ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

G. DEMARTRES

Mémoire sur les surfaces qui sont divisées en carrés par une suite de cercles et leurs trajectoires orthogonales

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 4 (1887), p. 145-158
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1887_3_4__145_0>

MÉMOIRE

SUR LES

SURFACES QUI SONT DIVISÉES EN CARRÉS

PAR UNE SUITE DE CERCLES ET LEURS TRAJECTOIRES ORTHOGONALES,

PAR M. G. DEMARTRES.

PREMIÈRE PARTIE.

1. On sait combien il est utile de connaître, sur une surface donnée, un double système de courbes divisant cette surface en carrés infiniment petits; il est malheureusement fort rare qu'on puisse obtenir d'une manière effective un tel système de courbes coordonnées; aussi pensons-nous qu'on trouvera quelque intérêt à la solution, que nous allons exposer, du problème suivant :

Trouver toutes les surfaces réelles qui sont divisées en carrés par une suite de cercles et leurs trajectoires orthogonales.

Dans un Mémoire antérieur [1], nous avons indiqué une méthode pour mettre le problème en équations et résolu la question dans deux cas particuliers, assez étendus, il est vrai, pour comporter l'un et l'autre une fonction arbitraire; c'est la même méthode que nous suivrons ici, mais en abordant le problème dans toute sa généralité.

Nous désignerons pour abréger, sous le nom de *surface isocyclique*, toute surface admettant une telle suite de cercles isothermes.

---

[1] *Sur les surfaces à génératrices circulaires* (*Annales de l'École Normale*, p. 173; 1885).

2. Dans cette première Partie, nous rappellerons succinctement quelques-uns des résultats obtenus dans le Mémoire cité plus haut et nous montrerons comment le problème se ramène à l'intégration de cinq équations différentielles du premier ordre; dans la seconde, nous commencerons cette intégration en établissant que les surfaces isocycliques sont des anallagmatiques à déférente réglée; dans la troisième et dernière Partie, nous la compléterons en montrant que la focale, intersection de la directrice et de la déférente, doit être une ligne asymptotique de cette dernière; nous obtiendrons en même temps, pour chaque surface isocyclique, un facteur rendant intégrable l'équation des lignes de distance nulle, ce qui permet, comme on sait, d'obtenir tous les réseaux isométriques ([1]).

3. Soient

l le paramètre dont dépendent les équations du cercle variable;
R son rayon;
O son centre;
Oz son axe;
Ox, Oy deux diamètres rectangulaires, liés invariablement à son plan.

Lorsqu'on passe d'une génératrice circulaire (l) à la génératrice infiniment voisine $(l + dl)$, le centre O prend un certain déplacement, dont les projections sur Ox, Oy, Oz sont désignées par $u\,dl$, $v\,dl$, $w\,dl$; en même temps, le trièdre Oxyz subit une rotation dont nous appelons $p\,dl$, $q\,dl$, $r\,dl$ les composantes autour de ces mêmes axes. Enfin, un point quelconque M du cercle (l) est défini par l'angle φ que fait le rayon OM avec Ox, les deux variables l et φ constituant notre système de coordonnées.

Si x, y, z sont les coordonnées relatives d'un point quelconque, fonctions de l et φ, on aura, en désignant par d une différentielle totale et par δ les projections du déplacement absolu de ce point,

$$(1)\qquad \begin{cases} \delta x = dx + (u + qz - ry)\,dl, \\ \delta y = dy + (v + rx - pz)\,dl, \\ \delta z = dz + (w + py - qx)\,dl; \end{cases}$$

([1]) Liouville. Note III à la suite de l'Analyse de Monge.

de même, A, B, C étant les cosinus directeurs d'une droite quelconque, suivant les mêmes axes,

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} \delta A &= dA + (qC - rB)\,dl,\\ \delta B &= dB + (rA - pC)\,dl,\\ \delta C &= dC + (pB - qA)\,dl. \end{aligned}\right.$$

Appliquons les formules (1) au point $x = R\cos\varphi$, $y = R\sin\varphi$, $z = 0$, et posons

