ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

ÉDOUARD. GOURSAT

# Étude des surfaces qui admettent tous les plans de symétrie d'un polyèdre régulier

*Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série*, tome 4 (1887), p. 241-312

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1887_3_4__241_0>

# ÉTUDE DES SURFACES

QUI ADMETTENT

# TOUS LES PLANS DE SYMÉTRIE

## D'UN POLYÈDRE RÉGULIER,

PAR M. ÉD. GOURSAT,

MAITRE DE CONFÉRENCES A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

## DEUXIÈME PARTIE.

1. Je me propose, dans la seconde Partie de ce travail, de trouver des formules générales pour représenter les surfaces *minima* qui ont la symétrie d'un polyèdre régulier. On est conduit ainsi à une application intéressante des belles recherches d'Algèbre de M. Klein où interviennent les polyèdres réguliers.

Il est nécessaire pour cela de rappeler les principes de la représentation sphérique des surfaces et les formules connues pour la détermination des surfaces minima. Considérons un système de trois axes rectangulaires $Ox$, $Oy$, $Oz$ et une sphère S de rayon égal à l'unité ayant pour centre l'origine. Soient $\Sigma$ une surface non développable, M un point de cette surface, MN la normale à la surface en ce point ou plutôt une direction déterminée sur cette normale. La parallèle menée par l'origine à la direction MN rencontre la sphère de rayon égal à l'unité en un point bien déterminé $m$, que l'on fait correspondre au point M de la surface $\Sigma$. A chaque courbe tracée sur $\Sigma$ correspond ainsi une certaine courbe sur S, courbe qui est dite l'image sphérique de la première. Pour représenter la position d'un point $m$ sur la sphère, nous emploierons le système suivant de coordonnées.

Soit $m'$ (*fig.* 3) la projection stéréographique du point $m$ sur le plan des $xy$, le point de vue étant le point de coordonnées

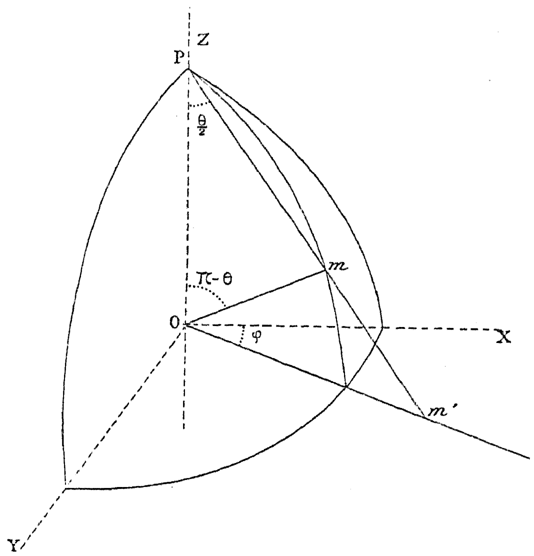
$$x = 0, \qquad y = 0, \qquad z = 1.$$

Désignons par $\xi$ et $\eta$ les coordonnées rectangulaires du point $m'$, et posons

$$s = \xi + \eta i, \qquad s_0 = \xi - \eta i.$$

Nous prendrons pour coordonnées du point $m$ de la sphère les quantités imaginaires conjuguées $s$ et $s_0$; ce point $m$ de la sphère figure

Fig. 3.




ainsi la quantité imaginaire $s$. A deux quantités conjuguées correspondent deux points symétriques par rapport au plan des $xz$; aux quantités imaginaires $s$ et $-\frac{1}{s_0}$ correspondent deux points diamétralement opposés, etc. Soient $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ les coordonnées rectangulaires de $m$. On a

$$\operatorname{tang}\frac{\theta}{2} = om' = \sqrt{ss_0},$$

et, par suite,

$$\sin\theta = \frac{2\sqrt{ss_0}}{1 + ss_0}, \qquad \cos\theta = \frac{1 - ss_0}{1 + ss_0},$$

$$\cos\varphi = \frac{1}{2}\,\frac{s + s_0}{\sqrt{ss_0}}, \qquad \sin\varphi = \frac{1}{2i}\cdot\frac{s - s_0}{\sqrt{ss_0}};$$

on en tire

$$\alpha = \cos\varphi \sin\theta = \frac{s + s_0}{1 + ss_0},$$

$$\beta = \sin\varphi \sin\theta = -i\frac{s - s_0}{ss_0 + 1},$$

$$\gamma = -\cos\theta = \frac{ss_0 - 1}{1 + ss_0},$$

L'équation du plan tangent à la surface $\Sigma$ au point M sera par conséquent

$$(1) \qquad s(x - iy) + s_0(x + iy) + (ss_0 - 1)z = u,$$

en posant pour abréger $u = (1 + ss_0)D$, D désignant la distance de ce plan à l'origine. Si, dans cette équation (1), nous regardons $u$ comme une fonction de $s$ et de $s_0$, le plan représenté par cette équation enveloppe une surface et l'on peut regarder la relation

$$u = \varphi(s, s_0)$$

comme l'équation d'une surface dans le système de variables adopté. Les coordonnées du point de contact du plan (1) avec la surface enveloppe sont fournies par les équations ci-dessous :

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} z &= \frac{-u + s\dfrac{\partial u}{\partial s} + s_0\dfrac{\partial u}{\partial s_0}}{1 + ss_0}, \\ x + iy &= \frac{\dfrac{\partial u}{\partial s_0} + su - s^2\dfrac{\partial u}{\partial s}}{1 + ss_0}, \\ x - iy &= \frac{\dfrac{\partial u}{\partial s} + s_0 u - s_0^2\dfrac{\partial u}{\partial s_0}}{1 + ss_0}. \end{aligned} \right.$$

Il est facile d'établir dans ce système les équations différentielles des lignes de courbure et des lignes asymptotiques de la surface.

Lignes de courbure. — Une ligne de courbure et son image sphérique ont leurs tangentes parallèles d'après une propriété importante et bien connue de la représentation sphérique. On aura donc, pour une ligne de courbure,

$$\frac{dx}{d\alpha} = \frac{dy}{d\beta} = \frac{dz}{d\gamma},$$

ou

$$\frac{dx + i\,dy}{dx + i\,d\beta} = \frac{dx - i\,dy}{d\alpha - i\,d\beta} = \frac{dz}{d\gamma}.$$

Des valeurs ci-dessus de $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, on tire

$$d(\alpha + i\beta) = 2\,\frac{ds - s^2 ds_0}{(1 + ss_0)^2}, \qquad d(\alpha - i\beta) = 2\,\frac{ds_0 - s_0^2\,ds}{(1 + ss_0)^2}, \qquad d\gamma = 2\,\frac{s\,ds_0 + s_0\,ds}{(1 + ss_0)^2}.$$

Par conséquent, on aura aussi

$$\begin{aligned} \frac{dx + i\,dy}{ds - s^2 ds_0} = \frac{dx - i\,dy}{ds_0 - s_0^2\,ds} &= \frac{dz}{(s\,ds_0 + s_0\,ds)} \\ &= \frac{ds_0(dx + i\,dy) - ds(dx - i\,dy) + dz(s\,ds_0 - s_0\,ds)}{ds_0(ds - s^2\,ds_0) - ds(ds_0 - s_0^2\,ds) + (s^2 ds_0^2 - s_0^2\,ds^2)}. \end{aligned}$$

Le dénominateur de ce dernier rapport est nul identiquement; on aura donc, pour l'équation différentielle cherchée,

$$ds_0(dx + i\,dy) - ds(dx - i\,dy) + dz(s\,ds_0 - s_0\,ds) = 0.$$

D'ailleurs, on a, pour les coordonnées d'un point de la surface,

$$x + iy + sz = \frac{\partial u}{\partial s_0},$$

$$x - iy + s_0 z = \frac{\partial u}{\partial s};$$

et, par suite,

$$d(x + iy) + s\;dz = -\,z\,ds + d\left(\frac{\partial u}{\partial s_0}\right),$$

$$d(x - iy) + s_0\,dz = -\,z\,ds_0 + d\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right).$$

On en tire

$$ds_0\,(dx + i\,dy) - ds(dx - i\,dy) + dz\,(s\,ds_0 - s_0\,ds) = ds_0\,d\left(\frac{\partial u}{\partial s_0}\right) - ds\,d\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right).$$

L'équation différentielle des lignes de courbure sera donc

$$ds_0\,d\left(\frac{\partial u}{\partial s_0}\right) - ds\,d\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right) = 0$$

ou, en développant,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}\,ds^2 = \frac{\partial^2 u}{\partial s_0^2}\,ds_0^2. \tag{3}$$

Lignes asymptotiques. — L'équation du plan tangent étant

$$s_0(x+iy)+s(x-iy)-(1-ss_0)z=u,$$

on a, pour toute ligne tracée sur la surface,

$$s_0(dx+i\,dy)+s(dx-i\,dy)-(1-ss_0)\,dz=0.$$

Pour une ligne asymptotique, on aura en outre

$$s_0(d^2x+i\,d^2y)+s(d^2x-i\,d^2y)-(1-ss_0)\,d^2z=0$$

ou, ce qui revient au même,

$$ds_0(dx+i\,dy)+ds(dx-i\,dy)+(s\,ds_0+s_0\,ds)\,dz=0.$$

En tenant compte des calculs faits plus haut, cette équation s'écrit

$$-2z\,ds\,ds_0+ds_0\,d\left(\frac{\partial u}{\partial s_0}\right)+ds\,d\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)=0,$$

c'est-à-dire

$$(4)\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial s_0^2}ds_0^2+\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}ds^2+2\,ds\,ds_0\left(\frac{\partial^2 u}{\partial s\,\partial s_0}+\frac{u-s\dfrac{\partial u}{\partial s}-s_0\dfrac{\partial u}{\partial s_0}}{1+ss_0}\right)=0.$$

Rayons de courbure principaux. — Pour une ligne de courbure, on a

$$\frac{dx+i\,dy}{d\alpha+i\,d\beta}=\frac{dx-i\,dy}{d\alpha-i\,d\beta}=\frac{dz}{d\gamma}=\mathrm{R},$$

en appelant R le rayon de courbure principal correspondant. On en déduit

$$\mathrm{R}=\frac{dx+i\,dy+s\,dz}{d\alpha+i\,d\beta+s\,d\gamma}=\frac{dx-i\,dy+s\,dz}{d\alpha-i\,d\beta+s\,d\gamma}$$

ou bien

$$\mathrm{R}=\frac{-z\,ds+d\left(\dfrac{\partial u}{\partial s_0}\right)}{2\dfrac{ds}{1+ss_0}}=\frac{-z\,ds_0+d\left(\dfrac{\partial u}{\partial s}\right)}{\dfrac{2\,ds_0}{1+ss_0}}.$$

Éliminons le rapport $\dfrac{ds}{ds_0}$ et remplaçons $z$ par sa valeur; il vient, après quelques réductions,

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} &4R^2-4R\left[(1+ss_0)\frac{\partial^2 u}{\partial s\,\partial s_0}+u-s\frac{\partial u}{\partial s}-s_0\frac{\partial u}{\partial s_0}\right]\\ &\quad+\left[(1+ss_0)\frac{\partial^2 u}{\partial s\,\partial s_0}+u-s\frac{\partial u}{\partial s}-s_0\frac{\partial u}{\partial s_0}\right]^2-(1+ss_0)^2\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial s_0^2}=0. \end{aligned}\right.$$

2. Appliquons ceci aux surfaces *minima*. On sait que pour une telle surface la somme des rayons de courbure principaux doit être nulle. La fonction $u$ devra donc satisfaire à l'équation aux dérivées partielles

$$(1+ss_0)\frac{\partial^2 u}{\partial s\,\partial s_0}-s\frac{\partial u}{\partial s}-s_0\frac{\partial u}{\partial s_0}+u=0.$$

En différentiant par rapport à l'une quelconque des variables, on obtient les deux nouvelles équations

$$(1+ss_0)\frac{\partial^3 u}{\partial s^2\,\partial s_0}-s\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}=0,$$

$$(1+ss_0)\frac{\partial^3 u}{\partial s\,\partial s_0^2}-s_0\frac{\partial^2 u}{\partial s_0^2}=0,$$

dont il est facile d'avoir les intégrales générales. En effet, écrivons la première

$$\frac{\dfrac{\partial^3 u}{\partial s^2\,\partial s_0}}{\dfrac{\partial^2 u}{\partial s^2}}-\frac{s}{1+ss_0}=0;$$

on en tire

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}=(1+ss_0)f(s),$$

$f(s)$ désignant une fonction arbitraire de $s$. On tirerait aisément de là l'expression générale de $u$ et les formules de M. Weierstrass. Je ne m'y arrêterai pas.

Je ferai remarquer seulement que les équations (3), (4), (5) se simplifient beaucoup et deviennent respectivement

$$(3)'\qquad f(s)\,ds^2=f_0(s_0)\,ds_0^2,$$

$$(4)'\qquad f(s)\,ds^2+f_0(s_0)\,ds_0^2=0,$$

$$(5)'\qquad 4R^2=(1+ss_0)^4 f(s)\,f_0(s_0),$$

$f_0$ désignant la fonction conjuguée de $f$.

3. Substitutions linéaires. — Imaginons qu'on fasse tourner la sphère d'un certain angle V autour d'un diamètre ROR′, le point $m$ de la sphère vient en un point $m_1$. Soient $s$ et $\sigma$ les quantités imaginaires répondant aux points $m$ et $m_1$ de la sphère; $\alpha$ et $\beta$ les quantités imaginaires répondant aux extrémités R, R′ du diamètre, quantités liées par la relation $\alpha\beta_0 = -1$. Proposons-nous de déterminer $\sigma$ en fonction de $s$, $\alpha$, $\beta$ et de l'angle V. Des considérations élémentaires donnent aisément cette expression.

Sur le plan, les deux séries de courbes, représentées par les deux équations

$$\operatorname{mod}\left(\frac{s-\alpha}{s-\beta}\right) = \mathrm{C}, \qquad \arg\left(\frac{s-\alpha}{s-\beta}\right) = \mathrm{C}',$$

forment deux familles de cercles orthogonaux. Les cercles de la première famille sont conjugués par rapport aux deux points fixes, qui sont les projections stéréographiques des points R, R′; les cercles de la seconde famille passent par ces deux points. Sur la sphère, nous aurons, d'une part, une famille de cercles dont les plans sont perpendiculaires au diamètre ROR′; d'autre part, les cercles dont le plan passe par ce diamètre. Dans le mouvement de rotation précédent, le module de $\frac{s-\alpha}{s-\beta}$ ne changera donc pas, tandis que l'argument devra augmenter ou diminuer de V. On aura, par conséquent,

$$\frac{\sigma-\alpha}{\sigma-\beta} = e^{\pm i\mathrm{V}}\frac{s-\alpha}{s-\beta}; \tag{6}$$

on choisira le signe d'après le sens de la rotation. On prendra le signe — si un observateur couché sur le diamètre ROR′, les pieds en R′ et la tête en R, voit ce mouvement s'effectuer dans le sens direct (de sa gauche vers sa droite).

La relation (6) est de la forme

$$\sigma = \frac{as+b}{cs+d}, \tag{7}$$

c'est-à-dire que toute rotation de la sphère autour de l'origine correspond à une substitution linéaire effectuée sur la variable imaginaire $s$. Inversement, pour qu'une substitution linéaire (7) définisse une rotation de la sphère autour de son centre, il faut et il suffit qu'elle puisse être mise sous la forme (6). En d'autres termes, les points doubles $\alpha$, $\beta$ de cette substitution doivent vérifier la relation $\alpha\beta_0 = -1$, et, si l'on met la substitution sous la forme

$$\frac{\sigma - \alpha}{\sigma - \beta} = k\frac{s - \alpha}{s - \beta},$$

on doit avoir $\operatorname{mod} k = 1$.

4. Transformation de coordonnées. — Soit OXYZ un trièdre trirectangle de même origine et de même disposition que le premier. On sait qu'on peut amener $oxyz$ à coïncider avec OXYZ par une rotation autour de l'origine; soit

$$\sigma = \frac{as + b}{cs + d}$$

la substitution linéaire qui correspond à cette rotation. Prenons un point $m$ sur la sphère, invariablement lié au trièdre $oxyz$, et soit M la position de ce point après la rotation. Si le point $m$ figure la quantité $s$ dans le système $oxyz$, le point M figurera la quantité $s$ dans le système OXYZ et la quantité $\sigma$ dans le système $oxyz$.

Prenons un plan perpendiculaire à la droite OM à une distance $l$ de l'origine. Ce plan aura pour équation, dans le système $oxyz$,

$$l = \frac{\sigma(x - iy) + \sigma_0(x + iy) - (1 - \sigma\sigma_0)z}{1 + \sigma\sigma_0}$$

et, dans le système OXYZ,

$$l = \frac{s(X - iY) + s_0(X + iY) - (1 - ss_0)Z}{1 + ss_0}.$$

On aura donc identiquement

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\sigma(x - iy) + \sigma_0(x + iy) - (1 - \sigma\sigma_0)z}{1 + \sigma\sigma_0} \\ &\quad = \frac{s(X - iY) + s_0(X + iY) - (1 - ss_0)Z}{1 + ss_0}. \end{aligned}\right.$$

Pour déduire de là les formules de transformation de coordonnées, nous n'avons qu'à remplacer $\sigma$, $\sigma_0$ par leurs expressions

$$\sigma = \frac{as+b}{cs+d}, \qquad \sigma_0 = \frac{a_0 s_0 + b_0}{c_0 s_0 + d_0},$$

où $a_0$, $b_0$, $c_0$, $d_0$ sont les conjuguées de $a$, $b$, $c$, $d$, et à égaler les coefficients de $s$, $s_0$, $ss_0$.

5. Courbes minima. — On appelle *courbe minima* toute courbe dont les tangentes rencontrent le cercle imaginaire de l'infini. La courbe étant rapportée à un système d'axes rectangulaires et $x, y, z$ désignant les coordonnées d'un point de cette courbe, la propriété précédente est exprimée par la relation

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = 0.$$

Toute courbe minima peut être considérée comme l'arête de rebroussement de la surface développable enveloppe d'un plan mobile qui reste constamment parallèle à un plan tangent au cône imaginaire

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0.$$

Écrivons l'équation de ce plan sous la forme

$$x + iy - s^2(x - iy) + 2sz = -4F(s), \tag{9}$$

$s$ désignant le paramètre arbitraire et $F(s)$ une fonction quelconque de ce paramètre. Les coordonnées d'un point quelconque de la courbe minima correspondante seront données par les trois équations (9) et (10),

$$\left\{\begin{aligned} &-2s(x - iy) + 2z = -4F'(s),\\ &-2(x - iy) = -4F''(s); \end{aligned}\right. \tag{10}$$

on en déduit

$$\left\{\begin{aligned} x &= (1 - s^2)F''(s) + 2sF'(s) - 2F(s),\\ y &= i(1 + s^2)F''(s) - 2isF'(s) + 2iF(s),\\ z &= 2sF''(s) - 2F'(s). \end{aligned}\right. \tag{11}$$

Les formules précédentes sont dues à M. Sophus Lie. Elles sont équivalentes aux formules suivantes de M. Weierstrass :

$$(12)\qquad \begin{cases} x = \int (1-s^2)\,\mathfrak{F}(s)\,ds, \\ y = i\int (1+s^2)\,\mathfrak{F}(s)\,ds, \\ z = \int 2s\,\mathfrak{F}(s)\,ds, \end{cases}$$

en posant $\mathfrak{F}(s) = F'''(s)$. Les équations (11) et (12) représentent toutes les courbes minima, et cette représentation est caractéristique, c'est-à-dire qu'à une courbe minima donnée dans un système d'axes déterminé correspond une fonction $F(s)$ parfaitement déterminée. Des équations (12), on tire, en effet,

$$s = -\frac{dx}{dz} - i\frac{dy}{dz},$$

relation qui nous fournit la signification de la variable *caractéristique* $s$. Une fois la variable $s$ choisie, l'équation (9) nous fait connaître la fonction $F(s)$, que j'appellerai, pour abréger, *fonction caractéristique*. On pourrait prendre aussi comme fonction caractéristique la dérivée troisième $F'''(s) = \mathfrak{F}(s)$; mais il est à remarquer qu'à une fonction $F(s)$ correspond une seule courbe minima, tandis qu'à une fonction $\mathfrak{F}(s)$ correspondent une infinité de courbes minima qui se déduisent de l'une d'elles par une translation. Je dirai, pour abréger, que deux courbes minima qui se déduisent l'une de l'autre par une translation sont *congruentes* entre elles, et je dirai que l'ensemble des courbes minima congruentes entre elles forme un *système*.

