + 2n' = -d'_1 - 2n'_1, \\ \delta' - 2n' = \delta'_1 - 2n'_1, \\ 2n' + d' - \delta' = 2n'_1 + d'_1 - \delta'_1, \end{cases}$$

on aura deux solutions d', δ', n' et δ'_1, d'_1, n'_1 de l'équation (64), donnant, dans (56) et (55), des termes qui se réduiront. On trouvera facilement que les relations (67) ne peuvent avoir lieu que si $4n' + 2d' - \delta' < 0$ et $4n'_1 + 2d'_1 - \delta'_1 < 0$. Les égalités (66) et (67) font voir que chaque terme du premier membre de la première équation (56) peut être multiplié par des fonctions trigonométriques des arguments $(\delta' - 2n')y$ et $(2n' + d' - \delta')z$, et chaque terme de son second membre par les mêmes fonctions trigonométriques des arguments my et $\frac{1}{2}(d - \delta)z$. Mais ces multiplicateurs ne doivent pas changer de signe quand on change à la fois les signes de y et z. D'après cela, l'identité (56) peut être remplacée par ces deux autres :

$$2\sum \sin(d' + 2n')x \cos(\delta' - 2n')y \cos(2n' + d' - \delta')z$$
$$= \sum \sin\frac{d + \delta}{2}x \cos my \cos\frac{d - \delta}{2}z,$$

$$2\sum \sin(d' + 2n')x \sin(\delta' - 2n')y \sin(2n' + d' - \delta')z$$
$$= \sum \sin\frac{d + \delta}{2}x \sin my \sin\frac{d - \delta}{2}z.$$

De ces deux identités on déduit le théorème suivant :

Théorème. — *Si $f(x, y, z)$ est une fonction analytique ou arithmétique qui reste finie et bien déterminée pour toutes les valeurs de x, y, z que l'on considère; si, de plus, cette fonction satisfait aux conditions*

$$f(-x, y, z) = -f(x, y, z), \qquad f(x, -y, -z) = f(x, y, z),$$

on aura

$$(68)\qquad 2\sum f(d' + 2n', \delta' - 2n', 2n' + d' - \delta') = \sum f\left(\frac{d + \delta}{2}, m, \frac{d - \delta}{2}\right).$$

Cette identité a été donnée par Liouville [1].

---

[1] *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 2e série, t. VII, p. 42.

Exemple XII. — Les exemples XII, XIII et XIV et le commencement de l'exemple XV de mon Ouvrage sont consacrés à la troisième méthode de déduction des théorèmes contenant des fonctions arbitraires. Une méthode bien connue dans la théorie des fonctions elliptiques est celle par laquelle Jacobi déduit la formule (6) de la formule (5); la même méthode peut être appliquée à d'autres séries plus compliquées. Désignons par m un nombre impair et prenons les deux séries trigonométriques

$$A = \sum_{m=1}^{m=\infty} (T_m + T_{-m}) \sin mx, \tag{69}$$

$$B = \sum_{m=1}^{m=\infty} (T_m - T_{-m}) \cos mx, \tag{70}$$

où l'on a posé

$$T_m = e^{yi} q^{\frac{1}{2}m} (1 - e^{2yi} q^m)^{-1}, \qquad T_{-m} = e^{-yi} q^{\frac{1}{2}m} (1 - e^{-2yi} q^m)^{-1}.$$

Notre but est de déterminer $A^2 + B^2$. Il est bien aisé de voir que cette somme de deux carrés sera composée des trois parties suivantes :

1° La série

$$\sum_d \sum_{d'} \frac{e^{2yi}\sqrt{q^{d+d'}}}{(1 - q^d e^{2yi})(1 - q^{d'} e^{2yi})} \cos(d - d')x;$$

2° Une série double, qui se déduit de la précédente par le changement de $2yi$ en $-2yi$;

3° La série double

$$\sum_d \sum_{d'} \frac{-2\sqrt{q^{d+d'}}}{(1 - q^d e^{2yi})(1 - q^{d'} e^{-2yi})} \cos(d + d')x;$$

d et d' sont impairs. Déterminons le coefficient de $\cos 2nx$ dans la supposition que n n'est pas nul; la partie de ce coefficient qui provient de la première série peut être écrite ainsi :

$$\frac{2q^n e^{2yi}}{1 - q^{2n}} \sum_{d=1}^{d=\infty} \left(\frac{q^d}{1 - q^d e^{2yi}} - \frac{q^{2n+d}}{1 - q^{2n+d} e^{2yi}} \right) = \frac{2q^n e^{2yi}}{1 - q^{2n}} \sum_{r=1}^{r=n} \frac{q^{2r-1}}{1 - q^{2r-1} e^{2yi}} = \mathrm{M}.$$

La seconde série donnera pour coefficient de $\cos 2nx$

$$\frac{2q^n e^{-2yi}}{1-q^{2n}} \sum_{r=1}^{r=n} \frac{q^{2r-1}}{1-q^{2r-1}e^{-2yi}} = \mathrm{N}.$$