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} M &= R' + u\cos\varphi + v\sin\varphi \quad (^1),\\ N &= rR + v\cos\varphi - u\sin\varphi,\\ Q &= w + pR\sin\varphi - qR\cos\varphi = w + pR\sin\varphi - qR\cos\varphi,\\ H^2 &= M^2 + Q^2; \end{aligned}\right.$$

nous aurons alors

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} \delta x &= M\cos\varphi\,dl - (N\,dl + R\,d\varphi)\sin\varphi,\\ \delta y &= M\sin\varphi\,dl + (N\,dl + R\,d\varphi)\cos\varphi,\\ \delta z &= Q\,dl. \end{aligned}\right.$$

La distance de deux points infiniment voisins δs sera donnée par la formule

$$(5)\qquad \delta s^2 = H^2\,dl^2 + (N\,dl + R\,d\varphi)^2,$$

et l'équation des trajectoires orthogonales des génératrices circulaires sera

$$(6)\qquad N\,dl + R\,d\varphi = 0.$$

Cette équation est réductible à une équation de Riccati et conduit, comme nous l'avons fait voir (*loc. cit.*, p. 149), à des conséquences intéressantes.

4. Pour que la surface soit isocyclique, il faut et il suffit que l'équation (6) admette un facteur d'intégrabilité de la forme $\frac{F(l)}{H}$; on voit

---

(1) Ici et dans la suite, un accent désigne une dérivée prise par rapport à l.

d'ailleurs immédiatement que, si l'on peut obtenir ce facteur, $\frac{F}{H}(1+\sqrt{-1})$ sera un facteur d'intégrabilité de l'équation

$$\sqrt{-1}\,H\,dl + N\,dl + R\,d\varphi = 0,$$

qui convient aux lignes de distance nulle; le problème sera donc complètement résolu.

Tout se réduit alors à trouver une fonction de l, $F(l)$, telle qu'on ait, quel que soit φ,

$$\frac{\partial\left(\frac{FH}{N}\right)}{\partial\varphi} = \frac{\partial\left(\frac{RH}{N}\right)}{\partial l}$$

ou, en développant et posant

$$f = R' + R\frac{F'}{F} \quad (^1), \tag{7}$$

$$H\frac{\partial N}{\partial\varphi} - N\frac{\partial H}{\partial\varphi} = fH - R\frac{\partial H}{\partial l}$$

ou, en multipliant par H et tenant compte de la relation $H^2 = M^2 + Q^2$,

$$M\left(M\frac{\partial N}{\partial\varphi} - N\frac{\partial M}{\partial\varphi} + R\frac{\partial M}{\partial l} - fM\right) + Q\left(Q\frac{\partial N}{\partial\varphi} - N\frac{\partial Q}{\partial\varphi} + R\frac{\partial Q}{\partial l} - fQ\right) = 0.$$

Or, si l'on remplace MN par leurs expressions (3), les deux parenthèses se réduisent à des fonctions linéaires de $\sin\varphi$, $\cos\varphi$; en effectuant cette réduction et posant

$$\left\{\begin{aligned} T = {} & (Ru' - rRv - R'u - fu)\cos\varphi \\ & + (rRu + rRv' - R'v - fv)\sin\varphi + RR'' - u^2 - v^2 - fR', \\ S = {} & (fqR - q'R^2 - qRR' - wu - prR^2)\cos\varphi \\ & + (p'R^2 + pRR' - qrR^2 - wv - fpR)\sin\varphi + Rw' - pvR + quR - fw, \end{aligned}\right. \tag{8}$$

l'équation précédente se réduit à

$$MT + SQ = 0. \tag{9}$$

---

(1) Il est évident que, f et R une fois connus, la fonction F s'obtiendra par une quadrature.

En la développant, on aurait une équation de la forme

$$a\cos^2\varphi + 2b\sin\varphi\cos\varphi + c\sin^2\varphi + 2d\cos\varphi + 2g\sin\varphi + h = 0$$

et, en écrivant qu'elle a lieu, quel que soit φ,

$$a + h = b = d = g = a - c = 0,$$

ce qui donne un système de cinq équations différentielles du premier ordre entre les fonctions u, v, w, p, q, r, R.

Nous ne développerons pas ces équations dont les intégrales peuvent s'obtenir par des considérations géométriques.

DEUXIÈME PARTIE.