La courbe conjuguée d'une courbe minima est elle-même une courbe minima, qui est l'arête de rebroussement de la surface enveloppe du plan mobile

$$x - iy - s_0^2(x+iy) + 2s_0 z = -4F_0(s_0),$$

$F_0$ désignant la fonction conjuguée de F. L'équation de ce plan peut encore s'écrire

$$x + iy - \left(\frac{1}{s_0}\right)^2 (x - iy) - \frac{2}{s_0} z = \frac{4}{s_0^2} F_0(s_0);$$

sous cette forme on reconnaît que la variable caractéristique pour la nouvelle courbe sera $s' = -\frac{1}{s_0}$, et la fonction caractéristique

$$-s'^2 F_0\left(-\frac{1}{s'}\right).$$

Remarquons que, si l'on emploie pour la variable $s$ la représentation géométrique définie plus haut, deux points conjugués sur les deux courbes conjuguées correspondent, pour les variables caractéristiques, aux deux extrémités d'un diamètre de la sphère.

6. Nous aurons besoin, dans la suite, de connaître la solution d'un problème préliminaire que je vais traiter avant d'aller plus loin.

*Connaissant la fonction caractéristique d'une courbe minima dans un système d'axes rectangulaires, trouver, dans le même système d'axes, la fonction caractéristique de la courbe minima, après qu'on lui a fait subir un déplacement quelconque dans l'espace.*

Tout déplacement se ramenant à la combinaison d'une rotation et d'une translation, nous allons examiner séparément chacun de ces mouvements.

1° Supposons que l'on fasse subir à une courbe minima une certaine translation. Soient $F(s)$ la fonction caractéristique de la courbe dans sa position primitive et $F_1(s)$ la fonction caractéristique après la translation. D'après l'expression de la variable caractéristique $s$, nous voyons immédiatement que cette variable sera la même pour les deux courbes. D'ailleurs, les formules de M. Weierstrass nous montrent que la fonction $\mathfrak{F}(s)$ doit être la même pour les deux courbes, c'est-à-dire que $F_1(s)$ et $F(s)$ ne peuvent différer que d'un trinôme du second degré en $s$. Soient $x$, $y$, $z$ les coordonnées d'un point quelconque de la courbe minima avant la translation, $x_1$, $y_1$, $z_1$ les coordonnées de ce même point après la translation, et supposons

$$F_1(s) = F(s) + As^2 + 2Bs + C.$$

Les formules de M. Sophus Lie nous donnent

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} x_1 &= x + (1-s^2)2A + 2s(2As+2B) - 2(As^2+2Bs+C) = x + 2(A-C),\\ y_1 &= y + i(1+s^2)2A - 2is(2As+2B) + 2i(As^2+2Bs+C) = y + 2i(A+C),\\ z_1 &= z + 4As - 2(2As+2B) = z - 4B.\end{aligned}\right.$$

Inversement, connaissant les composantes de la translation suivant les axes de coordonnées, on en déduira les constantes A, B, C et, par suite, $F_1(s)$. Je ferai remarquer ici que la translation est complètement imaginaire si A et C sont conjuguées et B de la forme $ib$, $b$ étant réel; la réciproque est vraie.

2° Supposons qu'on fasse tourner la courbe minima d'un angle $\alpha$ autour de l'axe des $z$ de $ox$ vers $oy$. Appliquons cette rotation au plan mobile (9); dans sa nouvelle position, ce plan sera représenté par l'équation

$$(x+iy)e^{-\alpha i} - s^2 e^{\alpha i}(x-iy) + 2sz = -4F(s)$$

ou encore

$$x+iy-(se^{\alpha i})^2(x-iy)+2se^{\alpha i}z = -4e^{\alpha i}F(s).$$

Cette équation est encore de la forme (9). La variable caractéristique est $se^{\alpha i} = s'$, et la nouvelle fonction caractéristique est

$$e^{\alpha i}F(s'e^{-\alpha i}).$$

3° Faisons tourner la courbe minima d'un angle $\theta$ autour de $ox$, de $oz$ vers $oy$, et imaginons un système d'axes mobiles $ox'$, $oy'$, $oz'$ invariablement lié à cette courbe. Après la rotation, le plan mobile aura toujours pour équation, dans ce système d'axes,

$$x'+iy'-s^2(x'-iy')+2sz' = -4F(s).$$

Pour revenir aux axes fixes, employons les formules

$$\begin{aligned} x' &= x, \\ y' &= y\cos\theta - z\sin\theta, \\ z' &= y\sin\theta + z\cos\theta; \end{aligned}$$

l'équation du plan mobile dans le système d'axes fixes sera donc, après la rotation,

$$x(1-s^2)+i(1+s^2)(y\cos\theta - z\sin\theta)+2s(y\sin\theta+z\cos\theta) = -4F(s)$$

ou

$$\begin{aligned} &(x+iy)[1+\cos\theta - 2is\sin\theta - s^2(1-\cos\theta)] \\ &\quad -(x-iy)[s^2(1+\cos\theta)-2is\sin\theta - 1+\cos\theta] \\ &\qquad\qquad +2z[2s\cos\theta - i(1+s^2)\sin\theta] = -8F(s). \end{aligned}$$

Cette équation peut encore s'écrire

$$x+iy-(x-iy)\frac{s^2(1+\cos\theta)-2is\sin\theta-1+\cos\theta}{1+\cos\theta-2is\sin\theta-s^2(1-\cos\theta)}$$
$$+2z\frac{2s\cos\theta-i\sin\theta(1+s^2)}{1+\cos\theta-2is\sin\theta-s^2(1-\cos\theta)}$$
$$=-\frac{8\,F(s)}{1+\cos\theta-2is\sin\theta-s^2(1-\cos\theta)},$$

ou

$$x+iy-\left(\frac{1+is\cot\frac{\theta}{2}}{s+i\cot\frac{\theta}{2}}\right)^2(x-iy)+2z\left(\frac{1+is\cot\frac{\theta}{2}}{s+i\cot\frac{\theta}{2}}\right)$$
$$=-\frac{8\,F(s)}{1+\cos\theta-2is\sin\theta-s^2(1-\cos\theta)}.$$

Posons

$$s'=\frac{1+is\cot\frac{\theta}{2}}{s+i\cot\frac{\theta}{2}};$$

on en tire

$$s=\varphi(s')=\frac{1-is'\cot\frac{\theta}{2}}{s'-i\cot\frac{\theta}{2}},$$

$$\frac{d\varphi}{ds'}=\frac{-1}{\sin^2\frac{\theta}{2}\left(s'-i\cot\frac{\theta}{2}\right)^2}=-\left(\frac{1-\cos\theta}{2}\right)\left(s+i\cot\frac{\theta}{2}\right)^2,$$

et l'équation précédente peut s'écrire

$$(14)\qquad x+iy-s'^2(x-iy)+2s'z=-4\frac{F[\varphi(s')]}{\frac{d\varphi}{ds'}}.$$

La nouvelle fonction caractéristique est donc, en supprimant l'accent,

$$\frac{F[\varphi(s)]}{\frac{d\varphi}{ds}};$$

remarquons que la substitution linéaire $\sigma=\varphi(s)$ correspond à une rotation de $\theta$ autour de $ox$, de $oy$ vers $oz$. Dans les deux cas qui viennent d'être examinés, nous voyons que, en appelant $\sigma = \varphi(s)$ la substitution linéaire qui correspond à la rotation inverse de la rotation considérée, la nouvelle fonction caractéristique sera

$$\frac{F[\varphi(s)]}{\frac{d\varphi}{ds}}.$$

Un calcul tout pareil à celui qui vient d'être fait donne la même loi pour une rotation autour de $oy$.

Si la loi est vraie pour deux rotations, on vérifie sur le champ qu'elle est encore vraie pour la rotation résultante. Comme toute rotation autour de l'origine se ramène à une combinaison de rotations, telles que les précédentes, on peut formuler la loi générale que voici :

*Soient* $\sigma = \frac{as+b}{cs+d}$ *la substitution linéaire qui correspond à une rotation autour de l'origine et* $\sigma = \varphi(s)$ *la substitution inverse. La fonction caractéristique de la courbe minima après la rotation est*

$$F[\varphi(s)] \frac{1}{\frac{d\varphi}{ds}},$$

$F(s)$ *désignant la fonction caractéristique avant la rotation.*

Si, au lieu de considérer $F(s)$, on prenait la dérivée troisième $\mathcal{F}(s)$, on trouverait de même qu'une rotation autour de l'origine conduit à remplacer $\mathcal{F}(s)$ par $\mathcal{F}[\varphi(s)]\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2$, $\varphi$ ayant la même signification que plus haut. Cela résulte de la proposition suivante, qu'il est bien facile de vérifier : la dérivée troisième de

$$F\left(\frac{as+b}{cs+d}\right)\frac{(cs+d)^2}{ad-bc}$$

est égale à

$$\frac{(ad-bc)^2}{(cs+d)^4} F'''\left(\frac{as+b}{cs+d}\right).$$

Si, au lieu de faire tourner la courbe minima, on faisait tourner les axes, on aurait les mêmes formules; mais il faudrait prendre pour la substitution $\sigma = \varphi(s)$ celle qui correspond à la rotation des axes.

Nous aurons encore besoin de connaître la fonction caractéristique d'une courbe minima symétrique d'une courbe minima donnée. Supposons que le plan de symétrie soit le plan des $xz$. Le plan symétrique du plan représenté par l'équation (9) aura pour équation

$$x - iy - s^2(x + iy) + 2sz = -4F(s);$$

on peut encore l'écrire

$$x + iy - \frac{1}{s^2}(x - iy) - \frac{2}{s}z = \frac{4}{s^2}F(s).$$

On voit que, en posant $s' = -\frac{1}{s}$, la nouvelle fonction caractéristique sera

$$-s'^2 F\left(-\frac{1}{s'}\right).$$

Deux points symétriques sur les deux courbes correspondent sur la sphère où l'on figure $s$ à deux points symétriques par rapport à l'axe $oy$.

7. Surfaces minima. — Les surfaces minima, autres que les développables circonscrites au cercle de l'infini, peuvent être engendrées de la manière suivante :

Quand on fait mouvoir une courbe minima d'un mouvement de translation, de façon qu'un de ses points décrive une autre courbe minima, la surface engendrée par cette courbe est une surface minima.

Ce mode de génération est équivalent à celui-ci : Étant données deux courbes minima quelconques C, C′, si l'on joint un point quelconque de l'une à un point quelconque de l'autre et qu'on prenne le milieu M de la droite qui joint ces deux points, le lieu du point M est une surface minima. C'est à M. Lie qu'on doit cette interprétation géométrique de l'intégrale de Monge. Elle est très commode pour l'objet que nous avons en vue. Inversement, toute surface minima non développable pourra être engendrée de cette façon. Pour que la surface soit réelle, il faut et il suffit que les deux courbes C et C′ soient conjuguées l'une de l'autre. Il suit de là et des formules (11) et (12) que les expressions générales des coordonnées d'un point *réel* d'une surface minima *réelle* sont les suivantes

$$(15)\qquad \begin{cases} x = \mathrm{R}[(1 - s^2)\,\mathrm{F}''(s) + 2s\,\mathrm{F}'(s) - 2\,\mathrm{F}(s)], \\ y = \mathrm{R}[i(1 + s^2)\,\mathrm{F}''(s) - 2i\,\mathrm{F}'(s) + 2i\,\mathrm{F}(s)], \\ z = \mathrm{R}[2s\,\mathrm{F}''(s) - 2\,\mathrm{F}'(s)], \end{cases}$$

le signe R désignant la partie réelle d'une quantité imaginaire et $\mathrm{F}(s)$ une fonction analytique quelconque de $s$. On peut encore écrire ces formules, en posant $\mathcal{F}(s) = \mathrm{F}'''(s)$,

$$(16)\qquad \begin{cases} x = \mathrm{R}\left[\int (1 - s^2)\,\mathcal{F}(s)\,ds\right], \\ y = \mathrm{R}\left[i\int (1 + s^2)\,\mathcal{F}(s)\,ds\right], \\ z = \mathrm{R}\left[\int 2s\,\mathcal{F}(s)\,ds\right]. \end{cases}$$

A toute courbe minima correspond ainsi une surface minima réelle. Cette surface sera double si la courbe minima est congruente à sa conjuguée, c'est-à-dire si l'on a

$$-\frac{1}{s^4}\,\mathcal{F}_0\left(-\frac{1}{s}\right) = \mathcal{F}(s),$$

relation équivalente à celle-ci

$$-s^2\,\mathrm{F}_0\left(-\frac{1}{s}\right) = \mathrm{F}(s) + \mathrm{A}s^2 + 2\mathrm{B}s + \mathrm{C},$$

A, B, C désignant des constantes quelconques.

Je rappelle encore qu'au point de la sphère qui figure la valeur de $s$ la normale à la sphère est parallèle à la normale à la surface au point $x, y, z$. Des formules qui donnent $x, y, z$, on tire, en appelant $d\mathrm{S}$ l'élément linéaire de la surface minima,

$$d\mathrm{S}^2 = 4(1 + ss_0)^2\,\mathcal{F}(s)\,\mathcal{F}(s_0)\,ds\,ds_0,$$

ce qui nous montre que la surface est appliquée conformément sur la sphère par ce mode de correspondance. Quand on change $\mathcal{F}(s)$ en $e^{\alpha i}\,\mathcal{F}(s)$, $\alpha$ étant réel, l'expression de $d\mathrm{S}^2$ ne change pas. On a ainsi une famille de surfaces minima, toutes applicables l'une sur l'autre, que l'on appelle surfaces *associées*. En particulier, si $\alpha = \frac{\pi}{2}$, on a la transformée de M. Bonnet, ou surface *adjointe*.

8. Surfaces minima symétriques. — Si une courbe minima C est symétrique par rapport à un plan réel P, il en sera évidemment de même de la courbe conjuguée $C_0$ et, d'après le second mode de génération, la surface minima correspondante admettra aussi le plan P pour plan de symétrie. Il en sera encore de même si les deux courbes C, $C_0$ sont symétriques l'une de l'autre par rapport au plan P. Nous sommes donc conduits à distinguer deux espèces de symétrie pour une surface minima.

Pour fixer les idées, supposons que nous ayons pris le plan P pour plan des $xz$ et soit $F(s)$ la fonction caractéristique de la courbe minima C; nous avons vu plus haut (n° 5) que la fonction caractéristique de la courbe conjuguée $C_0$ est

$$-s^2 F_0\left(-\frac{1}{s}\right)$$

et celle de la courbe C′ symétrique de C par rapport au plan des $xz$

$$-s^2 F\left(-\frac{1}{s}\right).$$

Si C′ coïncide avec C, on aura

$$s^2 F\left(-\frac{1}{s}\right) = -F(s),$$

et, si C′ coïncide avec $C_0$,

$$s^2 F\left(-\frac{1}{s}\right) = s^2 F_0\left(-\frac{1}{s}\right),$$

ou

$$F_0(s) = F(s).$$

Inversement, si une fonction $F(s)$ satisfait à l'une des conditions précédentes, la surface minima obtenue en portant cette fonction dans les formules (15) admet le plan des $xz$ pour plan de symétrie.

C'est ici le moment de définir avec précision certaines expressions dont nous nous servirons couramment dans la suite. Quand il s'agit de fonctions uniformes, on sait bien ce qu'il faut entendre par fonctions réelles, fonctions conjuguées, etc.; mais, quand on a affaire à des fonctions analytiques non uniformes, ces expressions peuvent donner lieu à certaines ambiguïtés. Étant donnée une fonction analytique $F(s)$ d'une variable complexe $s$, uniforme ou non, imaginons une nouvelle fonction qui, pour une valeur quelconque $s_0$ de la variable, prend des valeurs conjuguées des valeurs que prend $F(s)$ pour la valeur $s$ de la variable. On s'assure aisément, au moyen des principes les plus simples de la théorie des fonctions monogènes, que cette nouvelle fonction est encore une fonction analytique de $s$; c'est cette fonction $F_0$ que j'appellerai désormais la fonction *conjuguée* de F. Une fonction sera dite *réelle* si elle est identique à sa conjuguée; toute fonction réelle prend des valeurs conjuguées pour des valeurs conjuguées de la variable. Il est clair que, si une fonction prend des valeurs réelles pour une suite continue de valeurs réelles de la variable, elle est forcément réelle. Mais la réciproque n'est pas vraie. Par exemple, la fonction algébrique $u$ définie par l'équation

$$u^2 + s^4 + 1 = 0,$$

qui est une fonction réelle d'après notre définition, ne prend de valeurs réelles pour aucune valeur réelle de la variable.

Étant donnée une fonction rationnelle quelconque $f(s)$ de $s$ et une fonction uniforme $\varphi(s)$, on sait bien ce qu'il faut entendre quand on dit que $\varphi(s)$ est une simple fonction de $f(s)$, mais il n'en est plus de même si $\varphi(s)$ n'est pas uniforme. Toute fonction de $s$ peut en effet être considérée comme une fonction de $f(s)$. Nous dirons désormais qu'une fonction analytique quelconque $u = \varphi(s)$ est une simple fonction de $f(s)$ lorsque $f$ et $u$ sont liées par une relation de la forme

$$F[u, f(s)] = 0,$$

dont le premier membre est une fonction uniforme de $u$ et de $f$ et que cette relation est *irréductible*, quand on remplace $f(s)$ par sa valeur en fonction de $s$.

On dira de même qu'une fonction $\varphi(s)$ satisfait à une relation de la forme

$$\varphi\left(\frac{as+b}{cs+d}\right) = \varphi(s)$$

lorsque l'ensemble des valeurs, en nombre fini ou infini, de la fonction pour la valeur $\frac{as+b}{cs+d}$ de la variable est identique à l'ensemble des valeurs de la même fonction pour la valeur $s$ de la variable.

Cela posé, supposons que la fonction $F(s)$ vérifie la relation

$$F_0(s) = F(s),$$

c'est-à-dire que la fonction $F(s)$ soit réelle. Dans ce cas, les formules (15) montrent aussitôt qu'à deux valeurs conjuguées de $s$, c'est-à-dire à deux points de la sphère, symétriques par rapport au plan des $xz$, correspondent deux points de la surface, symétriques par rapport au même plan. Si la fonction $F(s)$ vérifie la relation

$$-s^2 F\left(-\frac{1}{s}\right) = F(s),$$

on vérifie de même qu'à deux valeurs telles que $s$ et $-\frac{1}{s}$, c'est-à-dire à deux points de la sphère, symétriques par rapport à l'axe $oy$, correspondent sur la surface deux points symétriques par rapport au plan des $xz$. La vérification se fait plus aisément sur les formules (16). Pour abréger le langage, je dirai que dans le premier cas le plan des $xz$ est un plan de symétrie de *première espèce* et un plan de symétrie de *seconde espèce* dans l'autre cas.