Il est aisé de voir que la troisième somme nous donnera

$$-\frac{2nq^n}{1-q^{2n}} - \mathrm{M} - \mathrm{N}.$$

Ainsi, si l'on désigne par $2f(y)$ le coefficient de $\cos 2nx$ quand $n=0$, on aura

$$\text{(71)} \qquad \mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 = 2f(y) - 2\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{nq^n}{1-q^{2n}} \cos 2nx.$$

Mais on peut écrire A et B d'une autre manière :

$$\text{(72)} \qquad \mathrm{A} = 2\sum_{m=1}^{m=\infty} \left(q^m \sum_{m=d\delta} \cos \delta y \sin dx \right).$$

$$\text{(73)} \qquad \mathrm{B} = 2\sum_{m=1}^{m=\infty} \left(q^m \sum_{m=d\delta} \sin \delta y \cos dx \right).$$

En calculant $\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2$ au moyen des formules (72) et (73), on verra que $\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2$ est symétrique par rapport à x et y; ainsi la fonction $f(y)$ doit être égale à la somme qui la suit dans (71), si dans cette somme on fait $x=y$. Nous aurons donc l'identité

$$\text{(74)} \quad \left\{ \begin{aligned} &\sum_{n=1}^{n=\infty} \left\{ q^n \sum [\cos(d'-d'')x \cos(\delta'+\delta'')y - \cos(d'+d'')x \cos(\delta'-\delta'')y] \right\} \\ &\quad = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{nq^n}{1-q^{2n}} (\cos 2ny - \cos 2nx); \end{aligned} \right.$$

la sommation indiquée au premier membre s'étend à toutes les valeurs impaires et positives de d', δ', d'', δ'' qui vérifient l'équation

$$2n = d'\delta' + d''\delta''.$$

En posant $n = 2^\alpha m$, α étant égal à l'un des nombres 0, 1, 2, 3, ..., et désignant par $f(x, y)$ une fonction qui satisfait aux conditions

$$f(-x, y) = f(x, -y) = f(-x, -y) = f(x, y),$$

on déduit facilement de (74) l'identité suivante

$$(75)\quad \left\{\begin{aligned} &\sum [f(d' - d'', \delta' + \delta'') - f(d' + d'', \delta' - \delta'')] \\ &\qquad = 2^{\alpha} \sum d[f(0, 2^{\alpha+1} d) - f(2^{\alpha+1} d, 0)]; \end{aligned}\right.$$

d, d', d'', δ, δ', δ'' sont des solutions impaires positives des équations

$$m = d\delta, \qquad 2^{\alpha+1} m = d'\delta' + d''\delta''.$$

Cette identité (75) a fait l'objet de deux articles de Liouville (¹).

Exemple XIII. — En désignant par m un nombre impair quelconque, prenons deux nouvelles séries

$$(76)\quad C = 2\sum_{m=1}^{m=\infty} q^{\frac{1}{4}m^2} \cos mx \cos my = \sum_{m=1}^{m=\infty} q^{\frac{1}{4}m^2} \cos mx\,(e^{myi} + e^{-myi}).$$

$$(77)\quad D = 2i\sum_{m=1}^{m=\infty} q^{\frac{1}{4}m^2} \sin mx \sin my = \sum_{m=1}^{m=\infty} q^{\frac{1}{4}m^2} \sin mx\,(e^{myi} - e^{-myi}).$$

Par des calculs semblables à ceux de l'exemple précédent, on trouve

$$(78)\quad AC - BD = \sqrt{\frac{K}{2\pi}}\, \vartheta_3(y)\,\vartheta_2(x)\,k \sin\operatorname{am} \frac{2Kx}{\pi}.$$

En utilisant les formules (10) et (2), on déduit de (78)

$$(79)\quad AC - BD = \sum_{g=0}^{g=\infty} \left[q^{g+\frac{3}{4}} \sum \sin\left(\frac{d+\delta}{2}\right) x \cos 2ny \right], \quad 4g + 3 = 4n^2 + d\delta.$$

Mais, d'autre part, on trouve

$$(80)\quad \left\{\begin{aligned} &AC - BD = 2\sum_{g=0}^{g=\infty} \left[q^{g+\frac{3}{4}} \sum \sin(d+m)x \cos(\delta - m)y \right], \\ &\qquad\qquad 4g + 3 = m^2 + 2d\delta. \end{aligned}\right.$$

(¹) *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 2ᵉ série, t. III; premier et second article.

Des formules (79) et (80) on déduit l'identité

$$2\sum f(d+m,\,\delta-m)=\sum f\left(\frac{d_1+\delta_1}{2},\,2n\right), \tag{81}$$

dans laquelle

$$f(-x,y)=-f(x,y),\qquad f(0,y)=0,\qquad f(x,-y)=f(x,y).$$

CHAPITRE IV.

SUR UNE FORMULE DE LEJEUNE-DIRICHLET.