1. Rappelons d'abord quelques-uns des résultats obtenus dans le Mémoire déjà cité.

La caractéristique du plan du cercle et l'axe radical de deux cercles infiniment voisins ont respectivement pour équations

$$w + py - qx = 0, \qquad RR' + ux + vy = 0.$$

Leur point d'intersection P est le centre radical des deux génératrices : c'est le centre d'une sphère orthogonale à toutes les sphères qu'on peut mener par le cercle (l) et qui sont tangentes à la surface en deux points de ce cercle; lorsque P est fixe dans l'espace, le rayon de cette sphère orthogonale devient constant, et la surface devient une anallagmatique ayant pour déférente la surface formée par les axes des génératrices circulaires.

Si les deux droites précédentes se confondent, la surface est une enveloppe de sphères; le problème qui nous occupe a été résolu dans ce cas particulier (*loc. cit.*, p. 176); en se reportant à la solution que nous avons donnée, on reconnaît sans peine que les théorèmes énoncés au début du présent Mémoire se vérifient dans ce cas particulier, que nous pourrons dès lors laisser de côté.

Si l'axe radical et la caractéristique se coupent sur le cercle, chaque génératrice a un point commun P avec la génératrice infiniment voisine; les surfaces qui présentent ce caractère forment une classe intermédiaire entre les enveloppes de sphères et le cas général où deux cercles voisins n'ont aucun point commun.

Ceci posé, nous écrirons les équations du problème, d'abord pour les surfaces intermédiaires, puis dans le cas général.

2. *Surfaces intermédiaires*. — L'axe des x étant indéterminé dans le plan du cercle, faisons-le passer par le point P dont les coordonnées sont $x = \mathrm{R}$, $y = 0$, $z = 0$; nous aurons

$$w - q\mathrm{R} = 0, \qquad u + \mathrm{R}' = 0.$$

Les fonctions M, Q, envisagées comme fonctions homogènes de $\sin\frac{\varphi}{2}$, $\cos\frac{\varphi}{2}$, ont alors en commun le facteur $2\sin\frac{\varphi}{2}$; si nous remplaçons w et u par $q\mathrm{R}$, $-\mathrm{R}'$ dans les expressions (3) et (8), il vient

$$\begin{aligned}
\mathrm{M} &= 2\sin\frac{\varphi}{2}\left(v\cos\frac{\varphi}{2} + \mathrm{R}'\sin\frac{\varphi}{2}\right),\\
\mathrm{Q} &= 2\sin\frac{\varphi}{2}\left(p\mathrm{R}\cos\frac{\varphi}{2} + q\mathrm{R}\sin\frac{\varphi}{2}\right),\\
\mathrm{T} &= (-\mathrm{RR}' - r\mathrm{R}v + \mathrm{R}'^2 + f\mathrm{R}')\cos\varphi\\
&\quad + (\mathrm{R}v' - \mathrm{R}'v - r\mathrm{RR}' - fv)\sin\varphi + \mathrm{RR}'' - \mathrm{R}'^2 - v^2 - f\mathrm{R}',\\
\mathrm{S} &= (fq\mathrm{R} - q'\mathrm{R}^2 - rp\mathrm{R}^2)\cos\varphi\\
&\quad + (p'\mathrm{R}^2 + \mathrm{RR}'p - qr\mathrm{R}^2 - wv - fp\mathrm{R})\sin\varphi + q'\mathrm{R}^2 - pv\mathrm{R} - fq\mathrm{R}.
\end{aligned}$$

L'identité (9) étant débarrassée du facteur $2\sin\frac{\varphi}{2}$, faisons $\varphi = 0$; nous aurons

$$v(-r\mathrm{R}v - v^2) + p\mathrm{R}(-rp\mathrm{R}^2 - pv\mathrm{R}) = 0$$

ou

$$(v^2 + p^2\mathrm{R}^2)(v + r\mathrm{R}) = 0.$$

Nous ne nous occupons ici que des surfaces à génératrices réelles; en annulant le premier facteur, nous devons donc poser $p = 0$, $v = 0$, mais alors M et Q se réduisent respectivement à $2\mathrm{R}'\sin^2\frac{\varphi}{2}$, $2q\mathrm{R}\sin^2\frac{\varphi}{2}$; l'axe radical et la caractéristique se confondent, et l'on retombe dans le cas des enveloppes de sphères.