Remarquons que, si $F(s)$ prend des valeurs réelles pour des valeurs réelles de $s$, la fonction est nécessairement réelle et la surface symétrique par rapport au plan des $xz$. La surface coupe le plan des $xz$ suivant une ligne géodésique. Elle peut d'ailleurs être coupée suivant d'autres courbes, mais ce sont forcément des courbes doubles. Il ne suffit pas d'ailleurs que $F(s)$ soit une fonction réelle pour que la surface coupe orthogonalement le plan des $xz$; il faut encore qu'elle prenne des valeurs réelles pour des valeurs réelles de $s$.

Si le plan des $xz$ est un plan de symétrie de seconde espèce, les courbes d'intersection sont nécessairement des courbes doubles. Enfin, si l'on a à la fois

$$F(s) = F_0(s) = -s^2 F\left(-\frac{1}{s}\right),$$

la surface est une surface double et la distinction précédente disparaît.

En définitive, on voit que, pour construire une surface minima réelle admettant tous les plans de symétrie d'un polyèdre régulier, il nous suffit de connaître *une courbe minima* C, *telle que la courbe minima symétrique de* C *par rapport à l'un quelconque de ces plans de symétrie coïncide avec* C *ou avec sa conjuguée* $C_0$.

Dans tous les cas possibles, le système des deux courbes C, $C_0$ admettra tous les plans de symétrie du polyèdre. Il y aura lieu d'examiner si l'on obtient ainsi la solution générale du problème; c'est ce qui sera fait plus loin.

9. Recherche des courbes C et $C_0$. — On peut employer pour cette recherche soit les coordonnées cartésiennes, soit les formules de M. Lie. J'indiquerai rapidement la première méthode. On peut regarder une courbe minima comme définie en coordonnées-plans par l'équation

$$t^2 + u^2 + v^2 = 0,$$

jointe à une autre équation

$$f(t, u, v) = 0,$$

où nous supposons $f$ fonction uniforme de $t, u, v$, le plan osculateur à la courbe minima étant représenté par l'équation

$$tx + uy + vz = 1.$$

La courbe minima conjuguée sera définie par les deux équations

$$t^2 + u^2 + v^2 = 0, \qquad f_0(t, u, v) = 0,$$

en désignant par $f_0$ la fonction conjuguée de $f$. Si la fonction $f$ est réelle, la courbe minima coïncide avec sa conjuguée et l'on obtient une surface double. Cela posé, nous allons voir comment on doit prendre la fonction $f$ pour que la courbe C remplisse les conditions précédentes.

*Tétraèdre.* — Les six plans de symétrie du tétraèdre jouent un rôle absolument analogue; il est possible d'amener l'un quelconque de ces plans sur l'un d'eux au moyen des rotations qui font revenir le tétraèdre sur lui-même. Il suit de là que les deux courbes C, $C_0$ doivent admettre l'une et l'autre ces six plans pour plans de symétrie, ou bien que la courbe $C_0$ doit être symétrique de C par rapport à chacun de ces six plans; ce qui nous fait deux cas à distinguer.

Rapportons le tétraèdre aux mêmes axes que dans la première Partie de ce travail et soient

$$t^2+u^2+v^2=0, \qquad \varphi(t,u,v)+\sqrt{-1}\,\psi(t,u,v)=0$$

les équations de la courbe minima C, où nous supposons que les fonctions $\varphi$ et $\psi$ sont réelles. La courbe conjuguée $C_0$ sera définie par les deux équations

$$t^2+u^2+v^2=0, \qquad \varphi(t,u,v)-\sqrt{-1}\,\psi(t,u,v)=0.$$

Supposons d'abord que les deux courbes C et $C_0$ soient symétriques séparément par rapport aux six plans de symétrie; les fonctions $\varphi$ et $\psi$ devront vérifier les relations

$$\begin{aligned}
\varphi(u,t,v) &= \varphi(t,u,v), & \psi(u,t,v) &= \psi(t,u,v),\\
\varphi(-u,-t,v) &= \varphi(t,u,v), & \psi(-u,-t,v) &= \psi(t,u,v),\\
\varphi(t,v,u) &= \varphi(t,u,v), & \psi(t,v,u) &= \psi(t,u,v);
\end{aligned}$$

il suit de là que ces fonctions seront des fonctions uniformes de $t^2+u^2+v^2$, $t^2u^2+u^2v^2+t^2v^2$, $tuv$, et la courbe minima C sera définie par les deux équations

$$\begin{gathered}
t^2+u^2+v^2=0,\\
\Phi(t^2+u^2+v^2,\ t^2u^2+t^2v^2+u^2v^2,\ tuv)\\
+\sqrt{-1}\,\Psi(t^2+u^2+v^2,\ t^2u^2+u^2v^2+t^2v^2,\ tuv)=0,
\end{gathered}$$

les fonctions $\Phi$ et $\Psi$ étant réelles.

Si les deux courbes C et $C_0$ sont symétriques l'une de l'autre par rapport aux six plans de symétrie du tétraèdre, on aura au contraire

$$\begin{aligned}
\varphi(u,t,v) &= \varphi(t,u,v), & \psi(u,t,v) &= -\psi(t,u,v),\\
\varphi(-u,-t,v) &= \varphi(t,u,v), & \psi(-u,-t,v) &= -\psi(t,u,v),\\
\varphi(t,v,u) &= \varphi(t,u,v), & \psi(t,v,u) &= -\psi(t,u,v);
\end{aligned}$$

il en résulte que $\varphi$ sera de la même forme que tout à l'heure, mais on aura

$$\psi(t,u,v)=(t^2-u^2)(t^2-v^2)(u^2-v^2)\,\Psi(t^2+u^2+v^2,\ t^2u^2+t^2v^2+u^2v^2,\ tuv),$$

et la courbe minima C sera définie par les deux équations

$$t^2 + u^2 + v^2 = 0,$$

$$\begin{aligned}\Phi(&t^2 + u^2 + v^2,\ t^2u^2 + u^2v^2 + v^2t^2,\ tuv)\\ &+ \sqrt{-1}\,(t^2 - u^2)(t^2 - v^2)(u^2 - v^2)\,\Psi(t^2 + u^2 + v^2,\ t^2u^2 + u^2v^2 + v^2t^2,\ tuv) = 0,\end{aligned}$$

les fonctions $\Phi$ et $\Psi$ étant réelles.

Dans le premier cas, la surface minima correspondante admet tous les plans de symétrie du tétraèdre pour plans de symétrie de seconde espèce; dans le second cas, ces plans de symétrie sont de première espèce. Si $\Psi = 0$, la surface est double.

*Octaèdre.* — Les neuf plans de symétrie de l'octaèdre se partagent en deux groupes distincts, formés d'une part par les trois plans parallèles aux faces du cube, d'autre part par les six plans passant par les arêtes opposées de ce solide. Comme les plans d'un même groupe sont forcément des plans de symétrie de même espèce, il en résulte quatre cas à considérer pour le problème qui nous occupe. La discussion n'offre aucune difficulté, et voici les différentes formes possibles pour l'équation qui définit la courbe minima, en prenant les mêmes axes que dans la première partie :

$$t^2 + u^2 + v^2 = 0,$$

$$\left\{\begin{aligned}\Phi(&t^2 + u^2 + v^2,\ t^2u^2 + t^2v^2 + u^2v^2,\ t^2u^2v^2)\\ &+ \sqrt{-1}\,\Psi(t^2 + u^2 + v^2,\ t^2u^2 + u^2v^2 + t^2v^2,\ t^2u^2v^2) = 0,\end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned}\Phi(&t^2 + u^2 + v^2,\ t^2u^2 + t^2v^2 + u^2v^2,\ t^2u^2v^2)\\ &+ \sqrt{-1}\,tuv\,\Psi(t^2 + u^2 + v^2,\ t^2u^2 + u^2v^2 + t^2v^2,\ t^2u^2v^2) = 0,\end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned}\Phi(&t^2 + u^2 + v^2,\ t^2u^2 + t^2v^2 + u^2v^2,\ t^2u^2v^2)\\ &+ \sqrt{-1}\,(t^2 - u^2)(u^2 - v^2)(v^2 - t^2)\,\Psi(t^2 + u^2 + v^2,\ t^2u^2 + u^2v^2 + t^2v^2,\ t^2u^2v^2) = 0,\end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned}\Phi(&t^2 + u^2 + v^2,\ t^2u^2 + t^2v^2 + u^2v^2,\ t^2u^2v^2)\\ &+ \sqrt{-1}\,tuv(t^2 - u^2)(u^2 - v^2)(t^2 - v^2)\,\Psi(t^2 + u^2 + v^2,\ t^2u^2 + u^2v^2 + t^2v^2,\ t^2u^2v^2) = 0,\end{aligned}\right.$$

les fonctions $\Phi$ et $\Psi$ étant réelles. Dans le premier cas, tous les plans de symétrie du polyèdre sont des plans de symétrie de seconde espèce pour la surface minima correspondante; c'est l'inverse dans le dernier cas. Dans le cas (II), les trois plans parallèles aux faces du cube sont de première espèce, et les six autres de seconde espèce. C'est l'inverse pour le troisième cas. Il y a encore lieu de distinguer le cas où $\Psi = 0$, qui donne des surfaces doubles.

*Icosaèdre*. — L'icosaèdre donne lieu aux mêmes cas particuliers que le tétraèdre. Soient $Q_1$, $R_1$, $S_1$ les fonctions entières obtenues en remplaçant $x$, $y$, $z$ par $t$, $u$, $v$ dans les fonctions Q, R, S [*voir* première Partie, formules (7), (8), (11)]. La courbe minima C sera représentée par l'équation $t^2 + u^2 + v^2 = 0$, jointe à une des équations

$$\Phi(t^2 + u^2 + v^2, Q_1, R_1) + \sqrt{-1}\quad \Psi(t^2 + u^2 + v^2, Q, R_1) = 0,$$
$$\Phi(t^2 + u^2 + v^2, Q_1, R_1) + \sqrt{-1}\, S_1 \Psi(t^2 + u^2 + v^2, Q, R_1) = 0,$$

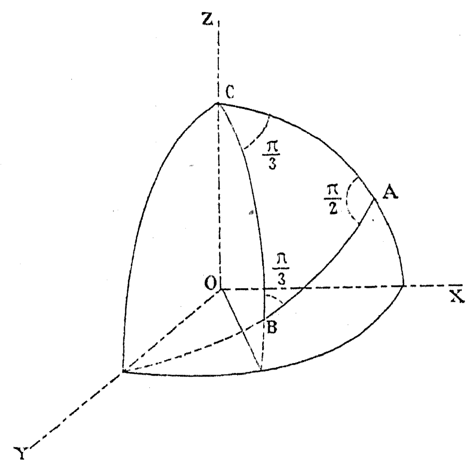
les fonctions $\Phi$ et $\Psi$ étant réelles. Les quinze plans de symétrie sont tous de première espèce dans le second cas et de seconde espèce dans le premier cas. Si $\Psi$ est nul, on a une surface double.

Les formules précédentes ne donnent pas facilement sous forme explicite les coordonnées d'un point de la surface minima correspondante. D'un autre côté, on sait qu'une courbe gauche algébrique n'est pas toujours l'intersection complète de deux surfaces, de sorte qu'une discussion spéciale serait nécessaire, si l'on voulait faire des applications, pour les cas où les courbes minima que nous venons de définir se décomposeraient en plusieurs courbes gauches analytiquement distinctes. Enfin, rien ne prouve que les expressions précédentes des fonctions $\varphi$ et $\psi$ fournissent une solution générale. La méthode suivante ne présente pas ces inconvénients. Je la développerai successivement pour chacun des polyèdres réguliers.

10. Tétraèdre. — Je prendrai un système de coordonnées différent de celui qui a été employé jusqu'ici. L'origine étant toujours le centre de la sphère circonscrite, je prends pour axe des $z$ une des hauteurs de façon que le sommet, d'où elle est issue, soit sur la partie positive de l'axe $oz$, pour plan des $xoz$ un plan contenant une des arêtes aboutissant à ce sommet, et de telle sorte que cette arête soit dans l'angle $xz$. Les six plans de symétrie du tétraèdre partagent la sphère circonscrite en vingt-quatre triangles *élémentaires* égaux dont les angles sont $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{3}$. La *fig.* 4 ci-après représente un de ces triangles ABC.

Il existe, comme on sait, douze mouvements de rotation qui font revenir sur lui-même le tétraèdre régulier ; ce sont les rotations de $\frac{2\pi}{3}$ autour des hauteurs et de $\pi$ autour des droites joignant les milieux des arêtes opposées. Les substitutions linéaires correspondant à ces rota-

Fig. 4.




tions forment un groupe G d'ordre fini composé des douze substitutions ci-dessous :

$$s' = s,\ s\alpha,\ s\alpha^2,\ \frac{\sqrt{2}+s}{-1+s\sqrt{2}},\ \frac{\sqrt{2}+\alpha s}{-1+\alpha s\sqrt{2}},\ \frac{\sqrt{2}+\alpha^2 s}{-1+\alpha^2 s\sqrt{2}},\ \frac{\alpha(\sqrt{2}+s)}{-1+s\sqrt{2}},\ \frac{\alpha(\sqrt{2}+\alpha s)}{-1+\alpha s\sqrt{2}},$$

$$\frac{\alpha\sqrt{2}+s}{-1+\alpha^2 s\sqrt{2}},\ \frac{\alpha^2(\sqrt{2}+s)}{-1+s\sqrt{2}},\ \frac{\alpha^2(\sqrt{2}+s\alpha)}{-1+\alpha s\sqrt{2}},\ \frac{\alpha^2(\sqrt{2}+s\alpha^2)}{-1+\alpha^2 s\sqrt{2}},\qquad \alpha = e^{\frac{2i\pi}{3}}.$$

Ces substitutions sont conjuguées deux à deux. On peut prendre comme substitutions fondamentales du groupe

$$\varphi_1(s) = se^{\frac{2i\pi}{3}},\qquad \varphi_2(s) = \frac{\sqrt{2}+s}{-1+s\sqrt{2}},$$

dont la première correspond à une rotation de $\frac{2\pi}{3}$ autour de OZ et la seconde à une rotation de deux angles droits autour de OA.

L'équation $2\sqrt{2}s^3 - 1 = 0$ admet pour racines les valeurs de $s$ qui sont représentées par les sommets du tétraèdre, en y adjoignant $s=\infty$,

$$s=\frac{1}{\sqrt{2}},\qquad s=\frac{\alpha}{\sqrt{2}},\qquad s=\frac{\alpha^2}{\sqrt{2}};$$

l'équation $s(s^3+2\sqrt{2})=0$ donne les points diamétralement opposés aux sommets du tétraèdre

$$s=0,\qquad s=-\sqrt{2},\qquad s=-\alpha\sqrt{2},\qquad s=-\alpha^2\sqrt{2}.$$

Enfin l'équation $s^6-5\sqrt{2}s^3-1=0$ donne les extrémités des rayons passant par les milieux des arêtes

$$s=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}},\qquad s=\alpha\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}},\qquad s=\alpha^2\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}},$$
$$s=\frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1},\qquad s=-\alpha\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1},\qquad s=-\alpha^2\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}.$$

Ces trois fonctions donnent lieu à l'identité algébrique

$$s^3(s^3+2\sqrt{2})^3-(2\sqrt{2}s^3-1)^3=(s^6-5\sqrt{2}s^3-1)^2.$$

Posons

$$\text{(17)}\qquad H(s)=\frac{(2\sqrt{2}s^3-1)^3}{s^3(2\sqrt{2}+s^3)^3};$$

si $s'=\varphi_i(s)$ est une quelconque des substitutions du groupe G, on a

$$\text{(18)}\qquad H[\varphi_i(s)]=H(s),$$

et toute fonction analytique de $s$, jouissant de la propriété exprimée par l'équation (18), est une simple fonction de $H(s)$. Remarquons encore les formules suivantes :

$$H(s)-1=-\frac{(s^6-5\sqrt{2}s^3-1)^2}{s^3(2\sqrt{2}+s^3)^3},\qquad H\left(-\frac{1}{s}\right)=\frac{1}{H(s)},$$
$$H'(s)=\frac{d}{ds}H(s)=-\frac{6\sqrt{2}(2\sqrt{2}s^3-1)^2(s^6-5\sqrt{2}s^3-1)}{s^4(2\sqrt{2}+s^3)^4}.$$

Ces notions préliminaires rappelées, considérons de nouveau un système formé de deux courbes minima conjuguées C, $C_0$, et cherchons comment on doit prendre la fonction caractéristique $F(s)$ de la courbe C pour que ce système admette tous les plans de symétrie du tétraèdre.

Toutes les rotations qui font revenir le tétraèdre sur lui-même doivent faire revenir la courbe C sur elle-même. Cela est évident pour les rotations de $\frac{2\pi}{3}$ autour des hauteurs ; quant aux rotations de deux angles droits, on peut les regarder comme résultant de deux rotations de $\frac{2\pi}{3}$ autour de deux axes différents de symétrie ternaire. Après une rotation de $\frac{2\pi}{3}$ autour de $oz$, la fonction caractéristique de la nouvelle courbe minima sera, comme on l'a vu plus haut,

$$F\left(e^{-\frac{2i\pi}{3}}s\right)e^{\frac{2i\pi}{3}};$$

de même, après une rotation de deux angles droits autour de OA, la nouvelle fonction caractéristique sera

$$-F\left(\frac{\sqrt{2}+s}{-1+s\sqrt{2}}\right)\frac{(-1+s\sqrt{2})^2}{3}.$$

La fonction $F(s)$ devra donc vérifier les deux relations

$$F\left(e^{-\frac{2i\pi}{3}}s\right)e^{\frac{2i\pi}{3}} = F(s),$$

$$-F\left(\frac{\sqrt{2}+s}{-1+s\sqrt{2}}\right)\frac{(-1+s\sqrt{2})^2}{3} = F(s);$$

d'une manière générale, si $s' = \varphi_i(s)$ désigne une des douze substitutions du groupe G, il faudra qu'on ait

$$F[\varphi_i(s)]\frac{1}{\frac{d\varphi_i}{ds}} = F(s). \tag{19}$$

D'un autre côté, les deux courbes C et $C_0$ admettent séparément le plan des $xz$ pour plan de symétrie ou sont symétriques l'une de l'autre par rapport à ce plan. Dans le premier cas, on aura (*voir* n° 8)

$$-s^2F\left(-\frac{1}{s}\right) = F(s); \tag{20}$$

dans le second cas,

$$F_0(s) = F(s). \tag{21}$$

Les conditions précédentes sont évidemment suffisantes. Nous sommes ainsi amenés à chercher les fonctions F, vérifiant les relations (19) et une des deux relations (20) et (21).

De la relation (18) on tire, en différentiant les deux membres,

$$H'[\varphi_i(s)]\frac{d\varphi_i}{ds} = H'(s);$$

ce qui peut s'écrire

$$\frac{1}{H'[\varphi_i(s)]} = \frac{1}{H'(s)}\,\frac{d\varphi_i}{ds}.$$

Nous voyons, par conséquent, que la fonction $\frac{1}{H'(s)}$ vérifie les relations (19), et toute fonction analytique $F(s)$ vérifiant les mêmes relations sera de la forme

$$F(s) = \frac{1}{H'(s)}\Psi[H(s)],$$

$\Psi$ désignant une fonction quelconque de $H(s)$.