L'expression $ax^2+2bxy+cy^2$, dans laquelle a, b, c, x et y sont des entiers complexes, les trois premiers constants, les deux derniers indéterminés, est ce que nous appellerons par abréviation une *forme;* son nom véritable est *forme quadratique binaire à coefficients complexes*. La quantité $D=b^2-ac$ se nomme le *déterminant de la forme* $ax^2+bxy+cy^2$. Nous supposerons, dans ce Chapitre, que D n'est pas un carré parfait. Quand les coefficients a, $2b$ et c n'admettent aucun diviseur commun, la forme se nomme *proprement primitive*. Si a, $2b$ et c ont pour diviseurs communs soit $1+i$, soit 2, la forme est nommée *improprement primitive*. Deux formes, dont l'une peut se déduire de l'autre par une substitution linéaire

$$x=\alpha x'+\beta y',\qquad y=\gamma x'+\delta y',$$

dont les coefficients α, β, γ, δ sont des entiers complexes tels que $\alpha\delta-\beta\gamma=1$, sont dites *équivalentes;* dans le cas contraire, elles sont dites *non équivalentes :* une *forme réduite* est une forme pour laquelle

$$2\mathrm{N}(b)\leqq\mathrm{N}(a)\leqq\mathrm{N}(c).$$

Le symbole $\mathrm{N}(a)$ s'énonce *norme a*; la norme est le produit de l'entier a par son conjugué. Deux formes appartiennent à une même classe si elles sont équivalentes; dans le cas contraire elles appartiennent à des classes différentes. Si dans chaque classe on distingue une forme avec le déterminant D, et seulement une, on obtient un *système* de formes avec le déterminant D. Un tel système peut être entièrement composé de formes réduites.

Passons au théorème de Lejeune-Dirichlet. On sait que toutes les solutions de l'équation $t^2 - Du^2 = 1$ sont données par la formule

$$t + u\sqrt{D} = \pm(T + U\sqrt{D})^n,$$

dans laquelle T et U sont des solutions fondamentales de l'équation précédente et n est un entier qui varie entre $-\infty$ et $+\infty$. Pour abréger, nous poserons

$$\sigma = N(T + U\sqrt{D}). \tag{82}$$

Désignons par H le nombre des classes de formes proprement primitives, qui ont pour déterminant D. Soit

$$D = \chi Q V^2, \tag{83}$$

où χQ ne contient pas de diviseurs carrés. Q est le produit de nombres primitifs de deux sortes : 1° des nombres réels de la forme $\pm(4n+3)$, $(n \geqq 0)$; 2° des nombres primitifs complexes $m + ni$, où m est impair et n pair. Q peut être égal à ± 1, pourvu que χ ne soit pas égal à 1. Quant à χ, c'est une des quatre quantités suivantes : $1, i, 1+i, i(1+i)$.

Par le caractère $\left[\frac{a}{b}\right]$ nous représentons le symbole d'Eisenstein; c'est-à-dire que $\left[\frac{a}{b}\right]^2$ est égal à o, ou à $+1$, ou à -1. Si b est un nombre primitif, $\left[\frac{a}{b}\right]^2$ est nul quand a est divisible par b; $\left[\frac{a}{b}\right]^2$ est égal à $+1$ quand a est un résidu quadratique pour le module b; $\left[\frac{a}{b}\right]^2$ est égal à -1 quand a est non résidu quadratique. Si $b = b'b''b'''\ldots$, on a

$$\left[\frac{a}{b}\right] = \left[\frac{a}{b'}\right]\left[\frac{a}{b''}\right]\left[\frac{a}{b'''}\right]\cdots$$

Désignons par λ un entier positif ou négatif de la forme $4N+1$ et par ν un entier pair. Lejeune-Dirichlet, à la fin du Mémoire, interrompu par sa mort, *Recherches sur les formes quadratiques à coefficients* *et à indéterminées complexes* (¹), donne la formule suivante :

$$(84)\qquad H = \frac{8N(\sqrt{D})}{\pi \log \sigma} \sum_{\lambda,\nu} \left[\frac{\chi Q}{\lambda + \nu i}\right]^2 \frac{1}{(\lambda^2 + \nu^2)^{1+\rho}}.$$

Quand Q n'est pas égal à ± 1, cette relation est susceptible d'une autre forme. On peut supposer que $\lambda + \nu i$ et Q sont composés de multiplicateurs congrus à ± 1, suivant le module $2 + 2i$; alors on a

$$(85)\qquad H = \frac{8N(\sqrt{D})}{\pi \log \sigma} \sum_{\lambda,\nu} \left[\frac{\chi}{\lambda + \nu i}\right]^2 \left[\frac{\lambda + \nu i}{Q}\right]^2 \frac{1}{(\lambda^2 + \nu^2)^{1+\rho}}.$$

Dans les formules (84) et (85), ρ est un nombre infiniment petit. La sommation indiquée s'étend à tous les entiers λ et ν compris entre $-\infty$ et $+\infty$, pour lesquels $\lambda + \nu i$ est un nombre premier par rapport à D. La sommation doit être effectuée avant de faire $\rho = 0$; si on veut l'effectuer après qu'on a fait $\rho = 0$, on doit suivre un ordre de sommation convenable.

Pour faciliter le problème, on peut s'en tenir au cas où $V = 1$. Par une analyse toute semblable à celle que Lejeune-Dirichlet emploie dans ses *Vorlesungen über Zahlentheorie* (²), on trouve la formule suivante :

$$(86)\qquad H = \frac{H'N(V)}{h} \prod_{r} \left\{1 - \left[\frac{D'}{r}\right]^2 \frac{1}{N(r)}\right\}, \qquad h = \frac{\log N(T + U\sqrt{D})}{\log N(T' + U'\sqrt{D'})}.$$

Les symboles H′, D′, T′ et U′ ont les mêmes significations pour le déterminant $D' = \chi Q$ que H, D, T et U pour le déterminant $D = \chi Q V^2$; les r sont les nombres primitifs qui entrent comme diviseurs dans V, mais non pas dans D′. *Ainsi dans ce qui suit on supposera toujours* $D = \chi Q$.

