L. SAUVAGE

Sur les solutions régulières d'un système d'équations différentielles

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 3 (1886), p. 391-404
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1886_3_3__391_0>

SUR LES SOLUTIONS RÉGULIÈRES

D'UN

SYSTÈME D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES,

PAR M. L. SAUVAGE,

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE MARSEILLE.

1. Dans son Mémoire fondamental sur les équations différentielles linéaires et homogènes [1], M. Fuchs démontre le théorème suivant :

L'équation différentielle linéaire

$$\frac{d^m y}{dx^m} = \frac{P_1(x)}{x-a}\frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \frac{P_2(x)}{(x-a)^2}\frac{d^{m-2} y}{dx^{m-2}} + \cdots + \frac{P_m(x)}{(x-a)^m} y,$$

où les fonctions $P_1(x)$, $P_2(x)$, ..., $P_m(x)$ *sont des fonctions uniformes et continues dans le domaine du point* a, *admet dans le domaine de ce point un système fondamental d'intégrales dont tous les éléments restent finis pour* $x = a$ *quand on les a préalablement multipliés par une puissance convenable de* $x - a$.

Les intégrales de ce système fondamental peuvent être mises sous la forme

$$F = \left\{ \varphi_0 + \varphi_1 \log(x-a) + \ldots + \varphi_n [\log(x-a)]^n \right\} (x-a)^r,$$

où φ_0, φ_1, ..., φ_n sont des fonctions uniformes de x dans le domaine du point a, et qui sont infinies d'ordre fini pour $x = a$. M. Thomé appelle ces fonctions des *expressions régulières;* nous adopterons cette dénomination.

---

(1) *Journal de Crelle*, t. 66, p. 121. *Voir* la Thèse de M. Tannery.

Le but de ce Mémoire est de généraliser le théorème précédent en l'appliquant aux systèmes d'équations différentielles linéaires de la forme

$$(x - x_0)\frac{dy_i}{dx} = a_{i1}y_1 + \ldots + a_{in}y_n \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

où les coefficients a sont des fonctions holomorphes dans le domaine du point x_0. Nous nous proposons de montrer que *toutes les solutions* de ce système peuvent être composées linéairement avec des expressions régulières dans le domaine du point x_0. Nous verrons, de plus, que ce système d'équations n'est pas le seul qui jouisse de cette propriété importante.

Pour simplifier l'écriture, nous supposerons le point x_0 ramené à l'origine et nous considérerons le système

$$(1) \qquad x\frac{dy_i}{dx} = a_{i1}y_1 + \ldots + a_{in}y_n \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

2. Nous démontrerons d'abord que le système (1) admet au moins une solution dont les éléments sont de la forme

$$(2) \qquad x^r\varphi_1, \quad x^r\varphi_2, \quad \ldots, \quad x^r\varphi_n,$$

$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ étant des fonctions uniformes et continues dans le domaine de l'origine, développables en séries à coefficients constants de la forme

$$(3) \qquad \begin{cases} \varphi_i = \varphi_{i0} + x\varphi_{i1} + x^2\varphi_{i2} + \ldots + x^\mu\varphi_{i\mu} + \ldots \\ \quad (i = 1, 2, \ldots, n;\ \mu = 0, 1, 2, \ldots, \infty). \end{cases}$$

Il nous suffira de montrer qu'on peut déterminer le nombre r et les coefficients des séries (3) de manière que ces séries soient convergentes et que les expressions (3) satisfassent au système d'équations (1).

Posons donc

$$y = x^r\varphi,$$

nous aurons

$$x\frac{dy}{dx} = x^r\left(x\frac{d\varphi}{dx} + r\varphi\right).$$

En substituant dans le système proposé (1) ces valeurs des fonctions y et de leurs dérivées $\frac{dy}{dx}$, et en divisant par x^r, on obtient les équations

$$(4) \qquad x\frac{d\varphi_i}{dx} = a_{i1}\varphi_1 + \ldots + (a_{ii} - r)\varphi_i + \ldots + a_{in}\varphi_n \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Posons maintenant

$$(5) \qquad \left\{ \begin{array}{c} a_{ik} = a_{ik}^0 + x a_{ik}^1 + \ldots + x^\mu a_{ik}^\mu + \ldots \\ (i = 1, 2, \ldots, n; \;\; k = 1, 2, \ldots, n; \;\; \mu = 0, 1, 2, \ldots, \infty). \end{array} \right.$$

Les séries (5) à coefficients constants représentent dans un certain domaine de l'origine les fonctions a_{ik}.