Il nous reste à exprimer que $F(s)$ satisfait à l'une des relations (20) et (21). Comme les coefficients de $H(s)$ sont tous réels, on satisfait à la relation (21) de la façon la plus générale en prenant pour $\Psi$ une fonction *réelle* quelconque, dans le sens précis que nous avons attribué à ce mot.

Pour satisfaire à la relation (20), remarquons que l'on a

$$H\left(-\frac{1}{s}\right) = \frac{1}{H(s)};$$

on en déduit

$$\frac{1}{s^2}H'\left(-\frac{1}{s}\right) = -\frac{H'(s)}{H^2(s)}.$$

Par suite, la fonction

$$G(s) = \frac{H(s)}{H'(s)}$$

satisfait à la fois aux relations (19) et (20). Étant donnée une autre fonction $F(s)$ vérifiant ces relations, le quotient $\frac{F(s)}{G(s)} = f(s)$ vérifiera les relations

$$f[\varphi_i(s)] = f(s), \qquad f\left(-\frac{1}{s}\right) = f(s).$$

Or les substitutions $\varphi_i(s)$ combinées avec la substitution $s' = -\frac{1}{s}$ donnent naissance à un groupe de vingt-quatre substitutions linéaires identique au groupe de l'octaèdre, et la forme générale d'une fonction $f(s)$ qui se reproduit identiquement quand on effectue sur la variable une quelconque de ces substitutions est

$$f(s) = \Psi\left[H(s) + \frac{1}{H(s)}\right],$$

$\Psi$ désignant une fonction quelconque de $H(s) + \frac{1}{H(s)}$.

Nous arrivons par conséquent aux conclusions suivantes :

*On obtient une surface minima réelle admettant tous les plans de symétrie du tétraèdre régulier en prenant pour* $F(s)$ *dans les formules* (15) *une fonction de la forme*

$$\text{(I)} \qquad F(s) = \frac{1}{H'(s)} \Psi_1[H(s)],$$

$\Psi_1$ *désignant une fonction réelle de* $H(s)$, *ou une fonction de la forme*

$$\text{(II)} \qquad F(s) = \frac{H(s)}{H'(s)} \Psi_2\left[H(s) + \frac{1}{H(s)}\right],$$

$\Psi_2$ *désignant une fonction arbitraire.*

*Dans le premier cas, tous les plans de symétrie du tétraèdre sont pour la surface des plans de symétrie de première espèce; ils sont tous de seconde espèce dans le second cas.*

*Si dans la formule* (II) *on prend pour* $\Psi_2$ *une fonction réelle, la surface obtenue est une surface double.*

On aura sous forme explicite les expressions des coordonnées d'une infinité de surfaces algébriques en prenant pour $\Psi_1$ ou $\Psi_2$ une fonction algébrique choisie arbitrairement. Nous verrons un peu plus loin qu'on obtient ainsi toutes les surfaces minima algébriques ayant les symétries demandées.

Nous obtiendrons les surfaces les plus simples en prenant pour $\Psi_1$ ou $\Psi_2$ des fonctions rationnelles. La fonction $F(s)$ peut dans ce cas se mettre sous une forme un peu différente. Soit $r(s)$ une fonction rationnelle quelconque; posons

$$R(s) = \sum_{i=1}^{i=12} r[\varphi_i(s)] \left(\frac{d\varphi_i}{ds}\right)^{-1}.$$

La fonction $R(s)$ vérifie les relations (19). Soit en effet $\varphi_k(s)$ une substitution déterminée du groupe G,

$$\varphi_k(s) = \frac{\alpha_k s + \beta_k}{\gamma_k s + \delta_k},$$

et soit

$$\varphi_i(s) = \frac{\alpha_i s + \beta_i}{\gamma_i s + \delta_i}, \qquad (i = 1, 2, \ldots 12).$$

Puisque la substitution $\varphi_k$ fait partie du groupe G, ce groupe est identique au groupe de substitutions $\varphi_i[\varphi_k(s)]$. On peut donc écrire

$$R(s) = \sum r\{\varphi_i[\varphi_k(s)]\} \left[\frac{d\,\varphi_i(\varphi_k)}{d\varphi_k}\right]^{-1} \left(\frac{d\varphi_k}{ds}\right)^{-1}.$$

On a d'ailleurs

$$R[\varphi_k(s)] = \sum r[\varphi_i(\varphi_k)] \left[\frac{d\,\varphi_i(\varphi_k)}{d\varphi_k}\right]^{-1}$$

et, par suite,

$$R[\varphi_k(s)]\left(\frac{d\varphi_k}{ds}\right)^{-1} = R(s).$$

Si $R(s)$ vérifie les relations (19), il en sera de même des fonctions rationnelles

$$R_0(s), \quad -s^2 R\left(-\frac{1}{s}\right), \quad -s^2 R_0\left(-\frac{1}{s}\right),$$

comme cela résulte de l'expression générale des fonctions qui vérifient ces relations. Cela posé, les fonctions rationnelles

$$R(s) + R_0(s),$$
$$R(s) - s^2 R\left(-\frac{1}{s}\right)$$

vérifieront en outre les équations (20) et (21) respectivement, tandis que la fonction

$$R(s) + R_0(s) - s^2 R\left(-\frac{1}{s}\right) - s_0^2 R_0\left(-\frac{1}{s}\right)$$

satisfait à la fois aux relations (19), (20) et (21) et donne une surface double.

Inversement, je dis qu'on obtient ainsi toutes les fonctions rationnelles jouissant de ces propriétés. Soit par exemple $F(s)$ une fonction rationnelle vérifiant les relations (19) et (21). Imaginons cette fraction décomposée en fractions simples et soit $r(s)$ la somme des fractions simples provenant des pôles situés à l'intérieur du triangle élémentaire. A l'aide de $r(s)$ formons $R(s)$ et $R(s) + R_0(s)$. La différence

$$F(s) - [R(s) + R_0(s)]$$

n'aura plus de pôle à l'intérieur du triangle élémentaire et de son symétrique et, comme cette différence satisfait à la relation (19), elle sera finie sur toute la sphère : ce sera donc une constante; mais une constante différente de zéro ne peut satisfaire aux relations (19). Donc cette différence sera nulle. Si $F(s)$ avait des pôles sur les côtés du triangle élémentaire ou coïncidant avec les sommets de ce triangle, il faudrait modifier la loi de formation de $r(s)$. Par exemple, il faudrait diviser par 2 les termes provenant des pôles situés sur les côtés.

Pour obtenir les surfaces les plus simples, il faudra choisir $r(s)$ de façon que la fonction correspondante ait le plus petit nombre possible de pôles. Ainsi supposons que $r(s)$ admette un seul pôle simple au point $s = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}$ et prenons $F(s) = R(s) + R_0(s)$. On trouve

$$F(s) = \frac{s(2\sqrt{2}\,s^3 - 1)(2\sqrt{2} + s^3)}{s^6 - 5\sqrt{2}\,s^3 - 1} = -6\sqrt{2}\,\frac{H(s)}{H'(s)};$$

la surface minima correspondante est une surface double et les formules de M. Lie donnent, pour la classe et l'ordre de cette surface, les nombre 13 et 135. D'ailleurs l'énumération faite par M. Lie des surfaces minima de treizième classe montre immédiatement que c'est la seule surface de cette classe possédant la symétrie du tétraèdre.

Prenons en second lieu pour $r(s)$ une fonction rationnelle ayant le seul pôle $s = 0$. Pour que $R(s)$ ne soit pas identiquement nul, on trouve, en formant $R(s)$, que l'ordre de multiplicité de ce pôle doit être de la forme $3q + 2$. Si ce pôle est du second ordre avec l'unité pour résidu, on aura

$$F(s) = 6\sqrt{2}\,\frac{H(s)\,[H(s) - 1]}{H'(s)} = \frac{(s^6 - 5\sqrt{2}\,s^3 - 1)(2\sqrt{2}\,s^3 - 1)}{s^2(2\sqrt{2} + s^3)^2}.$$

La surface minima correspondante n'est pas une surface double; elle admet tous les plans de symétrie du tétraèdre pour plans de symétrie de première espèce. La classe sera 26 et l'ordre inférieur à 256. De même, si $r(s)$ a un seul pôle simple sur l'un des côtés du triangle fondamental, on aura, pour la classe et l'ordre de la surface minima correspondante, les nombres 50 et 1296. Si $r(s)$ a un seul pôle simple à l'intérieur du triangle fondamental, la surface correspondante sera de quatre-vingt-dix-huitième classe et d'ordre 5184.

Étant donnée une fonction $F(s)$ vérifiant à la fois les relations (19) et (20), la fonction $e^{\alpha i}F(s)$, où $\alpha$ est une constante réelle quelconque, vérifie les mêmes relations. De la surface minima qui a $F(s)$ pour fonction caractéristique, on pourra donc déduire un groupe de surfaces minima *associées*, toutes applicables sur la première et admettant les plans de symétrie du tétraèdre pour plans de symétrie de seconde espèce. Il en est de même si la première surface est une surface double. Par exemple, de la surface double trouvée plus haut on déduira un groupe de surfaces de vingt-sixième classe.

Prenons, en particulier,

$$F(s) = 6\sqrt{2}\sqrt{-1}\,\frac{H(s)}{H'(s)};$$

cette fonction donne la surface *adjointe* de la surface double. Lorsque $s$ prend des valeurs réelles, il en est de même de $F(s)$, et les formules (15) montrent que $x$ et $z$ sont constamment nuls lorsque $s$ est réel. L'axe des $y$ appartient à la surface. Par raison de symétrie, la surface contient les six droites menées par l'origine, parallèles aux arêtes du tétraèdre.

La détermination des lignes de courbure et des lignes asymptotiques de ces surfaces donne lieu à quelques remarques. Supposons, par exemple, que $F(s)$ soit de la forme (I) et posons, comme plus haut,

$$\mathfrak{F}(s) = F'''(s).$$

D'après un calcul déjà fait (§ 6), la fonction $\mathfrak{F}(s)$ doit vérifier les relations

$$\mathfrak{F}[\varphi_i(s)]\left(\frac{d\varphi_i}{ds}\right)^2 = \mathfrak{F}(s),$$

$$\mathfrak{F}_0(s) = \mathfrak{F}(s);$$

on voit immédiatement que la fonction $[H'(s)]^2$ satisfait à ces relations, et l'expression générale des fonctions $\mathfrak{F}(s)$, qui satisfont à ces relations, sera

$$\mathfrak{F}(s) = [H'(s)]^2\Psi[H(s)],$$

$\Psi$ désignant une fonction réelle de $H(s)$. Les équations différentielles des lignes de courbure et des lignes asymptotiques auront donc les formes suivantes :

$$\Psi[H(s)][H'(s)]^2\,ds^2 = \Psi[H(s_0)][H'(s_0)]^2\,ds_0^2,$$

$$\Psi[H(s)][H'(s)]^2\,ds^2 + \Psi[H(s_0)][H'(s_0)]^2\,ds_0^2 = 0.$$

En posant $H(s) = u$, $H(s_0) = u_0$, ces équations deviennent

$$\Psi(u)\,du^2 = \Psi(u_0)\,du_0^2,$$

$$\Psi(u)\,du^2 + \Psi(u_0)\,du_0^2 = 0.$$

L'interprétation géométrique de ce changement de variables est immédiate. Il nous montre que les images sphériques des lignes de courbure de la surface sont formées par des lignes qui admettent tous les plans de symétrie du tétraèdre; résultat évident *a priori*. On obtient des résultats analogues en supposant que $F(s)$ est de la forme (II).

En appliquant ceci à la surface double trouvée plus haut, on arrive aux résultats suivants, que j'indiquerai seulement. Soit

$$F(s) = 6\sqrt{2}\,\frac{H(s)}{H'(s)};$$

les équations différentielles des lignes de courbure et des lignes asymptotiques sont respectivement

$$\frac{u+1}{u-1}\frac{du}{\sqrt{u(u^2-1)}} = \pm\frac{u_0+1}{u_0-1}\frac{du_0}{\sqrt{u_0(u_0^2-1)}},$$

$$\frac{u+1}{u-1}\frac{du}{\sqrt{u(u^2-1)}} = \pm i\frac{u_0+1}{u_0-1}\frac{du_0}{\sqrt{u_0(u_0^2-1)}},$$

où $H(s) = u$, $H(s_0) = u_0$.

11. Icosaèdre. — La recherche analogue à la précédente pour l'icosaèdre présentant à peu près les mêmes cas particuliers que pour le tétraèdre, je placerai cette étude immédiatement après. Je prends pour origine le centre de la sphère circonscrite, pour axe des $z$ une droite passant par un des sommets, pour plan des $xz$ un des plans de symétrie passant par cet axe, de telle sorte qu'une arête aboutissant à ce sommet soit dans l'angle $xoz$. Les quinze plans de symétrie de ce solide partagent la sphère en cent vingt triangles alternativement égaux et symétriques dont les angles sont $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{5}$. Aux soixante rotations qui font revenir sur lui-même l'icosaèdre correspond un groupe fini $G_2$ formé des soixante substitutions linéaires ci-dessous :

$$G_2\left\{\begin{array}{ll} s' = \varepsilon^{\nu} s, & \\ s' = -\dfrac{\varepsilon^{\nu}}{s}, & \\ s' = \varepsilon^{\mu}\dfrac{(\varepsilon+\varepsilon^4)s+\varepsilon^{\nu}}{s-\varepsilon^{\nu}(\varepsilon+\varepsilon^4)}, & (\mu, \nu = 0, 1, 2, 3, 4), \\ s' = -\varepsilon^{\mu}\dfrac{s-\varepsilon^{\nu}(\varepsilon+\varepsilon^4)}{(\varepsilon+\varepsilon^4)s+\varepsilon^{\nu}}, & \varepsilon = \cos\dfrac{2\pi}{5} + i\sin\dfrac{2\pi}{5}. \end{array}\right.$$

On peut prendre comme substitutions fondamentales les deux substitutions linéaires

$$\varphi_1(s) = \varepsilon s, \qquad \varphi_2(s) = \frac{(\varepsilon+\varepsilon^4)s+1}{s-(\varepsilon+\varepsilon^4)},$$

dont la première correspond à une rotation de $\frac{2\pi}{5}$ autour de $oz$ et la seconde à une rotation de deux droits autour d'un axe de symétrie binaire dans le plan des $xz$. Posons

$$A = s(s^{10} + 11 s^5 - 1),$$
$$B = s^{20} + 1 + 228(s^{15} - s^5) - 494 s^{10},$$
$$C = s^{30} + 1 + 522(s^{25} - s^5) - 10005(s^{20} + s^{10});$$

l'équation $A = 0$ donne, en y joignant $s = \infty$, les sommets de l'icosaèdre

$$s = 0, \qquad \infty, \qquad -\left(\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}\right)\varepsilon^\nu, \qquad (\nu = 0, 1, 2, 3, 4).$$

L'équation $B = 0$ donne les extrémités des rayons passant par les sommets du dodécaèdre ou les centres des faces de l'icosaèdre

$$s = \varepsilon^\nu \frac{(3 \pm \sqrt{5} \pm \sqrt{10 \pm 6\sqrt{5}})}{4}, \qquad (\nu = 0, 1, 2, 3, 4).$$

Enfin la dernière $C = 0$ donne les extrémités des rayons passant par les milieux des arêtes des deux polyèdres. Ces trois polynômes donnent lieu à l'identité

$$C^2 = 12^3 . A^5 - B^3.$$

Posons

$$\text{(22)} \qquad H_2(s) = \frac{12^3 A^5}{B^3};$$

cette fonction $H_2(s)$ jouit de la propriété exprimée par l'équation

$$\text{(23)} \qquad H_2[\varphi_i(s)] = H_2(s),$$

où $s' = \varphi_i(s)$ est une quelconque des substitutions du groupe $G_2$, et toute fonction jouissant de la même propriété est une simple fonction de $H_2(s)$.

Cela posé, considérons un système de deux courbes minima conjuguées $C$ et $C_0$ qui admet tous les plans de symétrie de l'icosaèdre. On démontre absolument comme pour le tétraèdre que toute rotation qui fait revenir l'icosaèdre sur lui-même doit faire revenir la courbe $C$ sur elle-même. La fonction caractéristique $F(s)$ doit donc satisfaire aux équations

$$\text{(24)} \qquad F[\varphi_i(s)] \frac{1}{\frac{d\varphi_i}{ds}} = F(s),$$

où $s' = \varphi_i(s)$ désigne une quelconque des soixante substitutions du groupe $G_2$. Nous voyons, par un raisonnement exactement pareil à celui qui a été fait pour le tétraèdre, que l'expression générale des fonctions qui vérifient ces conditions est

$$F(s) = \frac{1}{H'_2(s)} \Psi[H_2(s)],$$

où

$$H'_2(s) = \frac{d}{ds} H_2(s).$$

Il nous faut encore exprimer que le système des courbes C et $C_0$ admet le plan des $xz$ pour plan de symétrie, ce qui exige que la fonction $F(s)$ vérifie une des deux relations

$$F_0(s) = F(s), \tag{25}$$

$$-s^2 F\left(-\frac{1}{s}\right) = F(s). \tag{26}$$

Pour que la fonction $F(s)$ vérifie à la fois les relations (24) et (25), il faut et il suffit qu'elle soit de la forme

$$F(s) = \frac{1}{H'_2(s)} \Psi_1[H_2(s)],$$

$\Psi_1$ désignant une fonction réelle quelconque de $H_2$.

Supposons en second lieu que $F(s)$ vérifie à la fois les équations (24) et (26). La substitution $s' = -\frac{1}{s}$ fait partie du groupe $G_2$ et une des relations (24) sera la suivante :

$$s^2 F\left(-\frac{1}{s}\right) = F(s).$$

Cette condition, rapprochée de la condition (26), nous montre que $F(s)$ ne peut être une fonction uniforme, mais que les valeurs de cette fonction correspondant à une même valeur de $s$ doivent être deux à deux égales et de signes contraires. L'expression générale de ces fonctions F sera alors

$$F(s) = \frac{1}{H'_2(s)} \sqrt{\Psi_2[H_2(s)]},$$

$\Psi_2$ désignant une fonction quelconque de $H_2(s)$. Cette même expression de $F(s)$ donnera aussi des surfaces doubles, pourvu que l'on prenne pour $\Psi_2$ une fonction réelle. Il était évident *a priori* que, pour une surface double ayant son centre à l'origine, les valeurs de $F(s)$ doivent être deux à deux égales et de signes contraires.

Ainsi, *l'on obtient les coordonnées d'un point d'une surface minima réelle admettant tous les plans de symétrie de l'icosaèdre en remplaçant dans les formules* (15) $F(s)$ *par une fonction de la forme*

$$\text{(I)} \qquad F(s) = \frac{1}{H_2'(s)} \Psi_1[H_2(s)],$$

$\Psi_1$ *désignant une fonction réelle quelconque, ou de la forme*

$$\text{(II)} \qquad F(s) = \frac{1}{H_2'(s)} \sqrt{\Psi_2[H_2(s)]},$$

$\Psi_2$ *désignant une fonction arbitraire de* $H_2(s)$.