Si dans la formule (85) on fait

$$Q = L(A + Bi), \qquad P = A^2 + B^2,$$

L, A et B étant des nombres réels, et si l'on utilise certains théorèmes donnés par Lejeune-Dirichlet dans le même Mémoire que la for-

(¹) *Journal de Crelle*, t. 24.
(²) Deuxième édition, n° 130.

mule (84), on peut écrire (85) de la manière suivante :

$$(87)\qquad \mathrm{H} = \frac{8\,\mathrm{N}(\sqrt{\mathrm{D}})}{\pi \log\sigma} \lim_{\rho=0} \left\{ \sum_{\lambda,\,\nu} \left[\frac{\chi}{\lambda+\nu i}\right]^2 \left(\frac{\lambda^2+\nu^2}{\mathrm{L}}\right) \left(\frac{\mathrm{A}\lambda+\mathrm{B}\nu}{\mathrm{P}}\right) \frac{1}{(\lambda^2+\nu^2)^{1+\rho}} \right\}.$$

On aura donc, dans ce qui suit, affaire seulement aux symboles de Legendre, car $\left[\frac{\chi}{\lambda+\nu i}\right]^2$ a l'une des valeurs

$$1, \quad (-1)^{\frac{1}{4}(\lambda^2+\nu^2-1)}, \quad (-1)^{\frac{(\lambda+\nu)^2-1}{8}}, \quad (-1)^{\frac{1}{4}(\lambda^2+\nu^2-1)+\frac{(\lambda+\nu)^2-1}{8}},$$

suivant que χ est égal à 1, i, $1+i$ ou à $i(1+i)$. Pour le second symbole de Legendre, qui figure dans (87), on connaît ([1]) une formule par laquelle les nombres quelconques $\mathrm{A}\lambda+\mathrm{B}\nu$ dans les symboles de Legendre peuvent être remplacés par des nombres pris d'un système défini de résidus par rapport au module P. Quant au premier symbole de Legendre dans (87), on pourra utiliser la formule

$$(88)\qquad \left(\frac{ak^2+2bkl+cl^2}{p}\right) = \frac{1}{p}\sum_{x,\,y=0}^{x,\,y=p-1}\sum \left(\frac{ax^2+2bxy+cy^2}{p}\right) e^{\frac{2(lx-ky)\pi i}{p}},$$

où a, b, c, k et l sont des entiers quelconques, tels que $ac-b^2$ soit premier par rapport à p; p est un nombre impair positif, sans diviseurs carrés. J'ai donné ailleurs ([2]) la démonstration de cette formule (88); aussi j'omets ici cette analyse, qui rendrait cet article trop long.

Faisons $p=\pm\mathrm{L}$, en remarquant que $\pm\mathrm{L}$ doit être toujours positif; soient aussi $a=1$, $b=0$, $c=1$; on peut alors donner à la relation (88) l'une des formes suivantes

$$(89)\qquad \left\{\begin{aligned} \left(\frac{\lambda^2+\nu^2}{\mathrm{L}}\right) &= \frac{1}{\pm\mathrm{L}}\sum_{x,\,y=0}^{x,\,y=\pm\mathrm{L}-1}\sum\left(\frac{x^2+y^2}{\mathrm{L}}\right) e^{\frac{2(\nu x-\lambda y)\pi i}{\mathrm{L}}} \\ &= \frac{1}{\pm\mathrm{L}}\sum_{x,\,y=0}^{x,\,y=\pm\mathrm{L}-1}\sum\left(\frac{x^2+y^2}{\mathrm{L}}\right)\cos\frac{2(\nu x-\lambda y)\pi}{\mathrm{L}} \\ &= \frac{1}{\pm\mathrm{L}}\sum_{x,\,y=0}^{x,\,y=\pm\mathrm{L}-1}\sum\left(\frac{x^2+y^2}{\mathrm{L}}\right)\cos\frac{2\nu x\pi}{\mathrm{L}}\cos\frac{2\lambda y\pi}{\mathrm{L}}. \end{aligned}\right.$$

([1]) DIRICHLET, *Vorlesungen*, deuxième édition, n° 116.

([2]) *Bulletin des Sciences mathématiques*, 1885.

On remarquera que nous suivons toujours la notation de Lejeune-Dirichlet : par le symbole $\left(\frac{a}{b}\right)$, nous représentons toujours l'une des trois quantités o, $+1$, -1; au troisième symbole (87), nous donnerons aussi une autre forme, un peu artificielle :

$$(90)\qquad \left[\frac{\chi}{4h+1+2ni}\right]^2 = \frac{1}{2}N(\sqrt{\chi})e^{n\theta\pi i}\left[e^{\frac{(4h+1+2n)\varphi\pi i}{4}} + e^{-\frac{(4h+1+2n)\varphi\pi i}{4}}\right];$$

h et n sont des entiers positifs, négatifs ou nuls; les valeurs de θ et φ dépendent de celles de χ : si χ est égal à 1, $\theta = 0$ et $\varphi = 0$; si $\chi = i$, $\theta = 1$ et $\varphi = 0$; si $\chi = 1 + i$, $\theta = 0$ et $\varphi = 1$; si $\chi = i(1+i)$, $\theta = 1$ et $\varphi = 1$.

