ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

G. ROBIN

Sur la distribution de l'électricité à la surface des conducteurs fermés des conducteurs ouverts

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 3 (1886), p. 3-58 (supplément)

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1886_3_3__S3_0>

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1886, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (http://www.elsevier.com/locate/ansens) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

SUR LA

DISTRIBUTION DE L'ÉLECTRICITÉ

A LA SURFACE

DES CONDUCTEURS FERMÉS ET DES CONDUCTEURS OUVERTS

PAR M. G. ROBIN.

CHARLEMAGNE

INTRODUCTION.

Dans son premier Mémoire sur la distribution de l'électricité [1], Poisson a posé, mais non résolu, le problème de l'équilibre électrique d'un sphéroïde conducteur. En écrivant que le potentiel est constant en tout point intérieur au sphéroïde, il arrive à une condition que l'on peut énoncer ainsi : si l'on divise la densité électrique en un point par la puissance $n - 1$ du rayon vecteur et qu'on développe le quotient en une série de fonctions de Laplace, la fonction d'ordre n doit manquer dans le développement. Cette condition détermine complètement la densité inconnue ; mais son expression explicite paraît présenter des obstacles qui ont fait reculer Poisson. « Il serait difficile, dit-il, de donner une solution générale de cette question », et il se restreint au cas des sphéroïdes infiniment peu différents de la sphère, c'est-à-dire à des surfaces ayant en tous leurs points une excentricité dont le carré est négligeable. Il trouve alors pour la densité une série de fonctions sphériques, qui se déduit par une loi très simple de la série de même nature qui représente le rayon vecteur.

J'ai repris dans ce travail la question de la distribution électrique sur

---

(1) *Mémoires de l'Institut* pour 1811.

un sphéroïde sensiblement différent de la sphère ; mais j'ai abordé le problème par une voie qui me semble nouvelle. Au fond, la méthode de Poisson revient, comme presque toutes les méthodes usitées dans la solution des questions d'équilibre électrique, à l'intégration de l'équation aux dérivées partielles, à *trois* variables indépendantes, $\Delta V = 0$. Celle que j'ai adoptée consiste dans l'intégration d'une équation fonctionnelle à *deux* variables indépendantes seulement. Cette équation fonctionnelle convient à tous les conducteurs fermés ; elle ne régit pas la classe infiniment plus étendue des conducteurs ouverts ; mais elle semble jouer dans certaines questions d'Électrostatique un rôle d'autant plus efficace que sa portée est plus limitée : c'est là une loi de compensation d'une application fréquente en Mathématiques.

Dans la solution du problème qui nous occupe, j'ai tenu compte de l'influence, négligée par Poisson, de masses électriques fixes. Ce point est capital ; car trouver l'équilibre électrique d'un conducteur soustrait à toute influence, c'est traiter un problème d'électrostatique très incomplet et parfois relativement très facile. On en peut juger par le cas bien connu de l'ellipsoïde. J'ai tenu à résoudre la question des sphéroïdes de forme quelconque pour donner une idée de l'énorme complication du problème général de la distribution électrique. Cette complication, quoique grande encore, se dissimule dans les solutions élégantes données pour des corps à forme simple, tels que l'ellipsoïde, le tore, les deux sphères, les sphères sécantes, la calotte sphérique, le lemniscatoïde de révolution [1]. On verra que la densité électrique sur un sphéroïde se présente sous la forme d'une série d'intégrales définies dont chacune, pour être évaluée, exige que l'on sache calculer la précédente ; il est vrai qu'à défaut d'une évaluation exacte, ces intégrales donnent prise successivement aux méthodes d'approximation indéfinie des quadratures mécaniques.

Mais, lors même qu'on saurait trouver la distribution de l'électricité sur tous les conducteurs fermés imaginables, on n'aurait fait que le premier pas dans la solution du problème général de l'Électrostatique. L'électricité en équilibre réside tout entière à la surface des corps conducteurs ; on peut donc supposer ces corps vidés, pour ainsi dire, de

---

[1] *Voir* le tome II des *Fonctions sphériques* de Heine.

leur substance intérieure et réduits à leur seule surface terminale. A ce point de vue, les conducteurs fermés, tels que la sphère, deviennent des cas infiniment particuliers des conducteurs ouverts, tels que la calotte sphérique. Une théorie générale de ces derniers ne semble pas avoir été donnée. Le cas n'est plus le même que celui des conducteurs ouverts. On ne peut pas identifier immédiatement le problème de la distribution électrique sur une surface ouverte avec le problème de Gauss : « Distribuer sur cette surface une couche dont le potentiel prenne en tous ses points une valeur donnée », parce que, cette couche étant trouvée, il faut la répartir entre les deux faces ; mais le départ se fait aisément : une fois le problème de Gauss résolu, on verra qu'une quadrature suffit pour achever la solution.

Une réduction considérable peut être effectuée dans le problème de la distribution de l'électricité sur les deux faces d'un conducteur ouvert : il est possible de ramener l'équilibre électrique de tous les conducteurs à contour multiple à celui des conducteurs à contour simple. Ainsi, que l'on imagine une sphère divisée en trois parties, une zone ou bande B et deux calottes C, C′. Si l'on connaît l'influence d'un point quelconque de la calotte C sur la calotte complémentaire $B + C'$, et celle d'un point quelconque de C′ sur $B + C$, on en pourra conclure la loi de la distribution électrique sur la zone B. La méthode qui m'a permis d'opérer cette réduction offre de l'analogie avec celle que Murphy a imaginée pour résoudre le problème de l'influence mutuelle des conducteurs. Mais cette idée des influences successives, qui se présente naturellement lorsqu'il s'agit de corps séparés, semble au premier abord inapplicable lorsqu'il s'agit de surfaces empiétant l'une sur l'autre, et l'on verra que, pour en tirer parti, j'ai dû la combiner avec d'autres idées assez complexes. L'inconvénient de cette méthode si générale réside dans les difficultés d'application. C'est cependant grâce à elle que j'ai réussi à calculer la distribution de l'électricité sur une zone sphérique conductrice, en prenant pour point de départ la solution si simple et si belle donnée par sir W. Thomson pour l'équilibre électrique de la calotte sphérique.

Je passe ici sous silence divers résultats plus ou moins dignes d'intérêt que l'on trouvera dans le cours de ce travail ; je me borne à faire observer que les méthodes dont j'ai fait usage peuvent trouver leur

application dans plus d'une branche de la Physique mathématique, en vertu de l'analogie ou de l'identité des équations aux dérivées partielles du second ordre qui régissent les divers ordres de phénomènes naturels. C'est ainsi que, dans ces dernières années, on a pu calculer les attractions apparentes de corps solides plongés dans un liquide par l'application pure et simple du principe de Murphy, transporté directement de l'Électrostatique à l'Hydrodynamique.

PREMIÈRE PARTIE.

LES CONDUCTEURS FERMÉS.

CHAPITRE I.

ÉQUATION FONCTIONNELLE CARACTÉRISTIQUE DES CONDUCTEURS FERMÉS.

Le problème le plus général de l'Électrostatique consiste à se donner des conducteurs et des masses électriques fixes, dont le nombre, la forme et la situation sont quelconques, et à chercher la distribution de l'électricité en équilibre sur les divers conducteurs pour des valeurs connues des potentiels ou des charges de chacun d'eux.

Le principe de Murphy ramène ce problème si compliqué à celui de l'influence de masses fixes sur un *seul* conducteur. C'est dans ce cas plus simple que nous nous placerons dans tout ce qui va suivre.

On sait que le problème de la distribution électrique sur un conducteur quelconque se ramène à celui-ci, posé par Green et par Gauss : trouver une fonction V des trois coordonnées, continue dans tout l'espace, dont les dérivées premières ne deviennent discontinues qu'à la surface du conducteur, qui satisfasse en tout point de l'espace à l'équation $\Delta V = 0$, qui prenne à la surface une valeur connue en chaque

point, et qui à l'infini soit du même ordre de petitesse que l'inverse de la distance à l'origine.

Quand il s'agit d'un conducteur fermé, on peut substituer à l'équation différentielle $\Delta V = 0$ une équation fonctionnelle à deux variables indépendantes, plus avantageuse dans certains cas.

I. — Établissement de l'équation fonctionnelle.

Considérons un point M de la surface σ du conducteur où la densité électrique a pour valeur e. Ce point subit les actions des divers éléments électriques $e' d\sigma'$ du reste de la surface σ et des charges $q_i (i = 1, 2, \ldots, p)$ des points électrisés extérieurs, que nous supposons au nombre de p. Le potentiel au point M a pour valeur

$$V = \int_\sigma \frac{e' d\sigma'}{r} + \mathop{\mathrm{S}}_1^p \frac{q_i}{r_i},$$

r et r_i désignant les distances au point M de l'élément $d\sigma'$ et du point de charge q_i. Si l'on prend la dérivée de V suivant la normale intérieure n, on sait que la valeur de la fonction $\frac{\partial V}{\partial n}$ en un point de la surface est la moyenne arithmétique des valeurs, 0 et $4\pi e$, de cette même fonction en deux points, l'un intérieur, l'autre extérieur, infiniment voisins du premier : c'est donc $2\pi e$; et, comme $\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} = \frac{\cos(r, n)}{r^2}$, on aura

$$(1) \qquad e = \frac{1}{2\pi} \int_\sigma \frac{e' \cos(r, n)}{r^2} d\sigma' + \frac{1}{2\pi} \mathop{\mathrm{S}}_1^p \frac{q_i \cos(r_i, n)}{r_i^2}.$$

Telle est l'équation fonctionnelle que nous avions en vue d'obtenir. Comme le potentiel n'y figure pas, il est bon d'en donner une démonstration directe.

Coupons la surface σ par un plan infiniment voisin du plan tangent en M. Ce plan partage le conducteur en deux calottes s et S, la première infiniment petite. L'aire de la section s_1 diffère infiniment peu

de s. D'un point quelconque de s, on voit s_1 sous un angle solide infiniment voisin de 2π, si la surface ne présente aux environs du point M aucune singularité. Donc, la densité étant continue, la calotte s exercera sur s_1 une répulsion dont la composante normale, d'après un théorème de Gauss, est sensiblement égale à $2\pi es$.

Soit F la composante normale de la répulsion exercée sur s_1 par la calotte S et par les points électrisés extérieurs. La condition d'équilibre est

$$F = 2\pi es;$$

et, comme on a visiblement

$$\lim \frac{F}{s} = \int_\sigma \frac{e' \cos(r, n)}{r^2} d\sigma' + \sum_1^p \frac{q_i \cos(r_i, n)}{r_i^2},$$

on en conclut l'équation (1). Cette équation fonctionnelle détermine l'inconnue e; les deux variables indépendantes sont les deux angles dont la relation avec le rayon vecteur définit la surface du conducteur. Elle a toujours une solution et une seule; car elle exprime, comme il est facile de s'en assurer, que, sur une surface intérieure à σ et infiniment voisine, la composante normale de la répulsion est nulle en chaque point $\left(\frac{\partial V}{\partial n} = 0\right)$.

Avant d'utiliser la formule (1) pour la solution du problème des sphéroïdes conducteurs, nous allons en faire quelques applications très simples, qui en feront ressortir les avantages.

II. — Influence d'un point électrisé sur une sphère conductrice.

En appelant R le rayon de la sphère, V son potentiel constant, q_1 la charge du point, d_1 sa distance au centre de la sphère, on a visiblement

$$\frac{\cos(r, n)}{r} = \frac{1}{2R}, \qquad d_1^2 = R^2 + r_1^2 - 2Rr_1 \cos(r_1, n), \qquad V = \int_\sigma \frac{e' d\sigma'}{r} + \frac{q_1}{r_1}.$$

Si dans l'équation (1) on porte les valeurs des cosinus tirées des

deux premières relations et qu'on tienne compte de la troisième, on obtient

$$e = \frac{V}{4\pi R} - \frac{q_1}{4\pi}\frac{d_1^2 - R^2}{r_1^3}. \tag{2}$$

On retrouve ainsi, par la voie la plus directe, le résultat que Sir W. Thomson a obtenu par des procédés détournés si ingénieux.

III. — Sur un corps d'épreuve.

Un corps d'épreuve est, comme on sait, un conducteur de très petite dimension qu'on met en contact avec un autre conducteur de dimension finie. La charge prise par le corps d'épreuve ne dépend pas de la forme de la surface touchée; elle est proportionnelle à la densité électrique au point touché, avant le contact. La difficulté, insurmontable dans la plupart des cas, consiste à trouver le coefficient de proportionnalité. Lorsqu'il s'agit d'une petite sphère, Poisson a pu déterminer le rapport de sa densité électrique moyenne à la densité au point de contact : ce rapport a pour valeur $\frac{\pi^2}{6}$.

Voici un autre cas dont notre équation fonctionnelle permet de faire la théorie. Le corps d'épreuve est le *corps de plus grande attraction*, dont l'équation polaire est

$$\frac{\cos\varphi}{r^2} = \frac{1}{a^2}. \tag{3}$$

La constante a est le *diamètre;* le corps, qui est de révolution autour de son diamètre, présente au pôle un aplatissement infini.

Imaginons qu'on mette en contact par leurs pôles deux corps de plus grande attraction; on les suppose tous deux conducteurs et l'on communique à leur ensemble une charge électrique M. Exprimons que toutes les répulsions électriques se font équilibre au point de contact; en affectant de l'indice 1 toutes les quantités relatives au deuxième corps, nous aurons

$$\int_\sigma \frac{e' \cos\varphi}{r_1^2}\, d\sigma' = \int_{\sigma_1} \frac{e'_1 \cos\varphi_1}{r^2}\, d\sigma'_1,$$

ou, en vertu des équations des deux corps, en désignant par m, m_1 leurs charges,

$$\frac{m}{a^2} = \frac{m_1}{a_1^2}. \tag{4}$$

Ainsi la charge totale se partage proportionnellement aux carrés des diamètres, c'est-à-dire aux surfaces.

Supposons maintenant le second corps isolé et possédant à lui seul la charge $M = m + m_1$. L'équation (1), appliquée au pôle, donne

$$e_1 = \frac{1}{2\pi}\int_{\sigma_1} \frac{e'_1 \cos\varphi_1}{r_1^2}\, d\sigma'_1 = \frac{m + m_1}{a_1^2}.$$

En combinant cette relation avec la relation (4), on trouve

$$e_1 = \frac{m}{2\pi}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{a_1^2}\right),$$

et, si le premier corps est très petit par rapport au second,

$$m = 2\pi a^2 e_1. \tag{5}$$

D'après la théorie du corps d'épreuve, ce résultat subsiste lorsqu'on remplace le second corps de plus grande attraction par un conducteur quelconque. Le rapport cherché est $2\pi a^2$. L'aplatissement du corps d'épreuve au pôle fait qu'une erreur de contact assez grande n'influe pas sensiblement sur la distribution électrique du système.

IV. — Énergie électrique des conducteurs fermés.

A la formule (1) se rattache une expression nouvelle de l'énergie électrique qui, au point de vue analytique, n'est pas sans intérêt. Généralement, l'expression de la densité sur un conducteur comporte un facteur arbitraire, que l'on détermine en se donnant, soit la charge M, soit le potentiel V. Chacune de ces opérations conduit à une double intégration, de sorte que l'énergie $W = \frac{1}{2}MV$ se présente sous la forme du produit de deux intégrales doubles. On va voir qu'une seule intégrale double suffit à exprimer l'énergie électrique d'un conducteur fermé. Nous pouvons d'ailleurs supposer qu'un nombre quel-

conque de conducteurs, non influencés par des charges fixes, sont en présence.

Soient

M un point de l'un d'eux,
$m = e\,d\sigma$ la charge en ce point,
M' un autre point du système,
m' sa charge,
ρ et ρ' les distances des points M et M' à une origine fixe O.