*Tous les plans de symétrie de l'icosaèdre sont pour la surface des plans de symétrie de première ou de seconde espèce, suivant que* $F(s)$ *est de la forme* (I) *ou* (II). *Si dans la forme* (II) *on prend pour* $\Psi_2$ *une fonction réelle, on aura une surface double.*

Pour avoir des surfaces algébriques, il suffira de prendre pour $\Psi_1$ ou $\Psi_2$ des fonctions algébriques. Pour avoir les surfaces les plus simples, il est naturel de prendre pour $F(s)$ une fonction rationnelle. On se trouvera forcément dans le premier des cas considérés, et la surface minima ne pourra être une surface double. On voit, comme pour le tétraèdre, qu'en désignant par $r(s)$ une fonction rationnelle n'ayant aucun pôle en dehors du triangle élémentaire et posant

$$R(s) = \sum_{i=1}^{i=60} r[\varphi_i(s)] \frac{1}{\frac{d\varphi_i}{ds}},$$

la fonction rationnelle $F(s)$ la plus générale vérifiant les relations (24) et (25) aura pour expression

$$F(s) = R(s) + R_0(s).$$

Si $r(s)$ a un seul pôle du premier ordre à l'intérieur du triangle élémentaire, $F(s)$ aura en tout cent vingt pôles du premier ordre; les formules de M. Lie donnent pour l'ordre, la classe et le rang de la courbe minima les nombres 360, 122, 242. La classe de la surface sera égale à 482 et son ordre sera $\leqq (360)^2 = 129.600$.

Si $r(s)$ a un seul pôle du premier ordre sur un côté du triangle élémentaire, on aura, pour la courbe minima,

$$O = 180, \qquad C = 62, \qquad R = 122.$$

La surface minima sera de classe 242 et son degré sera $\leqq 32.400$. Supposons que $r(s)$ ait le seul pôle $s = 0$; pour que $R(s)$ ne soit pas nul, l'ordre de ce pôle devra être égal à un multiple de 5 augmenté de 4. Prenons

$$r(s) = \frac{1}{s^4};$$

on aura

$$F(s) = \frac{H_2 - 1}{H'_2} = k\frac{BC}{A^4},$$

$k$ désignant un facteur constant. Les formules de M. Lie donnent, pour la courbe minima,

$$O = 72, \qquad C = 50, \qquad R = 62;$$

la classe de la surface minima sera égale à 122 et l'ordre $\leqq 5184$.

Supposons de même que $r(s)$ admette comme pôle du second ordre l'extrémité d'un rayon passant par un sommet du dodécaèdre régulier; on trouve

$$F(s) = \frac{H_2(H_2 - 1)}{H'_2} = k\frac{AC}{B^2}.$$

Pour la courbe minima correspondante, on aura

$$O = 80, \qquad C = 42, \qquad R = 62;$$

la classe de la surface minima sera encore 122 et l'ordre $\leqq 6400$.

Enfin, si $r(s)$ admet un pôle du premier ordre à l'extrémité d'un rayon passant par le milieu d'une arête, on aura

$$F(s) = \frac{H_2}{H'_2} = k\frac{AB}{C}.$$

On aura, pour la courbe minima,

$$O = 90, \qquad C = 32, \qquad R = 62;$$

la surface minima sera encore de $122^e$ classe et son ordre sera $\leqq 8100$.

Remarquons qu'en supposant la fonction $F(s)$ rationnelle, on ne peut obtenir d'autre surface minima dont la classe soit égale ou inférieure à 122. Comme 122 est le double d'un nombre premier, il ne peut y avoir de surface minima réelle de cette classe que si $F(s)$ est une fonction rationnelle.

Les surfaces précédentes donnent lieu à un certain nombre de remarques analogues à celles qui ont été faites pour le tétraèdre. Ainsi, si $F(s)$ est de la forme (II), les surfaces associées à celle-là admettent encore les plans de symétrie de l'icosaèdre.

Nous verrons plus loin la forme générale des dérivées troisièmes de $F(s)$, et les équations différentielles des lignes de courbure et des lignes asymptotiques.

12. Octaèdre. — Je prends les mêmes axes de coordonnées que dans la première partie. Les neuf plans de symétrie du polyèdre partagent la sphère circonscrite en quarante-huit triangles alternativement égaux et symétriques dont les angles sont $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}$. Aux vingt-quatre mouvements de rotation qui font revenir ce polyèdre sur lui-même correspond un groupe $G_1$ de vingt-quatre substitutions linéaires :

$$(G_1)\quad \begin{cases} s' = s, \quad is, \quad -s, \quad -is, \quad \dfrac{1-s}{1+s}, \quad i\dfrac{1-s}{1+s}, \quad \dfrac{s-1}{s+1}, \quad -i\dfrac{1-s}{1+s}, \\ \dfrac{1+s}{1-s}, \quad i\dfrac{1+s}{1-s}, \quad \dfrac{1+s}{s-1}, \quad i\dfrac{1+s}{s-1}, \quad \dfrac{1}{s}, \quad \dfrac{i}{s}, \quad -\dfrac{1}{s}, \quad \dfrac{-i}{s}, \\ \dfrac{s+i}{s-i}, \quad \dfrac{is-1}{s-i}, \quad -\dfrac{s+i}{s-i}, \quad \dfrac{s-i}{s+i}, \quad \dfrac{is+1}{s+i}, \quad \dfrac{i-s}{i+s}, \quad -\dfrac{1+is}{i+s}. \end{cases}$$

On peut prendre comme substitutions fondamentales du groupe les substitutions

$$s' = \varphi_1(s) = is, \qquad s' = \varphi_2(s) = \frac{1-s}{1+s},$$

dont la première correspond à une rotation de $\frac{\pi}{2}$ autour de $oz$ et la seconde à une rotation de deux angles droits autour de la bissectrice de l'angle $xoz'$.

L'équation $s(s^4 - 1) = 0$, si l'on y joint la racine $s = \infty$, donne les sommets de l'octaèdre

$$0, \quad \infty, \quad \pm 1, \quad \pm i.$$

L'équation $s^8 + 14 s^4 + 1 = 0$ donne les extrémités des rayons passant par les sommets du cube :

$$\frac{\pm\sqrt{3} - 1}{2} e^{\frac{2k\pi i}{8}}, \qquad (k = 1, 3, 5, 7);$$

enfin l'équation $s^{12} - 33 s^8 - 33 s^4 + 1 = 0$ donne les extrémités des diamètres passant par les milieux des arêtes du cube :

$$(\pm\sqrt{2} - 1) e^{\frac{2k\pi i}{4}}, \qquad (k = 0, 1, 2, 3),$$
$$e^{\frac{2k'\pi i}{8}}, \qquad (k' = 1, 3, 5, 7).$$

Entre ces trois fonctions on a la relation

$$(s^8 + 14 s^4 + 1)^3 + 108 s^4 (s^4 - 1)^4 = (s^{12} - 33 s^8 - 33 s^4 + 1)^2.$$

Posons

$$(27) \qquad \left\{ \begin{aligned} h(s) &= \frac{s^{12} - 33 s^8 - 33 s^4 + 1}{6\sqrt{3}\, s^2 (s^4 - 1)^2}, \\ H_1(s) &= [h(s)]^2 = \frac{(s^{12} - 33 s^8 - 33 s^4 + 1)^2}{108 s^4 (s^4 - 1)^4}; \end{aligned} \right.$$

on aura

$$h(is) = - h(s), \qquad h\left(\frac{1-s}{1+s}\right) = - h(s),$$

$$H_1(is) = H_1(s), \qquad H_1\left(\frac{1-s}{1+s}\right) = H_1(s),$$

et, en général, si $s' = \varphi_i(s)$ est une quelconque des substitutions du groupe $G_1$, on a

$$(28) \qquad h[\varphi_i(s)] = \pm h(s),$$
$$(29) \qquad H_1[\varphi_i(s)] = H_1(s).$$

Toute fonction jouissant de la propriété exprimée par l'équation (29) est une simple fonction de $H_1(s)$.

Cela posé, considérons un système de deux courbes minima conjuguées C, $C_0$, et cherchons comment on doit prendre la fonction caractéristique $F(s)$ de C pour que ce système admette tous les plans de symétrie de l'octaèdre. Toute rotation de $\frac{2\pi}{3}$ autour d'un axe ternaire doit faire revenir la courbe C sur elle-même, mais une rotation de $\frac{\pi}{2}$ autour d'un axe quaternaire tel que $oz$ ou de $\pi$ autour d'un axe binaire tel que la bissectrice de l'angle $xoz'$ peut amener la courbe C à coïncider avec la courbe conjuguée $C_0$. Remarquons seulement que la suite de ces deux rotations équivaut à une rotation de $\frac{2\pi}{3}$ autour d'un axe ternaire. Par suite, si l'une d'elles amène C à coïncider avec $C_0$, il devra en être de même de la seconde. La fonction caractéristique $F(s)$ devra donc vérifier l'un des deux systèmes de relations

$$(30)\qquad \begin{cases} F(is) = iF(s), \\ F\left(\dfrac{1-s}{1+s}\right) = \dfrac{-2}{(1+s)^2}F(s), \end{cases}$$

$$(31)\qquad \begin{cases} F(is) = -is^2 F_0\left(-\dfrac{1}{s}\right), \\ F\left(\dfrac{1-s}{1+s}\right) = \dfrac{2s^2}{(1+s)^2}F_0\left(-\dfrac{1}{s}\right). \end{cases}$$

Pour que le plan des $xz$ soit un plan de symétrie pour le système des deux courbes C, $C_0$, il faut en outre que $F(s)$ vérifie une des deux relations

$$(32)\qquad F_0(s) = F(s),$$

$$(33)\qquad -s^2 F\left(-\frac{1}{s}\right) = F(s).$$

Nous sommes ainsi ramenés à rechercher les fonctions qui vérifient un des deux groupes de relations (30) et (31) avec une des relations (32) et (33). On a donc en tout quatre cas à examiner.

Des relations (29) on conclut, en différentiant, que la fonction $\frac{1}{H_1'(s)}$, où

$$H_1'(s) = \frac{d}{ds}H_1(s),$$

satisfait aux équations (30), et toute fonction vérifiant les mêmes relations sera de la forme

$$F(s) = \frac{1}{H_1'(s)} \Psi[H_1(s)].$$

Pour qu'elle vérifie en même temps l'équation (32), il faut et il suffit que $\Psi$ soit une fonction *réelle*. Pour qu'elle vérifie la relation (33), il faudra que les valeurs de $\Psi$ soient deux à deux égales et de signes contraires; en effet, la substitution $s' = -\frac{1}{s}$ faisant partie du groupe $G_1$, les équations (30) entraînent la suivante :

$$s^2 F\left(-\frac{1}{s}\right) = F(s).$$

Il nous reste à combiner le système (31) avec l'une des formules (32) et (33). Je remarque d'abord qu'une rotation de $\pi$ autour de $oy$, qui est un axe de symétrie quaternaire, doit faire revenir la courbe C sur elle-même; par suite, les formules (31) donnent, en conséquence,

$$s^2 F\left(-\frac{1}{s}\right) = F(s).$$

Supposons, en outre, que $F(s)$ vérifie la relation (32); on aura aussi

$$s^2 F_0\left(-\frac{1}{s}\right) = F_0(s),$$

et les formules (31) pourront être remplacées par les formules ci-dessous :

$$(31\ bis) \qquad F(is) = -iF(s), \qquad F\left(\frac{1-s}{1+s}\right) = \frac{2}{(1+s)^2}F(s).$$

Des formules

$$h(is) = -h(s), \qquad h\left(\frac{1-s}{1+s}\right) = -h(s),$$

on tire, en différentiant,

$$i h'(is) = -h'(s), \qquad h'\left(\frac{1-s}{1+s}\right)\frac{-2}{(1+s)^2} = -h'(s),$$

et, par suite,

$$\frac{1}{h'(is)} = \frac{-i}{h'(s)}, \qquad \frac{1}{h'\left(\frac{1-s}{1+s}\right)} = \frac{2}{(1+s)^2} \times \frac{1}{h'(s)}.$$

Nous voyons que la fonction $\frac{1}{h'(s)}$ satisfait aux relations (31) et (32) et l'expression générale d'une fonction satisfaisant à ces relations sera la suivante

$$F(s) = \frac{1}{h'(s)} \Psi[H_1(s)],$$

$\Psi$ désignant une fonction *réelle* quelconque.

Enfin, supposons que $F(s)$ vérifie les équations (31) et (33). Nous avons déjà remarqué que les équations (31) entraînent la suivante :

$$s^2 F\left(-\frac{1}{s}\right) = F(s),$$

qui, rapprochée de la formule (33), nous montre que les valeurs de $F(s)$ seront deux à deux égales et de signes contraires.

Les relations (31) pourront alors s'écrire

$$F(is) = \pm i F_0(s), \qquad F\left(\frac{1-s}{1+s}\right) = \pm \frac{2}{(1+s)^2} F_0(s).$$

Posons

$$[F(s)]^2 = \left[\frac{1}{h'(s)}\right]^2 f(s).$$

La fonction $f(s)$ devra satisfaire aux relations

$$f(is) = f_0(s), \qquad f\left(\frac{1-s}{1+s}\right) = f_0(s);$$

l'expression générale d'une telle fonction est

$$f = \Psi[ih(s)],$$

$\Psi$ désignant une fonction *réelle*.

Ainsi, *on obtiendra une surface minima admettant tous les plans de symétrie de l'octaèdre en remplaçant dans les formules* (15) $F(s)$ *par une* *fonction ayant l'une des formes suivantes :*

$$\text{(I)} \qquad F(s) = \frac{1}{H_1'(s)} \Psi_1[H_1(s)],$$

$$\text{(II)} \qquad F(s) = \frac{1}{h'(s)} \Psi_2[H_1(s)],$$

$$\text{(III)} \qquad F(s) = \frac{1}{h'(s)} \sqrt{\Psi_3[i\,h(s)]},$$

$\Psi_1$, $\Psi_2$, $\Psi_3$ *désignant des fonctions réelles,*

$$\text{(IV)} \qquad F(s) = \frac{1}{H_1'(s)} \sqrt{\Psi_4[H_1(s)]},$$

$\Psi_4$ *désignant une fonction quelconque.*

*Dans le cas* (I), *les neuf plans de symétrie du cube sont pour la surface des plans de symétrie de première espèce; ils sont tous de seconde espèce dans le cas* (IV). *Dans le second cas, les trois plans parallèles aux faces du cube sont des plans de symétrie de première espèce et les six autres sont de seconde espèce; c'est l'inverse dans le troisième cas.*

*Si* $F(s)$ *est de la forme*

$$\text{(V)} \qquad F(s) = \frac{1}{H_1'(s)} \sqrt{\Psi_5[H_1(s)]},$$

$\Psi_5$ *désignant une fonction réelle, les formules* (30), (31), (32), (33) *seront vérifiées à la fois, et l'on aura une surface double.*

On aura encore autant de surfaces algébriques qu'on le voudra répondant à la question, en prenant pour les $\Psi$ des fonctions algébriques. La fonction $F(s)$ ne pourra être rationnelle que dans les cas (I) et (II). On peut mettre alors $F(s)$ sous une forme un peu différente. Dans le groupe $G_1$, considérons le sous-groupe $g$ formé de la manière suivante. Les substitutions fondamentales du groupe $G_1$ étant

$$\varphi_1(s) = is, \qquad \varphi_2(s) = \frac{1-s}{1+s},$$

toute substitution de ce groupe sera de la forme

$$\varphi_1^{\alpha_1}\varphi_2^{\beta_1}\varphi_1^{\alpha_2}\varphi_2^{\beta_2}\ldots\varphi_1^{\alpha_n}\varphi_2^{\beta_n};$$

les substitutions, pour lesquelles la somme

$$\alpha_1 + \beta_1 + \alpha_2 + \beta_2 + \ldots + \alpha_n + \beta_n$$

est un nombre pair, forment un sous-groupe $g$ de douze substitutions qui reproduisent la fonction rationnelle $h(s)$, groupe qui est identique, en réalité, avec celui du tétraèdre. Désignons par $\pi_i(s)$ une quelconque de ces substitutions; on obtiendra le groupe $G_1$ en combinant les substitutions de $g$ avec une des substitutions $\varphi_1$ et $\varphi_2$.

Cela posé, soit $r(s)$ une fonction rationnelle quelconque; posons

$$R(s) = \sum_{i=1}^{i=12} r[\pi_i(s)] \frac{1}{\frac{d\pi_i}{ds}};$$

la fonction ainsi obtenue $R(s)$ satisfait aux relations

$$R[\pi_i(s)] \frac{1}{\frac{d\pi_i}{ds}} = R(s).$$

La fonction

$$\mathfrak{P}(s) = R(s) + \frac{R(is)}{i}$$

vérifiera les relations (30) tandis que la fonction

$$\mathfrak{Q}(s) = R(s) - \frac{R(is)}{i}$$

vérifiera les relations

$$\mathfrak{Q}(is) = -i\,\mathfrak{Q}(s), \qquad \mathfrak{Q}\left(\frac{1-s}{1+s}\right) = \frac{2}{(1+s)^2}\mathfrak{Q}(s).$$

Finalement les fonctions rationnelles

$$F(s) = \mathfrak{P}(s) + \mathfrak{P}_0(s),$$
$$F_1(s) = \mathfrak{Q}(s) + \mathfrak{Q}_0(s)$$

vérifieront respectivement les relations (30) et (31) avec la relation (32).

Inversement, on obtient ainsi toutes les fonctions rationnelles vérifiant ces relations, et l'on peut même supposer que $r(s)$ n'admet pas de pôles en dehors d'un triangle élémentaire sur la sphère.

Si $r(s)$ a un seul pôle du premier ordre à l'intérieur du triangle élémentaire, on aura, dans les deux cas, pour la courbe minima correspondante,

$$O = 144, \qquad C = 50, \qquad R = 98.$$

La surface minima sera de $194^e$ classe, et l'ordre sera

$$\leqq (144)^2 = 20.736.$$

Si $r(s)$ a un pôle du premier ordre sur un côté d'un triangle élémentaire, on aura, pour la courbe minima,

$$O = 72, \qquad C = 26, \qquad R = 50;$$

la surface minima correspondante sera de $98^e$ classe, et l'ordre sera $\leqq 5184$.

Enfin, si $r(s)$ a un pôle en un des sommets d'un triangle élémentaire, nous distinguerons les deux formes de la fonction rationnelle $F(s)$. Supposons d'abord que $F(s)$ soit de la forme (I); les trois surfaces les plus simples que l'on puisse obtenir correspondent aux fonctions suivantes :

1° $$F(s) = \frac{H_1(s)[H_1(s) - 1]}{H'_1} = k\frac{(s^{12} - 33s^8 - 33s^4 + 1)(s^8 + 14s^4 + 1)}{s^3(s^4 - 1)^3};$$

pour la courbe minima correspondante, on a

$$O = 30, \qquad C = 20, \qquad R = 26.$$

La surface minima que l'on en déduit sera de $50^e$ classe, et l'ordre sera $\leqq 900$.

2° $$F(s) = \frac{H_1(s)}{H'_1(s)} = k\frac{(s^{12} - 33s^8 - 33s^4 + 1)s(s^4 - 1)}{(s^8 + 14s^4 + 1)^2};$$

pour la courbe minima correspondante,

$$O = 32, \qquad C = 18, \qquad R = 26.$$

La surface minima sera encore de $50^e$ classe et d'ordre $\leqq 1024$.

3° $$F(s) = \frac{H_1(s) - 1}{H'_1(s)} = k\frac{s(s^4 - 1)(s^8 + 14s^4 + 1)}{s^{12} - 33s^8 - 33s^4 + 1}.$$

Pour la courbe minima correspondante,

$$O = 36, \qquad C = 14, \qquad R = 26.$$

La surface minima sera encore de $50^e$ classe et d'ordre $\leqq 1296$.

