ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

F. GOMES TEIXEIRA

Sur le théorème d'Eisenstein (extrait d'une lettre à M. Hermite)

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 3 (1886), p. 389-390
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1886_3_3__389_0>

SUR LE

THÉORÈME D'EISENSTEIN,

PAR M. F. GOMES TEIXEIRA,

ANCIEN PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE COÏMBRE, PROFESSEUR A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE PORTO.

Extrait d'une Lettre à M. HERMITE.

Permettez que je vous présente une démonstration du théorème d'Eisenstein et du théorème plus général énoncé dans ma Lettre précédente. Elle est très élémentaire et je serais bien heureux si elle méritait votre haute approbation.

Soit y une fonction algébrique de x définie par l'équation à coefficients entiers

$$\sum A x^a y^b = 0.$$

Si l'on dérive cette équation n fois au moyen de la formule de Leibnitz, on trouve le résultat symbolique

$$\sum A (x^a + y^b)^{(n)} = 0.$$

En remarquant maintenant que les dérivées de x^a d'ordre supérieur à a sont nulles, que les dérivées d'ordre inférieur à a s'annulent pour $x = 0$ et que la dérivée d'ordre a est $1.2\ldots a$, il vient

$$\sum A n(n-1)\ldots(n-a+1)(y^b)^{(n-a)}_{x=0} = 0.$$

En appliquant une autre fois la formule de Leibnitz au produit y^b, cette équation mène au résultat symbolique

$$\sum \mathrm{A}\, n(n-1)\ldots(n-a+1)\, \mathrm{S}\, \frac{1.2\ldots(n-a)\, y_0^{(\alpha)} y_0^{(\beta)} \ldots y_0^{(\lambda)}}{1.2\ldots\alpha \times 1.2\ldots\beta \times \ldots \times 1.2\ldots\lambda} = 0,$$

où S représente une somme qui se rapporte à toutes les solutions entières et positives de l'équation

$$\alpha + \beta + \gamma + \ldots + \lambda = n - a,$$

et où le nombre des quantités α, β, γ, ..., λ est égal à b.

Si l'on sépare maintenant dans cette équation les termes qui contiennent la dérivée $y_0^{(n)}$, on trouve un résultat de la forme suivante

$$\sum \mathrm{A}\, \mathrm{S}\, \frac{y_0^{(\alpha)}}{1.2\ldots\alpha}\, \frac{y_0^{(\beta)}}{1.2\ldots\beta} \cdots \frac{y_0^{(\lambda)}}{1.2\ldots\lambda} + \sum \mathrm{A}\, b\, y_0^{b-1} \frac{y_0^{(n)}}{1.2\ldots n} = 0;$$

d'où résulte

$$\frac{y_0^{(n)}}{1.2\ldots n} = - \frac{\sum \mathrm{A}\, \mathrm{S}\, \frac{y_0^{(\alpha)}}{1.2\ldots\alpha} \cdots \frac{y_0^{(\lambda)}}{1.2\ldots\lambda}}{\sum \mathrm{A}\, b\, y_0^{b-1}}.$$

De cette formule on tire les conclusions suivantes :

I. Si une fonction, définie d'une manière quelconque, qui prend une valeur rationnelle y_0 pour $x = 0$, satisfait à une équation algébrique à coefficients entiers, le dénominateur de $\frac{y_0^{(n)}}{1.2\ldots n}$ ne peut pas contenir des facteurs premiers différents de ceux qui entrent dans les dénominateurs de $\frac{y_0^{(n-1)}}{1.2\ldots n-1}$, $\frac{y_0^{(n-2)}}{1.2\ldots n-2}$, $\cdots$ et de ceux qui entrent dans le numérateur de $\sum \mathrm{A}\, b\, y_0^{b-1}$, et le nombre de ces facteurs est par conséquent limité.

II. Le théorème précédent contient le théorème d'Eisenstein. Alors la fonction y est définie par une série ordonnée suivant les puissances de x.