Les divers éléments M' exercent en M une répulsion totale dirigée suivant la normale extérieure n, et dont la valeur est $2\pi e$. En projetant les répulsions composantes sur la direction ρ, on a donc

$$\mathrm{S}\frac{m'}{\overline{\mathrm{M'M}}^2}\cos(\mathrm{M'M},\rho) = 2\pi e\cos(n,\rho).$$

Multipliant les deux membres de cette égalité par $m\rho = e\rho\,d\sigma$, puis intégrant sur toute l'étendue des p surfaces conductrices, il vient

$$\mathrm{SS}\frac{mm'}{\overline{\mathrm{M'M}}^2}\rho\cos(\mathrm{M'M},\rho) = \sum_p\int 2\pi e^2\rho\cos(n,\rho)\,d\sigma.$$

On peut, dans le premier membre, grouper les termes deux à deux de manière à mettre en évidence la somme partielle

$$\frac{mm'}{\overline{\mathrm{M'M}}^2}[\rho\cos(\mathrm{M'M},\rho) + \rho'\cos(\mathrm{M'M},\rho')].$$

On reconnaît aisément que la parenthèse se réduit à M'M, en sorte que le premier membre de notre équation, $\mathrm{SS}\frac{mm'}{\mathrm{M'M}}$, représente l'énergie électrique W de tout le système. Nous avons donc la formule

$$\mathrm{W} = 2\pi\sum_p\int e^2\rho\cos(n,\rho)\,d\sigma. \tag{6}$$

Elle est susceptible d'une légère transformation. Appelons $d\omega$ l'élément de surface sphérique décrite du point O comme centre avec l'unité de rayon; suivant que le rayon vecteur ρ sort du conducteur ou y pénètre, on aura $d\sigma\cos(n,\rho) = \pm\rho^2 d\omega$, et, en regardant comme

négatifs les rayons vecteurs qui entrent dans le conducteur, comme positifs ceux qui en sortent, l'équation (6) devient

$$W = 2\pi \sum_p \int e^2 \rho^3 d\omega. \tag{7}$$

Pour une sphère de rayon R, la formule (7) donne immédiatement l'expression connue $W = 8\pi^2 R^3 e^2$.

V. — Énergie électrique d'un disque plan.

La méthode de calcul qui précède n'est pas directement applicable à l'énergie des disques, calottes, zones, etc. Il faut connaître la distribution de l'électricité sur les corps épais dont l'aplatissement peut donner naissance à ces surfaces.

Avant d'aborder le calcul de l'énergie d'un disque plan à contour quelconque, nous ferons quelques remarques relatives à la distribution de l'électricité sur l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \tag{8}$$

Si c désigne le demi petit axe, cet ellipsoïde est aplati dans le sens de l'axe des z. On sait que la densité électrique e en un point de la surface est proportionnelle à

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{a^2 - c^2}{a^4} x^2 - \frac{b^2 - c^2}{b^4} y^2}}$$
$$= \frac{c}{\sqrt{1 - r^2\left(\frac{a^2 - c^2}{a^4}\cos^2\psi + \frac{b^2 - c^2}{b^4}\sin^2\psi\right)}},$$

r et ψ représentant les coordonnées polaires dans le plan des xy.

Le plan qui passe par l'axe des z et par le point considéré coupe l'ellipse du plan des xy suivant un diamètre dont la demi-longueur α est donnée par la formule

$$\frac{1}{\alpha^2} = \frac{\cos^2\psi}{a^2} + \frac{\sin^2\psi}{b^2}. \tag{9}$$

Posons maintenant

$$\frac{a^2-c^2}{a^4}\cos^2\psi+\frac{b^2-c^2}{b^4}\sin^2\psi=\frac{\varepsilon^2}{\alpha^2} \tag{10}$$

et désignons par e_0 la densité au sommet du petit axe; nous aurons

$$e=e_0\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2-\varepsilon^2 r^2}}. \tag{11}$$

Si l'ellipsoïde dégénère en disque elliptique ($c=0$), ε^2 tend vers 1, et le rapport $\frac{c^2}{1-\varepsilon^2}$ tend vers une limite k^2, finie et différente de zéro,

$$k^2=\frac{b^2\cos^2\psi+a^2\sin^2\psi}{b^4\cos^2\psi+a^4\sin^2\psi}. \tag{12}$$

Remarquons enfin que, si γ désigne le rayon de courbure au sommet le plus aigu de la section correspondant à l'azimut ψ, le rapport $\frac{c^2}{\gamma}$ reste toujours égal à la quantité finie α.

Cela posé, considérons un disque plan à contour quelconque. Nous prendrons son plan pour plan des xy (ou des r, ψ), et, pour fixer les idées, nous placerons l'origine au centre de gravité O du disque. Nous supposerons que le contour ne présente pas de point anguleux. En général, le disque résultera de l'aplatissement continu et indéfini d'une surface fermée dépourvue de toute singularité. Aux environs d'un point, cette surface pourra être confondue avec un ellipsoïde; les parties extrêmes des sections azimutales seront assimilables à des arcs d'ellipse très fortement courbés.

Nous supposerons le corps aplati symétrique par rapport au plan des xy (ou des r, ψ). Il suffira de calculer l'énergie pour la moitié supérieure et de doubler. De cette façon la formule (6) devient

$$W=4\pi\int e^2\rho\cos(n,\rho)\,d\sigma. \tag{6'}$$

Par analogie avec ce qui a lieu pour l'ellipsoïde, nous pouvons poser

$$e=\frac{\lambda\alpha}{\sqrt{\alpha^2-\varepsilon^2 r^2}}, \tag{13}$$

α étant la valeur de r en un point de la ligne de contour, λ et ε deux fonctions de r et de ψ, dont la seconde prend la valeur 1 lorsque, le corps dégénérant en un disque, son épaisseur centrale c tend vers zéro, de telle facon que le rapport $\frac{c^2}{1-\varepsilon^2}$ tende vers une limite k^2 finie et différente de zéro. Enfin, si l'on désigne par γ le rayon de courbure minimum d'une section azimutale, le rapport $\frac{c^2}{\gamma}$ tendra aussi vers une limite finie β.

Concevons l'ellipse osculatrice au sommet aigu de la section considérée, et soit son équation

$$\frac{r'^2}{\alpha'^2}+\frac{z^2}{c'^2}=1. \tag{14}$$

Son rayon de courbure minimum $\frac{c'^2}{\alpha'}$ ayant pour valeur γ, on en conclut facilement

$$\lim\frac{c'}{c}=\sqrt{\frac{\alpha'}{\beta}}. \tag{15}$$

Maintenant, comme on a $d\sigma=\frac{r\,dr\,d\psi}{\cos(n,z)}$, l'expression (6′) de l'énergie devient

$$W=4\pi\int_0^{2\pi}d\psi\int_0^{\alpha}e^2\rho\,\frac{\cos(n,\rho)}{\cos(n,z)}\,r\,dr.$$

L'intégrale par rapport à r est une intégrale *singulière* qui n'a de valeur sensible que pour $r=\alpha$. En effet, sauf dans le voisinage de la ligne de contour, le rapport $\frac{\cos(n,\rho)}{\cos(n,z)}$ a une valeur insensible; sur cette ligne même, il est infini. Il nous suffira donc de calculer sa valeur pour les points voisins du contour, et nous serons en droit d'écrire les égalités approchées

$$\frac{\cos(n,\rho)}{\cos(n,z)}=\frac{\cos(n',r')}{\cos(n',z)}=-\frac{dz}{dr'},$$

et, en tenant compte de l'équation (14),

$$=\frac{c'^2r'}{\alpha'^2z}=\frac{c'}{\alpha'}\,\frac{r'}{\sqrt{\alpha'^2-r'^2}}=\frac{c'}{\sqrt{\alpha'^2-r'^2}}=\frac{c'}{c}\sqrt{\frac{\alpha+r}{\alpha'+r'}}\,\frac{c}{\sqrt{\alpha^2-r^2}}=\frac{c'}{c}\sqrt{\frac{\alpha}{\alpha'}}\,\frac{c}{\sqrt{\alpha^2-r^2}};$$

finalement, en vertu de l'équation (15),

$$\frac{\cos(n,\rho)}{\cos(n,z)} = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\,\frac{c}{\sqrt{\alpha^2 - r^2}}.$$

En portant cette valeur dans l'expression de W, où nous ferons $\rho = \alpha$ et où nous remplacerons e par sa valeur (13), nous obtiendrons

$$W = 4\pi \int_0^{2\pi} \lambda^2 \alpha^3 \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\, d\psi \int_0^{\alpha} \frac{c r\, dr}{(\alpha^2 - \varepsilon^2 r^2)\sqrt{\alpha^2 - r^2}}.$$

Si l'on pose $\sqrt{\alpha^2 - r^2} = t$ et si l'on se rappelle que $\frac{c^2}{1-\varepsilon^2}$ tend vers la limite finie k^2, l'intégrale $\int_0^{\alpha} \frac{c r\, dr}{(\alpha^2 - \varepsilon^2 r^2)\sqrt{\alpha^2 - r^2}}$ devient

$$\int_0^{\alpha} \frac{k^2 c\, dt}{\alpha^2 c^2 + \varepsilon^2 k^2 t^2} = \frac{k}{\alpha\varepsilon}\left(\operatorname{arc\,tang} \frac{\varepsilon k t}{\alpha c}\right)_0^{\alpha} = \frac{\pi k}{2\alpha}.$$

On a donc enfin

$$W = 2\pi^2 \int_0^{2\pi} k \lambda^2 \alpha^2 \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\, d\psi. \tag{16}$$

On voit que l'énergie électrique d'un disque plan s'exprime par une seule intégrale simple prise le long de son contour.

Pour appliquer la formule au disque elliptique, il faut faire $\beta = \alpha$, $\lambda = e_0$, remplacer α et k par leurs valeurs tirées des relations (9) et (12). On trouve ainsi

$$W = 2\pi^2 a^3 b^3 e_0^2 \int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{\sqrt{(a^2 \sin^2\psi + b^2 \cos^2\psi)(a^4 \sin^2\psi + b^4 \cos^2\psi)}}. \tag{17}$$

CHAPITRE II.

DISTRIBUTION DE L'ÉLECTRICITÉ A LA SURFACE D'UN SPHÉROÏDE CONDUCTEUR.

La principale application de notre équation fonctionnelle est la solution du problème de l'équilibre électrique d'un sphéroïde différant de la sphère d'une manière sensible. Nous supposons le sphéroïde dépourvu de toute singularité, pointe ou arête vive; mais sa surface peut être composée de portions raccordées de surfaces différentes. Il est soumis à l'influence d'un nombre quelconque p de points électrisés.

Mais, pour ne pas interrompre l'exposé de la solution, nous ferons quelques remarques préliminaires sur les développements en série, qui nous seront indispensables par la suite.

I. — Digression sur les développements en série.

Soit à développer en série entière un produit de puissances de séries ou de polynômes $A^\alpha B^\beta \ldots L^\lambda$:

$$\begin{aligned} A &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots, \\ B &= b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ L &= l_0 + l_1 x + l_2 x^2 + \ldots, \end{aligned}$$

les exposants $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ étant quelconques.

Lorsque aucun des termes constants $a_0, b_0, \ldots, l_0$ n'est nul, ce développement est toujours possible pour des valeurs suffisamment petites de x. En appelant

$$U = u_0 + u_1 x + u_2 x^2 + \ldots$$

la série cherchée et en égalant la dérivée logarithmique de U à celle du produit donné, on a

$$\frac{U'}{U} = \alpha \frac{A'}{A} + \beta \frac{B'}{B} + \ldots + \lambda \frac{L'}{L}.$$

L'identification des deux membres de cette égalité, qui sont rationnels en x, fournit les inconnues u_0, u_1, u_2, ... Voici le résultat de ce calcul.

Désignons par s_p la somme de tous les produits $ab\ldots l$ pour lesquels la somme des indices est égale à p. En convenant de traiter les indices comme des exposants, on fixe la signification des symboles $\left(\frac{\partial s_p}{\partial a}\right)$, $\left(\frac{\partial s_p}{\partial b}\right)$, ..., $\left(a\frac{\partial s_p}{\partial a}\right)$, $\left(b\frac{\partial s_p}{\partial b}\right)$, ... Posons

$$s'_p = \alpha\left(a\frac{\partial s_p}{\partial a}\right) + \beta\left(b\frac{\partial s_p}{\partial b}\right) + \ldots + \lambda\left(l\frac{\partial s_p}{\partial l}\right). \tag{18}$$

Les coefficients u seront donnés par la relation récurrente

$$ps_0 u_p = [s'_1 - (p-1)s_1]u_{p-1} + [s'_2 - (p-2)s_2]u_{p-2} + \ldots + s'_p u_0, \tag{19}$$

à laquelle il faut adjoindre l'expression du premier terme

$$u_0 = a_0^\alpha b_0^\beta \ldots l_0^\lambda.$$

On conclut de là, pour exprimer u_p, un déterminant qu'il est inutile d'écrire. Les a, b, ..., l étant finis par hypothèse, les coefficients u sont visiblement finis. Si l'on appelle poids d'une lettre a le produit de son indice par son exposant, poids d'un terme $ab\ldots l$ la somme des poids des lettres qui y entrent, u_p est une fonction rationnelle, homogène et de poids p des a, b, ..., l.

II. — Solution du problème par une série d'intégrales définies.

Soit en coordonnées polaires (ρ, θ, ψ)

$$\rho = R(1+n) \tag{20}$$

l'équation du sphéroïde. Considérons la famille de surfaces

$$\rho = R(1+\alpha n), \tag{21}$$

où α désigne un paramètre compris entre 0 et 1 ; elles sont toutes com-

prises dans les parties du sphéroïde primitif extérieures à la sphère de rayon R et dans les parties de la sphère extérieures au sphéroïde. Nous allons chercher la distribution de l'électricité sur l'un quelconque de ces sphéroïdes intermédiaires.

Soient M et M′ deux de ses points, ρ, θ, ψ et ρ', θ', ψ' leurs coordonnées, r la distance *de* M *à* M′, en grandeur et direction.

Au système fixe (θ', ψ') il est avantageux d'adjoindre un système de coordonnées (ω, φ) mobile avec le point M, dans lequel le nouvel axe des z passe par ce point. On passe du premier système au second par les formules bien connues

$$(22)\qquad \begin{cases} \cos\theta' = \cos\theta\cos\omega - \sin\theta\cos\varphi, \\ \cot(\psi' - \psi) = \dfrac{\cos\theta\cos\varphi + \sin\theta\cot\omega}{\sin\varphi}. \end{cases}$$

Désignons par ν l'angle de la normale extérieure au point M avec la direction de r; par e, e' les densités électriques aux points M, M′; par $q_i (i = 1, 2, \ldots, p)$ la charge du point électrisé Q_i; par ρ_i, θ_i, ψ_i, ω_i, φ_i, r_i, ν_i les quantités relatives au point Q_i analogues aux quantités ρ', θ', ψ', ω, φ, r, ν relatives au point M′.

Lorsqu'on se donne le potentiel constant V du sphéroïde, la densité électrique au point M est complètement déterminée par l'équation fonctionnelle

$$(1')\qquad e = -\frac{1}{2\pi}\int_\sigma \frac{e'\cos\nu}{r^2}\,d\sigma' - \frac{1}{2\pi}\sum_1^p \frac{q_i\cos\nu_i}{r_i^2}.$$

Commençons par évaluer $\dfrac{\cos\nu}{r}$.