Le système (4) devra être rendu identique quand on aura remplacé les coefficients et les inconnues par les séries correspondantes. On aura comme première condition d'identité

$$F(r) = \begin{vmatrix} a_{11}^0 - r & a_{12}^0 & \ldots & a_{1n}^0 \\ a_{21}^0 & a_{22}^0 - r & \ldots & a_{2n}^0 \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}^0 & a_{n2}^0 & \ldots & a_{nn}^0 - r \end{vmatrix} = 0.$$

Il résulte de là que le nombre r ne pourra être que l'une des racines de l'équation algébrique de degré n

$$F(r) = 0.$$

Par analogie avec le théorème de M. Fuchs, nous appellerons cette équation l'*équation fondamentale déterminante relative au point* $x = 0$.

3. Soient $r_1, r_2, \ldots, r_n$ les n racines de l'équation fondamentale déterminante, rangées de manière qu'aucune des quantités $r_2 - r_1 - 1$, $r_3 - r_1 - 1, \ldots, r_n - r_1 - 1$ ne soit nulle ou égale à un entier positif. Cette condition sera remplie si les parties réelles ne vont jamais en croissant quand on passe d'une racine à la suivante. La quantité $r_1 + k$, quelle que soit la valeur du nombre entier et positif k, n'annulera jamais $F(r)$.

Nous allons montrer que l'on peut déterminer des séries convergentes $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, telles que

$$x^{r_1}\varphi_1, \quad x^{r_1}\varphi_2, \quad \ldots, \quad x^{r_1}\varphi_n$$

forment une solution du système proposé.

Nous écrirons r au lieu de r_1, avec cette condition que le nombre $r+k$ n'annule jamais $F(r)$ pour k entier et positif.

Revenons aux équations (4) où l'on suppose qu'on a introduit les séries (3) et (5). Continuons à identifier les deux membres de chacune de ces équations, nous aurons, en égalant les coefficients de x^k,

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} k\varphi_{ik} = {} & a_{i1}^0\varphi_{1k} + \ldots + (a_{ii}^0 - r)\varphi_{ik} + \ldots + a_{in}^0\varphi_{nk} \\ & + a_{i1}^1\varphi_{1,k-1} + \ldots + a_{ii}^1\varphi_{i,k-1} + \ldots + a_{in}^1\varphi_{n,k-1} \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + a_{i1}^k\varphi_{10} + \ldots + a_{i1}^k\varphi_{i0} + \ldots + a_{in}^k\varphi_{n0} \\ & \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \end{aligned}\right.$$

Ce système d'équations est du premier degré par rapport aux coefficients $\varphi_{1k}, \varphi_{2k}, \ldots, \varphi_{nk}$ et permet de les déterminer en fonctions des coefficients φ dont le second indice est moindre. En effet, le déterminant des coefficients des inconnues est

$$\begin{vmatrix} a_{11}^0 - r - k & a_{12}^0 & \ldots & a_{1n}^0 \\ a_{21}^0 & a_{22}^0 - r - k & \ldots & a_{2n}^0 \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}^0 & a_{n2}^0 & \ldots & a_{nn}^0 - r - k \end{vmatrix} = F(r+k).$$

Ce déterminant ne pouvant être annulé par aucune valeur du nombre entier et positif k, on pourra déterminer de proche en proche les coefficients des séries φ.

4. Démontrons que les séries φ obtenues dans le paragraphe précédent sont convergentes dans le domaine de l'origine.

Appelons ρ le rayon d'un cercle ayant pour centre l'origine, et dans lequel les séries a soient toutes convergentes, même aux points situés sur la circonférence. On pourra prendre ce nombre ρ assez petit pour que le module d'un terme quelconque $a_{ij}^{\mu}\rho^{\mu}$ des séries a soit aussi petit qu'on le voudra, pourvu qu'on laisse de côté les premiers termes a_{ij}^{0} pour lesquels $\mu = 0$.