En remplaçant les trois symboles qui figurent dans la relation (87) par les expressions (89), (90) et par celle que nous avons empruntée à l'Ouvrage de Dirichlet, on peut donner à cette relation la forme suivante :

$$(91)\qquad H = \frac{4N(\chi)}{\pi\log\sigma}\lim_{\rho=0}\sum\sum_{h,\,n=-\infty}^{h,\,n=+\infty}\frac{F(h,n)+F_1(h,n)}{[(4h+1)^2+4n^2)]^{1+\rho}},$$

$$F(h,n) = \sum\sum_{x,\,y=0}^{x,\,y=\pm L-1}\sum_{z=1}^{z=P-1}\left(\frac{x^2+y^2}{L}\right)\left(\frac{z}{P}\right)e^{(4h+1)R\pi i+nS\pi i},$$

$$R = \frac{1}{4}\varphi + \frac{2x}{L} + \frac{2Az}{P},\qquad S = \frac{1}{2}\varphi + \theta + \frac{4y}{L} + \frac{4Bz}{P}.$$

La fonction $F_1(h,n)$ se déduit de $F(h,n)$ en remplaçant φ par $-\varphi$. $F(h,n)$ et $F_1(h,n)$ doivent être un peu modifiées dans quelques cas particuliers : si $P=1$, on ne doit pas écrire les symboles $\sum_{z=1}^{z=P-1}$ et $\left(\frac{z}{P}\right)$; si $L=\pm 1$, on ne doit pas écrire $\sum\sum_{x,\,y=0}^{x,\,y=\pm L-1}$ et $\left(\frac{x^2+y^2}{L}\right)$. Pour plus de clarté, on doit remarquer, à l'égard de x et y, que ces nombres doivent varier entre o et $\pm L - 1$, de telle manière que x^2+y^2 varie entre 1 et $2(\pm L - 1)^2$.

Avant de donner à (91) la forme définitive, nous devons chercher le moyen de nous débarrasser de ρ avant la sommation. Pour cela, nous analyserons la série doublement infinie

$$\sum_m \sum_n \frac{\alpha_{m,n}}{(m^2+n^2)^s} = \sum_m \sum_n a_{m,n}, \tag{92}$$

où s est un nombre positif quelconque, m et n sont des nombres positifs entiers, qui varient entre 1 et ∞; les valeurs absolues des coefficients $\alpha_{m,n}$ sont toutes plus petites qu'un nombre déterminé C. Distribuons les $a_{m,n}$ dans une Table de telle manière que tous les $a_{m,n}$ qui ont le même indice m composent *une ligne* et que tous les $a_{m,n}$ qui ont le même indice n composent *une colonne*. Briot et Bouquet, dans leur *Théorie des fonctions elliptiques*, démontrent ce théorème : *Une série infinie à double entrée, dont tous les termes sont positifs, donne une somme finie, de quelque manière qu'on fasse la sommation, si par une sommation spéciale on a trouvé une valeur finie*. Supposons $s > 1$ et remplaçons tous les $\alpha_{m,n}$ par C. Sommons tous les termes pour lesquels m ne surpasse pas $l-1$ et qui appartiennent à la colonne pour laquelle $n = l$; ajoutons à cette somme tous les termes pour lesquels n ne surpasse pas l et qui appartiennent à la ligne pour laquelle $m = l$. La somme en question sera plus petite que $2Cl^{1-2s}$. Faisons maintenant varier l de 1 jusqu'à ∞; nous aurons

$$\sum_m \sum_n \frac{C}{(m^2+n^2)^s} < \sum_{l=1}^{l=\infty} 2Cl^{1-2s}.$$

Comme $1-2s$ est moindre que 1, la dernière somme donne un résultat fini. Ainsi nous avons démontré que, dans le cas de $s > 1$, la série (92) donnera toujours un résultat fini, de quelque manière qu'on l'évalue.

L'analyse précédente ne peut pas être employée dans le cas de $s = 1$; on devra dans ce cas sommer dans un ordre défini. Prenons la somme simplement infinie

$$A_m = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\alpha_{m,n}}{(m^2+n^2)^s}. \tag{93}$$

Supposons que la valeur absolue de

$$\sum_{n=1}^{n=p} \alpha_{m,n} = \beta_p \tag{94}$$

soit toujours plus petite qu'une valeur déterminée B. On démontrera facilement que la série

$$(95)\qquad \sum_{p=1}^{p=\infty} b_p = \sum_{p=1}^{p=\infty} \beta_p \left\{ \frac{1}{(m^2+p^2)^s} - \frac{1}{[m^2+(p+1)^2]^s} \right\}$$

a la même limite que (93). Par des considérations toutes semblables à celles que Dirichlet emploie pour un cas analogue dans le § 101 de ses *Vorlesungen*, on prouve que la somme (95) a pour limite une fonction continue de s; on doit additionner dans un ordre tel, que le terme pour lequel p est le plus grand s'additionne après tous les termes pour lesquels p est plus petit. La valeur absolue de la limite de (95), ainsi que de (93), sera toujours plus petite que $B(m^2+1)^s < Bm^{-2s}$.