Si l'on appelle β l'angle des deux directions ρ et r, ζ l'angle de la normale extérieure au point M avec la direction ρ, λ l'angle du plan déterminé par ρ et par cette normale avec le plan méridien correspondant à l'azimut ψ, le trièdre dont les arêtes sont ρ, r et la normale donnera

$$\cos\nu = \cos\beta\cos\zeta + \sin\beta\sin\zeta\cos(\varphi - \lambda)$$

ou bien

$$(23)\qquad \cos\nu = \cos\beta\cos\zeta + \sin\beta(\sin\zeta\cos\lambda\cos\varphi + \sin\zeta\sin\lambda\sin\varphi).$$

Dans le triangle dont les côtés sont ρ, ρ', r, on a

$$r^2 = \rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos\omega, \tag{24}$$

$$\cos\beta = \frac{\rho' \cos\omega - \rho}{r}, \qquad \sin\beta = \frac{\rho' \sin\omega}{r}. \tag{25}$$

Les produits $\sin\zeta \cos\lambda$, $\sin\zeta \sin\lambda$ se calculeront de la manière suivante : la normale extérieure fait avec les directions des coordonnées polaires ρ, θ, ψ des angles ζ, ζ_1, ζ_2 déterminés par les formules

$$\frac{\cos\zeta}{\rho} = \frac{\cos\zeta_1}{-\dfrac{\partial\rho}{\partial\theta}} = \frac{\cos\zeta_2}{-\dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{\partial\rho}{\partial\psi}} = \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + \dfrac{\partial\rho^2}{\partial\theta^2} + \dfrac{1}{\sin^2\theta}\dfrac{\partial\rho^2}{\partial\psi^2}}}. \tag{26}$$

En projetant la normale extérieure sur un plan perpendiculaire au rayon vecteur ρ, on obtient les relations

$$\sin\zeta \cos\lambda = \cos\zeta_1, \qquad \sin\zeta \sin\lambda = \cos\zeta_2, \tag{27}$$

où $\cos\zeta_1$, $\cos\zeta_2$ doivent être remplacés par leurs valeurs (26).

Portant dans l'équation (23) les valeurs (25) et (27) trouvées pour $\cos\beta$, $\sin\beta$, $\sin\zeta\cos\lambda$, $\sin\zeta\sin\lambda$, et divisant les deux membres de cette équation par $r = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho'\cos\omega}$, on obtient finalement

$$-\frac{\cos\nu}{r} = \frac{\rho^2 - \rho\rho'\cos\omega + \rho'\sin\omega\left(\cos\varphi\dfrac{\partial\rho}{\partial\theta} + \dfrac{\sin\varphi}{\sin\theta}\dfrac{\partial\rho}{\partial\psi}\right)}{(\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho'\cos\omega)\sqrt{\rho^2 + \dfrac{\partial\rho^2}{\partial\theta^2} + \dfrac{1}{\sin^2\theta}\dfrac{\partial\rho^2}{\partial\psi^2}}}. \tag{28}$$

L'expression de $-\dfrac{\cos\nu_i}{r_i}$ se déduirait de la précédente par le changement de ρ', ω, φ en ρ_i, ω_i, φ_i; mais, dans les transformations que nous ferons subir à l'équation (1), nous aurons besoin de connaître la valeur de

$$-\frac{\cos\nu_i}{r_i^2} = \frac{\rho^2 - \rho\rho_i\cos\omega_i + \rho_i\sin\omega_i\left(\cos\varphi_i\dfrac{\partial\rho}{\partial\theta} + \dfrac{\sin\varphi_i}{\sin\theta}\dfrac{\partial\rho}{\partial\psi}\right)}{\sqrt{(\rho^2 + \rho_i^2 - 2\rho\rho_i\cos\omega_i)^3\left(\rho^2 + \dfrac{\partial\rho^2}{\partial\theta^2} + \dfrac{1}{\sin^2\theta}\dfrac{\partial\rho^2}{\partial\psi^2}\right)}}. \tag{29}$$

Enfin, pour achever le calcul des termes qui figurent dans notre équation fonctionnelle, il faut évaluer le quotient $\frac{d\sigma'}{r}$. Si l'on conçoit que, dans l'expression du rayon vecteur ρ', on ait éliminé θ' et φ' au moyen des formules de transformation (22), on trouvera aisément

$$(30)\qquad \frac{d\sigma'}{r} = \rho'\sqrt{\frac{\rho'^2 + \frac{\partial\rho'^2}{\partial\omega^2} + \frac{1}{\sin^2\omega}\frac{\partial\rho'^2}{\partial\varphi^2}}{\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho'\cos\omega}}\sin\omega\, d\omega\, d\varphi.$$

Cela posé, dans les expressions (28), (29), (30) de $-\frac{\cos\nu}{r}$, $-\frac{\cos\nu_i}{r_i^2}$, $\frac{d\sigma'}{r}$ et dans celle de la quantité

$$(31)\qquad \frac{1}{2Rr_i} = \frac{1}{2R\sqrt{\rho^2 + \rho_i^2 - 2\rho\rho_i\cos\omega_i}},$$

qui apparaîtra dans les transformations ultérieures de l'équation fonctionnelle, remplaçons ρ par $R(1+\alpha n)$ et ρ' par $R(1+\alpha n')$; si l'on met en évidence le paramètre α, elles prendront la forme

$$(32)\qquad \left\{\begin{aligned}
-\frac{\cos\nu}{r} &= \frac{1}{2R}\,\frac{1 + G_1\alpha + G_2\alpha^2}{(1 + H_1\alpha + H_2\alpha^2)\sqrt{1 + h_1\alpha + h_2\alpha^2}},\\
-\frac{\cos\nu_i}{r_i^2} &= \frac{K_0 + K_1\alpha + K_2\alpha^2}{\sqrt{L_0 + L_1\alpha + L_2\alpha^2)^3\,(1 + h_1\alpha + h_2\alpha^2)}},\\
\frac{d\sigma'}{r} &= R(1+\alpha n')\sqrt{\frac{1 + h'_1\alpha + h'_2\alpha^2}{1 + H_1\alpha + H_2\alpha^2}}\,\frac{\sin\omega\, d\omega\, d\varphi}{\sqrt{2(1-\cos\omega)}},\\
\frac{1}{2Rr_i} &= \frac{1}{2R\sqrt{L_0 + L_1\alpha + L_2\alpha^2}},
\end{aligned}\right.$$

où G_1, G_2 ont les valeurs

$$(33)\qquad \left\{\begin{aligned}
G_1 &= n + n' + \frac{n - n' + \sin\omega\left(\cos\varphi\frac{\partial n}{\partial\theta} + \frac{\sin\varphi}{\sin\theta}\frac{\partial n}{\partial\psi}\right)}{1-\cos\omega},\\
G_2 &= \frac{n^2 - nn'\cos\omega + n'\sin\omega\left(\cos\varphi\frac{\partial n}{\partial\theta} + \frac{\sin\varphi}{\sin\theta}\frac{\partial n}{\partial\psi}\right)}{1-\cos\omega},
\end{aligned}\right.$$

et H_1, H_2, h_1, h_2, h'_1, h'_2, K_0, K_1, K_2, L_0, L_1, L_2 les valeurs

$$(33')\quad \begin{cases} H_1 = n + n', & H_2 = \dfrac{n^2 + n'^2 - 2nn'\cos\omega}{2(1-\cos\omega)}, \\ h_1 = 2n, & h_2 = n^2 + \dfrac{\partial n^2}{\partial\theta^2} + \dfrac{1}{\sin^2\theta}\dfrac{\partial n^2}{\partial\psi^2}, \\ h'_1 = 2n', & h'_2 = n'^2 + \dfrac{\partial n'^2}{\partial\omega^2} + \dfrac{1}{\sin^2\omega}\dfrac{\partial n'^2}{\partial\varphi^2}, \\ K_0 = R - \rho_i\cos\omega_i, & K_2 = Rn^2, \\ K_1 = (2R - \rho_i\cos\omega_i)n + \rho_i\sin\omega_i\left(\cos\varphi\dfrac{\partial n}{\partial\theta} + \dfrac{\sin\varphi}{\sin\theta}\dfrac{\partial n}{\partial\psi}\right), \\ L_0 = R^2 + \rho_i^2 - 2R\rho_i\cos\omega_i, & L_1 = 2Rn(R - \rho_i\cos\omega_i), \quad L_2 = Rn^2. \end{cases}$$

Maintenant, les formules (18) et (19) du paragraphe I nous permettent de développer les expressions (32) en séries procédant suivant les puissances croissantes de α. Les développements seront de la forme suivante :

$$(34)\quad \begin{cases} -\dfrac{\cos\nu}{r} = \dfrac{1}{2R}\left(1 + \displaystyle\sum_{m=1}^{m=\infty} b_m\alpha^m\right), \\ -\left(\dfrac{1}{2Rr_i} + \dfrac{\cos\nu_i}{r_i^2}\right) = \dfrac{R^2 - \rho_i^2}{2R\sqrt{(R^2 + \rho_i^2 - 2R\rho_i\cos\omega_i)^3}} + \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{m=1}^{m=\infty} A_m\alpha^m, \\ \dfrac{d\sigma'}{r} = R\left(1 + \displaystyle\sum_{m=1}^{m=\infty} c_m\alpha^m\right)\dfrac{\sin\omega\, d\omega\, d\varphi}{\sqrt{2(1-\cos\omega)}}. \end{cases}$$

Le calcul des coefficients A_m, b_m, c_m serait pénible et n'offrirait d'ailleurs que peu d'intérêt. Nous retiendrons seulement l'expression de b_1, qui nous servira dans les applications aux sphéroïdes très peu différents de la sphère :

$$(35)\qquad b_1 = \frac{n\cos\omega - n' + \sin\omega\left(\cos\varphi\dfrac{\partial n}{\partial\theta} + \dfrac{\sin\varphi}{\sin\theta}\dfrac{\partial n}{\partial\psi}\right)}{1-\cos\omega}.$$

Revenons à l'équation fonctionnelle (1'), que nous pouvons écrire,

en ajoutant et retranchant à son second membre $\sum_1^p \frac{q_i}{4\pi R r_i}$,

$$e = -\frac{1}{2\pi}\int_\sigma \frac{e'\cos\nu}{r}\frac{d\sigma'}{r} + \frac{1}{4\pi R}\sum_1^p \frac{q_i}{r_i} - \frac{1}{2\pi R}\sum_1^p q_i\left(\frac{1}{2Rr_i} + \frac{\cos\nu_i}{r_i^2}\right).$$

Substituons-y les séries (34) et décomposons l'intégrale $\int_\sigma$ en deux autres, dont la première correspondra au premier terme $\frac{1}{2R}$ du développement de $-\frac{\cos\nu}{r}$ et la seconde aux termes restants. Posons, pour abréger,

$$(36) \qquad a_m = b_1 c_{m-1} + b_2 c_{m-2} + \ldots + b_m;$$

il viendra

$$(37) \quad \left\{\begin{aligned} e = {} & \frac{1}{4\pi R}\left[\int_\sigma \frac{e'\,d\sigma'}{r} + \sum_1^p \frac{q_i}{r_i} + \sum_1^p q_i \frac{R^2 - \rho_i^2}{\sqrt{(R^2 + \rho_i^2 - 2R\rho_i\cos\omega_i)^3}}\right] \\ & + \frac{1}{4\pi}\left[\int_0^{2\pi}\int_0^\pi e' \sum_{m=1}^{m=\infty} a_m \alpha^m \frac{\sin\omega\,d\omega\,d\varphi}{\sqrt{2(1-\cos\omega)}} + \sum_1^p q_i \sum_{m=1}^{m=\infty} A_m \alpha^m\right]. \end{aligned}\right.$$

Posons maintenant

$$(38) \qquad e = e_0 + e_1\alpha + e_2\alpha^2 + \ldots + e_m\alpha^m + \ldots.$$

Le terme général e_m est une fonction des angles θ, ψ qu'il s'agit de déterminer; si l'on y remplace θ, ψ par θ', ψ', e_m se changera en e'_m, qui deviendra une fonction de ω, φ, lorsqu'on aura éliminé θ', ψ' au moyen des formules de transformation (22).

Dans l'équation (37) substituons les développements de e et de e', et remarquons que la somme $\int_\sigma \frac{e'd\sigma'}{r} + \sum_1^p \frac{q_i}{r_i}$ n'est autre chose que le potentiel V du sphéroïde. Les deux membres sont deux séries entières

en α, qui doivent être identiques : on en conclut

$$(39)\quad \begin{cases} e_0 = \dfrac{1}{4\pi R}\left[V + \mathop{\mathrm{S}}\limits_1^p q_i \dfrac{R^2 - \rho_i^2}{\sqrt{(R^2 + \rho_i^2 - 2R\rho_i \cos\omega_i)^3}}\right], \\ e_m = \dfrac{1}{4\pi}\left[\mathop{\mathrm{S}}\limits_1^p A_m q_i + \displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} (e'_0 a_m + e'_1 a_{m-1} + \ldots + e'_{m-1} a_1) \dfrac{\sin\omega\, d\omega\, d\varpi}{\sqrt{2(1 - \cos\omega)}}\right] \end{cases}$$

Les formules (38) et (39) résolvent le problème proposé. Comme elles expriment chacune des fonctions e_m à l'aide des fonctions d'indice moindre, elles permettent de calculer ces fonctions de proche en proche; du moins elles ramènent ce calcul à une suite de quadratures qui, à défaut d'une évaluation exacte, généralement impossible, donnent prise aux méthodes d'approximation indéfinie telles que celle de Gauss. La densité électrique en un point du sphéroïde primitif s'obtient en faisant $\alpha = 1$ dans la série (38).

Il peut arriver que le sphéroïde donné fasse partie d'une famille naturelle de surfaces dépendant d'un paramètre α et se réduisant à une sphère pour la valeur zéro de ce paramètre. On développera en série suivant les puissances croissantes de α le rayon vecteur

$$\rho = R(1 + \alpha n_1 + \alpha^2 n_2 + \ldots),$$

et l'on suivra la marche qui vient d'être indiquée. La seule différence consistera en ce que dans les formules (32) figureront actuellement des séries et non des polynômes en α.

Enfin le rayon vecteur peut dépendre de plusieurs paramètres et devenir constant pour des valeurs nulles de tous ces paramètres : on le développera en série multiple.

III. — Convergence de la série.

Il reste à examiner les conditions de convergence de la série (38). Nous nous bornerons au cas le plus intéressant, celui où le sphéroïde n'est soumis à aucune influence. Les formules de résolution (39) se

réduisent alors à

$$(40)\quad \begin{cases} e_0 = \dfrac{V}{4\pi R}, \\ e_m = \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}(e'_0 a_m + e'_1 a_{m-1} + \ldots + e'_{m-1} a_1)\dfrac{\sin\omega\, d\omega\, d\varphi}{\sqrt{2(1-\cos\omega)}}. \end{cases}$$

Montrons d'abord, ce qui est loin d'être évident au point de vue analytique, que e_m est toujours fini; il suffit de prouver que la parenthèse $(e'_0 a_m + e'_1 a_{m-1} + \ldots + e'_{m-1} a_1)$ ne devient jamais infinie, puisque l'intégrale

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin\omega\, d\omega\, d\varphi}{\sqrt{2(1-\cos\omega)}}$$

a la valeur finie 4π.

La relation récurrente qui lie les fonctions e_m de proche en proche montre que cette parenthèse est finie en même temps que les coefficients a_m. Or ces coefficients, définis par la relation (36), sont des fonctions entières, homogènes et de poids m des b et des c. Si l'on se rappelle les conclusions du paragraphe I, on verra que b_m est une fonction linéaire, homogène et de poids m, des quantités G_1, G_2, H_1, H_2, h_1, h_2, que c_m est une fonction linéaire, homogène et de poids m, des quantités n', H_1, H_2, h'_1, h'_2 [formules (33) et (38')]. Parmi ces quantités, les seules qui pourraient devenir infinies, et cela pour $\omega = 0$, sont G_1, G_2, H_2, h'_2. Nous allons faire voir qu'il n'en est rien.

A cause de l'absence supposée de singularités, on peut, dans les environs du point $M(\rho, \theta, \psi)$, développer n' par la formule de Taylor

$$n' = n + \frac{\partial n}{\partial \theta}d\theta + \frac{\partial n}{\partial \psi}d\psi + \frac{\partial^2 n}{\partial \theta^2}\frac{d\theta^2}{2} + \frac{\partial^2 n}{\partial \theta\,\partial \psi}d\theta\, d\psi + \frac{\partial^2 n}{\partial \psi^2}\frac{d\psi^2}{2}.$$

Si le point M est sur la ligne de séparation de deux portions raccordées de surfaces différentes, les dérivées secondes de n auront en général des valeurs différentes de part et d'autre de cette ligne.