Écrivons le système (6) sous la forme

$$a_{i1}^{0}\varphi_{1k} + \ldots + (a_{ii}^{0} - r - k)\varphi_{ik} + \ldots + a_{in}^{0}\varphi_{nk} = G_i$$

en posant

$$-G_i = a_{i1}^{1}\varphi_{1,k-1} + \ldots + a_{in}^{k}\varphi_{n0} \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Tirons de ces équations la valeur de l'une quelconque des inconnues φ, nous aurons

$$\varphi_{sk} F(r+k) = \Delta_1 G_1 + \Delta_2 G_2 + \ldots + \Delta_n G_n,$$

$\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ représentant des déterminants mineurs du premier ordre du déterminant $F(r+k)$.

On peut écrire cette équation

$$F(r+k)\varphi\rho^k = \Delta_1 G_1 \rho^k + \ldots \Delta_n G_n \rho^k.$$

Or nous aurons

$$\begin{aligned} -G_i\rho^k = {} & a_{i1}^{1}\rho \cdot \varphi_{1,k-1}\rho^{k-1} + \ldots + a_{in}^{1}\rho \cdot \varphi_{n,k-1}\rho^{k-1} \\ & + a_{i1}^{2}\rho^2 \cdot \varphi_{1,k-2}\rho^{k-2} + \ldots + a_{in}^{2}\rho^2 \cdot \varphi_{n,k-2}\rho^{k-2} \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + a_{in}^{k}\rho^k \cdot \varphi_{10} \qquad + \ldots + a_{in}^{k}\rho^k \cdot \varphi_{n0}. \end{aligned}$$

Un terme quelconque de cette somme est de la forme $a_{ij}^{\mu}\rho^{\mu} . \varphi_{j,k-\mu}\rho^{k-\mu}$, et μ sera au moins égal à 1.

Appelons α_{ij}^{μ} et $\psi_{j,k-\mu}$ les modules de $a_{ij}^{\mu}\rho^{\mu}$ et de $\varphi_{j,k-\mu}\rho^{k-\mu}$. Le module de $G_i\rho^k$ sera inférieur à la somme

$$\Sigma\alpha_{ij}^{\mu}\psi_{j,k-\mu} \quad (i = 1, 2, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots, n;\ \mu = 1, 2, \ldots, k).$$

Mais, pour une valeur donnée de ρ, et pour $\mu > 0$, les modules α_{ij}^{μ} ont une valeur maximum α. De plus, pour les valeurs de μ de 1 à k, l'une des quantités $\psi_{j,k-\mu}$ est plus grande que les autres; désignons-la par ψ.

Le nombre des termes de la somme étant nk, le module de la somme $G_i \rho^k$ sera inférieur à $nk\alpha\psi$.

Appelons maintenant $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ les modules des déterminants Δ_1, $\Delta_2, \ldots, \Delta_n$, le module de la somme

$$\Delta_1 G_1 \rho^k + \ldots + \Delta_n G_n \rho^k$$

sera inférieur à

$$nk\alpha\psi(\delta_1 + \delta_2 + \ldots + \delta_n).$$

Appelons de même δ le module de $F(r+k)$, on aura pour le module ψ_k de $\varphi\rho^k$

$$\psi_k < n\alpha\psi\left(\frac{k\delta_1}{\delta} + \frac{k\delta_2}{\delta} + \ldots + \frac{k\delta_n}{\delta}\right).$$

Mais $\frac{k\delta_i}{\delta}$ est le module de la fraction $\frac{k\Delta_i}{F(r+k)}$.

Les deux termes étant du $n^{\text{ième}}$ degré en k, on peut prendre k assez grand pour que, à partir de cette valeur de k et pour toutes les valeurs de k plus grandes, le module de la fraction diffère de sa limite l_i d'une quantité ε_i aussi petite qu'on voudra, et que ce module s'approche constamment de sa limite quand k augmente indéfiniment.

On aura alors, pour cette valeur de k,

$$\psi_k < n\alpha\psi(l_1 + l_2 + \ldots + l_n + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_n).$$

Soit L la plus grande valeur de la parenthèse obtenue en prenant tous les ε positifs, on aura

$$\psi_k < n\alpha\psi L.$$

Cela posé, on peut prendre ρ assez petit pour que $n\alpha L$ soit un nombre plus petit que l'unité. En effet, on peut prendre ρ assez petit pour que α soit rendu aussi petit que l'on voudra. On aura alors, pour cette valeur de ρ et pour toute valeur plus petite,

$$\psi_k < \frac{\psi}{p},$$

p étant un nombre plus grand que l'unité.

