G. KIRCHHOFF

Sur la théorie des rayons lumineux

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 3 (1886), p. 303-342
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1886_3_3__303_0>

SUR LA

THÉORIE DES RAYONS LUMINEUX,

PAR G. KIRCHHOFF [1].

(Traduit par P. DUHEM.)

Les raisonnements par lesquels on cherche à expliquer la formation des rayons lumineux, leur réflexion, leur réfraction, ainsi que les phénomènes de diffraction, reposent surtout sur les considérations qui ont été développées par Huygens et par Fresnel. Sous bien des rapports, la rigueur de ces raisonnements laisse à désirer. Il semble que l'état actuel de nos connaissances ne permette pas encore de déduire des hypothèses qui constituent la théorie des ondulations une théorie de ces phénomènes qui soit à l'abri de tout reproche. Toutefois, on peut donner aux raisonnements dont il s'agit une plus grande précision. Je me permettrai de communiquer à l'Académie quelques déductions relatives à cet objet. Pendant une série de plusieurs années, j'ai exposé dans mes leçons à l'Université la partie fondamentale de ces déductions. Quelques Mémoires, publiés par M. Fröhlich [2] et par M. Voïgt [3], sont destinés au même but.

1. Nous supposerons que la lumière consiste en vibrations transversales de l'éther. Nous supposerons en outre que, dans le milieu où l'on étudie le mouvement lumineux, l'éther se comporte comme un corps

---

(1) Ce Mémoire de M. G. Kirchhoff a paru aux *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, t. II, p. 641; 1882.

(2) *Wiedemann's Annalen der Physik und Chemie;* Band III, p. 376; Band VI, p. 414; Band XV, p. 592.

(3) *Wiedemann's Annalen der Physik und Chemie;* Band III, p. 532.

solide, élastique, isotrope et homogène, dont les particules sont soumises uniquement à l'action des forces qui résultent de leurs déplacements relatifs.

D'après ces hypothèses, si l'on désigne par u, v, w les composantes parallèles aux trois axes coordonnés du déplacement d'une particule éthérée, si l'on désigne par x, y, z les coordonnées de la position d'équilibre de cette particule à l'instant t, les quantités u, v, w vérifient l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = a^2 \Delta\varphi. \tag{1}$$

Dans cette équation, $\Delta\varphi$ représente la somme des trois dérivées partielles du second ordre obtenues en prenant deux fois la dérivée de la quantité φ, soit par rapport à x, soit par rapport à y, soit par rapport à z. La lettre a représente la vitesse de propagation de la lumière. Toutefois on ne doit pas prendre pour u, v, w trois solutions quelconques de cette équation (1), il faut encore que ces solutions vérifient l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Soient U, V, W trois solutions quelconques de cette dernière équation. Les quantités u, v, w, définies par les égalités

$$\left\{\begin{aligned} u &= \frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial y}, \\ v &= \frac{\partial W}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial z}, \\ w &= \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial x}, \end{aligned}\right. \tag{2}$$

représentent un mouvement lumineux possible. Inversement, à tout mouvement lumineux correspondent trois fonctions U, V, W, qui vérifient ces équations ([1]).

Dans la suite, nous représenterons par la lettre φ l'une quelconque des six quantités U, V, W, u, v, w. Si nous désignons par T la durée de

---

([1]) Clebsch, *Borchardt's Journal für reine und angewandte Mathematik*, Band LXI.

vibration de la lumière supposée homogène, chacune de ces six quantités sera une fonction linéaire et homogène des quantités

$$\cos 2\pi \frac{t}{T}, \quad \sin 2\pi \frac{t}{T}.$$

Nous prendrons pour mesure de l'intensité lumineuse, au point de coordonnées x, y, z, la moyenne arithmétique des valeurs que prend la quantité

$$u^2 + v^2 + w^2$$

pendant le temps T. Si nous posons

$$\begin{aligned}
u &= \mathfrak{U} \cos 2\pi \frac{t}{T} + \mathfrak{U}' \sin 2\pi \frac{t}{T},\\
v &= \mathfrak{V} \cos 2\pi \frac{t}{T} + \mathfrak{V}' \sin 2\pi \frac{t}{T},\\
w &= \mathfrak{W} \cos 2\pi \frac{t}{T} + \mathfrak{W}' \sin 2\pi \frac{t}{T},
\end{aligned}$$

cette intensité aura pour valeur

$$\tfrac{1}{2}(\mathfrak{U}^2 + \mathfrak{U}'^2 + \mathfrak{V}^2 + \mathfrak{V}'^2 + \mathfrak{W}^2 + \mathfrak{W}'^2).$$

Supposons que l'espace indéfini soit rempli par le milieu considéré. Supposons que, dans ce milieu, se trouve une source de lumière en un certain point 1 de coordonnées x_1, y_1, z_1. Désignons par r_1 la distance mutuelle du point de coordonnées x, y, z et du point de coordonnées x_1, y_1, z_1. Désignons enfin par λ la longueur d'onde de la lumière, c'est-à-dire le produit aT. L'hypothèse la plus simple que l'on puisse faire sur φ, hypothèse permise d'ailleurs si φ désigne l'une des quantités U, V, W, consiste à poser

$$\varphi = \frac{1}{r_1} \cos 2\pi \left(\frac{r_1}{\lambda} - \frac{t}{T}\right). \tag{3}$$

Ayant cette expression de φ, il est facile d'en déduire une autre expression plus générale qui se rapporte au même cas. Il suffit de multiplier l'expression précédente de φ par un facteur constant, d'ajouter à t une constante, de différentier une fois, puis une seconde, par rapport à x_1, à y_1 ou à z_1, et d'ajouter ensemble, membre à membre, toutes les égalités ainsi obtenues.