Quand ω a une valeur infiniment petite $d\omega$, θ' et ψ' ont des valeurs $\theta + d\theta$ et $\psi + d\psi$ très voisines de θ et de ψ. Les formules de transfor-

mation (22) donnent alors pour $d\theta$ et $d\psi$ les expressions

$$d\theta = \cos\varphi\, d\omega,$$
$$d\psi = \frac{\sin\varphi}{\sin\theta}\, d\omega.$$

Si donc on pose

$$u = \cos\varphi \frac{\partial n}{\partial\theta} + \frac{\sin\varphi}{\sin\theta}\frac{\partial n}{\partial\psi},$$
$$v = \cos^2\varphi \frac{\partial^2 n}{\partial\theta^2} + 2\cos\varphi\frac{\sin\varphi}{\sin\theta}\frac{\partial^2 n}{\partial\theta\,\partial\psi} + \frac{\sin^2\varphi}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 n}{\partial\psi^2},$$

il viendra $n' = n + u\,d\omega + v\frac{d\omega^2}{2}$. Substituant cette valeur de n' dans les formules (33) et (33'), où l'on remplacera $\sin\omega$ par $d\omega$, $1 - \cos\omega$ par $\frac{d\omega^2}{2}$, on trouvera pour valeurs limites de G_1, G_2, H_2

$$G_1 = 2n - v, \qquad G_2 = \frac{n^2}{2} + u^2 - nv, \qquad H_2 = n^2 + u^2.$$

Ainsi, même pour $\omega = 0$, G_1, G_2, H_2 demeurent finis; mais alors ils deviennent indéterminés, puisqu'ils dépendent de l'angle φ, c'est-à-dire du chemin que suit le point M' pour se rendre au point M.

Pour prouver que la quantité

$$h'_2 = n'^2 + \frac{\partial n'^2}{\partial\omega^2} + \frac{1}{\sin^2\omega}\frac{\partial n'^2}{\partial\varphi^2}$$

ne devient pas infinie pour $\omega = 0$, il suffit de montrer qu'aux environs du point M $\frac{\partial n'}{\partial\varphi}$ est du même ordre que $\sin\omega = d\omega$. Cela résulte de l'expression précédemment trouvée pour n', qui, différentiée par rapport à φ, donne

$$\frac{\partial n'}{\partial\varphi} = d\omega\frac{\partial u}{\partial\varphi} = d\omega\left(-\sin\varphi\frac{\partial n}{\partial\theta} + \frac{\cos\varphi}{\sin\theta}\frac{\partial n}{\partial\psi}\right).$$

Ainsi les coefficients e_m de la série (38) ont toujours des valeurs finies et, de plus, déterminées, car l'indétermination du seul élément qui correspond à $\omega = 0$ ne peut influer sur les intégrales qui représentent ces coefficients.

Cherchons maintenant une limite inférieure de convergence de la série

$$(38') \qquad e = e_0 + e_1 + e_2 + \ldots + e_m + \ldots.$$

Si l'on désigne par $\mathcal{A}_m$ la plus grande valeur absolue de a_m, par $\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \ldots, \mathcal{E}_m, \ldots$ une suite de quantités dont la première est égale à e_0 et dont les autres sont déterminées par la relation

$$\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_0 \mathcal{A}_m + \mathcal{E}_1 \mathcal{A}_{m-1} + \ldots + \mathcal{E}_{m-1} \mathcal{A}_1,$$

on voit, en se reportant aux formules (40), que $\mathcal{E}_m$ est une limite supérieure de e_m. La convergence de la série (38′) est alors entraînée par celle de la série

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 + \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \ldots + \mathcal{E}_m + \ldots$$

On peut remarquer que la série $\mathcal{E}$ diverge, si l'un quelconque des $\mathcal{A}_m$ est supérieur ou égal à l'unité. En effet, $\mathcal{E}_m$ est visiblement une fonction entière, de poids m, homogène quant au poids, à coefficients tous entiers et *positifs*, des quantités positives $\mathcal{A}$. Si p est un diviseur de m, $\mathcal{E}_m$ contiendra le terme $\mathcal{E}_0 \mathcal{A}_p^{\frac{m}{p}}$ avec le coefficient $+1$. On peut prendre m aussi grand qu'on veut; si $\mathcal{A}_p$ est supérieur ou égal à 1, $\mathcal{E}_m$ ne tend pas vers zéro.

On reconnaît aisément que la série $\mathcal{E}$ converge si $\sqrt[m]{\mathcal{A}_m}$ est constamment inférieur à un nombre plus petit que $\frac{1}{2}$. Cette condition exige que le sphéroïde ne soit pas trop différent de la sphère; en effet la grandeur des quantités $\mathcal{A}_m$ dépend de l'excentricité du sphéroïde, puisque a_m est une fonction homogène, de degré entier m, de $n, \frac{\partial n}{\partial \theta}, \frac{\partial n}{\partial \psi}, n', \frac{\partial n'}{\partial \omega}, \frac{\partial n'}{\partial \varphi}$. Malheureusement le critérium de convergence suffisante qui vient d'être indiqué limite beaucoup plus qu'il n'est nécessaire le domaine dans lequel peut se mouvoir cette excentricité.

Lorsque la série (38′) n'est pas convergente, la méthode n'est pas applicable au sphéroïde donné ; mais elle convient certainement encore aux sphéroïdes intermédiaires, définis par l'équation $\rho = R(1 + \alpha n)$, pour toutes les valeurs de α inférieures à $\frac{1}{2 \max. \sqrt[m]{\mathcal{A}_m}}$.

IV. — Charge du sphéroïde.

Revenons à la série

$$e = e_0 + e_1\alpha + e^2\alpha^2 + \ldots + e_m\alpha^m, \tag{38}$$

et arrêtons-la au terme de degré m : la densité électrique est évaluée avec une approximation de l'ordre m. Mais, pour déterminer la charge M du sphéroïde, avec *la même* approximation, il suffit, comme on va voir, d'évaluer la densité avec une approximation de l'ordre $m - 1$.

Supposons que l'on développe suivant les puissances de α le quotient

$$\frac{d\sigma}{\rho} = (1 + f_1\alpha + f_2\alpha^2 + \ldots + f_m\alpha^m)\sin\theta\, d\theta\, d\psi.$$

Le potentiel constant a pour valeur au centre

$$V = R^2\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}(e_0 + e_1\alpha + \ldots + e_m\alpha^m)(f_0 + f_1\alpha + \ldots + f_m\alpha^m)\sin\theta\, d\theta\, d\psi.$$

En vertu de la première relation (40), le potentiel V a, pour tous les sphéroïdes $\rho = R(1 + \alpha n)$, la même valeur $4\pi R e_0$. On en conclut que l'égalité précédente est une identité en α ; d'où, en égalant à zéro le coefficient de α^m dans le second membre,

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}(e_0 f_m + e_1 f_{m-1} + \ldots + e_m)\sin\theta\, d\theta\, d\psi = 0. \tag{41}$$

La charge électrique a pour expression

$$\begin{aligned} M &= \int_\sigma e\, d\sigma = \int_\sigma e\frac{d\sigma}{\rho}R(1 + \alpha n) \\ &= R^2\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}(e_0 + e_1\alpha + \ldots + e_m\alpha^m)(1 + f_1\alpha + \ldots + f_m\alpha^m)(1 + \alpha n)\sin\theta\, d\theta\, d\psi. \end{aligned}$$

Mais, en vertu de la condition (41), cette expression se réduit à

$$M = R^2\left[4\pi e_0 + \sum_{i=1}^{i=m}\alpha^i\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} n(e_0 f_{i-1} + e_1 f_{i-2} + \ldots + e_{i-1})\sin\theta\, d\theta\, d\psi\right]. \tag{42}$$

La fonction e_{i-1} du plus haut indice qui y figure est e_{m-1}, et non e_m.

V. — Sphéroïdes très peu différents de la sphère. Sphéroïdes composés.

Supposons le sphéroïde assez peu différent de la sphère pour que les puissances de n supérieures à la première soient négligeables : c'est le cas traité par Poisson. L'expression (42) donne alors, en y remplaçant e_0 par $\frac{V}{4\pi R}$,

$$(43) \qquad M = VR\left(1 + \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} n \sin\theta \, d\theta \, d\psi\right).$$

L'intégrale qui figure au second membre est proportionnelle à l'excès du volume du sphéroïde sur celui de la sphère de rayon R. On en conclut qu'au degré d'approximation adopté, tous les sphéroïdes de même volume qui possèdent la même charge sont au même potentiel.

La série qui représente la densité électrique se réduit à ses deux premiers termes :

$$e = e_0 + e_1 = \frac{V}{4\pi R}\left[1 + \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} a_1 \frac{\sin\omega \, d\omega \, d\varphi}{\sqrt{2(1-\cos\omega)}}\right];$$

et, comme en vertu des relations (35) et (36) on a

$$a_1 = b_1 = \frac{n\cos\omega - n' + \sin\omega\left(\cos\varphi\frac{\partial n}{\partial\theta} + \frac{\sin\varphi}{\sin\theta}\frac{\partial n}{\partial\psi}\right)}{1-\cos\omega},$$

il en résulte

$$(44) \quad e = \frac{V}{4\pi R}\left[1 + \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{n\cos\omega - n' + \sin\omega\left(\cos\varphi\frac{\partial n}{\partial\theta} + \frac{\sin\varphi}{\sin\theta}\frac{\partial n}{\partial\psi}\right)}{1-\cos\omega} \frac{\sin\omega \, d\omega \, d\varphi}{\sqrt{2(1-\cos\omega)}}\right].$$

On résout ainsi, par une intégrale définie, le problème que Poisson a résolu au moyen d'un développement en série de fonctions sphériques.

Lorsque le rayon vecteur du sphéroïde est, pour toutes les régions

de la surface, une même fonction des deux angles θ et ψ, nous dirons que le sphéroïde est *simple;* nous dirons qu'un sphéroïde est *composé* s'il est formé de portions raccordées de sphéroïdes simples.

Le problème de l'équilibre électrique d'un sphéroïde composé se simplifie lorsqu'on connaît la distribution de l'électricité sur chacun des sphéroïdes simples, supposés complets, qui composent sa surface.

Pour fixer les idées, nous supposerons que ces sphéroïdes simples sont au nombre de deux seulement. Soient n, n_1 leurs excentricités en un quelconque de leurs points. Désignons par e la densité électrique en un point de la portion du premier sphéroïde simple conservée dans le sphéroïde composé, pour un potentiel égal à V; par ε la densité connue au même point du premier sphéroïde simple, supposé complet, pour le même potentiel; par e_1, ε_1 les quantités analogues à e, ε pour le second sphéroïde simple. Je dis que l'on aura

$$(45)\qquad \left\{\begin{aligned} e &= \varepsilon + \frac{V}{16\pi^2 R}\int\int \frac{n'-n'_1}{1-\cos\omega}\,\frac{\sin\omega\,d\omega\,d\varphi}{\sqrt{2(1-\cos\omega)}},\\ e_1 &= \varepsilon_1 + \frac{V}{16\pi^2 R}\int\int \frac{n'_1-n'}{1-\cos\omega}\,\frac{\sin\omega\,d\omega\,d\varphi}{\sqrt{2(1-\cos\omega)}},\end{aligned}\right.$$

la première intégrale double s'étendant à la portion conservée du second sphéroïde simple, et la seconde à la portion conservée du premier.

Pour démontrer les formules (45), il suffit d'observer que l'expression de la densité est

$$e = \frac{V}{4\pi R}\left[1 + \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{n\cos\omega - \nu' + \sin\omega\left(\cos\varphi\frac{\partial n}{\partial\theta} + \frac{\sin\varphi}{\sin\theta}\frac{\partial n}{\partial\psi}\right)}{1-\cos\omega}\,\frac{\sin\omega\,d\omega\,d\varphi}{\sqrt{2(1-\cos\omega)}}\right]$$

où la quantité ν' affecte, suivant la région où se trouve le point (ω, φ), l'une des deux formes analytiques n', n'_1. Si l'on ajoute et retranche l'intégrale

$$\frac{V}{16\pi^2 R}\int\int \frac{n'}{1-\cos\omega}\,\frac{\sin\omega\,d\omega\,d\varphi}{\sqrt{2(1-\cos\omega)}},$$

étendue à la portion supprimée du premier sphéroïde simple, l'expres-

sion précédente s'écrira

$$= \frac{V}{4\pi R}\left[1 + \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{n\cos\omega - n' + \sin\omega\left(\cos\varphi\frac{\partial n}{\partial\theta} + \frac{\sin\varphi}{\sin\theta}\frac{\partial n}{\partial\psi}\right)}{1-\cos\omega}\frac{\sin\omega\, d\omega\, d\varphi}{\sqrt{2(1-\cos\omega)}}\right]$$
$$+ \frac{V}{16\pi^2 R}\int\int \frac{n'-n'_1}{1-\cos\omega}\frac{\sin\omega\, d\omega\, d\varphi}{\sqrt{2(1-\cos\omega)}},$$

la seconde intégrale s'étendant à la partie conservée du second sphéroïde. On en conclut la première des formules (45).

L'extension de ces formules au cas où les sphéroïdes composants sont en nombre quelconque est évidente.

VI. — Distribution de l'électricité sur un conducteur ovoïde.

Appliquons ces résultats au conducteur ovoïde formé par deux demi-ellipsoïdes de révolution qui se raccordent à l'équateur. Si l'on prend pour origine le centre commun, pour plan des ψ l'équateur, les équations des deux ellipsoïdes, supposés très peu différents de la sphère, sont

$$(46) \qquad n = \nu\cos^2\theta, \qquad n_1 = \nu_1\cos^2\theta,$$

ν, ν_1 désignant les excentricités aux deux pôles.

Calculons d'abord la charge en fonction du potentiel. Soit R le rayon équatorial. L'équation (43) donne

$$M = VR\left(1 + \frac{\nu}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\sin\theta\, d\theta\, d\psi + \frac{\nu_1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\sin\theta\, d\theta\, d\psi\right),$$

$$(47) \qquad M = VR\left(1 + \frac{\nu+\nu_1}{6}\right).$$

Les densités électriques en deux points situés sur le même méridien à égale distance de l'équateur sont données par les formules (45), qui deviennent

$$(48) \qquad e = \varepsilon + \frac{V}{16\pi^2 R}J, \qquad e_1 = \varepsilon_1 - \frac{V}{16\pi^2 R}J,$$

si l'on pose

$$(49)\quad \begin{cases} J = \displaystyle\int_0^{2\pi}\int_\gamma^\pi \frac{n'-n'_1}{1-\cos\omega}\,\frac{\sin\omega\,d\omega\,d\varphi}{\sqrt{2(1-\cos\omega)}} \\ = (\nu-\nu_1)\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^\pi \cos^2\theta'\,\frac{\cos\frac{\omega}{2}}{\sin^2\frac{\omega}{2}}\,\frac{d\omega}{2}\,d\varphi, \end{cases}$$

γ désignant le plus petit arc, compris entre le point (θ, ψ) et l'équateur, du grand cercle qui passe par le point fixe (θ, ψ) et par le point variable (ω, φ).