Si, ensuite, on remplace k par $k+1$, $k+2$, ..., on ne pourra pas augmenter la valeur de L, et, par suite, celle de $n\alpha L$ ou de $\frac{1}{p}$. On aura donc

$$\psi_{k+k'} < \frac{\psi}{p} \quad (k' = 1, 2, \ldots, \infty).$$

Il résulte de là que les modules des termes des séries φ seront, à partir d'un certain rang, moindres qu'un nombre déterminé pour toute valeur de x dont le module sera au plus égal à ρ. Les séries φ seront donc convergentes à l'intérieur du cercle de rayon ρ ayant son centre à l'origine.

Il est donc démontré que le système

$$(1) \qquad x\frac{dy_i}{dx} = a_{i1}y_1 + \ldots + a_{in}y_n$$

admet au moins une solution dont les éléments $x^r\varphi_1$, $x^r\varphi_2$, ..., $x^r\varphi_n$ soient des expressions régulières. Nous dirons qu'une *telle solution est régulière*. Il nous reste à faire voir que le système (1) admet n solutions régulières formant un *système fondamental* de solutions. Il sera ainsi prouvé que le système (1) n'est satisfait que par des *solutions régulières* ou par des combinaisons linéaires et homogènes à coefficients constants de ces *solutions régulières*. Nous dirons que ces combinaisons sont aussi des solutions régulières.

5. Lorsqu'une fonction de la forme

$$F = [\varphi_0 + \varphi_1 \log x + \ldots + \varphi_n (\log x)^n] x^r$$

reste finie pour $x = 0$ quand on l'a multipliée par une puissance convenable de x, il y a un exposant α tel que le produit $x^\alpha F$ est différent de zéro pour $x = 0$ et n'est infini que comme une fonction

$$\alpha + \beta \log x + \ldots + \lambda (\log x)^n$$

entière en $\log x$ et à coefficients constants. En nous servant de l'expression de M. Fuchs, nous dirons que *la fonction* F *appartient à l'exposant* α.

Les diverses intégrales $x^{r_1}\varphi_1$, $x^{r_1}\varphi_2$, ..., $x^{r_1}\varphi_n$ qui composent une solution du système (1) pourront appartenir à des exposants différents. Nous mettrons ces exposants en évidence par la notation

$$x^{r_1+h_1}\varphi_1, \quad x^{r_1+h_2}\varphi_2, \quad \ldots, \quad x^{r_1+h_n}\varphi_n,$$

où h_1, h_2, ..., h_n représentent des nombres entiers. Mais, pour $x = 0$, les fonctions φ_1, φ_2, ..., φ_n seront *toutes* différentes de zéro.

Cependant plusieurs éléments de la solution peuvent être identiquement nuls, et il n'y a pas lieu alors de parler des exposants auxquels ils pourraient appartenir.

6. Soient

$$u_i = x^{r+h_i}\varphi_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

les éléments d'une solution régulière du système d'équations (1). Supposons que les fonctions φ_{s+k} soient identiquement nulles pour $k = 1, 2, \ldots, n-s$, mais que les fonctions φ_1, φ_2, ..., φ_s soient *toutes* différentes de zéro pour $x = 0$.

Posons $y_i = u_i q_i$ en convenant de remplacer u_{s+k} par x^r, et soit, pour simplifier l'écriture, $y' = \frac{dy}{dx}$. Nous aurons

$$xy'_i = x u'_i q_i + x u_i q'_i$$

et, par suite,

$$x q'_i = a_{i1}\frac{u_1}{u_i}q_1 + \ldots + \left(a_{ii} - x\frac{u'_i}{u_i}\right)q_i + \ldots + a_{in}\frac{u_n}{u_i}q_n \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Ce système d'équations admet la solution

$$\begin{aligned} q_1 &= q_2 = \ldots = q_s = 1, \\ q_{s+k} &= q_{s+k+1} = \ldots = q_n = 0. \end{aligned}$$

On a donc

$$a_{i1}\frac{u_1}{u_i} + \ldots + a_{is}\frac{u_s}{u_i} = 0.$$

En tenant compte de ces relations, nous aurons

$$\begin{aligned} x q'_i = {} & a_{i2}\frac{u_2}{u_i}(q_2 - q_1) + \ldots + a_{is}\frac{u_s}{u_i}(q_s - q_1) \\ & + a_{i,s+1}\frac{u_{s+1}}{u_i} q_{s+1} + \ldots + a_{in}\frac{u_n}{u_i} q_n. \end{aligned}$$