Nous devrons donc poser $v + r\mathrm{R} = 0$; en transportant $v = -r\mathrm{R}$ dans les expressions générales de T, S, ces expressions sont également divisibles par $2\sin\frac{\varphi}{2}$. L'équation (9) prend alors la forme

$$M_1T_1+Q_1S_1=0,$$

M_1, T_1, Q_1, S_1 étant des fonctions linéaires de $\sin\frac{\varphi}{2}$, $\cos\frac{\varphi}{2}$; comme M_1 et Q_1 ne doivent plus avoir de facteurs communs, il doit exister une fonction g de l, telle qu'on ait identiquement

$$T_1=gQ_1,\qquad S_1=-gM_1.$$

Développons ces identités : nous aurons en résumé, pour les surfaces intermédiaires, le système suivant d'équations, où f et g sont des fonctions indéterminées de l,

$$(10)\qquad\left\{\begin{array}{l} u=-R',\qquad v=-rR,\qquad w=qR;\\ fR'+gqR-RR''+R'^2+r^2R^2=0,\\ frR-gpR-R^2r'-RR'r=0,\\ fqR-gR'-q'R^2-prR^2=0,\\ fpR+grR+p'R^2+pRR'=0.\end{array}\right.$$

Il serait aisé d'obtenir une combinaison intégrable de ces équations; mais nous pouvons nous en dispenser, comme on le verra plus loin.

3. *Cas général.* — Les fonctions M, Q n'ont aucun facteur communs : alors M doit diviser S et Q diviser T; en d'autres termes, il doit exister une fonction λ de l, telle qu'on ait identiquement

$$T=\lambda Q,\qquad S=-\lambda M.$$

Ces deux identités développées donnent immédiatement les équations cherchées, savoir

$$(11)\qquad\left\{\begin{array}{ll} fu+\lambda qR-Ru'+rRv+R'u=0, & fqR-\lambda u-q'R^2-qRR'-wu-prR^2=0,\\ fv-\lambda pR-rRu+R'v-Rv'=0, & fpR+\lambda v+qrR^2-p'R^2-pRR'-wv=0,\\ fR'-\lambda w-RR''+u^2+v^2=0, & fw+\lambda R'+vpR-Rw'-qRu=0.\end{array}\right.$$

L'axe des x étant indéterminé, faisons-le passer par le point P; en écrivant que l'axe radical et la caractéristique se coupent sur OX, nous aurons, en désignant par α l'abscisse de ce point P,

$$(12)\qquad \begin{cases} RR' + u\alpha = 0, \\ w - q\alpha = 0, \\ wu + qRR' = 0. \end{cases}$$

Si le point P est à l'infini, on aura $q = 0$, $u = 0$. Simplifions d'abord les équations (11) dans ce cas particulier, la première et la quatrième se réduisant à

$$rv = 0, \qquad pr = 0.$$

Si $r \neq 0$, on aura $p = 0$, $v = 0$; alors l'axe radical et la caractéristique seront l'un et l'autre rejetés à l'infini, et la surface sera de révolution, c'est-à-dire un cas particulier d'enveloppes de sphères. On devra donc supposer $r = 0$, ce qui réduit le système (11) aux équations suivantes :

$$(13)\qquad \begin{cases} q = 0, \qquad r = 0, \qquad u = 0; \\ fv - \lambda pR + R'v - Rv' = 0, \qquad fpR + \lambda v - p'R^2 - pRR' - wv = 0, \\ fR' - \lambda w - RR'' + v^2 = 0, \qquad fw + \lambda R' + vpR - Rw' = 0. \end{cases}$$

4. Supposons maintenant que α soit fini; revenons aux équations (11), ajoutons la première et la troisième, multipliées respectivement par R' et $-u$, et de même la quatrième et la sixième, multipliées par $-w$, qR : f s'élimine et λ disparaît de chacune de ces combinaisons, à cause de l'égalité $wu + qRR' = 0$, et l'on a, en simplifiant,

$$-RR'u' + rRR'v + uR'^2 + uRR'' - u^3 - uv^2 = 0,$$
$$wq'R^2 + wqRR' + w^2u + wprR^2 + vpqR^2 - w'qR^2 - uq^2R^2 = 0$$

ou, en y remplaçant RR' par $-u\alpha$, w par $q\alpha$,

$$(14)\qquad \begin{cases} u[v(r\alpha + v) + u(u + \alpha'')] = 0, \\ q[p(v + r\alpha) - q(u + \alpha')] = 0. \end{cases}$$