Commençons par évaluer ε : c'est la densité électrique au point (θ, ψ) du premier ellipsoïde, supposé complet, lorsque le potentiel est égal à V. Elle est, comme on sait, proportionnelle à la distance du centre au plan tangent mené par le point (θ, ψ). Au degré d'approximation adopté, cette distance est égale à $R(1+n)$; et, si l'on appelle μ la charge, on aura, en appliquant une formule connue,

$$\varepsilon = \frac{\mu R(1+n)}{4\pi R^3(1+\nu)} = \frac{\mu}{4\pi R^2}(1-\nu)(1+n).$$

D'ailleurs, si dans l'expression (47) on fait $\nu_1 = \nu$ et par suite $M = \mu$, il vient $\mu = VR\left(1+\frac{\nu}{3}\right)$. Il en résulte

$$(50)\quad \begin{cases} \varepsilon = \dfrac{V}{4\pi R}\left(1-\dfrac{2\nu}{3}\right)(1+n) = \dfrac{V}{3\pi R}\left(1-\nu\,\dfrac{2-3\cos^2\theta}{3}\right), \\ \varepsilon_1 = \dfrac{V}{4\pi R}\left(1-\dfrac{2\nu_1}{3}\right)(1+n_1) = \dfrac{V}{4\pi R}\left(1-\nu_1\,\dfrac{2-3\cos^2\theta}{3}\right). \end{cases}$$

Passons maintenant au calcul de l'intégrale double (49) ; en y faisant

$$(51)\qquad \cos\theta' = \cos\theta\cos\omega - \sin\theta\sin\omega\cos\varphi,$$

elle devient

$$(52)\quad J = (\nu-\nu_1)\left(\cos^2\theta\int_0^{2\pi} J_1\,d\varphi + \sin^2\theta\int_0^{2\pi} J_2\cos^2\varphi\,d\varphi - 2\sin\theta\cos\theta\int_0^{2\pi} J_3\cos\varphi\,d\varphi\right),$$

si l'on pose

$$(53)\quad \left\{\begin{aligned} J_1 &= \int_\gamma^\pi \frac{\cos^2\omega\cos\frac{\omega}{2}}{\sin^2\frac{\omega}{2}}\,\frac{d\omega}{2},\\ J_2 &= \int_\gamma^\pi \frac{\sin^2\omega\cos\frac{\omega}{2}}{\sin^2\frac{\omega}{2}}\,\frac{d\omega}{2},\\ J_3 &= \int_\gamma^\pi \frac{\sin\omega\cos\omega\cos\frac{\omega}{2}}{\sin^2\frac{\omega}{2}}\,\frac{d\omega}{2}. \end{aligned}\right.$$

Entre J_1 et J_2 existe la relation

$$(54)\qquad J_1+J_2=\int_\gamma^\pi \frac{\cos\frac{\omega}{2}}{\sin^2\frac{\omega}{2}}\,\frac{d\omega}{2}=\frac{1}{\sin\frac{\gamma}{2}}-1,$$

qui permet de conclure J_1 de J_2. On trouve aisément

$$(55)\quad \left\{\begin{aligned} J_2 &= \frac{8}{3}-4\sin\frac{\gamma}{2}+\frac{4}{3}\sin^3\frac{\gamma}{2},\\ J_3 &= -2\left(\cos\frac{\gamma}{2}+\frac{2}{3}\cos^3\frac{\gamma}{2}+\log\operatorname{tang}\frac{\gamma}{4}\right). \end{aligned}\right.$$

Transportons les valeurs (54) et (55) de J_1, J_2, J_3 dans l'expression (49) de J. Après cette substitution apparaissent certaines intégrales où γ ne figure pas : nous pouvons évaluer celles-là ; pour les autres, il faut exprimer φ en fonction de γ. Or γ est ce que devient ω pour $\theta'=\frac{\pi}{2}$. Cette hypothèse, introduite dans la relation (51), donne

$$\cos\varphi=\cot\theta\cot\gamma,$$

d'où

$$d\varphi=\frac{\cos\theta}{\sin\gamma\sqrt{\sin^2\theta-\cos^2\gamma}}\,d\gamma.$$

Finalement on trouve

$$(56)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{J}{\nu-\nu_1} &= 2\pi\frac{4-15\cos^2\theta}{3} + 8\cos^3\theta\int_{\frac{\pi}{2}-\theta}^{\frac{\pi}{2}+\theta}\frac{\cos\gamma\log\operatorname{tang}\frac{\gamma}{4}}{\sin^2\gamma\sqrt{\sin^2\theta-\cos^2\gamma}}\,d\gamma \\ &\quad + \frac{8\sqrt{2}}{3}\cos^3\theta\int_{\frac{\pi}{2}-\theta}^{\frac{\pi}{2}+\theta}\frac{2+3\cos\gamma}{1+\cos\gamma}\,\frac{d\gamma}{\sin\gamma\sqrt{1-\cos\gamma}\sqrt{\sin^2\theta-\cos^2\gamma}}. \end{aligned}\right.$$

Les deux intégrales définies qui figurent dans l'expression de J ne peuvent être représentées au moyen des fonctions de l'Algèbre élémentaire; la seconde a la forme d'une période elliptique. Le problème ne pourrait être achevé que par des développements en série que nous ne chercherons pas à effectuer.

La formule (56) est inapplicable au pôle, où l'on a $\theta = 0$, $\gamma = \frac{\pi}{2}$. Mais, si l'on introduit directement ces hypothèses dans la formule de départ (49), on trouve immédiatement

$$(57)\qquad J_P = 2\pi\frac{8\sqrt{2}-11}{3}(\nu-\nu_1).$$

La formule (56) donnerait un résultat erroné si l'on cherchait à l'appliquer aux points de l'équateur; car, en ces points, l'intégration par rapport à φ doit s'étendre seulement de 0 à π, et non de 0 à 2π. Si dans l'expression (49) on fait $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\cos\theta' = -\sin\omega\cos\varphi$, on trouve alors pour valeur de J à l'équateur

$$(58)\qquad J_E = \int_0^\pi \cos^2\varphi\,d\varphi\int_0^\pi \frac{\sin^2\omega\cos\frac{\omega}{2}}{\sin^2\frac{\omega}{2}}\,\frac{d\omega}{2} = \frac{4\pi}{3}(\nu-\nu_1).$$

Aux pôles, les formules (50) donnent

$$\varepsilon = \frac{V}{4\pi R}\left(1+\frac{1}{3}\nu\right),\qquad \varepsilon_1 = \frac{V}{4\pi R}\left(1+\frac{1}{3}\nu_1\right);$$

à l'équateur,

$$\varepsilon = \frac{V}{4\pi R}\left(1 - \frac{2}{3}\nu\right), \qquad \varepsilon_1 = \frac{V}{4\pi R}\left(1 - \frac{2}{3}\nu_1\right).$$

En portant ces valeurs et celles de J_P (57) et de J_E (58) dans les formules (48), on trouve :

Densité au premier pôle..... $\frac{V}{4\pi R}\left[1 + \frac{\nu}{3} + \frac{8\sqrt{2} - 11}{6}(\nu - \nu_1)\right]$

Densité au deuxième pôle... $\frac{V}{4\pi R}\left[1 + \frac{\nu_1}{3} - \frac{8\sqrt{2} - 11}{6}(\nu - \nu_1)\right]$

Densité à l'équateur..... $\frac{V}{4\pi R}\left(1 - \frac{\nu + \nu_1}{3}\right).$

Comme on devait s'y attendre, la densité électrique reste continue lorsqu'on passe par l'équateur de l'un des demi-ellipsoïdes à l'autre.

DEUXIÈME PARTIE.

LES CONDUCTEURS OUVERTS.

CHAPITRE I.

THÉORIE GÉNÉRALE.

I. — Équation caractéristique des conducteurs ouverts.

Nous supposerons la surface ouverte S dépourvue de toute singularité; telles sont la zone, la calotte sphériques. Pour éviter les longueurs, nous dirons que l'une de ses faces est extérieure et l'autre intérieure.

Soient

M et M′ deux points de la surface S, supposée conductrice et chargée d'électricité;

r la distance de M à M', en grandeur et direction;
MN_1 la normale extérieure;
$MN_2 = n$ la normale intérieure au point M;
e_1, e_2 les densités des couches électriques extérieure et intérieure au même point;
e'_1, e'_2 les densités extérieure et intérieure en M' (ces densités sont partout finies et continues excepté sur les bords);
Q_i un des p points électrisés qui agissent par influence sur S;
q_i sa charge;
r_i la distance de M à Q_i.

Supposons qu'on sache résoudre ce problème : trouver la couche de densité $e_1 + e_2$ en équilibre sur S sous l'influence des masses fixes données. C'est le problème ordinaire de potentiel de surface posé par Green et par Gauss.

Il reste à répartir cette couche entre les deux faces du conducteur. On va voir que, pour faire ce départ, une quadrature suffit.

La surface conductrice S résulte de l'aplatissement indéfini d'un conducteur d'épaisseur très petite dont la face externe S_1 et la face interne S_2 tendent vers S comme limite commune. C'est sur ce conducteur mince que nous allons raisonner.

La normale à S au point M perce S_1 et S_2 en deux points M_1 et M_2. Dans le plan tangent à S au point M décrivons de M comme centre un cercle C de rayon très petit, quoique très grand par rapport à l'épaisseur M_1M_2; projetons ce cercle en C_1, C_2 sur S_1, S_2.

Les composantes normales de toutes les répulsions qui agissent au point M, intérieur au conducteur S_1S_2, s'entre-détruisent pour l'équilibre. Sans entrer dans des explications inutiles, nous voyons que les diverses parties du système donnent, suivant la normale intérieure n, les composantes suivantes :

Le cercle C_1	$+2\pi e_1$,
Le cercle C_2	$-2\pi e_2$,
Le reste du conducteur	$-\int_S \frac{(e'_1 + e'_2)\cos(r, n)}{r^2} dS'$,
Les masses inductrices	$-\sum^p q_i \frac{\cos(r_i, n)}{r_i^2}$.

D'où l'équation d'équilibre

$$(59)\qquad 2\pi(e_1 - e_2) = \int_S \frac{(e'_1 + e'_2)\cos(r, n)}{r^2}\, dS' + \sum_1^p q_i \frac{\cos(r_i, n)}{r_i^2}.$$

Cette équation, dont tout le second membre est connu en vertu des hypothèses, détermine la différence cherchée $e_1 - e_2$. Le problème s'achève donc par une quadrature double.

En faisant $e_2 = 0$, on retrouve l'équation fonctionnelle qui caractérise les conducteurs fermés.

Voici les conséquences les plus immédiates de la formule (59) :

1° Elle donne une limite supérieure de l'ordre d'infinitude de la densité sur les bords. En effet la différence $e_1 - e_2$ doit être finie, au moins à une certaine distance du contour. Pour qu'il en soit ainsi, il est aisé de voir que la condition suivante doit être remplie : soient M, M', M'_0 trois points du conducteur situés, le premier à distance finie du bord, le second à distance infiniment petite du bord, le troisième sur le bord même au pied de la perpendiculaire abaissée du second sur le contour; si l'on pose $MM' = r$, $MM'_0 = r_0$, $M'M'_0 = \delta$, la somme $e'_1 + e'_2$, infiniment grande en M', doit être d'un ordre inférieur à celui de $\frac{1}{r_0 - r}$, c'est-à-dire à celui de $\frac{1}{\delta}$. On en conclut facilement que la charge ne peut s'accumuler en quantité finie sur le contour, bien que la densité y soit infinie. Tous les exemples connus prouvent que, près des bords, la densité est du même ordre que $\frac{1}{\sqrt{\delta}}$.

2° Si le conducteur est convexe et soustrait à toute influence, la densité électrique est plus forte en tout point de la face externe qu'au point correspondant de la face interne; car, en vertu de la convexité supposée, tous les éléments qui entrent dans l'intégrale de la formule (59) sont positifs. De là résulte que la charge externe est plus grande que la charge interne.

II. — Répartition de la charge entre les deux faces.

Cette dernière propriété appartient à un grand nombre de conducteurs non convexes. Imaginons une surface ouverte S, limitée par un

contour fermé K. Soit ω l'angle solide sous lequel on voit le contour K d'un point quelconque de l'espace. Concevons la surface limitée lieu des points $\omega = 2\pi$ et la surface illimitée lieu des points $\omega = 0$, qui se raccordent le long de K, et supposons que S ne coupe ni l'une ni l'autre de ces surfaces.

La surface conductrice S peut être regardée comme la limite d'un conducteur extrêmement mince, dont la face extérieure S_1 et la face intérieure S_2 se coupent suivant l'arête saillante K. Soient $\mu = e\,dS$, $\mu' = e'\,dS$ deux éléments électriques correspondants de S_1 et de S_2. D'après un théorème de Gauss, les sommes des composantes normales des répulsions exercées sur S par ces deux éléments ont respectivement pour valeurs $\mu\omega$ et $-\mu(4\pi - \omega)$. Quant aux éléments situés sur l'arête vive, dont l'action serait facile à évaluer, il est inutile de s'en préoccuper, car nous venons de montrer que leur totalité ne représente pas une quantité finie d'électricité. En exprimant que les composantes normales des répulsions exercées sur la surface S, intérieure au conducteur mince, par toute l'électricité répandue sur les faces S_1, S_2 ont une somme égale à 0, on a

$$\text{(60)} \qquad \mathbf{S}\,\mu\omega = \mathbf{S}\,\mu'(4\pi - \omega).$$

Désignons par m la charge externe, par m' la charge interne, par M la charge totale, par ω_1 le maximum et par ω_2 le minimum de ω. L'égalité (60) donne lieu aux deux inégalités

$$\text{(61)} \qquad m\omega_1 > m'(4\pi - \omega_1), \qquad m\omega_2 < m'(4\pi - \omega_2),$$

d'où

$$\text{(62)} \qquad \frac{\omega_2}{4\pi} < \frac{m'}{M} < \frac{\omega_1}{4\pi}.$$

Il en résulte $m > m'$. On reconnaît aisément que cette conclusion s'applique *a fortiori* à tout conducteur S qui couperait la surface $\omega = 0$, sans couper la surface $\omega = 2\pi$.

Comme première application des formules précédentes, proposons-nous de déterminer deux limites inférieure et supérieure du rapport $\frac{m'}{M}$ pour une calotte conductrice résultant de la section d'un ellipsoïde de

révolution allongé par le plan d'un parallèle. Soient α l'angle du plan de base avec le plan tangent tout le long du contour, β le demi-angle au sommet du cône de révolution sous lequel le contour est vu du sommet de la calotte. Les angles solides correspondants sont 2α et $2\pi(1-\cos\beta)$. Des considérations géométriques assez simples montrent que ce sont là le maximum et le minimum désignés par ω_1 et ω_2. La formule (62) donne alors

$$\frac{1-\cos\beta}{2} < \frac{m'}{M} < \frac{\alpha}{2\pi}. \tag{63}$$

Comme deuxième application, cherchons à construire, sur un contour donné K, une surface conductrice S pour laquelle le rapport $\frac{m'}{M}$ ait une valeur donnée λ, plus petite que 2. L'équation (60) montre qu'il suffit de prendre pour S le lieu des points d'où l'on voit le contour K sous l'angle constant $4\pi\lambda$. En particulier, si l'on veut que la charge interne soit égale à la charge externe, l'angle en question sera égal à 2π.

Si sur le contour K on construit, en dessus, la surface $\omega = 4\pi\lambda$ et, en dessous, la surface complémentaire $\omega = 2\pi - 4\pi\lambda$, ces deux surfaces se raccordent; et, si l'on appelle m'' la charge répandue sur la seconde, le charge totale conservant la même valeur M que précédemment, on trouve, en exprimant que la somme des composantes normales des répulsions électriques est nulle sur toute surface intérieure au conducteur fermé et s'appuyant sur le contour K,

$$\frac{m''}{M} = 2\lambda,$$

d'où l'on conclut, puisque $\frac{m'}{M} = \lambda$,

$$m' = \frac{m''}{2}. \tag{64}$$

Si donc on supprime le segment inférieur et qu'on restitue la charge de ce segment au segment supérieur, cette charge se partage en deux parties égales entre les deux faces du segment conservé.