Considérons maintenant la série infinie

$$(96)\qquad A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_p + \ldots = \sum_{p=1}^{p=\infty} A_p.$$

La valeur absolue de cette série sera plus petite que $B\sum p^{-2s}$. Cette dernière série sera convergente quand $s > \frac{1}{2}$; pour cette raison, la série à double entrée (92) a une limite finie quand on la somme dans l'ordre indiqué plus haut, si s est supérieur à $\frac{1}{2}$ et si la condition (94) est remplie.

Supposons donc que la condition (94) soit remplie et qu'on ait $s > \varkappa > \frac{1}{2}$. Divisons (96) en deux parties : la première contenant les $2^c - 1$ premiers termes et la seconde contenant tous les autres termes. Comme les séries A_1, A_2, A_3, ... sont des fonctions continues de s, le premier membre de (96) sera aussi une fonction continue de s. La valeur absolue du second membre de (96) est moindre que

$$(97)\qquad \left\{ \begin{aligned} &B[2^{-2c\varkappa} + (2^c+1)^{-2\varkappa} + (2^c+2)^{-2\varkappa} + \ldots] < B\left[\frac{2^c}{2^{2c\varkappa}} + \frac{2^{c+1}}{2^{2(\varkappa+1)c}} + \ldots\right] \\ &\quad = \frac{2^{-\tau c}B}{1-2^{-\tau c}} = 2^{-\tau c}E; \end{aligned} \right.$$

E est un nombre positif, indépendant de c, c'est-à-dire du nombre des termes qui composent le premier membre de (96); τ est égal à $2H - 1$ et supposé positif. Il est évident qu'on peut toujours prendre c tellement grand que $2^{-\tau c}E$ soit plus petit que toute la quantité donnée. Faisons varier s et supposons que la série (96) fasse un saut dont la valeur absolue est μ; ce saut ne peut être fait que par le second membre de (96). Mais $\frac{1}{2}\mu < 2^{-\tau c}E$, car la valeur absolue de ce second membre est toujours moindre que (97). D'autre part, on a expliqué qu'on peut toujours faire $2^{-\tau c}E$ plus petit que $\frac{1}{2}\mu$; ainsi la série (96) doit avoir pour limite une fonction continue de s.

Nous avons démontré que (92) a toujours une même limite finie quand $s > 1$; donc, quand $\frac{1}{2} < s \leqq 1$, si l'on somme dans l'ordre indiqué et si la condition (94) est remplie, la sommation de (92) donnera une limite finie, qui sera la même fonction continue de s que dans le cas de $s > 1$. Pour le cas spécial de $s = 1$, il est aisé de démontrer qu'on peut sommer les termes de (93), aussi bien que les termes de (96), dans un ordre arbitraire.

On pourrait aussi sommer (92) ainsi qu'il suit : 1° sommer par colonnes, 2° réunir les résultats obtenus par la sommation des colonnes. Appliquons l'analyse précédente à la somme algébrique suivante :

$$F = \lim_{\rho=0} \sum_{h=-\infty}^{h=+\infty} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{e^{(4h+1)R\pi i + nS\pi i}}{[(4h+1)^2 + 4n^2]^{1+\rho}}. \tag{98}$$

Dans cette somme, R et S représentent les mêmes fonctions que dans (91); seulement φ peut avoir l'une des trois valeurs 0, $+1$ et -1. On peut supposer L positif sans nuire à la généralité. Si l'on suppose que P n'est pas égal à 1, on démontrera facilement que

$$\sum_{n=n_0}^{n=n_0+4Ph-1} e^{(4h+1)R\pi i + nS\pi i} = 0,$$

car cette somme contiendra $4L$ fois la somme de toutes les racines de l'équation $x^P = 1$. On démontrera facilement, par les mêmes considérations, que la relation (94) aura lieu dans tous les cas possibles, excepté celui où $P = 1$, $\chi = 1$ et où y est nul ou divisible par L. Dans le dernier cas, on devra sommer par colonnes, tandis que dans tous les autres cas nous sommerons par lignes.

Cherchons maintenant les moyens de sommer (98) dans l'ordre indiqué. Comme dans (98) à chaque valeur positive de n on peut faire correspondre une valeur égale et de signe contraire, on remplacera $e^{nS\pi i}$ par $\cos nS\pi$. Comme, en déterminant H, on ne peut admettre de valeurs imaginaires, on n'a qu'à examiner la somme double

$$(99)\qquad M(x, y, z, \varphi, \theta) = \sum_{h=-\infty}^{h=+\infty} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{\cos(4h+1)R\pi}{(2h+\frac{1}{2})^2+n^2} \cos nS\pi.$$

Représentons par u un nombre positif moindre que 4PL ou nul, et posons

$$(100)\qquad \begin{cases} R\pi = \eta, & 2PLS \equiv u \quad (\text{mod.}\, 4PL), \\ \zeta = \pi - \dfrac{u\pi}{2PL} & (\pi \geqq \xi > -\pi). \end{cases}$$