En supposant $F(s)$ de la forme (II), la surface la plus simple s'obtient en prenant

$$F(s) = \frac{1}{h'(s)}[h^2(s) - 1] = k\frac{s^8 + 14s^4 + 1}{s(s^4 - 1)}.$$

Pour la courbe minima correspondante, on a

$$O = 18, \qquad R = 8, \qquad C = 14.$$

La surface minima est de $26^e$ classe et d'ordre $\leqq 324$.

On pourra, comme précédemment, déduire d'une surface correspondant à une valeur de $F(s)$ de la forme (IV) un groupe de surfaces toutes applicables l'une sur l'autre, et admettant les neuf plans de symétrie du cube comme plans de symétrie de seconde espèce.

Nous verrons plus loin la forme générale des équations différentielles qui déterminent les lignes de courbure et les lignes asymptotiques de ces surfaces.

13. Recherche générale. — Nous avons obtenu, dans ce qui précède, une infinité de surfaces minima, algébriques ou transcendantes, admettant tous les plans de symétrie d'un polyèdre régulier. Mais rien ne prouve jusqu'ici qu'on obtient de cette façon toutes les surfaces minima jouissant de cette propriété. Pour examiner s'il en est ainsi, cherchons d'abord d'une façon précise quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes que doit remplir la fonction caractéristique $F(s)$ pour que la surface minima réelle correspondante admette pour plan de symétrie le plan des $xz$.

Je remarque, pour cela, qu'à une fonction $F(s)$ correspond une surface minima unique, mais la réciproque n'est pas vraie. Sur toute surface minima réelle existe deux faisceaux conjugués de courbes minima; les courbes d'un même faisceau sont congruentes à l'une d'elles, et leurs fonctions caractéristiques sont de la forme

$$F(s) + As^2 + 2Bs + C;$$

les fonctions caractéristiques des courbes minima conjuguées sont de la forme

$$-s^2 F_0\left(-\frac{1}{s}\right) + As^2 + 2Bs + C.$$

Il suit de là que, si une fonction mise à la place de $F(s)$ dans les formules (15) donne la même surface que $F(s)$, elle est nécessairement de l'une des deux formes précédentes. Or, si nous remplaçons $F(s)$ par $F(s) + As^2 + 2Bs + C$ dans les formules (15), les coordonnées $x, y, z$ sont augmentées respectivement de

$$2R[A - C], \qquad 2R[i(A + C)], \qquad -4R[B],$$

la lettre R désignant la partie réelle d'une quantité imaginaire. Si la surface est algébrique, pour qu'on retrouve la même surface, il faut et il suffit que A et C soient conjugués et que B soit de la forme $iB'$, $B'$ étant réel.

On trouve les mêmes conditions en prenant la seconde forme. Ainsi, *les seules fonctions qui, mises à la place de* $F(s)$ *dans les formules* (15), *donnent la même surface minima, sont comprises dans l'une des deux expressions générales*

$$F(s) + As^2 + 2iBs + A_0, \qquad -s^2 F_0\left(-\frac{1}{s}\right) + As^2 + 2iBs + A_0,$$

A *et* $A_0$ *étant conjugués et* B *étant réel.*

Cela posé, si la surface représentée par les équations (15) admet le plan des $xz$ pour plan de symétrie, il est évident qu'on obtiendra la même surface en partant de la courbe minima symétrique de la première par rapport au plan des $xz$. Cette nouvelle courbe minima ayant pour fonction caractéristique, comme il a été vu plus haut,

$$-s^2 F\left(-\frac{1}{s}\right),$$

il faudra que $F(s)$ vérifie une des deux relations

$$(34) \qquad -s^2 F\left(-\frac{1}{s}\right) = F(s) + As^2 + 2iBs + A_0,$$

$$(35) \qquad -s^2 F\left(-\frac{1}{s}\right) = -s^2 F_0\left(-\frac{1}{s}\right) + As^2 + 2iBs + A_0,$$

et cette condition est suffisante. Nous nous sommes bornés, dans ce qui précède, à considérer le cas particulier où

$$A = A_0 = B = 0.$$

Je dis maintenant qu'on a toujours le droit de faire cette hypothèse lorsque la fonction $F(s)$ est algébrique. En effet, considérons une fonction algébrique $F(s)$ vérifiant la relation (34); le changement de $s$ en $-\frac{1}{s}$ donne l'équation

$$F(s) = -s^2 F\left(-\frac{1}{s}\right) - A + 2iBs - A_0 s^2,$$

et celle-ci, combinée avec la première, donne

$$F(s) = F(s) + (A - A_0)(s^2 - 1) + 4iBs.$$

Toute fonction $F(s)$ vérifiant cette relation sera nécessairement *transcendante* et non uniforme, à moins que l'on n'ait à la fois

$$A = A_0, \qquad B = 0.$$

La formule (34) devient alors

$$-s^2 F\left(-\frac{1}{s}\right) = F(s) + A(s^2 + 1). \tag{34 bis}$$

Posons maintenant

$$f(s) = F(s) + \lambda s^2 + 2i\mu s + \lambda_0,$$

$\lambda$ et $\lambda_0$ étant conjugués et $\mu$ étant réel, ce qui ne change pas la surface. On aura

$$\begin{aligned}
f\left(-\frac{1}{s}\right) &= F\left(-\frac{1}{s}\right) + \frac{\lambda}{s^2} - \frac{2i\mu}{s} + \lambda_0,\\
-s^2 f\left(-\frac{1}{s}\right) &= -s^2 F\left(-\frac{1}{s}\right) - \lambda + 2i\mu s - \lambda_0 s^2,\\
&= F(s) + A(s^2 + 1) - \lambda + 2i\mu s - \lambda_0 s^2,\\
&= f(s) + A(s^2 + 1) - (\lambda + \lambda_0)(1 + s^2).
\end{aligned}$$

Cette relation se réduira à

$$-s^2 f\left(-\frac{1}{s}\right) = f(s)$$

pourvu que l'on prenne $\lambda + \lambda_0 = A$.

Supposons en second lieu qu'une fonction algébrique $F(s)$ vérifie la relation (35) ou la relation équivalente

$$F(s) = F_0(s) + A_0 s^2 + 2iBs + A.$$

Égalons les fonctions conjuguées des deux membres; il vient

$$F_0(s) = F(s) + As^2 - 2iBs + A_0,$$

et, par suite,

$$F(s) = F(s) + (A + A_0)(1 + s^2).$$

La fonction $F(s)$ ne pourra être algébrique que si $A + A_0 = 0$, c'est-à-dire si $A$ est de la forme $i\alpha$, $\alpha$ étant réel. La relation précédente prend donc la forme

$$F_0(s) = F(s) + i(\alpha s^2 + 2\beta s - \alpha),$$

$\alpha$ et $\beta$ étant réels. Posons, comme tout à l'heure,

$$f(s) = F(s) + \lambda s^2 + 2i\mu s + \lambda_0;$$

on aura

$$\begin{aligned} f_0(s) &= F_0(s) + \lambda_0 s^2 - 2i\mu s + \lambda, \\ &= F(s) \;\; + i(\alpha s^2 + 2\beta s - \alpha) + \lambda_0 s^2 - 2i\mu s + \lambda, \\ &= f(s) \;\; + i(\alpha s^2 + 2\beta s - \alpha) + (\lambda_0 - \lambda)(s^2 - 1) - 4i\mu s. \end{aligned}$$

Cette relation se réduira à

$$f_0(s) = f(s),$$

si l'on prend $\lambda_0 - \lambda + i\alpha = 0$, $2\mu - \beta = 0$. En définitive, *on obtient toutes les surfaces minima algébriques admettant le plan des $xz$ pour plan de symétrie en prenant pour* $F(s)$ *dans les formules* (15) *une fonction algébrique vérifiant l'une des deux relations*

$$F_0(s) = F(s),$$

$$-s^2 F\left(-\frac{1}{s}\right) = F(s).$$

Mais il n'en est pas de même pour les surfaces non algébriques. Considérons, par exemple, la surface minima représentée par les équations (15) où l'on fait

$$F(s) = is \operatorname{arc\,tang} s.$$

La fonction $F(s)$ vérifie la relation

$$-s^2 F\left(-\frac{1}{s}\right) = F(s) + i\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)s,$$

et, en posant

$$f(s) = is \operatorname{arc\,tang} s + \lambda s^2 + 2i\mu s + \lambda_0,$$

on n'aura jamais

$$-s^2 f\left(-\frac{1}{s}\right) = f(s).$$

Cependant la surface correspondante admet le plan des $xz$ pour plan de symétrie. Cela résulte d'une des propositions précédentes. On peut ici le vérifier directement sur les expressions des coordonnées :

$$x = \mathrm{R}\left[2i\frac{1+s^4}{(1+s^2)^2}\right],$$
$$y = \mathrm{R}\left[\frac{2(s^4-1)}{(1+s^2)^2}\right],$$
$$z = \mathrm{R}\left[\frac{2is(1-s^2)}{(1+s^2)^2} - 2i \operatorname{arc\,tang} s\right].$$

Quand on change $s$ en $-\frac{1}{s}$, $x$ et $z$ ne changent pas, $y$ change de signe.

14. On démontre par des considérations analogues que les formules obtenues précédemment représentent *toutes les surfaces minima, réelles et algébriques*, admettant la symétrie d'un polyèdre régulier. La démonstration se faisant de la même façon dans les trois cas, je la développerai seulement pour le tétraèdre.

Soit $F(s)$ une fonction algébrique, telle que la surface minima représentée par les équations (15) admette les plans de symétrie du tétraèdre régulier; $F(s)$ est la fonction caractéristique d'une courbe minima. Cette courbe minima ne revient pas nécessairement sur elle-même quand on lui fait subir une des rotations qui font revenir le tétraèdre régulier sur lui-même. Mais, après une quelconque de ces rotations, elle doit revenir congruente à elle-même; cela tient à ce fait que ces rotations sont de $\frac{2\pi}{3}$ ou résultent de la combinaison de pareilles rotations. Après une rotation de $\frac{2\pi}{3}$ autour de OC (voir *fig.* 4), on aura donc

$$\alpha^2 F(\alpha s) = F(s) + as^2 + 2ibs + a_0, \qquad \alpha = e^{\frac{2\pi i}{3}},$$

$a$ et $a_0$ étant conjugués et $b$ étant réel. Changeons dans cette formule $s$ en $\alpha s$, puis en $\alpha^2 s$; il vient

$$\begin{aligned} \alpha^2 F(\alpha^2 s) &= F(\alpha s) + a(\alpha s)^2 + 2ib(\alpha s) + a_0, \\ \alpha^2 F(s) &= F(\alpha^2 s) + a(\alpha^2 s)^2 + 2ib(\alpha^2 s) + a_0. \end{aligned}$$

Multiplions la première de ces relations par $\alpha^2$, la seconde par $\alpha$ et ajoutons; nous trouvons :

$$\begin{aligned} \alpha^2 F(s) &= \alpha^2 F(s) + as^2(\alpha^2 + \alpha + 1) + 6ib\,\alpha^2 s + a_0(1 + \alpha + \alpha^2) \\ &= \alpha^2 F(s) + 6ib\,\alpha^2 s. \end{aligned}$$

Puisque par hypothèse $F(s)$ est algébrique, il faudra que l'on ait

$$b = 0,$$

et la relation écrite plus haut devient

$$\alpha^2 F(\alpha s) = F(s) + as^2 + a_0.$$

Posons

$$F_1(s) = F(s) + \lambda s^2 + 2i\mu s + \lambda_0,$$

$\lambda$ et $\lambda_0$ désignant deux quantités conjuguées et $\mu$ étant réel; on aura

$$\begin{aligned} \alpha^2 F_1(\alpha s) &= \alpha^2 F(\alpha s) + \lambda\,\alpha s^2 + 2i\mu s + \lambda_0 \alpha^2 \\ &= F(s) + as^2 + a_0 + \lambda\alpha s^2 + 2i\mu s + \lambda_0 \alpha^2 \\ &= F_1(s) + as^2 + a_0 + \lambda(\alpha - 1)s^2 + \lambda_0(\alpha^2 - 1); \end{aligned}$$

pour que l'on ait

$$\alpha^2 F_1(\alpha s) = F_1(s),$$

il nous suffit de prendre

$$\lambda = \frac{a}{\alpha - 1}, \qquad \lambda_0 = \frac{a_0}{\alpha^2 - 1}.$$

On peut donc toujours, *en faisant subir à la courbe minima une translation imaginaire* (ce qui ne change pas la surface minima correspondante), *l'amener dans une position telle qu'une rotation de* $\frac{2\pi}{3}$ *autour de* OC *la fasse revenir sur elle-même.*

Considérons maintenant une rotation de $\pi$ autour de OA. La fonction $F(s)$ devra satisfaire à la nouvelle condition

$$\frac{-(-1+s\sqrt{2})^2}{3} F\left(\frac{\sqrt{2}+s}{-1+s\sqrt{2}}\right) = F(s) + As^2 + 2iBs + A_0;$$

changeons dans cette relation $s$ en $\frac{\sqrt{2}+s}{-1+s\sqrt{2}}$, elle devient

$$\frac{-3}{(-1+s\sqrt{2})^2} F(s) = F\left(\frac{\sqrt{2}+s}{-1+s\sqrt{2}}\right) + \frac{A(\sqrt{2}+s)^2 + 2iB(\sqrt{2}+s)(-1+s\sqrt{2}) + A_0(-1+s\sqrt{2})^2}{(-1+s\sqrt{2})^2},$$

et cette relation, combinée avec la première, nous donne

$$F(s) = F(s) + As^2 + 2iBs + A_0 - \frac{A(\sqrt{2}+s)^2 + 2iB(\sqrt{2}+s)(-1+s\sqrt{2}) + A_0(-1+s\sqrt{2})^2}{3}.$$

Puisque la fonction $F(s)$ est algébrique, le trinôme du second degré

$$3As^2 + 6iBs + 3A_0 - A(\sqrt{2}+s)^2 - 2iB(\sqrt{2}+s)(-1+s\sqrt{2}) - A_0(-1+s\sqrt{2})^2$$

doit être identiquement nul. On a ainsi les trois conditions

$$\begin{aligned} 2A - 2iB\sqrt{2} - 2A_0 &= 0, \\ 2A_0 + 2iB\sqrt{2} - 2A &= 0, \\ -4iB + 2A\sqrt{2} - 2A_0\sqrt{2} &= 0, \end{aligned}$$

qui se réduisent à une seule

$$A - A_0 - iB\sqrt{2} = 0.$$

La suite des deux rotations de $\frac{2\pi}{3}$ autour de OC et de $\pi$ autour de OA est équivalente à une rotation de $\frac{2\pi}{3}$ autour de OB. D'après ce qu'on vient de voir, on peut toujours, sans changer la surface correspondante, amener la courbe minima dans une position telle qu'une rotation de $\frac{2\pi}{3}$ autour de OB la fasse revenir sur elle-même. Supposons qu'on ait effectué cette transformation, il en résulte de nouvelles relations entre les constantes $a$, $a_0$, A, $A_0$, B. Dans l'égalité

$$\frac{-(-1+s\sqrt{2})^2}{3} F\left(\frac{\sqrt{2}+s}{-1+s\sqrt{2}}\right) = F(s) + As^2 + 2iBs + A_0,$$

changeons $s$ en $\alpha s$ et divisons par $\alpha$; il vient

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\alpha}\frac{(-1+s\alpha\sqrt{2})^2}{3} F\left(\frac{\sqrt{2}+s\alpha}{-1+s\alpha\sqrt{2}}\right) &= \alpha^2 F(\alpha s) + A\alpha s^2 + 2iBs + A_0\alpha^2 \\ &= F(s) + as^2 + a_0 + A\alpha s^2 + 2iBs + A_0\alpha^2. \end{aligned}$$

Mais, puisque la courbe revient sur elle-même après cette suite de deux rotations, il faudra que l'on ait

$$a + A\alpha = 0, \qquad B = 0, \qquad A_0\alpha^2 + a_0 = 0.$$

Comme on a déjà

$$A - A_0 - iB\sqrt{2} = 0,$$

on déduit de là que A sera réel et l'on aura

$$a = -A\alpha, \qquad a_0 = -A\alpha^2.$$

Posons de nouveau

$$F_1(s) = F(s) + \lambda s^2 + 2i\mu s + \lambda_0,$$

$\lambda$ et $\lambda_0$ étant conjuguées et $\mu$ étant réel. Pour que la fonction $F_1$ vérifie les relations

$$\frac{-(-1+s\sqrt{2})^2}{3} F_1\left(\frac{\sqrt{2}+s}{-1+s\sqrt{2}}\right) = F_1(s),$$

$$\alpha^2 F_1(\alpha s) = F_1(s),$$

on trouve par un calcul déjà fait que $\lambda$, $\lambda_0$, $\mu$ doivent vérifier les relations

$$\lambda+\lambda_0 = A, \qquad \lambda_0 - \lambda - 2i\mu\sqrt{2} = 0, \qquad a+\lambda(\alpha-1) = 0, \qquad a_0 + \lambda(\alpha^2-1) = 0.$$

On tire des deux dernières

$$\lambda = \frac{-a}{\alpha-1} = A\frac{\alpha}{\alpha-1}, \qquad \lambda_0 = A\frac{\alpha^2}{\alpha^2-1},$$

et ces valeurs vérifient bien la relation

$$\lambda + \lambda_0 = A.$$

On peut donc, sans restreindre la généralité, *prendre une courbe minima qui revient sur elle-même par toutes les rotations qui font revenir sur lui-même le tétraèdre régulier.*

La fonction caractéristique de la courbe minima sera donc de la forme

$$F(s) = \frac{1}{H'(s)}\,\Psi[H(s)].$$

Les fonctions caractéristiques de la courbe minima conjuguée et de la courbe minima symétrique par rapport au plan des $xz$ seront respectivement (*voir* n$^{os}$ 6 et 10)

$$-\frac{H^2(s)}{H'(s)}\,\Psi_0\left[\frac{1}{H(s)}\right], \quad -\frac{H^2(s)}{H'(s)}\,\Psi\left[\frac{1}{H(s)}\right].$$

Pour que la surface minima admette le plan des $xz$ pour plan de symétrie, il faudra donc que l'une ou l'autre des deux relations suivantes soit vérifiée :

$$\frac{1}{H'(s)}\,\Psi[H(s)] = -\frac{H^2(s)}{H'(s)}\,\Psi\left[\frac{1}{H(s)}\right] + as^2 + 2ibs + a_0,$$

$$\frac{H^2(s)}{H'(s)}\,\Psi\left[\frac{1}{H(s)}\right] = \frac{H^2(s)}{H'(s)}\,\Psi_0\left[\frac{1}{H(s)}\right] + as^2 + 2ibs + a_0.$$

Dans les deux cas, le trinôme $as^2 + 2ibs + a_0$ serait égal au produit de $\frac{1}{H'(s)}$ par une simple fonction de $H(s)$; ce qui est impossible. Il faut donc que l'on ait $a = b = a_0 = 0$.

15. Surfaces non algébriques. — Il ne nous reste plus qu'à rechercher des formules générales pour les surfaces non algébriques possédant la symétrie demandée. Les relations (34) et (35) qui expriment que la surface est symétrique par rapport au plan des $xz$ prennent une forme beaucoup plus simple, quand on prend au lieu de $F(s)$ la dérivée troisième $\mathcal{F}(s) = F'''(s)$ et qu'on emploie les formules (16) pour représenter les coordonnées d'un point de la surface. C'est ce que nous ferons désormais.

