ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

MAURICE D' OCAGNE

Sur la relation entre les rayons de courbure de deux courbes polaires réciproques

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 4 (1887), p. 313-316
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1887_3_4__313_0>

SUR LA

RELATION ENTRE LES RAYONS DE COURBURE

DE DEUX COURBES POLAIRES RÉCIPROQUES,

PAR M. MAURICE D'OCAGNE,

INGÉNIEUR DES PONTS ET CHAUSSÉES.

1. Le problème de la transformation des propriétés relatives à la courbure par la méthode des polaires réciproques a été traité pour la première fois par M. Mannheim ([1]). Pour le cas des courbes planes, ce savant géomètre emploie la méthode suivante : il considère la conique corrélative K du cercle osculateur C en un point de la courbe donnée, conique dont on sait exprimer le paramètre en fonction du rayon du cercle C; comme on connaît d'ailleurs l'expression du rayon de courbure en un point quelconque de la conique K en fonction de son paramètre, le problème est résolu. Cette solution est simple assurément, mais celle que nous allons donner ici, et qui ne le lui cède en rien sous le rapport de la simplicité, a, en outre, l'avantage de ne faire appel à aucune propriété particulière des coniques, en sorte qu'elle permet, par la marche inverse de celle suivie par M. Mannheim, d'établir la formule qui donne le rayon de courbure des coniques en fonction de leur paramètre. Elle a encore l'avantage de se prêter à une généralisation facile lorsque la conique directrice, au lieu d'être un cercle, est quelconque.

2. Soient M et M' deux points correspondants sur des courbes c et c', polaires réciproques par rapport à un cercle de centre O, ω et ω' les angles formés par les rayons vecteurs OM et OM' avec un axe polaire

([1]) *Journal de Liouville*, 2e série, t. XI, p. 193; 1866.

quelconque, ds et ds' les arcs infiniment petits des courbes c et c' en M et en M', R et R' les rayons de courbure correspondants.

Il suffit de remarquer que la normale en M à la courbe c est parallèle à OM' pour pouvoir écrire

$$R = \frac{ds}{d\omega'}.$$

De même,

$$R' = \frac{ds'}{d\omega}.$$

Donc

$$RR' = \frac{ds\,ds'}{d\omega\,d\omega'} = NN',$$

N et N' étant les normales à c et à c' en M et en M', respectivement limitées aux perpendiculaires élevées en O aux vecteurs OM et OM'. Le problème est ainsi résolu sans nul effort. Nous écrirons cette formule comme suit :

$$\frac{N}{R}\frac{N'}{R'} = 1. \tag{1}$$

On peut alors la comparer à la formule analogue pour la transformation par rayons vecteurs réciproques, qui est

$$\frac{N}{R} + \frac{N'}{R'} = 2. \tag{2}$$

Si l'on pose $\widehat{MOM'} = \alpha$, on a

$$N = \frac{OM}{\cos\alpha}, \qquad N' = \frac{OM'}{\cos\alpha}$$

et

$$OM.OM'\cos\alpha = r^2,$$

r étant le rayon du cercle directeur. La formule (1) devient alors

$$RR' = \frac{r^2}{\cos^3\alpha}.$$

C'est la formule obtenue par M. Mannheim.

La formule (1) montre que, *si, pour une courbe rapportée à un pôle* O, *la projection du centre de courbure sur le rayon vecteur divise celui-ci dans* *un rapport constant* [1], *la polaire réciproque de cette courbe par rapport à un cercle de centre* O *jouit de la même propriété*. Cette proposition est susceptible de nombreuses applications.

3. Les formules (1) et (2) donnent immédiatement le rayon de courbure de la podaire c_1 d'une courbe c par rapport à un point O. En effet, soit c' la polaire réciproque de c par rapport à un cercle de centre O; cette courbe c' est inverse de c_1 par rapport au même cercle. Donc

$$\frac{N}{R}\frac{N'}{R'} = 1 \qquad \text{et} \qquad \frac{N'}{R'} + \frac{N_1}{R_1} = 2;$$

d'où

$$\frac{R}{N} + \frac{N_1}{R_1} = 2. \tag{3}$$

4. Supposons maintenant que les courbes c et c' soient polaires réciproques *par rapport à une conique à centre quelconque* k. Soient ω et ω' les angles des vecteurs OM et OM' avec l'axe focal de la conique k, θ et θ' les angles des tangentes t et t' à c et c', en M et M', avec le même axe. On a

$$R = \frac{ds}{d\theta}, \qquad R' = \frac{ds'}{d\theta'}.$$

Mais la direction t étant conjuguée de la direction OM', on a

$$\operatorname{tang}\theta \operatorname{tang}\omega' = \text{const.};$$

d'où, en différentiant,

$$d\theta \frac{\sin\omega'}{\cos\theta} + d\omega' \frac{\sin\theta}{\cos\omega'} = 0,$$

c'est-à-dire

$$d\theta = -d\omega' \frac{\sin 2\theta}{\sin 2\omega'};$$

de même,

$$d\theta' = -d\omega \frac{\sin 2\theta'}{\sin 2\omega}.$$

---

[1] *Voir*, au sujet des courbes jouissant de cette propriété, un article de M. du Chatenet dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* (p. 233; 1886).

Substituant dans l'expression du produit RR', on a, par la même remarque que précédemment,

(4) $$RR' = \frac{\sin 2\omega \sin 2\omega'}{\sin 2\theta \sin 2\theta'} NN',$$

formule qui généralise (1).

5. Dans le cas de la transformation parabolique, on a, en appelant y et y' les ordonnées des points M et M' comptés à partir de l'axe de la parabole et p le paramètre de cette courbe,

$$\cot\theta = \frac{y'}{p}, \qquad \cot\theta' = \frac{y}{p};$$

d'où

$$d\theta = -\frac{\sin^2\theta\, dy'}{p}, \qquad d\theta' = -\frac{\sin^2\theta'\, dy}{p}.$$

D'ailleurs,

$$ds = \frac{dy}{\sin\theta}, \qquad ds' = \frac{dy'}{\sin\theta'}.$$

Il vient donc alors

(5) $$RR' = \frac{p^2}{\sin^3\theta \sin^3\theta'}.$$