On connait la formule

$$(101)\qquad \frac{\pi}{a}\,\frac{e^{a\xi}+e^{-a\xi}}{e^{a\pi}-e^{-a\pi}} = \frac{1}{a^2} - \frac{2\cos\xi}{a^2+1^2} + \frac{2\cos 2\xi}{a^2+2^2} - \frac{2\cos 3\xi}{a^2+3^2} + \ldots \qquad (\pi \geqq \xi \geqq -\pi).$$

Faisant $a = r - \frac{1}{2}$ dans cette relation, on pourra mettre (99) sous la forme suivante

$$M(x, y, z, \varphi, \theta) = 2\pi \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{e^{\left(r-\frac{1}{2}\right)\xi} + e^{-\left(r-\frac{1}{2}\right)\xi}}{e^{\left(r-\frac{1}{2}\right)\pi} - e^{-\left(r-\frac{1}{2}\right)\pi}}\, \frac{\cos(2r-1)\eta}{2r-1};$$

ce qu'on peut encore écrire

$$(102)\qquad M(x, y, z, \varphi, \theta) = 2\pi \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{(-1)^{r-1}}{2r-1}\,\frac{\sqrt{q^{2r-1}}}{1-q^{2r-1}}\,[\sin(2r-1)\alpha + \sin(2r-1)\beta],$$

en posant

$$(103)\qquad q = e^{-\pi}, \qquad \alpha = \eta + \tfrac{1}{2}\xi i + \tfrac{1}{2}\pi, \qquad \beta = \eta - \tfrac{1}{2}\xi i + \tfrac{1}{2}\pi.$$

Briot et Bouquet, dans leur *Théorie des fonctions elliptiques*, démontrent que notre formule (5) est vraie pour toute valeur de x dont la partie imaginaire est comprise entre $+\frac{K'\pi i}{2K}$ et $-\frac{K'\pi i}{2K}$. Si donc dans cette formule (5) nous remplaçons x par $\frac{\pi}{2}-x$, si nous intégrons. ensuite entre les limites o et x, en remarquant que

$$\frac{2Kk}{\pi}\cos\mathrm{am}\frac{2Kx}{\pi}:\Delta\,\mathrm{am}\frac{2Kx}{\pi}=\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\log\frac{1+k\sin\mathrm{am}\frac{2Kx}{\pi}}{1-k\sin\mathrm{am}\frac{2Kx}{\pi}},$$

nous aurons

$$(104)\qquad M(x,y,z,\varphi,\theta)=\frac{\pi}{4}\log N\left(\frac{1+\sqrt{\frac{1}{2}}\sin\mathrm{am}\frac{2Kx}{\pi}}{1-\sqrt{\frac{1}{2}}\sin\mathrm{am}\frac{2Kx}{\pi}}\right),$$

où

$$K=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\frac{1}{2}x^2)}}=K'.$$

La formule (104) sera vraie dans le cas où l'on a $\pi>\xi>-\pi$; le cas où $\xi=\pi$ n'est pas encore résolu. Mais ξ ne peut être égal à π que quand $P=1$, $\chi=1$ et y est divisible par L. En employant des formules qu'on peut trouver dans un Ouvrage de M. Durège [1], on déduit de (104) la relation suivante

$$(105)\qquad M(x,y,z,\varphi,\theta)+M(x,y,z,-\varphi,\theta)=\frac{\pi}{2}\log N\left(\frac{\Delta\,\mathrm{am}\frac{2K\gamma}{\pi}+\psi\cos\mathrm{am}\frac{2K\gamma}{\pi}}{\Delta\,\mathrm{am}\frac{2K\gamma}{\pi}-\psi\cos\mathrm{am}\frac{2K\gamma}{\pi}}\right);$$

dans cette formule $\psi=1,\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{1+i}},\ \frac{1}{\sqrt{1-i}}$, quand $\chi=1,\ i,\ 1+i,\ i(1+i)$ et

$$(106)\qquad \gamma=\frac{2\pi(x-yi)}{L}+\frac{2(A-Bi)z\pi}{P}=\frac{2\pi(x-yi)}{L}+\frac{2z\pi}{A+Bi}.$$

---

(1) *Theorie der elliptischen Functionen*, 2e édition, p. 14, 28 et 29.

J'omets, pour ne pas trop allonger cet article, les calculs par lesquels on trouve $M(x, 0, 0, 0, 0)$, c'est-à-dire par lesquels on analyse le cas où $P = 1$, $\chi = 1$ et $y = 0$. Les formules qui sont nécessaires dans ces calculs se trouvent dans le même Ouvrage de M. Durège. Le résultat final est que la formule (105) se vérifie aussi pour ce cas particulier. En comparant maintenant les formules (91) et (105), on trouve facilement

$$H = \frac{N(\chi)}{2\log\sigma} \sum_{x,y,z} \left(\frac{x^2+y^2}{L}\right) \left(\frac{z}{P}\right) \log N \left(\frac{\Delta\,\mathrm{am}\,\frac{2K\gamma}{\pi} + \psi \cos\mathrm{am}\,\frac{2K\gamma}{\pi}}{\Delta\,\mathrm{am}\,\frac{2K\gamma}{\pi} - \psi \cos\mathrm{am}\,\frac{2K\gamma}{\pi}} \right). \tag{107}$$