Il y a ici plusieurs cas à distinguer :

1° $u = 0$, $q \neq 0$. — On a d'abord $R' = 0$, puisque α est fini (12); la première et la troisième équation (11) donnent alors

$$\lambda q + rv = 0, \qquad -\lambda w + v^2 = 0$$

d'où, en éliminant λ,

$$wrv - qv^2 = qv(v + r\alpha) = 0.$$

Or $q \neq 0$; si $v = 0$, comme on a déjà $u = 0$, l'axe radical est indéterminé et la surface est un canal, c'est-à-dire un cas particulier d'enveloppes de sphères, que nous devons laisser de côté. Nous aurons donc simplement $v + r\alpha = 0$ et, en tenant compte de la dernière équation (14), $u + \alpha' = 0$.

2° $u = 0$, $q = 0$. — Alors $w = 0$ (12); la quatrième et la sixième équation (11) deviennent

$$+\lambda + pr\mathrm{R} = 0, \qquad \lambda\mathrm{R}' + vp\mathrm{R} = 0$$

ou

$$-pr\mathrm{R}\mathrm{R}' + vp\mathrm{R} = p\mathrm{R}(v + \alpha r) = 0;$$

mais p ne peut être nul, car la caractéristique et l'axe radical sont parallèles toutes les fois qu'on a $pu + qv = 0$; on devra donc avoir $v + r\alpha = 0$ et, par suite, à cause de la première équation (14), $u + \alpha' = 0$.

3° $u \neq 0$, $q \neq 0$. — Comme le facteur $up + vq$ ne peut être nul dans le cas actuel, nous aurons encore ici

$$u + \alpha' = 0, \qquad v + r\alpha = 0,$$

et ces deux équations remplacent dans tous les cas les équations (14).

Ceci posé, si nous remplaçons dans (11) u, v, w par $-\alpha'$, $-r\alpha$, $+q\alpha$, ces équations se réduisent à quatre; il est clair qu'on peut supprimer la troisième et la sixième d'après la marche que nous avons suivie. On obtient alors les équations définitives qui conviennent au cas général

$$(15)\quad \left\{\begin{aligned}
&u = -\alpha', \qquad v = -r\alpha, \qquad w = q\alpha,\\
&f\alpha' - \lambda q\mathrm{R} - \mathrm{R}\alpha'' + r^2\mathrm{R}\alpha + \mathrm{R}'\alpha' = 0,\\
&-fq\mathrm{R} - \lambda\alpha' + \mathrm{R}^2 q' + \mathrm{R}\mathrm{R}' q - q\alpha\alpha' + pr\mathrm{R}^2 = 0,\\
&fr\alpha + \lambda p\mathrm{R} - 2r\mathrm{R}\alpha' + \mathrm{R}' r\alpha - \mathrm{R}\alpha r' = 0,\\
&fpr - \lambda r\alpha + qr\mathrm{R}^2 - p'\mathrm{R}^2 - p\mathrm{R}\mathrm{R}' - qr\alpha^2 = 0.
\end{aligned}\right.$$

5. Il s'agit maintenant d'intégrer séparément les systèmes (10), (13), (15).

1° *Surfaces intermédiaires.* — Si l'on considère le point P, $x = \mathrm{R}$,

$y = 0$, $z = 0$; les équations générales (1) donnent, pour son déplacement,

$$\delta x = (R' + u)\,dl, \qquad \delta y = (v + rR)\,dl, \qquad \delta z = (w - qR)\,dl;$$

donc les trois premières équations équivalent à $\delta x = \delta y = \delta z = 0$. Le point P est fixe, la surface est anallagmatique. Toutes les génératrices circulaires passent par ce point fixe, qui est en même temps une sphère de rayon nul, orthogonale à toutes les sphères bitangentes.