Cette propriété appartient à toute surface fermée percée de très pe-

tites ouvertures de forme quelconque et en nombre quelconque p. Supposons d'abord la surface intacte. En appelant m''_i la charge portée par la $i^{\text{ième}}$ calotte, non encore supprimée, ω_i l'angle sous lequel on voit cette calotte d'un point quelconque de la surface portant la charge μ, on trouve, par des considérations analogues à celles dont nous venons de faire usage,

$$\sum_1^p \mathrm{S}\,\mu\omega_i = 2\pi \sum_1^p m''_i. \tag{65}$$

Supprimons maintenant toutes les calottes et conservons la même charge totale : l'élément électrique, qui était μ en un point extérieur, devient $\mu(1+\varepsilon)$; à l'intérieur, de o il devient μ', et l'on aura

$$\sum_1^p \mathrm{S}\,(\mu+\varepsilon\mu)\,\omega_i = \sum_1^p \mathrm{S}\,\mu'(4\pi-\omega_i)$$

ou

$$\sum_1^p \mathrm{S}\,\mu\omega_i = 4\pi\sum_1^p m'_i - \sum_1^p \mathrm{S}\,(\varepsilon\mu+\mu')\,\omega_i.$$

On doit admettre que $\varepsilon\mu$ et μ' sont du même ordre de grandeur (pour la sphère, comme nous le verrons, on a $\varepsilon\mu = -\mu'$); il en résulte, ω_i étant infiniment petit, que dans l'équation précédente le second terme du deuxième membre est négligeable vis-à-vis du premier :

$$\sum_1^p \mathrm{S}\,\mu\omega_i = 4\pi\sum_1^p m'_i. \tag{66}$$

La comparaison entre (65) et (66) donne

$$\sum_1^p m'_i = \frac{1}{2}\sum_1^p m''_i, \tag{67}$$

C. Q. F. D.

Les principes que nous établirons plus tard permettent d'affirmer que la distribution électrique sur une surface percée d'ouvertures très petites en nombre quelconque résulte de la superposition des distri-

butions sur cette même surface percée d'une ouverture seulement : on a donc séparément $m'_i = \frac{1}{2} m''_i$.

On peut vérifier ce résultat, par un calcul direct, sur une sphère percée d'une petite ouverture circulaire, en prenant pour point de départ l'expression de la densité électrique sur la calotte sphérique donnée par sir W. Thomson [1]. On reconnaîtra de plus que la charge intérieure se concentre presque tout entière sur les bords de la petite ouverture, de sorte que le plan d'épreuve, introduit à l'intérieur de la sphère creuse, ne révélera aucune trace d'électricité.

III. — Conducteurs ouverts de forme sphérique. Disques plans.

Revenons à l'équation fondamentale (59) et appliquons-la à un conducteur formé par une portion de surface sphérique limitée par un ou plusieurs contours de forme quelconque. Nous nous dispenserons de développer les calculs, parce qu'ils sont de tout point semblables à ceux que nous avons effectués dans la première Partie (Chap. I, § II) pour déterminer l'influence d'un point électrisé sur une sphère complète.

Soient V le potentiel du conducteur ouvert; f le diamètre de la sphère dont il fait partie; en le supposant soustrait à toute influence, on trouve

$$e_1 - e_2 = \frac{V}{2\pi f}. \tag{68}$$

Donc, sur un conducteur sphérique isolé, la densité électrique en un point quelconque de la face externe surpasse la densité au point opposé de la face interne d'une quantité constante.

Cette propriété subsiste pour un nombre quelconque de conducteurs ouverts appartenant géométriquement à la même sphère; il suffit, dans la formule (68), de remplacer V par la somme ΣV de leurs potentiels : on voit que l'excès $e_1 - e_2$ est le même pour tous les conducteurs, quels que soient leurs potentiels respectifs.

Considérons maintenant un conducteur sphérique soumis à l'in-

---

[1] *Reprint*, p. 185; 1872.

fluence d'un point électrisé de charge q_1, dont la puissance par rapport à la sphère de diamètre f sera désignée par p_1. L'équation (59) donne

$$e_1 - e_2 = \frac{V}{2\pi f} - \frac{q_1 p_1}{2\pi f r_1^3}. \tag{69}$$

L'excès $e_1 - e_2$ est égal à la densité de la distribution qui serait induite par le point électrisé sur la sphère complète, supposée au même potentiel que le conducteur ouvert. Si le point électrisé est situé sur la portion de la sphère laissée vide par le conducteur et que ce conducteur communique avec le sol ($V = 0$), la densité est la même aux points en regard des deux faces. S'il y a en présence plusieurs conducteurs appartenant à la même sphère, il suffira, dans la formule (69), de remplacer V par ΣV.

Du cas d'un conducteur sphérique on passe à celui d'un disque plan en faisant $f = \infty$, $p_1 = \infty$, $\lim \frac{p_1}{f} = h_1$, h_1 désignant la distance du point électrisé au plan du disque. On obtient ainsi

$$e_1 - e_2 = -\frac{q_1 h_1}{2\pi r_1^3}. \tag{70}$$

III. — Influence de masses fixes sur les conducteurs ouverts. Réduction du problème de la distribution électrique.

Nous avons signalé dans l'Introduction la difficulté presque toujours insurmontable du problème *complet* de l'équilibre électrique d'un conducteur, problème qui consiste à déterminer la distribution de l'électricité pour toutes les positions possibles des masses inductrices. La difficulté dont nous parlons peut être notablement réduite dans le cas très étendu que voici.

Le conducteur ouvert S est un fragment d'une surface conductrice fermée Σ, pour laquelle le problème de la distribution électrique a été, par hypothèse, résolu *complètement*. Il s'agit de déterminer l'influence sur S d'une masse électrique occupant dans l'espace une position *quelconque*. Nous allons montrer que cette influence peut être calculée au moyen d'une quadrature, quand on connaît seulement

l'action sur le conducteur S d'un point courant du fragment S′ complémentaire de $S(S + S' = \Sigma)$.

Soit en effet ε la densité *connue* de la distribution induite par les masses données en un point M de la surface fermée Σ, supposée au potentiel V. Prenons ce point M sur la région S′. On connaît par hypothèse la distribution induite par l'élément électrique $-\varepsilon\, dS'$ sur le conducteur S, supposé au potentiel zéro. En vertu du principe de la superposition des influences, on peut en conclure, par intégration, la distribution e appelée sur S par la charge totale $-\int_{S'} \varepsilon\, dS'$ du fragment complémentaire S′. Répandons maintenant sur toute la surface Σ une charge de densité $+\varepsilon$. La région S′ est ramenée à l'état neutre, et le conducteur S se trouve en équilibre électrique, avec la densité $e + \varepsilon$ et le potentiel V, sous l'action de la masse donnée. Il ne reste plus qu'à répartir la couche $e + \varepsilon$ entre les deux faces, conformément à la formule (59).

S'il n'y a pas de masse inductrice, la méthode indiquée donne la distribution électrique de potentiel V en équilibre d'elle-même sur le conducteur S.

Comparons maintenant la valeur des densités électriques au même point du conducteur complet Σ et du conducteur ouvert S, pour un même potentiel V. Sur Σ la densité est ε, sur S, $e + \varepsilon$: elle est plus forte sur S que sur Σ.

L'inverse a lieu pour les charges :

$$\text{Charge de } \Sigma \ldots\ldots\ldots \quad \int_{\Sigma} \varepsilon\, d\Sigma = \int_{S} \varepsilon\, dS + \int_{S'} \varepsilon\, dS',$$

$$\text{Charge de S} \ldots\ldots\ldots \quad \int_{S} (e + \varepsilon)\, dS = \int_{S} \varepsilon\, dS + \int_{S} e\, dS.$$

Or la charge $\int_S e\, dS$, induite sur S par la charge $-\int_{S'} \varepsilon\, dS'$ répandue sur S′, est plus petite que cette dernière en valeur absolue. Si donc on détache un fragment d'une surface conductrice fermée et qu'on maintienne le fragment conservé au même potentiel, la charge se trouve diminuée.

CHAPITRE II.

SURFACES CONDUCTRICES A CONTOUR MULTIPLE.

I. — Réduction au cas des conducteurs à contour simple.

Nous arrivons à la réduction importante dont il a été parlé dans l'Introduction, et qui ramène l'équilibre électrique des surfaces conductrices à contour multiple à celui des surfaces à contour simple. Pour abréger, nous appellerons *calotte* toute surface ouverte à contour simple, *zone* toute surface ouverte à double contour, que les bords soient des lignes planes ou gauches.

Je rappelle qu'un point électrisé induit sur un conducteur au potentiel zéro une distribution dont la densité a partout le même signe; ce signe est contraire à celui de la charge du point. Ceci nous permettra, dans ce qui va suivre, de mettre en évidence le signe des densités Dorénavant, quand nous parlerons de l'influence d'un point électrisé sur un conducteur, il sera sous-entendu que ce conducteur est au potentiel zéro.

Considérons une surface fermée Σ divisée en trois parties : deux calottes C et C′ et une zone B. Nous pouvons, d'ailleurs, concevoir d'autres divisions de la surface Σ; supposons-la doublement connexe, ayant la forme d'un tore. Coupons-la par deux plans, dont l'un détache une calotte C, l'autre un tube courbé à double contour C′; la partie restante B est une surface tronquée à triple contour. Les raisonnements subséquents s'appliquent aux fragments C, C′, B, tels qu'ils viennent d'être définis.

Supposons que l'on connaisse : 1° la distribution électrique sur la surface Σ, soustraite à toute influence; 2° l'influence sur la calotte B + C d'un point électrisé occupant successivement toutes les positions possibles sur la calotte C′ complémentaire de B + C; 3° l'influence sur

$B + C'$ d'un point courant de C. De ces données on peut, comme on va voir, conclure la distribution électrique en équilibre d'elle-même sur la zone B.

Soit e la densité électrique [1] en un point de Σ pour un potentiel égal à V. Répandons sur C et C' une couche de densité $-e$. La couche $-e$ répandue sur C' induit sur $B + C$ une couche dont nous désignerons la densité par β_1 en un point de B, et par γ_1 en un point de C. La couche répandue sur C appelle sur $B + C'$ une distribution de densité β'_1 en un point de B, γ'_1 en un point de C'. Par hypothèse, on sait calculer, et cela au moyen d'une intégration, β_1, γ_1, β'_1, γ'_1. Distribuons enfin sur Σ une couche de densité $+e$. La superposition de ces divers états d'équilibre donne le résultat suivant : la zone B est en équilibre électrique, avec la densité $e + \beta_1 + \beta'_1$ et le potentiel V, sous l'influence des couches γ_1 et γ'_1 répandues sur C et sur C'.

Une couche de densité $-\gamma'_1$ répandue sur C induirait sur $B + C$ une distribution β_2, γ_2; une couche $-\gamma_1$ répandue sur C induirait sur $B + C'$ une distribution β'_2, γ'_2, que l'on sait calculer. Superposons ces nouveaux équilibres au précédent : la zone B est alors en équilibre électrique, avec la densité $e + \beta_1 + \beta'_1 + \beta_2 + \beta'_2$ et le potentiel V, sous l'influence des couches γ_2 et γ'_2 répandues respectivement sur C et sur C'.

Continuons de cette manière indéfiniment. Les couches qui, après la $n^{\text{ième}}$ opération, restent sur C et sur C' ont des densités γ_n, γ'_n qui tendent vers zéro, comme nous l'allons prouver.

En vertu d'une propriété bien connue, la charge $-C'_{n-1}$ qui réside sur C après la $n-1^{\text{ième}}$ superposition induit sur $B + C$ une charge totale $B_n + C_n$ plus petite que C'_{n-1}. On a, par suite, les deux séries d'inégalités

$$\begin{array}{ll} B_1 + C_1 < C'_0, & B'_1 + C'_1 < C_0, \\ B_2 + C_2 < C'_1, & B'_2 + C'_2 < C_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ B_n + C_n < C'_{n-1}, & B'_n + C_n < C_{n-1}, \end{array}$$

---

[1] Ou plutôt la somme des densités en deux points opposés des deux faces externe et interne du conducteur. C'est en ce sens qu'il faut entendre le mot *densité* dans tout ce qui va suivre.

que l'on peut écrire

$$\begin{array}{ll} B_1 + C_1 < C'_0, & B'_1 + C'_1 < C_0, \\ B'_2 + C'_2 < C_1, & B_2 + C_2 < C'_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ B'_n + C'_n < C_{n-1}, & B_n + C_n < C'_{n-1}. \end{array}$$

On en déduit d'abord, en supposant n pair pour fixer les idées.

$$\begin{array}{l} C_0 > C'_1 > C_2 > \ldots > C_n, \\ C'_0 > C_1 > C'_2 > \ldots > C'_n; \end{array}$$

d'où l'on conclut que les différences $C_0 - C_n$, $C'_0 - C'_n$ sont positives et finies. On en déduit ensuite, par voie d'addition,

$$(71) \qquad B_1 + B'_1 + B_2 + B'_2 + \ldots + B_n + B'_n < C_0 - C_n + C'_0 - C'_n,$$

ce qui montre que la série $\sum_1^\infty (B_n + B'_n)$ est convergente. Il en est de même *a fortiori* des deux séries $\sum_1^\infty B_n$ et $\sum_1^\infty B'_n$. Donc B_n et B'_n tendent vers zéro.

Remarquons maintenant que la charge $-C'_{n-1}$ induit sur l'ensemble de la zone B et de la calotte C la charge totale $B_n + C_n$.

Si C_n ne tendait pas vers zéro, le conducteur continu $B + C$ serait en équilibre électrique avec une charge différente de zéro sur la région C et une charge nulle sur la région B, ce qui est impossible [1].

Ce qui est vrai des charges l'est évidemment des densités : γ_n et γ'_n tendent vers zéro ; les séries $\sum_1^\infty \beta_n$ et $\sum_1^\infty \beta'_n$ sont convergentes.

On peut observer en passant que, si dans l'inégalité (71) on fait $n = \infty$ et qu'on ajoute aux deux membres B_0, charge de la zone corres-

---

[1] Car le potentiel, nul sur le conducteur $B + C$ (où il est maximum), est négatif en dehors. En passant par la région B, supposée sans charge aucune, il se continuerait sans discontinuité pour aucune de ses dérivées. Dès lors, si d'un point de B comme centre on décrit une petite sphère, la valeur du potentiel au centre, moyenne entre les valeurs aux divers points de la surface sphérique, serait négative.

pondant à la distribution de densité e, on aura

$$(72) \qquad B_0 + B_1 + B'_1 + B_2 + B'_2 + \ldots < B_0 + C_0 + C'_0,$$

c'est-à-dire que, pour un même potentiel V, la charge de la zone B est inférieure à celle de la surface fermée Σ dont cette zone a été détachée (théorème déjà démontré).

De ce qui précède nous concluons que la zone B est d'elle-même en équilibre électrique, au potentiel V, avec la densité

$$(73) \qquad e + \beta_1 + \beta'_1 + \beta_2 + \beta'_2 + \ldots + \beta_n + \beta'_n + \ldots.$$

Il ne reste plus qu'à répartir la distribution trouvée entre les deux faces de la zone. Il sera bon de faire ce départ pour les couches successives que représentent les termes de la série (73).

On peut, d'après les mêmes principes, déterminer l'influence sur la zone B d'un point électrisé de charge q situé sur l'une des calottes C ou C', sur C' par exemple. Ce point appelle sur B + C une distribution de densité $-b_1$, $-c_1$. La couche b_1 répandue sur C induirait sur B + C' une couche de densité $-b'_2$, $-c'_2$. La couche b'_1 répandue sur C' induirait sur B + C une couche de densité $-b_2$, $-c_2$, et ainsi de suite. Un raisonnement calqué sur celui du cas précédent prouverait que la zone B est en équilibre électrique, au potentiel zéro, avec la densité

$$-(b_1 + b'_1 + b_2 + b'_2 + \ldots),$$

sous l'influence de la charge q concentrée au point considéré de la calotte C'.

Si maintenant on connaît l'influence sur la surface fermée Σ d'un point électrisé situé d'une manière quelconque dans l'espace, on pourra, du résultat qui précède et d'un théorème démontré précédemment (Chap. I, § III), déduire l'influence du même point sur la zone B. Le problème *complet* de la distribution électrique sera résolu pour cette zone.