Si $P = 1$, on doit dans cette formule prendre $\left(\frac{z}{P}\right)$ égal à 1 et ne pas sommer par rapport à z; si $L = 1$, on fera $\left(\frac{x^2+y^2}{L}\right)$ égal à 1 et l'on ne sommera pas par rapport à x et à y. Pour le cas où $P = 1$ et $L = 1$, on a la formule

$$H = \frac{N(\chi)}{2\log\sigma} \log N \left(\frac{1+\psi}{1-\psi}\right). \tag{108}$$

Dans la formule (107), on doit faire varier x et y depuis 0 jusqu'à $L - 1$ et z de 1 jusqu'à $P - 1$, en ayant égard à ce que $x^2 + y^2$ ne peut pas être nul.

On peut mettre la relation (108) sous une forme plus simple, au moyen des deux transformations qui suivent. En posant

$$Lz + (A + Bi)(x - yi) \equiv \alpha + \beta i \qquad (\text{mod. } LA + LBi),$$

on trouvera

$$\gamma = \frac{2(\alpha + \beta i)\pi}{L(A + Bi)}, \tag{109}$$

$$\left(\frac{x^2+y^2}{L}\right) \left(\frac{z}{P}\right) = \left[\frac{\alpha + \beta i}{LA + LBi}\right]^2. \tag{110}$$

Ensuite on peut remplacer le module $\sqrt{\frac{1}{2}}$ par le module imaginaire i.

En employant la notation

$$K\sqrt{\frac{1}{2}} = \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{1-y^4}} = \omega,$$

on trouve

$$(111)\qquad H = \frac{N(\chi)}{2\log\sigma}\sum_{\alpha+\beta i}\left[\frac{\alpha+Bi}{LA+LBi}\right]^2 \log N\left(\frac{1+\psi\cos' \mathrm{am}\,\dfrac{4(\alpha+\beta i)\omega}{LA+LBi}}{1-\psi\cos' \mathrm{am}\,\dfrac{4(\alpha+\beta i)\omega}{LA+LBi}}\right);$$

nous distinguons par le signe ′ les fonctions elliptiques spéciales qui ont pour module i. On doit étendre la sommation (111) à toutes les valeurs de $\alpha+\beta i$, qui constituent un système complet de résidus par rapport au module $LA+LBi$. En posant

$$\alpha+\beta i \equiv (1+i)(\gamma+\delta i) \qquad (\mathrm{mod.}\ LA+LBi),$$

on trouvera par des calculs très faciles cette nouvelle expression de H :

$$(112)\qquad H = \left[\frac{1+i}{LA+LBi}\right]^2 \frac{N(\chi)}{2\log\sigma}\sum_{\gamma+\delta i}\left[\frac{\gamma+\delta i}{LA+LBi}\right]^2 \log N\left[\frac{1+\xi^4+\psi(1-2\xi^2-\xi^4)}{1+\xi^4-\psi(1-2\xi^2-\xi^4)}\right],$$

$$\xi = \sin' \mathrm{am}\,\frac{2(1+i)(\gamma+\delta i)\omega}{LA+LBi}.$$

Il faut remarquer les formes très simples que la formule (112) prend dans le cas où $\chi = 1$; on a alors

$$(113)\qquad H = \left[\frac{1+i}{LA+LBi}\right]^2 \frac{1}{2\log\sigma}\sum_{\alpha+\beta i}\left[\frac{\alpha+\beta i}{LA+LBi}\right]^2 \log N\left[\frac{1-\xi^2}{\xi^2(1+\xi^2)}\right].$$

Quand $\chi = 1$ et $N(LA+LBi) \equiv 1$ (mod. 8), on pourra écrire la formule (113) ainsi :

$$(114)\qquad H = -\frac{1}{\log\sigma}\left[\frac{1+i}{LA+LBi}\right]^2 \sum_{\alpha+\beta i}\left[\frac{\alpha+\beta i}{LA+LBi}\right]^2 \log N \sin' \mathrm{am}\,\frac{2(1+i)(\alpha+\beta i)\omega}{LA+LBi}.$$

Quand $\chi = 1$ et $N(LA+LBi) \equiv 5$ (mod. 8), on aura

$$(115)\qquad H = \frac{1}{\log\sigma}\left[\frac{1+i}{LA+LBi}\right]^2 \sum_{\alpha+\beta i}\left[\frac{\alpha+\beta i}{LA+LBi}\right]^2 \log N \cos'^2 \mathrm{am}\,\frac{2(1+i)(\alpha+\beta i)\omega}{LA+LBi}.$$

Dans le reste du Chapitre (le sixième de l'Ouvrage), suivant l'exemple donné par Lejeune-Dirichlet dans ses *Vorlesungen* et dans les Tomes 19 et 21 du *Journal de Crelle*, je démontre que H, qui est donné par les formules transcendantes (112), (114) et (115), doit nécessairement être un entier réel, et je fais connaître quelques propriétés de ce nombre.