2° *Équations* (13). — Ici le point P est à l'infini; les conditions $q = r = 0$ montrent que le plan du cercle est parallèle à une direction fixe, celle de l'axe Ox; en même temps, $u = 0$ exprime que le déplacement du centre s'effectue perpendiculairement à cette direction. On en conclut immédiatement que le cercle mobile a son centre dans un plan fixe k, son plan perpendiculaire au plan (k), qui est, par suite, orthogonal à toutes les sphères bitangentes. La surface est donc anallagmatique, la directrice ayant un rayon infini.

3° *Cas général.* — Le déplacement du point $x = \alpha$, $y = 0$, $z = 0$ étant donné par les formules

$$\delta x = (u + \alpha')\,dl, \qquad \delta y = (v + r\alpha)\,dl, \qquad \delta z = (w - q\alpha)\,dl,$$

les trois premières équations (15) expriment que ce point est fixe; on déduit d'ailleurs de ces mêmes équations et des équations (12) $\alpha\alpha' - RR' = 0$; d'où, en intégrant,

$$\alpha^2 - R^2 = h^2, \tag{16}$$

h étant une constante égale au rayon de la directrice; la surface est donc, dans tous les cas, une anallagmatique à déférente réglée. Nous allons achever l'intégration.

TROISIÈME PARTIE.

1. Si l'on considère un des trois systèmes (10), (13), (15), il ne reste plus que les fonctions inconnues p, q, r, R [ou α, en tenant compte de la relation (16)]. Nous commencerons par établir que, bien

que chacun de ces systèmes ait été établi à l'exclusion des deux autres, ils sont tous les trois renfermés complètement dans le dernier (15).

D'abord, si nous faisons $h = 0$, $\alpha = R$ dans les équations (15), elles reproduiront immédiatement le système (10), où g serait remplacé par λ; nous pourrons donc nous dispenser de considérer à part les surfaces intermédiaires.

Supposons maintenant que h devienne infini, α étant lui-même infini à cause de l'équation générale $\alpha\alpha' - RR' = 0$; on devra faire en même temps $\alpha' = 0$. Introduisons dans les équations (15) ces deux hypothèses $\alpha = \infty$, $\alpha' = 0$; elles deviennent

$$\begin{gathered} u = 0, \qquad r = 0, \qquad q = 0, \\ fv - \lambda p R + R'v - Rv' = 0, \\ fR' - \lambda w - RR'' - v^2 = 0, \\ fpR + \lambda v - p'R^2 - pRR' - wv = 0, \\ fw + \lambda R' + vpR - Rw' = 0, \end{gathered}$$

ce qui reproduit le système (13). On pourra, d'après cela, considérer uniquement les équations (15) qui embrassent tous les cas possibles.

Nous laissons figurer dans ces équations R et α pour éviter les radicaux; mais il faut se souvenir qu'une seule de ces deux fonctions est inconnue.

2. Si nous prenons sur l'axe Oz un point coïncidant avec une des deux sphères de rayon nul qui passent par la génératrice, ses coordonnées seront $x = 0, y = 0, z = Ri\ (i = \sqrt{-1})$.

Le lieu de ce point imaginaire et de son conjugué constitue la focale dont nous avons parlé, intersection de la directrice et de la déférente ou surface des axes.

Si nous appliquons les formules générales (1) au déplacement de ce point, nous avons

$$(17) \qquad \left\{ \begin{aligned} \delta x &= \ \ (-\alpha' + qRi)\,dl = A\,dl, \\ \delta y &= -(r\alpha + pRi)\,dl = B\,dl, \\ \delta z &= \ \ (q\alpha + R'i)\,dl \ = C\,dl. \end{aligned} \right.$$