Considérons enfin une surface conductrice B à n contours; elle résulte d'une surface fermée Σ par l'ablation de n calottes C, C', C'', ..., $C^{(n-1)}$. Supposons que l'on connaisse : 1° la distribution électrique en équilibre sur Σ ; 2° l'influence d'un point quelconque de l'une des calottes C, C', C'', ..., $C^{(n-1)}$, sur le conducteur obtenu en détachant de Σ

cette seule calotte; on pourra résoudre le problème de l'équilibre électrique du conducteur à n contours B. Il n'y a pas lieu d'insister sur cette facile généralisation.

Ainsi s'opère la réduction que nous avions en vue. Un contour de plus dans la surface du conducteur amène deux séries infinies de quadratures à effectuer. On conçoit alors combien la solution du problème de la distribution de l'électricité sur une zone sphérique doit être compliquée, comparée à la solution si simple que sir W. Thomson a donnée du même problème pour la calotte sphérique. Dans le passage de la calotte à la zone, les difficultés se multiplient dans la même mesure que lorsqu'on passe d'une sphère unique à deux sphères électrisées.

Nous avons vu que, pour un conducteur sphérique de diamètre f au potentiel V, la différence entre les densités externe et interne est constante et égale à $\frac{V}{2\pi f}$; il en résulte les expressions suivantes de ces densités :

$$\text{Densité extérieure...} \quad \frac{V}{2\pi f} + \frac{1}{2}\sum_{1}^{\infty}(\beta_n + \beta'_n),$$

$$\text{Densité intérieure...} \quad \frac{1}{2}\sum_{1}^{\infty}(\beta_n + \beta'_n).$$

Sir W. Thomson a déterminé l'influence sur une calotte sphérique d'un point électrisé situé sur la calotte complémentaire. On peut donc aborder le problème de la distribution électrique sur une sphère percée d'ouvertures circulaires en nombre quelconque, et en particulier sur une zone proprement dite.

CHAPITRE III.

DISTRIBUTION DE L'ÉLECTRICITÉ SUR UNE ZONE SPHÉRIQUE.

I. — Formules de résolution.

Coupons la figure par un plan méridien. La base supérieure de la zone a pour trace sur ce plan la corde AA′ et la base inférieure la corde

BB'. Soient C, C' les pôles supérieur et inférieur des deux cercles de base. La zone AA'B'B est obtenue en détachant de la sphère les deux calottes CAB, C'A'B'. Soient P un point de la zone, Q un point de la première calotte, Q' un point de la seconde. Posons

$$\begin{array}{llllll} CA = a, & CA' = a', & CP = r, & & & \\ C'A = a, & C'A' = a', & C'P' = r', & CQ = q, & C'Q' = q', & CC' = f. \end{array}$$

Pour appliquer la théorie qui vient d'être exposée, il faut connaître la densité de la distribution appelée par un élément électrique situé au point Q de la calotte CAB sur la calotte complémentaire C'AB, supposée au potentiel zéro.

Si l'on appelle ψ l'angle des deux plans méridiens CPC', CQC', l'élément de surface au point Q a pour expression $q\,dq\,d\psi$. La densité de la distribution induite par la charge élémentaire $hq\,dq\,d\psi$ est la même sur les deux faces de la calotte CAB, en un point quelconque P; elle a pour expression (si on la double, afin d'ajouter les charges des deux faces)

$$(74) \qquad \frac{1}{\pi^2}\sqrt{\frac{a^2-q^2}{r^2-a^2}}\,\frac{hq\,dq\,d\psi}{\overline{QP}^2},$$

(*voir* THOMSON, *Reprint*, p. 183; 1872). Si l'on remplace $\overline{QP}^2$ par sa valeur en fonction de r, q, ψ et qu'on intègre par rapport à ψ de 0 à 2π, on aura la densité induite au point P par une charge uniforme répandue sur tout le parallèle Q, savoir

$$(75) \qquad \frac{h}{\pi}\,\frac{1}{\sqrt{r^2-a^2}}\,\frac{\sqrt{a^2-q^2}}{r^2-q^2}\,d(q^2).$$

Cela posé, une couche de densité γ_m répandue sur la calotte CAB induira au point P de la calotte C'AB la densité

$$(76) \qquad \beta_{m+1} = \int_0^{a^2} \frac{\gamma_m}{\pi}\,\frac{1}{\sqrt{r^2-a^2}}\,\frac{\sqrt{a^2-q^2}}{r^2-q^2}\,d(q^2),$$

et au point Q' de la même calotte, une densité que l'on trouve facilement égale à

$$(77) \qquad \gamma'_{m+1} = \int_0^{a^2} \frac{\gamma_m}{\pi}\,\frac{1}{\sqrt{a^2-q'^2}}\,\frac{\sqrt{a^2-q^2}}{f^2-q^2-q'^2}\,d(q^2).$$

Posons, pour simplifier,

$$(78)\qquad \begin{cases} a^2=\alpha, & a^2-q^2=x, & r^2-a^2=y,\\ a^2=\alpha', & a'^2-q'^2=x', & r'^2-a'^2=y',\\ a^2-a'^2=a'^2-a^2=f^2-a^2-a'^2=1; \end{cases}$$

d'où

$$\begin{gathered} r^2-q^2=x+y, \qquad a'^2-q^2=1+x,\\ r'^2-q'^2=x'+y', \qquad a^2-q'^2=1+x',\\ f^2-q^2-q'^2=1+x+x'. \end{gathered}$$

On aura, pour résoudre le problème, les formules

$$(79)\quad \beta'_{m+1}=\int_0^{\alpha}\frac{\gamma_m}{\pi}\frac{1}{\sqrt{y}}\frac{\sqrt{x}}{y+x}\,dx, \qquad \beta_{m+1}=\int_0^{\alpha'}\frac{\gamma'_m}{\pi}\frac{1}{\sqrt{y'}}\frac{\sqrt{x'}}{y'+x'}\,dx',$$

$$(80)\quad \gamma'_{m+1}=\int_0^{\alpha}\frac{\gamma_m}{\pi}\frac{1}{\sqrt{1+x'}}\frac{\sqrt{x}}{1+x+x'}\,dx, \qquad \gamma_{m+1}=\int_0^{\alpha'}\frac{\gamma'_m}{\pi}\frac{1}{\sqrt{1+x}}\frac{\sqrt{x'}}{1+x+x'}\,dx',$$

auxquelles il faut adjoindre celles-ci

$$(81)\qquad \gamma_0=\gamma'_0=e=\frac{V}{2\pi f}.$$

Les limites des quantités x, x', y, y' sont données par le Tableau :

$$(82)\qquad \begin{cases} 0\leqq x\leqq\alpha, & 0\leqq y\leqq 1,\\ 0\leqq x'\leqq\alpha', & 0\leqq y'\leqq 1. \end{cases}$$

Dans ce qui suit, nous supposerons α et α' plus petits que l'unité, c'est-à-dire la zone plus grande que l'une et l'autre des calottes CAB, C'A'B'. A cette condition, les développements en série auxquels nous allons parvenir seront convergents.

II. — Calcul de γ'_{m+1}.

Le problème consiste à déterminer β'_m et β_m; mais il convient d'abord de chercher la forme des inconnues auxiliaires γ'_m, γ_m, qui ne deviennent jamais infinies. Nous allons voir que ces inconnues sont développables en séries triples ordonnées suivant les puissances entières de x (ou x'), $\sqrt{\alpha}$, $\sqrt{\alpha'}$. Ces trois quantités sont plus petites que 1 : si nous

appelons *ordre d'un terme* la somme des exposants de x, α, α' dans ce terme, nous reconnaîtrons que le premier terme de γ_m est de l'ordre $m + \frac{m}{2}$; c'est, à un facteur numérique près,

$$(83)\qquad A_m = \begin{cases} \alpha^{\frac{m}{2}} \alpha'^{\frac{m}{2}} \sqrt{\alpha^{\frac{m}{2}} \alpha'^{\frac{m}{2}}} & \text{si } m \text{ est pair,} \\ \alpha^{\frac{m-1}{2}} \alpha'^{\frac{m+1}{2}} \sqrt{\alpha^{\frac{m-1}{2}} \alpha'^{\frac{m+1}{2}}} & \text{si } m \text{ est impair.} \end{cases}$$

Posons donc

$$(84)\qquad \gamma_m = \frac{e}{\pi^m} A_m \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \sum_{\lambda'=0}^{\lambda'=\infty} \Phi_m(\nu, \lambda, \lambda') x^\nu \alpha^\lambda \alpha'^{\lambda'},$$

et cherchons si γ'_{m+1} est susceptible d'une expression de la même forme

$$(85)\qquad \gamma'_{m+1} = \frac{e}{\pi^{m+1}} A'_{m+1} \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \sum_{\lambda'=0}^{\lambda'=\infty} \Phi'_{m+1}(\nu, \lambda, \lambda') x'^\nu \alpha^\lambda \alpha'^{\lambda'},$$

$$(86)\qquad A'_{m+1} = A_m \alpha \sqrt{\alpha} = \begin{cases} \alpha^{\frac{m}{2}+1} \alpha'^{\frac{m}{2}} \sqrt{\alpha^{\frac{m}{2}+1} \alpha'^{\frac{m}{2}}} & \text{si } m \text{ est pair,} \\ \alpha^{\frac{m+1}{2}} \alpha'^{\frac{m+1}{2}} \sqrt{\alpha^{\frac{m+1}{2}} \alpha'^{\frac{m+1}{2}}} & \text{si } m \text{ est impair.} \end{cases}$$

Il s'agit de déterminer le coefficient numérique Φ'_{m+1} en fonction de Φ_m. On peut remarquer qu'en vertu de la symétrie entre α et α' on a l'égalité

$$(87)\qquad \Phi_m(\nu, \lambda, \lambda') = \Phi'_m(\nu, \lambda', \lambda).$$

Notre analyse montrera que $\Phi_m(\nu, \lambda, \lambda')$ est une fonction rationnelle des arguments entiers ν, λ, λ'.

Pour calculer Φ'_{m+1} revenons à la formule

$$(80)\qquad \gamma'_{m+1} = \int_0^\alpha \frac{\gamma_m}{\pi} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+x'}(1+x+x')} dx.$$

Si l'on développe $\frac{1}{1+x+x'}$ et $\frac{1}{\sqrt{1+x'}}$ suivant les puissances croissantes de x', le terme de degré $i-1$ dans le premier développement

et le terme de degré $\nu - i + 1$ dans le second seront respectivement

$$(88)\qquad (-1)^{i-1}\frac{x'^{i-1}}{(1+x)^i},\quad (-1)^{\nu-i+1}\frac{1.3\ldots[2(\nu-i)+1]}{1.2\ldots(\nu-i+1)}\frac{x'^{\nu-i+1}}{2^{\nu-i+1}}.$$

On a donc, en convenant que $\frac{1.3\ldots[2(\nu-i)+1]}{1.2\ldots(\nu-i+1)} = 1$ pour $i = \nu + 1$,

$$(89)\qquad \frac{1}{\sqrt{1+x'}(1+x+x')} = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty}(-1)^\nu x'^\nu \sum_{i=1}^{i=\nu+1}\frac{1.3\ldots[2(\nu-i)+1]}{1.2\ldots(\nu-i+1)}\frac{(1+x)^{-i}}{2^{\nu-i+1}};$$

et pour toutes les valeurs de x', qui, d'après les hypothèses, sont comprises entre 0 et 1, cette série est absolument convergente, comme les deux séries dont elle est le produit.

La substitution de la série (89) dans l'expression (80) donne

$$(90)\qquad \gamma'_{m+1} = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty}(-1)^\nu x'^\nu \int_0^\alpha \frac{\gamma_m}{\pi}\sum_{i=1}^{i=\nu+1}\frac{1.3\ldots[2(\nu-i)+1]}{1.2\ldots(\nu-i+1)}\frac{(1+x)^{-i}}{2^{\nu-i+1}}\sqrt{x}\,dx.$$

En développant $(1+x)^{-i}$, on obtient une série absolument convergente entre $x = 0$ et $x = 1$, et dont le terme de degré j est

$$(-1)^j\frac{i(i+1)\ldots(i+j-1)}{1.2\ldots j}x^j.$$

Si donc on pose

$$(91)\qquad \psi(\nu, j) = \sum_{i=1}^{i=\nu+1}\frac{i(i+1)\ldots(i+j-1)}{1.2\ldots j}\frac{1.3\ldots[2(\nu-i)+1]}{1.2\ldots(\nu-i+1)}\frac{(-1)^j}{2^{\nu-i+1}},$$

en convenant que, pour $j = 0$, $\frac{i(i+1)\ldots(i+j-1)}{1.2\ldots i} = 1$, on aura

$$(92)\qquad \gamma'_{m+1} = \sum_{n=0}^{n=\infty}(-1)^\nu x'^\nu \int_0^\alpha \frac{\gamma_m}{\pi}\sum_{j=0}^{j=\infty}\psi(\nu, j)\,x^j\sqrt{x}\,dx.$$

Nous avons supposé γ_m exprimable par une série triple de la forme (84). Cette série se réduit, pour γ_0, au seul terme constant $e = \frac{V}{2\pi f}$, en vertu de la condition (81). Les transformations que nous allons

faire subir au second membre de l'expression (92) amèneront alors pour γ'_1 une série absolument convergente, comme on pourra s'en convaincre en suivant les opérations une à une. Il en sera de même pour γ_1; la série γ_1 étant absolument convergente, les mêmes transformations donneront pour γ'_2 une série absolument convergente, et ainsi de suite.

Prenons dans γ_m le terme $\frac{e}{\pi^m} A_m \Phi_m(n, l, l') x^n \alpha^l \alpha'^{l'}$, et dans l'expression de γ'_{m+1} mettons en évidence sous le signe $\int$ le terme

$$\frac{e}{\pi^{m+1}} A_m \Phi_m(n, l, l') \psi(\nu, j) x^{n+j} \alpha^l \alpha'^{l'}.$$

Faisons $n + j = k$, d'où

$$n = k - j \qquad (j = 0, 1, 2, \ldots, k);$$

le terme en $x^k \alpha^l \alpha'^{l'}$ sera

$$\frac{e}{\pi^{m+1}} A_m \chi(\nu, l, l', k) x^k \alpha^l \alpha'^{l'},$$

si l'on pose

$$\chi(\nu, l, l', k) = \sum_{j=0}^{j=k} \Phi_m(k - j, l, l') \psi(\nu, j). \tag{93}$$

L'intégration donne

$$\int_0^\alpha \frac{e}{\pi^{m+1}} A_m \chi(\nu, l, l', k) x^k \alpha^l \alpha'^{l'} \sqrt{x}\, dx$$
$$= \frac{e}{\pi^{m+1}} A_m \sqrt{\alpha} \frac{2}{2k+3} \chi(\nu, l, l', k) \alpha^{k+l+1} \alpha'^{l'}.$$

Faisons $l' = \lambda'$, $k + l = \lambda$, d'où

$$l = \lambda - k \qquad (k = 0, 1, \ldots, \lambda);$$

le terme en $\alpha^\lambda \alpha'^{\lambda'}$ sera

$$\frac{e}{\pi^{m+1}} A_m \alpha \sqrt{\alpha} \sum_{k=0}^{k=\lambda} \frac{2}{2k+3} \chi(\nu, \lambda - k, \lambda', k) \alpha^\lambda \alpha'^{\lambda'};$$

et si l'on pose

$$(94)\qquad \begin{cases} A_m \alpha\sqrt{\alpha} = A'_{m+1}, \\ \Phi'_{m+1}(\nu, \lambda, \lambda') = (-1)^\nu \displaystyle\sum_{k=0}^{k=\lambda} \frac{2}{2k+3} \chi(\nu, \lambda - k, \lambda', k), \end{cases}$$

on trouve finalement, comme nous l'avons annoncé,

$$(95)\qquad \gamma'_{m+1} = \frac{e}{\pi^{m+1}} A'_{m+1} \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \sum_{\lambda'=0}^{\lambda'=\infty} \Phi'_{m+1}(\nu, \lambda, \lambda') x^{l\nu} \alpha^\lambda \alpha'^{\lambda'}.$$

Si, dans la ormule (94), on remplace les symboles ψ et χ par leurs valeurs (91) et (93), on aura

$$(96)\qquad \begin{cases} \Phi'_{m+1}(\nu, \lambda, \lambda') \\ \quad = (-1)^\nu \displaystyle\sum_{k=0}^{k=\lambda} \sum_{j=0}^{j=k} \sum_{i=1}^{i=\nu+1} \frac{\Phi_m(k-j, \lambda-k, \lambda')}{2k+3} \frac{i(i+1)\ldots(i+j-1)}{1.2\ldots j} \frac{1.3\ldots[2(\nu-i)+1]}{1.2\ldots(\nu-i+1)} \frac{(-1)^i}{2^{\nu-i}}. \end{cases}$$

Comme γ_0 se réduit à la constante e, il en résulte $\Phi'_0(\nu, \lambda, \lambda') = 0$ pour toutes les valeurs des arguments, sauf pour le système $\nu = \lambda = \lambda' = 0$, qui donne $\Phi'_0(0, 0, 0) = 1$. On voit alors que $\Phi'_{m+1}(\nu, \lambda, \lambda')$ est une fonction rationnelle des arguments entiers ν, λ, λ'.