On peut faire subir au résultat de cette opération une simplification importante : il suffit pour cela d'introduire une hypothèse qui a, en Optique, une importance capitale, à savoir l'hypothèse que la longueur d'onde peut être traitée comme un infiniment petit. Dès lors, si l'on tient compte seulement des termes de l'ordre le plus élevé, on obtient le résultat suivant :

$$\varphi = \frac{D}{r_1}\cos 2\pi\left(\frac{r_1}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) + \frac{D'}{r_1}\sin 2\pi\left(\frac{r_1}{\lambda} - \frac{t}{T}\right). \tag{4}$$

Dans cette expression, les quantités D et D′ dépendent de $\frac{\partial r_1}{\partial x_1}$, $\frac{\partial r_1}{\partial y_1}$, $\frac{\partial r_1}{\partial z_1}$, ou, ce qui revient au même, de $\frac{\partial r_1}{\partial x}$, $\frac{\partial r_1}{\partial y}$, $\frac{\partial r_1}{\partial z}$, c'est-à-dire que ces quantités dépendent de la *direction* de la ligne r_1 ; à part cela, elles sont constantes.

En vertu des équations (2), u, v, w admettent des expressions de même forme; selon que φ sera égal à u, à v ou bien à w, désignons les valeurs de D, D′ par A, A′, par B, B′, ou bien par C, C′. Ces six lettres représenteront des quantités qui dépendent de la direction de la ligne r_1, mais qui, à part cela, sont constantes. L'intensité de la lumière aura alors pour valeur, au point de coordonnées x, y, z,

$$\frac{1}{2r_1^2}(A^2 + A'^2 + B^2 + B'^2 + C^2 + C'^2).$$

Cette expression montre que l'intensité dont il s'agit est inversement proportionnelle au carré de la distance du point considéré au point lumineux. Elle montre, en outre, que cette intensité varie avec la direction de la ligne r_1. La loi de ces variations se relie à la loi du mouvement du point lumineux.

Dans ce qui va suivre, nous prendrons pour source de lumière un point lumineux semblable à celui que nous venons de considérer et nous rechercherons comment la lumière qu'il émet est modifiée par un corps étranger placé dans le voisinage de ce point. Au cours de ces recherches, nous aurons à faire usage d'un lemme important. Ce lemme se déduit de l'application du théorème de Green aux fonctions qui satisfont à l'équation aux dérivées partielles que φ vérifie. Ce lemme constitue une forme plus précise et plus générale de la proposition bien connue sous le nom de *principe d'Huygens*. M. Helmholtz l'a déjà démontré dans son Mémoire intitulé *Théorie de la vibration de l'air dans les tuyaux ouverts* (1), et il en a montré l'importance; dans le numéro suivant, nous allons exposer ce théorème sous une autre forme, en suivant une voie différente.

2. Soient υ et ϕ deux fonctions de x, y, z continues, ainsi que leurs dérivées partielles du premier ordre par rapport aux variables x, y, z en tous les points d'un espace limité (cet espace peut d'ailleurs se composer de plusieurs parties séparément limitées). Désignons par $d\tau$ un élément de volume de cet espace. Soit ds un élément de la surface qui le limite (cette surface peut aussi se composer de plusieurs parties séparément limitées). Désignons par N la normale à l'élément ds, cette normale étant dirigée vers l'intérieur de l'espace considéré. Le théorème de Green donne l'égalité

$$\int\left(\upsilon\frac{\partial\phi}{\partial N}-\phi\frac{\partial\upsilon}{\partial N}\right)ds=\int(\phi\,\Delta\upsilon-\upsilon\,\Delta\phi)\,d\tau.$$

Dans cette égalité, posons $\upsilon=\varphi$ et supposons tout d'abord que ϕ satisfasse aussi à l'équation (1); nous aurons

$$\int\left(\varphi\frac{\partial\phi}{\partial N}-\phi\frac{\partial\varphi}{\partial N}\right)ds=\frac{1}{a^2}\int\left(\phi\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}-\varphi\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}\right)d\tau$$

ou bien

$$\int\left(\varphi\frac{\partial\phi}{\partial N}-\phi\frac{\partial\varphi}{\partial N}\right)ds=\frac{1}{a^2}\frac{\partial}{\partial t}\int\left(\phi\frac{\partial\varphi}{\partial t}-\varphi\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)d\tau.$$

Multiplions les deux membres de cette égalité par dt et intégrons entre deux valeurs du temps, l'une négative, que nous désignerons par $-t'$, l'autre positive, que nous désignerons par t''. Nous obtiendrons alors, en faisant usage d'un symbole bien connu, l'égalité

$$(5)\qquad \int_{-t'}^{t''}dt\int\left(\varphi\frac{\partial\phi}{\partial N}-\phi\frac{\partial\varphi}{\partial N}\right)ds=\frac{1}{a^2}\left[\int\left(\phi\frac{\partial\varphi}{\partial t}-\varphi\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)d\tau\right]_{-t'}^{t''}.$$

(1) HELMHOLTZ, *Theorie der Luftschwingungen in Röhren mit offenen Enden* (*Borchardt's Journal für reine und angewandte Mathematik*, Band LVII).