Sur la surface minima réelle représentée par les formules

$$x = \mathrm{R}\left[\int (1 - s^2)\,\mathcal{F}(s)\,ds\right],$$
$$y = \mathrm{R}\left[\int i(1 + s^2)\,\mathcal{F}(s)\,ds\right],$$
$$z = \mathrm{R}\left[\int 2s\,\mathcal{F}(s)\,ds\right],$$

il existe deux faisceaux de courbes minima congruentes ayant respectivement pour fonctions caractéristiques

$$\mathcal{F}(s), \quad -\frac{1}{s^4}\,\mathcal{F}_0\left(-\frac{1}{s}\right).$$

Il est naturel de prendre $\mathcal{F}(s)$ pour fonction caractéristique d'un système de courbes minima congruentes, car à une fonction $\mathcal{F}(s)$ correspondent une infinité de courbes minima toutes congruentes entre elles. Nous avons déjà vu plus haut (n° 6) que le faisceau symétrique du précédent par rapport au plan des $xz$ a pour fonction caractéristique

$$-\frac{1}{s^4}\,\mathcal{F}\left(-\frac{1}{s}\right),$$

et le faisceau que l'on déduit du premier par une rotation

$$\mathcal{F}[\varphi(s)]\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2,$$

où $s' = \varphi(s)$ désigne la substitution inverse de celle qui correspond à cette rotation.

Si la surface est symétrique par rapport au plan des $xz$, le faisceau symétrique du premier par rapport à ce plan doit coïncider avec ce faisceau lui-même ou avec son conjugué. Il faut donc que la fonction $\mathcal{F}(s)$ vérifie l'une des deux relations

$$(36) \qquad \left\{\begin{aligned} -\frac{1}{s^4}\,\mathcal{F}\left(-\frac{1}{s}\right) &= \mathcal{F}(s), \\ -\frac{1}{s^4}\,\mathcal{F}_0\left(-\frac{1}{s}\right) &= -\frac{1}{s^4}\,\mathcal{F}\left(-\frac{1}{s}\right), \end{aligned}\right.$$

dont la dernière peut aussi s'écrire

$$(37) \qquad \mathcal{F}_0(s) = \mathcal{F}(s).$$

Les conditions précédentes sont nécessaires; sont-elles suffisantes? Supposons, par exemple, que la première relation (36) soit vérifiée. On obtient deux surfaces minima symétriques l'une de l'autre par rapport au plan des $xz$ en prenant successivement $\mathfrak{F}(s)$ et $-\frac{1}{s^4}\mathfrak{F}\left(-\frac{1}{s}\right)$ dans les formules (16). La relation (36) exprime que ces deux surfaces sont congruentes. Elles sont donc à la fois symétriques et congruentes. Si elles sont algébriques, elles auront forcément un plan de symétrie parallèle au plan des $xz$; mais il n'en sera pas nécessairement ainsi si la surface est périodique. On verrait de même que la condition (37) est simplement nécessaire, si la surface n'est pas algébrique. Ainsi *les conditions nécessaires* (36) *et* (37) *ne sont suffisantes, en général, que si* $\mathfrak{F}(s)$ *est la dérivée troisième d'une fonction algébrique.*

Prenons, par exemple, pour $\mathfrak{F}(s)$ la dérivée troisième de

$$\mathrm{F}(s) = (s \operatorname{arc\,tang} s)(1+i);$$

on a

$$\begin{aligned}
-s^2\,\mathrm{F}\left(-\frac{1}{s}\right) &= s(1+i)\operatorname{arc\,tang}\left(-\frac{1}{s}\right)\\
&= s(1+i)\operatorname{arc\,tang} s + \left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right)s(1+i)\\
&= \mathrm{F}(s) + \left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right)s(1+i),
\end{aligned}$$

et, par suite,

$$-\frac{1}{s^4}\mathfrak{F}\left(-\frac{1}{s}\right) = \mathfrak{F}(s).$$

Si l'on prend pour $\mathrm{F}(s)$ la fonction précédente dans les formules (15), la surface obtenue n'admet pas le plan des $xz$ pour plan de symétrie.

Quand on change $s$ en $-\frac{1}{s}$, $x$ ne change pas de signe, $y$ change de signe, et $z$ augmente de $\pi$. Cet exemple montre bien que les conditions (36) ne sont que nécessaires.

Pour abréger, je dirai qu'un plan P est un plan de *pseudosymétrie* pour une surface S lorsque la surface S′, symétrique de S par rapport à ce plan, est en même temps congruente à S. Les relations (36) et (37) expriment précisément que le plan des $xz$ est un plan de pseudosymétrie pour la surface représentée par les équations (16). Il y aura encore lieu de distinguer deux espèces de pseudosymétrie pour une surface minima. Si la première relation (36) est vérifiée, chaque faisceau de courbes minima de la surface est congruent à son symétrique; le plan des $xz$ sera dit *plan de pseudosymétrie* de seconde espèce.

Si la relation (37) est vérifiée, chaque faisceau de courbes minima de la surface est congruent au symétrique du faisceau conjugué; le plan des $xz$ sera dit *plan de pseudosymétrie* de première espèce. Le problème que nous avons en vue n'est évidemment qu'un cas particulier de celui-ci :

*Trouver toutes les surfaces minima admettant pour plans de pseudosymétrie tous les plans de symétrie d'un polyèdre régulier.*

Imaginons que nous ayons pris les mêmes axes de coordonnées que dans ce qui précède. Aux relations (36) et (37) nous devrons joindre d'autres relations exprimant que certaines rotations autour de l'origine ramènent chaque faisceau de courbes minima de la surface à être congruent à lui-même ou à son conjugué. Soit $s' = \varphi(s) = \dfrac{as+b}{cs+d}$ la substitution inverse de celle qui correspond à une rotation. Les formules dont il s'agit auront l'une des formes suivantes :

$$\mathcal{F}[\varphi(s)]\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 = \mathcal{F}(s), \tag{38}$$

$$\mathcal{F}[\varphi(s)]\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 = -\frac{1}{s^4}\mathcal{F}_0\left(-\frac{1}{s}\right). \tag{39}$$

Nous aurons à rechercher les fonctions $\mathcal{F}(s)$ vérifiant un certain nombre de relations de cette forme. La discussion est absolument la même que celle qui a été faite plus haut pour les courbes minima et comprend les mêmes cas particuliers. Aussi je me bornerai à donner les résultats.

16. TÉTRAÈDRE. — On a deux cas à distinguer :

$$\mathcal{F}(s) = [H'(s)]^2\,\Psi_1[H(s)], \tag{I}$$

$\Psi_1$ désignant une fonction réelle de $H(s)$, et $H(s)$ ayant la valeur donnée plus haut

$$H(s) = \frac{(2\sqrt{2}\,s^3 - 1)^3}{s^3(2\sqrt{2} + s^3)^3}.$$

Les six plans de symétrie du tétraèdre sont pour la surface des plans de pseudosymétrie de première espèce

$$\text{(II)} \qquad \mathcal{F}(s) = \left[\frac{H'(s)}{H(s)}\right]^2 \Psi_2\left[H(s) + \frac{1}{H(s)}\right],$$

$\Psi_2$ désignant une fonction quelconque. Les six plans de symétrie du tétraèdre sont pour la surface des plans de pseudosymétrie de seconde espèce.

Si la fonction $\Psi_2$ était réelle, les deux faisceaux de courbes minima de la surface seraient confondus, et l'on aurait une surface double.

Icosaèdre. — On a deux formes différentes pour $\mathcal{F}(s)$ :

$$\text{(I)} \qquad \mathcal{F}(s) = [H'_2(s)]^2 \Psi_1[H_2(s)],$$

$\Psi_1$ désignant une fonction réelle;

$$\text{(II)} \qquad \mathcal{F}(s) = [H'_2(s)]^2 \sqrt{\Psi_2[H_2(s)]},$$

$\Psi_2$ désignant une fonction quelconque, et $H_2$ ayant la valeur donnée plus haut (n° 11).

Les quinze plans de symétrie de l'icosaèdre sont, pour la surface minima, des plans de pseudosymétrie de première ou de seconde espèce suivant que $\mathcal{F}(s)$ est de la forme (I) ou de la forme (II). Si, dans la forme (II), on prend pour $\Psi_2$ une fonction réelle, on aura encore une surface double.

Octaèdre. — La fonction $\mathcal{F}(s)$ peut prendre quatre formes différentes :

$$\text{(I)} \qquad \mathcal{F}(s) = [H'_1(s)]^2 \Psi_1[H_1(s)],$$

$$\text{(II)} \qquad \mathcal{F}(s) = [h'(s)]^2 \Psi_2[H_1(s)],$$

$$\text{(III)} \qquad \mathcal{F}(s) = [h'(s)]^2 \sqrt{\Psi_3[ih(s)]},$$

$\Psi_1$, $\Psi_2$, $\Psi_3$ désignant des fonctions réelles;

$$\text{(IV)} \qquad \mathcal{F}(s) = [H'_1(s)]^2 \sqrt{\Psi_4[H_1(s)]},$$

$\Psi_4$ désignant une fonction quelconque.

Les fonctions $H_1(s)$, $h(s)$ ont les mêmes valeurs que plus haut, et la distinction des différentes espèces de pseudosymétrie se fait comme au n° 12.

Quand on aura pris pour $\mathcal{F}(s)$ une fonction de l'une des formes précédentes, il y aura encore lieu d'examiner si les plans de symétrie du polyèdre régulier sont des plans de pseudosymétrie pour la surface ou de véritables plans de symétrie. Ces plans sont toujours de véritables plans de symétrie dans un cas très général et très important, auquel je me bornerai maintenant : c'est celui où la surface admet des lignes planes géodésiques situées dans les plans de symétrie du polyèdre.

17. Surfaces a lignes planes géodésiques. — Reportons-nous aux formules générales (16) de M. Weierstrass, et supposons que la fonction $\mathcal{F}(s)$ prenne des valeurs réelles pour les valeurs réelles de $s$ comprises entre deux limites $a$ et $b$. En prenant convenablement les constantes d'intégration qui figurent implicitement dans ces formules, on aura, pour toutes ces valeurs de $s$, $y = 0$. La surface minima est donc coupée par le plan des $xz$ suivant une certaine courbe C, le long de laquelle le plan tangent à la surface est parallèle à $oy$. C'est donc une ligne géodésique de la surface minima; et, inversement, si le plan des $xz$ coupe orthogonalement la surface minima suivant une certaine courbe C, la fonction $\mathcal{F}(s)$ prendra nécessairement des valeurs réelles pour les valeurs réelles de $s$ entre certaines limites. S'il en est ainsi, $\mathcal{F}(s)$ sera une fonction réelle, et elle prendra des valeurs conjuguées pour des valeurs conjuguées de $s$. A ces valeurs conjuguées $s$, $s_0$ correspondront pour $y$ des valeurs égales et de signes contraires, car l'intégrale

$$\int (1+s^2)\,\mathcal{F}(s)\,ds$$

sera nécessairement une fonction réelle d'après la façon dont nous avons choisi la constante d'intégration. On déduit de là le théorème suivant de M. Weierstrass :

*Si une surface minima admet une ligne plane géodésique, le plan de cette courbe est un plan de symétrie pour la surface.*

Au contraire, supposons que, pour des valeurs réelles de $s$, comprises entre certaines limites, $i\mathcal{F}(s)$ prenne des valeurs réelles. En choisissant convenablement les constantes d'intégration, on aura, pour toutes ces valeurs de $s$, $x = 0$, $z = 0$, et la surface contiendra l'axe $oy$. Inversement, si une surface minima réelle contient l'axe $oy$ ou une droite parallèle, le plan tangent à la surface en un point quelconque de la droite restant parallèle à $oy$, les valeurs correspondantes de $s$ devront être réelles et $i\mathcal{F}(s)$ devra être réel pour ces valeurs de $s$. D'un autre côté, si l'on choisit les constantes d'intégration, de façon que $x$ et $z$ soient nuls quand $s$ est réel, quand on changera $s$ en $s_0$, $y$ ne changera pas, mais $x$ et $z$ changeront de signe. On a donc le théorème ci-dessous qui est l'inverse du premier et qui a été énoncé aussi par M. Weierstrass :

*Si une surface minima contient une droite* D, *cette droite est un axe de symétrie pour la surface.*

*Remarque I.* — Si une surface minima contient une ligne plane géodésique, la surface adjointe contiendra une droite perpendiculaire au plan de cette ligne, et réciproquement.

*Remarque II.* — Il peut se faire que la même surface minima possède une ligne plane géodésique et passe par une droite perpendiculaire au plan de cette ligne. Prenons, par exemple,

$$\mathcal{F}(s) = \sqrt{(s-a)(s-b)},$$

$a$ et $b$ étant réels, et $a < b$. Quand on fait varier $s$ dans les formules (16) de $-\infty$ à $a$ et de $b$ à $+\infty$, on obtient une ligne géodésique plane dans le plan $xoz$; mais, en faisant varier $s$ de $a$ à $b$, on obtient une droite parallèle à $oy$.

Cela posé, revenons au problème en question : *Trouver toutes les surfaces minima qui sont coupées orthogonalement par tous les plans de symétrie d'un polyèdre régulier.* D'après la remarque I, ce problème est équivalent au suivant : *Trouver toutes les surfaces minima contenant des droites perpendiculaires à tous les plans de symétrie d'un polyèdre régulier.* La solution générale se déduit, en quelques mots, des développements qui précèdent.

Considérons d'abord un tétraèdre régulier et prenons les mêmes axes qu'au n° 10. Tous les plans de symétrie du tétraèdre devront être pour la surface des plans de symétrie de première espèce, de sorte que $\mathcal{F}(s)$ sera de la forme

$$\mathcal{F}(s) = [H'(s)]^2\,\Psi[H(s)],$$

et il faudra, en outre, que la fonction $\Psi[H(s)]$ prenne des valeurs réelles pour des valeurs réelles de $s$, au moins entre certaines limites. Ces conditions sont d'ailleurs suffisantes; en effet, on peut amener le plan $xoz$ à coïncider avec un quelconque des plans de symétrie du tétraèdre par des rotations qui font revenir le tétraèdre sur lui-même, et ces rotations ne changent pas la fonction caractéristique.

Le même raisonnement s'applique à l'icosaèdre, et la forme générale de $\mathfrak{F}(s)$ sera

$$\mathfrak{F}(s) = [H_2'(s)]^2\,\Psi[H_2(s)],$$

$\Psi[H_2(s)]$ prenant des valeurs réelles pour des valeurs réelles de $s$ entre certaines limites.

Le cas de l'octaèdre est un peu plus compliqué. On voit d'abord que $\mathfrak{F}(s)$ sera de la forme

$$\mathfrak{F}(s) = [H_1'(s)]^2\,\Psi[H_1(s)],$$

la fonction $\Psi[H_1(s)]$ prenant des valeurs réelles pour des valeurs réelles de $s$ entre certaines limites. Mais cette condition n'est pas suffisante. En effet, les rotations qui font revenir l'octaèdre sur lui-même ne peuvent jamais amener un plan parallèle aux faces du cube, tel que $xoz$, à coïncider avec un plan passant par les arêtes opposées du cube. Il faudra donc que, en faisant tourner la surface de $\frac{\pi}{4}$ autour de $oz$, ce qui revient à changer $s$ en $se^{\frac{\pi}{4}i}$, la nouvelle fonction caractéristique prenne des valeurs réelles pour des valeurs réelles de $s$. On sait que cette fonction caractéristique est $i\,\mathfrak{F}\left(se^{\frac{\pi}{4}i}\right)$.

18. Détermination d'une classe particulière de surfaces minima. — Dans ses recherches sur les surfaces minima, M. Schwarz a résolu la question suivante : *Déterminer une portion de surface minima limitée par deux segments de droite et un plan, en supposant que cette portion de surface ne présente aucun point singulier dans son intérieur, qu'elle coupe le plan orthogonalement, que la normale à la surface tourne toujours dans le même sens le long du contour, et que la section par le plan ne présente pas de point d'inflexion.* Il a montré que ce problème revient à effectuer l'*Abbildung* sur un triangle rectangle isoscèle d'un certain triangle sphé-

rique dont les angles sont connus, les sommets des deux triangles se correspondant. Sans entrer ici dans tous les détails de la démonstration, il est bien aisé de s'en rendre compte au moyen des considérations déjà employées. L'image sphérique de la portion de surface cherchée se compose évidemment d'un triangle sphérique dont les côtés appartiennent à trois plans connus, l'un parallèle au plan donné, les deux autres perpendiculaires aux droites données. De ces trois côtés deux correspondent à des lignes asymptotiques, et le troisième à une ligne de courbure. Or nous savons que, en posant

$$\int \sqrt{\mathcal{F}(s)}\, ds = \pi(s),$$

les lignes de courbure sont données par la formule

$$\pi(s) \pm \pi_0(s_0) = C,$$

et les lignes asymptotiques par la formule

$$\pi(s) \pm i\,\pi_0(s_0) = C'.$$

Autrement dit, lorsque le point $s$ décrit sur la sphère l'image d'une ligne de courbure, le point $u = \pi(s)$ décrit, dans son plan, une parallèle à l'axe réel ou à l'axe imaginaire, de sorte que les transformées des lignes de courbure donnent, dans le plan des $u$, deux faisceaux rectangulaires de droites. De même, les images des lignes asymptotiques seront des lignes droites inclinées à 45° sur les précédentes. On voit donc que, lorsque $s$ décrit le contour du triangle précédent, $u$ décrit, dans son plan, le contour d'un triangle rectangle isoscèle; par suite, la fonction

$$u = \pi(s)$$

fournit l'*Abbildung* sur ce triangle rectangle isoscèle du triangle de la sphère ou de sa projection stéréographique.

Réciproquement, si la fonction $\pi(s)$ satisfait à cette condition, en prenant, dans les formules de Weierstrass,

$$\mathcal{F}(s) = \left[\frac{d\pi(s)}{ds}\right]^2,$$

on aura une surface minima répondant à la question. Remarquons que les angles du triangle sphérique, adjacents au côté qui correspond à l'hypoténuse du triangle rectangle, doivent être moindres que $\frac{\pi}{2}\cdot$ Soit, en effet, $s = a$ un pareil sommet; si l'angle du triangle sphérique était supérieur à $\frac{\pi}{2}$, dans le domaine du point $s = a$, on aurait

$$\pi(s) = b + (s-a)^{\lambda}[A_0 + A_1(s-a) + \ldots], \qquad A_0 \neq 0,$$

où $\lambda < \frac{1}{2}$ et par suite

$$\mathcal{F}(s) = (s-a)^{2\lambda-2}[B_0 + B_1(s-a) + \ldots], \qquad \text{où} \qquad B_0 \neq 0,$$

et les formules (16) nous montrent que $x$, $y$, $z$ ne pourraient conserver en même temps des valeurs finies pour $s = a$.

Si l'on prend la portion de surface symétrique de la portion obtenue par rapport au plan ou par rapport à l'un des segments de droite, on obtient le prolongement analytique de cette surface. En continuant ainsi indéfiniment, on obtient une surface minima analytique formée d'une infinité de portions égales ou symétriques. Il suit de là que, si le plan donné est parallèle à un des plans de symétrie d'un polyèdre régulier et les deux droites perpendiculaires à deux autres plans de symétrie du même polyèdre, la surface minima analytique ainsi obtenue admettra une infinité de plans de symétrie parallèles aux plans de symétrie d'un polyèdre régulier. On peut dire encore qu'elle admet les plans de symétrie d'une infinité de polyèdres réguliers tous congruents entre eux.