Posons maintenant

$$\begin{aligned} q_k - q_1 &= z_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, s), \\ q_{s+k'} &= z_{s+k'} \quad (k' = 1, 2, \ldots, n - s), \end{aligned}$$

nous aurons, en retranchant la première équation des $n - s$ suivantes :

$$\begin{aligned} x z'_k = {} & \left(a_{k2}\frac{u_2}{u_k} - a_{12}\frac{u_2}{u_1}\right) z_2 + \ldots + \left(a_{kk} - x\frac{u'_k}{u_k} - a_{1k}\frac{u_k}{u_1}\right) z_k + \ldots \\ & + \left(a_{k,s+1}\frac{u_{s+1}}{u_k} - a_{1,s+1}\frac{u_{s+1}}{u_1}\right) z_{s+1} + \ldots + \left(a_{kn}\frac{u_n}{u_k} - a_{1n}\frac{u_n}{u_1}\right) z_n, \end{aligned}$$

$$x z'_{s+k'} = a_{s+k',2}\frac{u_2}{u_{s+k'}} z_2 + \ldots + \left(a_{s+k',s+k'} - x\frac{u'_{s+k'}}{u_{s+k'}}\right) z_{s+k'} + \ldots + a_{s+k',n}\frac{u_n}{u_{s+k'}} z_n$$

$$(k = 2, 3, \ldots, s; \; k' = 1, 2, \ldots, n - s).$$

Introduisons maintenant dans le calcul les valeurs

$$u_i = x^{r+h_i}\varphi_i.$$

Nous aurons

$$\frac{u_k}{u_i} = x^{h_k - h_i}\frac{\varphi_k}{\varphi_i},$$

$$\frac{x u'_i}{u_i} = r + h_i + x\frac{\varphi'_i}{\varphi_i},$$

et, par suite,

$$a_{k2}\frac{u_2}{u_k} - a_{12}\frac{u_2}{u_1} = a_{k2}\frac{\varphi_2}{\varphi_k}x^{h_2 - h_k} - a_{12}\frac{\varphi_2}{\varphi_1}x^{h_2 - h_1},$$

$$a_{kk} - x\frac{u'_k}{u_k} - a_{1k}\frac{u_k}{u_1} = a_{kk} - r - h_k - a_{1k}\frac{\varphi_k}{\varphi_1}x^{h_k - h_1},$$

$$a_{s+k',k}\frac{u_k}{u_{s+k'}} = a_{s+k',k}\,\varphi_k x^{h_k} \qquad \text{ou} \qquad a_{s+k',k_1}\frac{u_{k_1}}{u_{s+k'}} = a_{s+k',k_1},$$

suivant les cas, et

$$a_{s+k', s+k'} - x\frac{u'_{s+k'}}{u_{s+k'}} = a_{s+k', s+k'} - r.$$

Le système d'équations en z deviendra

$$\begin{aligned}
xz'_k &= \left(a_{k2}\frac{\varphi_2}{\varphi_k}x^{h_2-h_k} - a_{12}\frac{\varphi_2}{\varphi_1}x^{h_2-h_1}\right)z_2 + \ldots \\
&\quad + \left(a_{kk} - r - h_k - a_{1k}\frac{\varphi_k}{\varphi_1}x^{h_k-h_1}\right)z_k + \ldots \\
&\quad + \left(a_{k,s+1}\frac{1}{\varphi_k}x^{-h_k} - a_{1,s+1}\frac{1}{\varphi_1}x^{-h_1}\right)z_{s+1} + \ldots \\
&\quad + \left(a_{kn}\frac{1}{\varphi_k}x^{-k} - a_{1n}\frac{1}{\varphi_1}x^{-h_1}\right)z_n, \\
xz'_{s+k'} &= a_{s+k',2}\varphi_2 x^{h_2}z_2 + \ldots + (a_{s+k',s+k'} - r)z_{s+k'} + \ldots + a_{s+k',n}z_n.
\end{aligned}$$