III. — Calcul de β'_{m+1}.

Arrivons enfin au calcul de

$$(79)\qquad \beta'_{m+1} = \int_0^\alpha \frac{\gamma_m}{\pi} \frac{1}{\sqrt{y}} \frac{\sqrt{x}}{y+x} dx.$$

Dans le développement de γ_m, prenons le terme

$$\frac{e}{\pi^m} A_m \Phi_m(n, l, l') x^n \alpha^l \alpha'^{l'},$$

et effectuons la division

$$(97)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{x^n}{x+y} &= x^{n-1} - yx^{n-2} + \ldots + (-1)^{\nu+1} y^{\nu+1} x^{n-\nu-2} + \ldots \\ &\qquad + (-1)^{n-1} y^{n-1} + (-1)^n \frac{y^n}{x+y}. \end{aligned}\right.$$

Il y aura dans l'expression de β'_{m+1} trois sortes de termes de nature analytique différente, suivant qu'ils proviendront de $(-1)^n \frac{y^n}{x+y}$, de x^{n-1}, de $(-1)^{\nu+1} y^{\nu+1} x^{n-\nu-2}$.

1° *Termes qui proviennent de* $(-1)^n \frac{y^n}{x+y}$. — L'intégration donne

$$\begin{aligned} &\frac{e}{\pi^{m+1}} A_m (-1)^n y^n \Phi_m(n, l, l') \alpha^l \alpha'^{l'} \int_0^\alpha \sqrt{\frac{x}{y}} \frac{dx}{y+x} \\ &= \frac{2e}{\pi^{m+1}} A_m (-1)^n y^n \alpha^l \alpha'^{l'} \Phi_m(n, l, l') \left(\sqrt{\frac{\alpha}{y}} - \operatorname{arc\,tang} \sqrt{\frac{\alpha}{y}}\right). \end{aligned}$$

Le terme en $\operatorname{arc\,tang} \sqrt{\frac{\alpha}{y}}$ fournit à β'_{m+1} la série triple

$$(98)\quad -\frac{e}{\pi^{m+1}} A_m \operatorname{arc\,tang} \sqrt{\frac{\alpha}{y}} \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \sum_{\lambda'=0}^{\lambda'=\infty} (-1)^\nu \Phi_m(\nu, \lambda, \lambda') y^\nu \alpha^\lambda \alpha'^{\lambda'}.$$

Quant aux termes en $\sqrt{\frac{\alpha}{y}}$, nous les séparerons, pour en tenir compte tout à l'heure, en deux catégories, dont la première comprendra les termes correspondant à $n = 0$, savoir

$$(99)\quad \frac{2e}{\pi^{m+1}} A_m \Phi_m(0, \lambda, \lambda') \alpha^\lambda \alpha'^{\lambda'} \sqrt{\frac{\alpha}{y}},$$

et la seconde les termes correspondant à toutes les valeurs $\nu + 1$ de n autres que zéro, savoir

$$(100)\quad \frac{2e}{\pi^{m+1}} A_m (-1)^{\nu+1} y^\nu \alpha^\lambda \alpha'^{\lambda'} \Phi_m(\nu+1, \lambda-1, \lambda') \sqrt{\frac{y}{\alpha}}.$$

2° *Termes qui proviennent de* x^{n-1}. — On trouve en intégrant

$$\frac{e}{\pi^{m+1}}\frac{A_m}{\sqrt{y}}\Phi_m(n, l, l')\alpha^l\alpha'^{l'}\int_0^\alpha x^{n-1}\sqrt{x}\,dx$$
$$=\frac{e}{\pi^{m+1}}A_m\sqrt{\frac{\alpha}{y}}\frac{2}{2n+1}\Phi_m(n, l, l')\alpha^{n+l}\alpha'^{l'}.$$

Aux termes de cette nature il faut réunir le terme (99) correspondant à $n = 0$. Si l'on pose $l' = \lambda'$, $n + l = \lambda$, d'où

$$l = \lambda - n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots, \lambda),$$

et

$$F_m(\lambda, \lambda') = \sum_{n=0}^{n=\lambda}\frac{2}{2n+1}\Phi_m(n, \lambda - n, \lambda'), \tag{101}$$

on trouvera dans β'_{m+1} la série double

$$\frac{e}{\pi^{m+1}}A_m\sqrt{\frac{\alpha}{y}}\sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty}\sum_{\lambda'=0}^{\lambda'=\infty}F_m(\lambda, \lambda')\alpha^\lambda\alpha'^{\lambda'}. \tag{102}$$

3° *Termes qui proviennent de* $(-1)^{\nu+1}y^{\nu+1}x^{n-\nu-2}$. — L'intégration donne

$$\frac{e}{\pi^{m+1}}A_m(-1)^{\nu+1}y^\nu\sqrt{y}\,\Phi_m(n, l, l')\alpha^l\alpha'^{l'}\int_0^\alpha x^{n-\nu-2}\sqrt{x}\,dx$$
$$=\frac{e}{\pi^{m+1}}A_m\sqrt{\frac{y}{\alpha}}\frac{2}{2(n-\nu)-1}\Phi_m(n, l, l')y^\nu\alpha^{l+n-\nu}\alpha'^{l'}.$$

Aux termes de cette nature il faut réunir le terme (100) correspondant à $n = \nu + 1$ (le quotient $\frac{x^n}{x+y}$ ne peut fournir un terme en $y^{\nu+1}$ qu'à partir de $n = \nu + 2$). Si l'on pose $l' = \lambda'$, $l + n - \nu = \lambda$, d'où

$$n = \lambda + \nu - l \qquad (l = 0, 1, 2, \ldots, \lambda - 1),$$

et

$$\Psi_m(\nu, \lambda, \lambda') = \sum_{=0}^{l=\lambda-1}(-1)^{\nu+1}\frac{2\Phi_m(\lambda+\nu-l, l, \lambda')}{2(\lambda-l)-1}, \tag{103}$$

on aura dans β'_{m+1} la série

$$(104)\qquad \frac{e}{\pi^{m+1}}\sqrt{\frac{y}{\alpha}}\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty}\sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty}\sum_{\lambda'=0}^{\lambda'=\infty}\Psi_m(\nu,\lambda,\lambda')\,y^\nu\alpha^\lambda\alpha'^{\lambda'}.$$

IV. — Solution par les séries multiples.

En réunissant les termes de nature diverse qui viennent d'être calculés (98), (102), (104), et en remplaçant e par sa valeur $\frac{V}{2\pi f}$, on trouve finalement

$$(105)\qquad \beta'_{m+1}=\frac{V}{2\pi^{m+2}f}A_m\left\{\begin{array}{l}\sqrt{\frac{\alpha}{y}}\sum\limits_{\lambda=0}^{\lambda=\infty}\sum\limits_{\lambda'=0}^{\lambda'=\infty}F_m(\lambda,\lambda')\alpha^\lambda\alpha'^{\lambda'}\\ +\operatorname{arc\,tang}\sqrt{\frac{\alpha}{y}}\sum\limits_{\nu=0}^{\nu=\infty}\sum\limits_{\lambda=0}^{\lambda=\infty}\sum\limits_{\lambda'=0}^{\lambda'=\infty}(-1)^\nu\Phi_m(\nu,\lambda,\lambda')\,y^\nu\alpha^\lambda\alpha'^{\lambda'}\\ +\sqrt{\frac{y}{\alpha}}\sum\limits_{\nu=0}^{\nu=\infty}\sum\limits_{\lambda=0}^{\lambda=\infty}\sum\limits_{\lambda'=0}^{\lambda'=\infty}\Psi_m(\nu,\lambda,\lambda')\,y^\nu\alpha^\lambda\alpha'^{\lambda'}\end{array}\right\},$$

où les symboles A_m, Φ_m, F_m, Ψ_m ont des significations données par les formules (83), (96), (101), (103), que nous reproduisons :

$$(83)\qquad A_m=\left\{\begin{array}{ll}\alpha^{\frac{m}{2}}\alpha'^{\frac{m}{2}}\sqrt{\alpha^{\frac{m}{2}}\alpha'^{\frac{m}{2}}} & \text{si } m \text{ est pair,}\\ \alpha^{\frac{m-1}{2}}\alpha'^{\frac{m+1}{2}}\sqrt{\alpha^{\frac{m-1}{2}}\alpha'^{\frac{m+1}{2}}} & \text{si } m \text{ est impair,}\end{array}\right.$$

$$(101)\qquad F_m(\lambda,\lambda')=\sum_{n=0}^{n=\lambda}\frac{2}{2n+1}\Phi_m(n,\lambda-n,\lambda'),$$

$$(103)\qquad \Psi_m(\nu,\lambda,\lambda')=(-1)^{\nu+1}\sum_{l=0}^{l=\lambda-1}\frac{2\Phi_m(\lambda+\nu-l,l,\lambda')}{2(\lambda-l)-1},$$

$$(96')\qquad \Phi_m(\nu,\lambda,\lambda')=(-1)^\nu\sum_{k=0}^{k=\lambda}\sum_{j=0}^{j=k}\sum_{i=1}^{i=\nu+1}\left\{\begin{array}{l}\frac{\Phi'_{m-1}(k-j,\lambda-k,\lambda')}{2k+3}\,\frac{i(i+1)\ldots(i+j-1)}{1.2\ldots j}\\ \times\frac{1.3\ldots[2(\nu-i)+1]}{1.2\ldots(\nu-i+1)}\,\frac{(-1)^j}{2^{\nu-i}},\end{array}\right.$$

$$(106)\qquad \Phi_m(\nu,\lambda,\lambda')=\Phi'_m(\nu,\lambda',\lambda),\qquad \Phi_0(\nu,\lambda,\lambda')=0,\qquad \Phi_0(0,0,0)=1.$$

Les expressions de F_m, Ψ_m, Φ_m montrent que ces coefficients purement numériques sont des fonctions rationnelles des arguments entiers qui y figurent. La valeur de A_m montre que l'ordre de petitesse des fonctions β, β' va chaque fois en croissant d'une unité et demie.

Reportons-nous maintenant aux expressions des densités

$$\text{Densité extérieure.....} \quad \frac{V}{2\pi f} + \frac{1}{2}\sum_1^\infty (\beta_m + \beta'_m)$$

$$\text{Densité intérieure.....} \quad \frac{1}{2}\sum_1^\infty (\beta_m + \beta'_m).$$

De là résulte pour la densité intérieure e_i l'expression

$$(107)\quad \left\{ \begin{aligned} e_i = \frac{V}{2\pi^2 f}\Bigg[& S_1\left(\alpha'^{\frac{1}{2}}, \alpha^{\frac{1}{2}}\right)\sqrt{\frac{\alpha'}{y'}} + S_2\left(\alpha'^{\frac{1}{2}}, \alpha^{\frac{1}{2}}, y'\right)\operatorname{arc\,tang}\sqrt{\frac{\alpha'}{y'}} + S_3\left(\alpha'^{\frac{1}{2}}, \alpha^{\frac{1}{2}}, y'\right)\sqrt{\frac{y'}{\alpha'}} \\ & + S_1\left(\alpha^{\frac{1}{2}}, \alpha'^{\frac{1}{2}}\right)\sqrt{\frac{\alpha}{y}} + S_2\left(\alpha^{\frac{1}{2}}, \alpha'^{\frac{1}{2}}, y\right)\operatorname{arc\,tang}\sqrt{\frac{\alpha}{y}} + S_3\left(\alpha^{\frac{1}{2}}, \alpha'^{\frac{1}{2}}, y\right)\sqrt{\frac{y}{\alpha}}\Bigg], \end{aligned} \right.$$

où les symboles S_1, S_2, S_3 désignent des séries entières par rapport à leurs arguments $\sqrt{\alpha}$, $\sqrt{\alpha'}$, y' ou y. Dans ces séries, les coefficients numériques des termes des différents ordres s'obtiennent par un nombre *limité* d'opérations *rationnelles* faites sur le nombre incommensurable π.

Voici les calculs de ces séries exécutés jusqu'aux termes du quatrième ordre inclusivement :

$$(108)\quad \left\{ \begin{aligned} S_1\left(\alpha'^{\frac{1}{2}}, \alpha^{\frac{1}{2}}\right) = {} & 1 + \frac{2}{3\pi}\alpha^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5\pi}\alpha^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{3\pi}\alpha^{\frac{3}{2}}\alpha' + \frac{4}{9\pi^2}\alpha^{\frac{3}{2}}\alpha'^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{7\pi}\alpha^{\frac{7}{2}} \\ & + \frac{1}{3\pi}\alpha^{\frac{5}{2}}\alpha' + \frac{1}{4\pi}\alpha^{\frac{3}{2}}\alpha'^2 - \frac{2}{5\pi^2}\alpha^{\frac{5}{2}}\alpha'^{\frac{3}{2}} - \frac{22}{45\pi^2}\alpha^{\frac{3}{2}}\alpha'^{\frac{5}{2}}, \\ S_2\left(\alpha'^{\frac{1}{2}}, \alpha^{\frac{1}{2}}, y\right) = {} & -1 - \frac{2}{3\pi}\alpha^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{5\pi}\alpha^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{\pi}\alpha^{\frac{3}{2}}y' - \frac{4}{9\pi^2}\alpha^{\frac{3}{2}}\alpha'^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{7\pi}\alpha^{\frac{7}{2}} \\ & + \frac{1}{\pi}\alpha^{\frac{5}{2}}y' - \frac{5}{4\pi}\alpha^{\frac{3}{2}}y'^2 - \frac{2}{3\pi^2}\alpha^{\frac{5}{2}}\alpha'^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{15\pi^2}\alpha^{\frac{3}{2}}\alpha'^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3\pi^2}\alpha^{\frac{3}{2}}\alpha'^{\frac{3}{2}}y', \\ S_3\left(\alpha'^{\frac{1}{2}}, \alpha^{\frac{1}{2}}, y'\right) = {} & \frac{1}{\pi}\alpha^{\frac{3}{2}}\alpha' - \frac{1}{\pi}\alpha^{\frac{5}{2}}\alpha' - \frac{5}{12\pi}\alpha^{\frac{3}{2}}\alpha'^2 + \frac{5}{4\pi}\alpha^{\frac{3}{2}}\alpha'y' + \frac{2}{3\pi^2}\alpha^{\frac{3}{2}}\alpha'^{\frac{5}{2}}. \end{aligned} \right.$$

En faisant $\alpha = 0$, on retrouve la loi de la distribution électrique sur la calotte sphérique

$$e_l = \frac{V}{2\pi^2 f}\left(\sqrt{\frac{\alpha'}{y'}} - \operatorname{arc\,tang}\sqrt{\frac{\alpha'}{y'}}\right). \tag{109}$$

C'est, aux notations près, la formule obtenue par sir W. Thomson (*Reprint*, p. 185; 1872).