Il convient d'introduire ces trois fonctions A, B, C dans les quatre dernières équations (15). On obtient immédiatement, à l'aide de la quatrième et de la cinquième,

$$(f - \lambda i)A = RA' - rRB - \alpha' i C; \tag{18}$$

les deux dernières donnent de même

$$(f - \lambda i)B = rRA + RB' - ir\alpha C; \tag{19}$$

observons qu'on a d'ailleurs

$$CR = -\alpha i A. \tag{20}$$

La variable l n'étant nullement fixée et pouvant être choisie réelle, si l'on élimine $f - \lambda i$ entre (18) et (19), on aura une équation unique, équivalente aux deux équations réelles qu'on aurait obtenues en éliminant f et λ entre les quatre dernières équations (15); on aura donc à considérer l'équation unique

$$RA'B - rRB^2 - \alpha' i CB = rRA^2 + RB'A - ir\alpha AC$$

ou, en remplaçant C par son expression (20),

$$A'B - B'A - r(A^2 + B^2) + C(pA + Bq) = 0,$$

qu'on peut écrire, en adoptant les notations des équations (2),

$$A\,\delta B - B\,\delta A = 0. \tag{21}$$

Telle est l'équation dans laquelle se condensent les quatre dernières des équations (15).

3. Revenons à la focale. Si nous posons

$$a = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \qquad b = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \qquad c = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

a, b, c seront les cosinus directeurs de la tangente à cette courbe; en désignant par $\frac{1}{G}$ le radical $\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$, on aura, d'après les équations générales (2),

$$a\,\delta b - b\,\delta a = a(B'G + BG' + rGA - pGC) - b(A'G + G'A + qGC - rGB),$$
$$a\,\delta b - b\,\delta a = A(B' + rA - pC) - B(A' + qC - zB) = A\,\delta B - b\,\delta A;$$

d'où l'on conclut que l'équation (21) peut s'écrire

$$a\,\delta b - b\,\delta a = 0.$$

D'autre part, les cosinus directeurs de la binormale à la focale sont évidemment proportionnels à

$$b\,\delta c - c\,\delta b, \quad c\,\delta a - a\,\delta c, \quad a\,\delta b - b\,\delta a;$$

donc, enfin, les conditions complémentaires cherchées sont toutes contenues dans ce fait géométrique que la binormale de la focale doit être perpendiculaire à Oz et, par suite, normale à la déférente. On est donc conduit à la solution suivante :

THÉORÈME. — *Les surfaces isocycliques sont les surfaces anallagmatiques ayant pour déférente une surface réglée, telle que la focale, intersection de la directrice et de la déférente, soit une ligne asymptotique de cette dernière.*

4. Ce théorème donne, en termes finis, les intégrales du problème proposé; il y subsiste une fonction arbitraire, et non pas deux, ainsi que nous l'avions dit, par erreur, dans une Note précédente (*Comptes rendus*, 24 janvier 1887). On traduit, en effet, la solution en Analyse de la manière suivante.

Ayant choisi une sphère directrice, on prendra pour focale une courbe imaginaire quelconque, tracée sur cette sphère; on peut toujours supposer les coordonnées de cette courbe exprimées en fonction d'une variable réelle l; l'équation du plan osculateur sera alors de la forme $P + Qi = 0$, P et Q étant à coefficients réels. Or l'axe du cercle, devant être réel et situé dans ce plan osculateur, devra coïncider avec la droite $P = 0$, $Q = 0$: il suffira d'éliminer l entre ces deux équations pour avoir celle de la déférente; dans cette dernière figureront la fonction arbitraire et ses dérivées des deux premiers ordres.

On a supposé le cercle réel, et la focale est alors nécessairement imaginaire; on peut lever cette restriction.

Supposons, en effet, le cercle mobile imaginaire; les équations (15) sont toujours celles du problème; mais la combinaison (21), qui en est encore une conséquence, ne suffit plus à en tenir lieu; on doit y joindre une seconde combinaison de ces mêmes équations (15); si l'on pose

$$A_1 = -\alpha' - qRi, \qquad B_1 = -r\alpha + pRi, \qquad C_1 = q\alpha - R'i,$$

on trouve très aisément une nouvelle combinaison indépendante de f et λ, savoir

$$A_1\,\partial B_1 - B_1\,\partial A_1 = 0.$$

Cette condition s'interprète absolument comme la condition (21); elle a un sens géométrique identique, mais s'applique au point dont les coordonnées relatives sont $x = 0$, $y = 0$, $z = -Ri$, c'est-à-dire au second foyer; donc l'axe de la déférente devra être, *en chacun des deux foyers*, perpendiculaire à la binormale de la focale; celle-ci peut d'ailleurs être imaginaire ou réelle, suivant les cas.