Changeons encore une fois de variables, et posons

$$z_p = x^{-h_p}v_p \quad (p = 1, 2, \ldots, n),$$

nous aurons, pour $p = 1, 2, \ldots, s$,

$$xz'_p = -h_p x^{-h_p}v_p + x^{-h_p+1}v_p.$$

et, pour $p = s+1, s+2, \ldots, n$,

$$xz'_{s+k} = xv'_{p+k}.$$

Remarquons, en outre, que, d'après la manière dont on calcule les séries φ au n° 3, l'une au moins de ces séries est différente de zéro pour $x = 0$, de sorte qu'on peut supposer, par exemple, h_1 nul et h_2, h_3, ... h_s positifs. On est ainsi conduit au système d'équations

$$\begin{aligned}
xv'_k\frac{1}{x^{h_k}} &= \left(a_{k2}\frac{\varphi_2}{\varphi_k}\frac{x^{h_2}}{x^{h_k}} - a_{12}\frac{\varphi_2}{\varphi_1}x^{h_2}\right)x^{-h_2}v_2 + \ldots \\
&\quad + \left(a_{kk} - r - h_k - a_{1k}\frac{\varphi_k}{\varphi_1}x^{h_k}\right)x^{-h_k}v_k + \ldots \\
&\quad + \left(a_{kn}\frac{1}{\varphi_k}\frac{1}{x^{h_k}} - a_{1,s+1}\frac{1}{\varphi_1}\right)v_n, \\
xv'_{s+k'} &= a_{s+k',2}\varphi_2 v_2 + \ldots + (a_{s+k',s+k'} - r)v_{s+k'} + \ldots + a_{s+k',n}v_n,
\end{aligned}$$

ou, plus simplement, au système

$$(7)\quad \begin{cases} x v'_k = \left(a_{k2}\dfrac{\varphi_2}{\varphi_k} - a_{12}\dfrac{\varphi_2}{\varphi_1}x^{h_k}\right)v_2 + \ldots \\ \qquad + \left(a_{kk} - r - h_k - a_{1k}\dfrac{\varphi_k}{\varphi_1}x^{h_k}\right)v_k + \ldots + \left(a_{kn}\dfrac{1}{\varphi_k} - a_{1n}\dfrac{1}{\varphi_1}x^{h_k}\right)v_n, \\ x v'_{s+k'} = a_{s+k',2}\,\varphi_2 v_2 + \ldots + (a_{s+k',s+k'} - r)v_{s+k'} + \ldots + a_{s+k',n}\,\varphi_n v_n, \\ \qquad (k = 1, 2, \ldots, s;\ k' = 1, 2, \ldots, n-s). \end{cases}$$

Pour $x = 0$, les coefficients a_{ij} se réduisent à des valeurs a_{ij}^0 qui ne sont pas toutes nulles. Les séries φ_k se réduisent à des valeurs φ_{k0} dont aucune n'est nulle. Il en résulte que le système (7) est de même nature que le système (1); mais il a une inconnue de moins.

Ce système (7) admet une solution régulière en $v_2, v_3, \ldots, v_n$. Par suite, le système en

$$z_p = x^{-h_p} v_p \quad (p = 2, 3, \ldots, n)$$

admet une solution régulière en $z_2, z_3, \ldots, z_n$.

Remontons au système en $q_1, q_2, \ldots, q_n$. Nous aurons d'abord

$$x q'_1 = (a_{11} - r)q_1 + a_{12}\frac{\varphi_2}{\varphi_1}x^{h_2}q_2 + \ldots + a_{1n}\frac{1}{\varphi_1}q_n,$$

ou, à cause de la solution

$$\begin{aligned} q_1 &= q_2 = \ldots = q_s = 1, \\ q_{s+1} &= q_{s+2} = \ldots = q_n = 0, \\ x q'_1 &= a_{12}\frac{\varphi_2}{\varphi_1}x^{h_2}z_2 + \ldots + a_{1n}\frac{1}{\varphi_1}z_n. \end{aligned}$$

Le second membre est une expression régulière. Soit H cette expression. $\dfrac{\mathrm{H}}{x}$ sera de même une expression régulière, soit H_1. En intégrant l'équation $q'_1 = \mathrm{H}_1$, on aura pour q_1 une expression régulière.

Cela posé, on a

$$\begin{aligned} q_k &= z_k + q_1 \quad (k = 1, 2, \ldots, s), \\ q_{s+k'} &= z_{s+k'} \quad (k' = 1, 2, \ldots, n-s). \end{aligned}$$

On voit donc que $q_2, q_3, \ldots, q_n$ seront, comme q_1, des expressions régulières.