Nous sommes donc amenés à effectuer l'application conforme sur un triangle rectangle isoscèle d'un triangle sphérique limité par trois plans de symétrie d'un polyèdre régulier ayant deux angles inférieurs à $\frac{\pi}{2}\cdot$ Comme les plans de symétrie du tétraèdre appartiennent aussi au cube, nous pouvons nous borner à considérer les deux cas du cube et de l'icosaèdre.

A chaque surface ainsi obtenue s'en ajoute une autre répondant à la question, qui est l'*adjointe* de la première. Cette surface est formée, comme la première, d'une infinité de portions égales ou symétriques. On peut obtenir cette surface en prenant, comme plus haut, une portion limitée par une droite et deux plans et formant les répétitions symétriques indéfiniment.

19. Les triangles sphériques, ayant deux angles aigus, dont les côtés sont situés dans les plans de symétrie d'un octaèdre, sont au nombre de cinq; en désignant par $\lambda\pi$, $\mu\pi$, $\nu\pi$ les angles de ces triangles, les nombres $\lambda$, $\mu$, $\nu$ auront les systèmes de valeurs suivants :

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\lambda$ .......... | $\frac{1}{2}$, | $\frac{2}{3}$, | $\frac{1}{2}$, | $\frac{2}{3}$, | $\frac{3}{4}$, |
| $\mu$ .......... | $\frac{1}{3}$, | $\frac{1}{3}$, | $\frac{1}{3}$, | $\frac{1}{4}$, | $\frac{1}{4}$, |
| $\nu$ .......... | $\frac{1}{3}$, | $\frac{1}{3}$, | $\frac{1}{4}$, | $\frac{1}{4}$, | $\frac{1}{3}$. |

On n'en déduit pas cinq surfaces différentes. En effet, c'est la même fonction analytique qui fournit l'*Abbildung* des quatre premiers triangles sur un triangle rectangle isoscèle. Je m'appuierai pour le faire voir sur la remarque que voici. Soit $u = \pi(s)$ une fonction analytique telle que, lorsque $s$ décrit un certain arc de cercle $ab$, $u$ décrit un autre arc de cercle AB. A des valeurs de $s$ symétriques par rapport à l'arc de cercle $ab$ correspondent des valeurs de $u$ symétriques par rapport à l'arc AB. (J'appelle points symétriques par rapport à un cercle deux points qui se déduisent l'un de l'autre au moyen d'une inversion ayant pour pôle le centre du cercle et pour module le carré du rayon.) La propriété dont il s'agit se déduit, par une substitution linéaire, du principe bien connu employé par Riemann, et dont nous avons fait usage plusieurs fois dans ce travail :

*Si une fonction analytique prend des valeurs réelles pour des valeurs réelles de la variable et si elle est connue dans la partie du plan située d'un côté de l'axe réel, on peut la prolonger de l'autre côté. A des valeurs conjuguées de la variable correspondent des valeurs conjuguées de la fonction.*

Cela posé, supposons qu'à un triangle d'arcs de cercle ABC, dont les angles sont $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}$ corresponde le triangle rectangle isoscèle $abc$ au moyen de la fonction analytique $u = \pi(s)$. Appliquons le principe précédent. Une figure que le lecteur est prié de faire montre qu'à des triangles d'arcs de cercle

$$\mathrm{ACD}\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{2\pi}{3}\right), \quad \mathrm{ACE}\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right), \quad \mathrm{CEF}\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$$

correspondent respectivement des triangles rectangles isoscèles $acd$, $ace$, $cef$.

La même fonction résout donc le problème pour les quatre triangles. Remarquons seulement que les deux triangles rectangles *abc*, *cef* qui correspondent aux deux triangles ABC, CEF sont placés de la même façon, tandis que les deux triangles *ace*, *acd* ont leurs hypoténuses qui font un angle de 45° avec l'hypoténuse des premiers triangles. D'après ce qui a été dit plus haut, pour ramener ces deux triangles à avoir la même disposition que les premiers, il faudrait multiplier la fonction $\pi(s)$ par $(-1)^{\frac{1}{4}}$ ou $\mathcal{F}(s)$ par $i$; ce qui revient à prendre la surface adjointe de la première. Nos quatre triangles fournissent donc en tout deux surfaces adjointes l'une de l'autre.

On obtiendra la fonction $\mathcal{F}(s)$ correspondant à ces surfaces en effectuant l'*Abbildung* du triangle d'arcs de cercle ABC sur un triangle rectangle isoscèle. Pour effectuer cet *Abbildung*, il est commode de passer par l'intermédiaire d'un cercle ou, ce qui revient au même, d'un demi-plan. Soit $t$ la variable qui est représentée par un point du demi-plan auxiliaire. En posant

$$u = \int_0^t \frac{dt}{t^{\frac{1}{2}}(1-t)^{\frac{3}{4}}},$$

on applique conformément le demi-plan positif des $t$ sur un triangle rectangle isoscèle du plan des $u$ ayant le sommet de l'angle droit à l'origine et les côtés dirigés suivant les axes. Les sommets du triangle correspondent aux points $0$, $1$, $\infty$ du plan des $t$; en particulier, le sommet de l'angle droit correspond au point $t=0$. Tout revient donc à faire l'*Abbildung* du triangle sphérique ABC sur le demi-plan positif des $t$, de façon que les sommets A, B, C correspondent respectivement aux points $\infty$, $0$, $1$. Il suffit pour cela de poser

$$t = \mathrm{H}_1(s) = \frac{(s^{12} - 33s^8 - 33s^4 + 1)^2}{108s^4(s^4-1)^4};$$

on en déduit

$$u = \int \frac{\mathrm{H}'_1(s)\,ds}{\mathrm{H}_1^{\frac{1}{2}}(1-\mathrm{H}_1)^{\frac{3}{4}}},$$

ou, en réduisant,

$$u = 48\sqrt{3}\int \frac{ds}{(1+14s^4+s^8)^{\frac{1}{4}}}.$$

Par suite, on aura

$$\mathcal{F}(s) = \left(\frac{du}{ds}\right)^2 = (48\sqrt{3})^2 \frac{1}{\sqrt{1+14s^4+s^8}}.$$

Pour avoir la surface adjointe, on n'a qu'à prendre

$$\mathcal{F}(s) = (48\sqrt{3})^2 \frac{i}{\sqrt{1+14s^4+s^8}}.$$

Ces deux surfaces ont été étudiées par M. Schwarz; l'une d'elles est la surface découverte par Riemann qui contient les quatre arêtes d'un tétraèdre régulier.

Il nous reste à obtenir les deux surfaces fournies par le triangle d'angles $\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$. L'application de ce triangle sur le demi-plan positif des $t$ s'obtient en posant

$$H_1(s) = \frac{(8t^2+20t-1)^2}{-64t(1-t)^3};$$

on verra plus loin comment on est conduit à cette formule, à propos de l'icosaèdre. On a d'ailleurs

$$u = \int \frac{dt}{t^{\frac{1}{2}}(1-t)^{\frac{3}{4}}},$$

et l'on en tire $\mathcal{F}(s)$. Cette surface et la surface adjointe ont été étudiées par M. Neovius (Helsingfors, 1883).

Les quatre surfaces précédentes jouissent d'une propriété intéressante. Dans une portion limitée de l'espace, il ne passe qu'un nombre fini de répétitions symétriques de la portion primitive. Ce sont, de plus, comme l'a montré M. Schwarz, les seules surfaces minima obtenues par ce procédé jouissant de la même propriété.

20. Nous allons maintenant nous occuper de la détermination des surfaces minima de cette espèce dans le cas de l'icosaèdre. On a à considérer tous les triangles sphériques dont les côtés sont situés dans les plans de symétrie d'un icosaèdre régulier et dont deux angles au moins sont aigus. Ces triangles sont au nombre de quinze; en désignant par

$\lambda\pi$, $\mu\pi$, $\nu\pi$ les angles, on a pour $\lambda$, $\mu$, $\nu$ les quinze systèmes de valeurs ci-dessous :

| | (I). | (II). | (III). | (IV). | (V). | (VI). | (VII). | (VIII). | (IX). | (X). | (XI). | (XII). | (XIII). | (XIV). | (XV). |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lambda$ ...... | $\frac{1}{2}$ | $\frac{2}{5}$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{2}{5}$ | $\frac{4}{5}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{2}{5}$ | $\frac{3}{5}$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{2}{5}$ |
| $\mu$ ...... | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{2}{5}$ | $\frac{2}{5}$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{2}{5}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{2}{5}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{2}{5}$ | $\frac{4}{5}$ | $\frac{2}{5}$ | $\frac{1}{3}$ |
| $\nu$ ...... | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{2}{5}$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{4}{5}$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{3}{5}$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{4}{5}$ |

Tous ces triangles ne fournissent pas des surfaces minima distinctes les unes des autres. Ainsi la même fonction donne l'*Abbildung* des trois triangles (I), (II), (III) sur un triangle rectangle isoscèle. Ces trois triangles donnent naissance, par conséquent, à deux surfaces seulement, qui sont adjointes. Il en est de même pour les trois triangles (IV), (V), (VI) et pour les trois triangles (VII), (VIII), (IX). Nous n'avons donc qu'à nous occuper des neuf triangles (I), (IV), (VII), (X), (XI), (XII), (XIII), (XIV), (XV).

Posons, comme plus haut,

$$u = \int_0^t \frac{dt}{t^{\frac{1}{2}}(1-t)^{\frac{3}{4}}};$$

tout revient à appliquer conformément les neuf triangles précédents sur le demi-plan positif des $t$, de façon que les trois sommets correspondent respectivement aux points $0$, $1$, $\infty$, et que le sommet de l'angle droit ou obtus, s'il y en a un, corresponde toujours au point $t = 0$.

L'*Abbildung* du triangle (I) sur ce demi-plan s'obtient immédiatement en posant

$$1 - t = H_2(s) = \frac{12^3 . A^5}{B^3},$$

A et B ayant les valeurs données au n° 11.

Remplaçons $t$ par cette valeur : on trouve, pour la fonction de Weierstrass, abstraction faite d'un facteur réel constant,

$$\mathcal{F}(s) = \sqrt{\frac{A}{B}}.$$

Pour les autres triangles, je m'appuierai sur une proposition importante due à M. Klein; la fonction analytique permettant d'effectuer l'*Abbil-*

*dung* d'un triangle sphérique de l'icosaèdre sur un demi-plan est donnée par une relation de la forme

$$H_2(s) = R(t),$$

$R(t)$ désignant une fonction rationnelle de $t$. La détermination de cette fonction rationnelle, quand on se donne les angles du triangle sphérique, est un problème d'Algèbre que l'on peut considérer aujourd'hui comme complètement résolu [1]. Je rappellerai en quelques mots comment il se ramène à la recherche d'une intégrale rationnelle de l'équation de Kummer.

Posons, pour abréger,

$$[s]_x = \frac{\dfrac{d^3 s}{dx^3}}{\dfrac{ds}{dx}} - \frac{3}{2}\left(\frac{\dfrac{d^2 s}{dx^2}}{\dfrac{ds}{dx}}\right)^2;$$

si la fonction $s$ de $t$ définie par l'équation $H_2(s) = R(t)$ donne l'*Abbildung* du triangle sphérique d'angles $\lambda\pi$, $\mu\pi$, $\nu\pi$ sur le demi-plan positif des $t$, la fonction $s$ est une intégrale de l'équation

$$[s]_t = \frac{1 - \lambda^2 + (\lambda^2 + \mu^2 - \nu^2 - 1)t + (1 - \mu^2)t^2}{2t^2(1-t)^2}.$$

D'autre part, la fonction $s$ définie par l'équation $u = H_2(s)$ est une intégrale de l'équation

$$[s]_u = \frac{1 - \frac{1}{4} + (\frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{25} - 1)u + (1 - \frac{1}{9})u^2}{2u^2(1-u)^2}.$$

Il en résulte que la fonction rationnelle $u = R(t)$ doit être une intégrale de l'équation de Kummer

$$[u]_t + \frac{1 - \frac{1}{4} + (\frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{25} - 1)u + (1 - \frac{1}{9})u^2}{2u^2(1-u)^2}\left(\frac{du}{dt}\right)^2$$
$$= \frac{1 - \lambda^2 + (\lambda^2 + \mu^2 - \nu^2 - 1)t + (1 - \mu^2)t^2}{2t^2(1-t)^2}.$$

---

(1) *Voir* mon Mémoire : *Sur les intégrales rationnelles de l'équation de Kummer* (*Mathematische Annalen*, Bd. XXIV, 1884). — *Recherches sur l'équation de Kummer* (*Acta Societatis Scientiarum Fennicæ*, t. XV, 1885). — OTTO FISCHER, *Conforme Abbildung sphärischer Dreicke auf einander mittelst algebraischer Functionen*, Leipzig, 1885.

La recherche de cette intégrale rationnelle se ramène elle-même à la recherche d'une identité algébrique de la forme

$$\pi_1 P^2 - \pi_2 Q^3 = \pi_3 S^5,$$

P, Q, S désignant trois polynômes sans facteurs communs, ni facteurs multiples, et $\pi_1$, $\pi_2$, $\pi_3$ trois facteurs de la forme $t^r(1-t)^s$. Ces trois facteurs $\pi_1$, $\pi_2$, $\pi_3$ se déterminent immédiatement, connaissant $\lambda$, $\mu$, $\nu$ (*voir* le travail déjà cité publié dans le Tome XXIV des *Mathematische Annalen*, p. 448 et suiv.). Les lettres D, N, N', N'', $m'$, $n'$, $p'$ ayant le même sens que dans ce travail, on aura

$$D = N + 2m' = N' + 3n' = N'' + 5p',$$
$$N + N' + n' = 2p' + 2.$$

On en tire

$$\begin{aligned} m' &= 7N + 5N' + 3N'' - 15, \\ n' &= 5N + 3N' + 2N'' - 10, \\ p' &= 3N + 2N' + N'' - 6, \\ D &= 15N + 10N' + 6N'' - 30, \end{aligned}$$

et l'on a tous les éléments nécessaires pour calculer les trois polynômes P, Q, S.

Dans les cas particuliers qui nous occupent, la plupart des fonctions rationnelles correspondantes sont déjà connues. Ainsi, pour le triangle IV, on aura

$$R(t) = \frac{27t^2(1-t)}{(3t-4)^3};$$

pour le triangle X, on aura

$$R(t) = \frac{(8t^2 - 36t + 27)^2}{64t^3(t-1)}.$$

Pour le triangle XI, la fonction $R(t)$ se déduira de l'identité (¹)

$$3^3.t(t-1)^2(3t-2^7)^3 + 4(9t+2^4)^5 = (3^3.t^3 + 3^3.97t^2 - 2^6.3^2.19t + 2^{11})^2.$$

La fonction correspondant au triangle XII se déduit de l'identité

(¹) *Recherches sur l'équation de Kummer*, p. 59, formule (33). — BRIOSCHI, *Annali di Matematica*, 2ᵉ série, t. X, p. 121.

suivante obtenue par M. Cayley (*Mathematische Annalen*, Bd. XVII, p. 66)

$$\begin{aligned}&2^2 t(3^6 t^3 - 3^3.5^2 t^2 + 5^3.23 t - 5^4)^3 - 5^5(t-1)^3(3^3 t + 5)^5 \\ &\quad = (2.3^9 t^5 - 3^7.5^2 t^4 - 2^5.3^4.5^3 t^3 + 2.5^4.11.17 t^2 - 2.5^5.19 t^2 + 5^5)^2,\end{aligned}$$

qui est identique à la formule 58 *bis* (p. 60) du Mémoire déjà cité (*Recherches sur l'équation de Kummer*).

Les fonctions rationnelles correspondant aux triangles XIII et XIV se déduisent de même des formules (57) et (39) du même Mémoire (p. 57 et 60). Pour le triangle VII, on pourrait partir de l'identité 46 (p. 59) de ce Mémoire, mais on obtient une formule plus simple en appliquant ce triangle non plus sur un demi-plan, mais sur le triangle élémentaire lui-même, d'angles $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{5}$. Soient $z$ et $\eta$ deux variables imaginaires; la relation

$$z = \frac{\eta^7 - 7\eta^2}{7\eta^5 + 1}$$

fournit l'*Abbildung* du triangle sur le triangle VII (¹).

Il ne nous reste plus que le triangle XV. On aura à prendre dans les formules précédentes

$$N = 0, \qquad N' = 1, \qquad N'' = 6.$$

On en déduit

$$m' = 8, \qquad n' = 5, \qquad p' = 2, \qquad D = 16,$$

et l'on aura à rechercher une identité de la forme

$$P^2 - Q^3 = t^2(t-1)^4 S^5,$$

P, Q, S étant respectivement du huitième, du cinquième et du second degré.

*Remarque.* — Si les trois angles du triangle sphérique sont aigus, on peut faire l'application de trois manières différentes en faisant correspondre le sommet de l'angle droit à chacun des sommets du triangle sphérique successivement. Une fois le triangle sphérique appliqué sur

---

(¹) FISCHER, *Conforme Abbildung*, etc., p. 63 et 68.

le demi-plan, une substitution linéaire permettra de faire coïncider les points qui figurent les sommets du triangle avec les points o, 1, $\infty$ dans tel ordre que l'on voudra.

21. Extension a la double pyramide. — Il paraît assez difficile, même dans les cas les plus simples, de construire les surfaces minima algébriques qui admettent la symétrie d'un polyèdre régulier. Il serait peut-être intéressant d'étudier d'abord les surfaces minima admettant tous les plans de symétrie d'une double pyramide. Les résultats qui ont été obtenus pour un polyèdre régulier s'étendent bien aisément à la double pyramide et je ne les reprendrai pas en détail. J'indiquerai seulement le résultat suivant, qui correspond au cas de symétrie le plus simple.

On obtient une surface minima admettant tous les plans de symétrie d'une double pyramide ayant pour base un polygone régulier de $m$ côtés en prenant pour $F(s)$ dans les formules (15) une fonction de la forme

$$F(s) = \frac{1}{G'(s)}\Psi[G(s)],$$

$\Psi$ désignant une fonction réelle et $G(s)$ ayant la valeur suivante :

$$G(s) = \frac{s^{2m}+1}{s^m}.$$

Pour avoir une surface admettant les plans de symétrie d'une simple pyramide régulière, on pourra prendre de même

$$F(s) = \frac{1}{s^{m-1}}\Psi(s^m),$$

$\Psi$ désignant une fonction réelle.

*Remarque.* — J'aurais pu arriver aux équations des surfaces minima algébriques, qui ont la symétrie d'un polyèdre régulier, par d'autres procédés. Ainsi, considérons une surface minima quelconque S et un tétraèdre régulier. Prenons les vingt-quatre répétitions de S par la loi de symétrie. L'ensemble de ces vingt-quatre surfaces minima admet évidemment la symétrie du tétraèdre. Il en sera donc de même de la surface *résultante* (¹) qui se décomposera, en général, en plusieurs surfaces minima distinctes admettant séparément tous les plans de symétrie du tétraèdre. Mais ce procédé, outre qu'il se prête difficilement à la recherche des équations générales, devient très compliqué pour faire la distinction des différentes espèces de symétrie. On est amené à distinguer plusieurs espèces de surfaces résultantes. Ainsi, étant données deux surfaces minima *non doubles,* la surface résultante se décompose en deux surfaces minima analytiquement distinctes. Je ne fais que signaler ces propriétés, dont je n'ai pas voulu me servir dans ce qui précède, pour ne pas compliquer l'exposition.

---

(¹) Étant données plusieurs surfaces S, S′, S″, ..., on considère les points $m$, $m'$, $m''$, ..., où les plans tangents sont parallèles et la résultante géométrique OM des droites $om$, $om'$, $om''$, .... Le lieu du point M est une surface qui est dite la résultante des premières.