Enfin, on a posé $y_i = u_i q_i$, u_i et q_i étant des expressions régulières, y_i sera aussi une expression régulière, et la solution $y_1, y_2, \ldots, y_n$ du système (1) sera *régulière*.

Il est donc prouvé que le système d'équations (1) admet deux solutions régulières.

En ramenant le système (7) à un système (7′) de même forme et renfermant encore une inconnue de moins, et en continuant ainsi, on arrivera à démontrer que le système d'équations (1) admet n solutions régulières.

On sait, par les théories générales ([1]), que les n solutions régulières ainsi obtenues forment un système fondamental de solutions des équations ([1]). Il en résulte que *toute solution* du système (1) est régulière: c'est ce que nous nous étions proposé de démontrer.

7. Le théorème précédent s'étend sans difficulté aux équations de la forme

$$dy_i = (a_{i1}y_1 + \ldots + a_{in}y_n)\frac{dx_1}{x_1} + \ldots + (l_{i1}y_1 + \ldots + l_{in}y_n)\frac{dx_p}{x_p},$$

où les coefficients $a, b, \ldots, l$ représentent des fonctions holomorphes *dans un domaine du point* $x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots, x_p = 0$.

J'ai entrepris l'étude générale des équations de ce genre sur les conseils de M. Appell. Le Mémoire actuel est la suite naturelle des Mémoires que j'ai déjà publiés sur ce sujet. Qu'il me soit permis de remercier ici M. Appell des marques d'amitié qu'il m'a prodiguées en s'intéressant à mes recherches.

8. Les calculs que nous venons de faire prouvent que les systèmes d'équations de la forme (1) ne sont pas les seuls dont toutes les solutions soient régulières.

([1]) *Annales de l'École Normale supérieure*, p. 33; février 1882.

Posons $y_i = x^{h_i} u_i$, et substituons ces valeurs dans le système (1), nous obtiendrons le système

$$(8) \quad \begin{cases} \dfrac{du_i}{dx} = \dfrac{a_{11}-h_1}{x} u_1 + \dfrac{a_{12}}{x^{h_1-h_2+1}} u_2 + \ldots + \dfrac{a_{1n}}{x^{h_1-h_n+1}} u_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{du_i}{dx} = \dfrac{a_{i1}}{x^{h_i-h_1+1}} u_1 + \ldots + \dfrac{a_{ii}-h_i}{x} u_i + \ldots + \dfrac{a_{in}}{x^{h_i-h_n+1}} u_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{du_n}{dx} = \dfrac{a_{n1}}{x^{h_n-h_1+1}} u_1 + \ldots + \dfrac{a_{nn}-h_n}{x} u_n. \end{cases}$$

En posant réciproquement $u_i = y_i x^{-h_i}$, nous obtiendrons le système (1).

Le système (8) a donc toutes ses solutions régulières.

On obtient facilement, comme cas particulier du système (8), le système

$$\begin{aligned} \frac{du_1}{dx} &= \frac{a_{11}+1}{x} u_1 + \frac{a_{12}}{x^2} u_2 + \ldots + \frac{a_{1n}}{x^n} u_n, \\ \frac{du_2}{dx} &= u_1, \\ &\ldots\ldots, \\ \frac{du_i}{dx} &= u_{i-1}, \\ &\ldots\ldots, \\ \frac{du_n}{dx} &= u_{n-1}. \end{aligned}$$

De ce système on déduit facilement

$$\frac{d^n u_n}{dx^n} = \frac{a_{11}+1}{x} \frac{d^{n-1} u_n}{dx^{n-1}} + \frac{a_{12}}{x^2} \frac{d^{n-2} u_n}{dx^{n-2}} + \ldots + \frac{a_{1n}}{x^n} u_n.$$

On voit ainsi que u_n satisfait à une équation différentielle linéaire et homogène d'ordre n.

On peut réciproquement passer de cette équation différentielle au système d'équations précédent. Ainsi le théorème de M. Fuchs n'est qu'un cas particulier du théorème général que nous avons démontré.

9. La question, telle que nous l'avons posée, est résolue. Mais elle en entraîne une autre : déterminer toutes les formes des systèmes d'équations différentielles linéaires et homogènes, pour lesquelles les solutions soient toutes régulières. Nous nous proposons de traiter cette seconde Partie dans un autre Mémoire. En outre, la question que nous venons de traiter donne lieu à plusieurs conséquences importantes que nous nous proposons d'indiquer ainsi en dehors de ce Mémoire.