Posons maintenant

$$\varphi = \frac{F(r_0 + at)}{r_0},$$

expression dans laquelle r_0 désigne la distance du point de coordonnées x, y, z à un certain point o choisi arbitrairement, tandis que F désigne une fonction qui devient infiniment petite pour toute valeur finie, positive ou négative de la variable dont elle dépend, qui n'est jamais négative et qui, en outre, satisfait à la condition

$$(6) \qquad \int F(\zeta)\, d\zeta = 1,$$

pourvu que l'intégration s'étende d'une valeur négative et finie de ζ à une valeur positive et finie de la même quantité.

Considérons maintenant un espace entièrement clos, rempli par l'éther homogène et ne renfermant aucun point lumineux. Désignons par s la surface qui le limite et par ds un élément de cette surface. Prenons le point o à l'intérieur de cet espace. Du point o comme centre, décrivons une sphère infiniment petite et appliquons l'égalité (5) à ce qui reste de l'espace considéré lorsqu'on en exclut le volume de cette sphère. Désignons par dS un élément de la surface de cette sphère. Prenons pour t' une valeur assez grande pour que la quantité

$$r_0 - at'$$

soit négative et finie lorsqu'on y remplace r_0 par la plus grande des valeurs que r_0 prend sur la surface s; cette quantité sera *a fortiori* négative et finie dans tout l'espace considéré. Moyennant ces conditions, les valeurs de φ et de $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ qui figurent au second membre de l'égalité (5) correspondent à des valeurs positives ou négatives, mais *finies*, de $r_0 + at$; ces valeurs sont donc égales à zéro. L'égalité (5) devient alors

$$(7) \qquad \int_{-t'}^{t''} dt \int \left(\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial N} - \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial N} \right) ds + \int_{-t'}^{t''} dt \int \left(\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial N} - \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial N} \right) dS = 0.$$

Les intégrales que renferme le second terme peuvent être effectuées. Désignons par R le rayon de la sphère infiniment petite, et, dans le calcul de l'expression qui multiplie dS, négligeons toute quantité dont le produit par R^2 est infiniment petit. Nous pourrons alors poser

$$\frac{\partial \psi}{\partial N} = -\frac{1}{R^2} F(at), \qquad \psi = 0,$$

et nous aurons

$$\int \left(\varphi \frac{\partial \psi}{\partial N} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial N} \right) dS = -4\pi\varphi_0 F(at),$$

φ_0 désignant la valeur de φ au point o. Remarquons maintenant que la quantité $F(at)$ ne diffère de zéro que pour les valeurs infiniment petites de at, et que, en vertu de l'équation (6), on a

$$\int_{-t'}^{t''} F(at)\, dt = \frac{1}{a}.$$

Nous trouverons pour valeur du second terme de l'équation (7)

$$-\frac{4\pi}{a} \varphi_0(0),$$

expression dans laquelle $\varphi_0(0)$ désigne la valeur de φ_0 pour $t = 0$.

Dans le premier terme de l'équation (7) on peut également, grâce à l'équation (6), effectuer l'intégration par rapport à t. On a tout d'abord

$$a \int_{-t'}^{t''} \psi \frac{\partial \varphi}{\partial N} dt = a \int_{-t'}^{t''} \frac{F(r_0 + at)}{r_0} \frac{\partial \varphi}{\partial N} dt = \frac{1}{r_0} \frac{\partial \varphi}{\partial N}.$$

Dans la dernière valeur de $\frac{\partial \varphi}{\partial N}$ on doit supposer qu'après avoir effectué la différentiation on pose

$$t = -\frac{r_0}{a}.$$

Si l'on pose

$$\frac{\partial \varphi}{\partial N} = f(t), \tag{8}$$

l'expression $\frac{1}{r_0} \frac{\partial \varphi}{\partial N}$, qui figure dans l'égalité en question, aura pour valeur

$$\frac{1}{r_0} f\left(-\frac{r_0}{a}\right).$$

Nous avons ensuite

$$\frac{\partial\varphi}{\partial N} = \frac{\partial \frac{F(r_0+at)}{r_0}}{\partial N} = \frac{\partial \frac{1}{r_0}}{\partial N} F(r_0+at) + \frac{1}{r_0}\frac{\partial r_0}{\partial N}\frac{1}{a}\frac{\partial F(r_0+at)}{\partial t}$$

et, par suite,

$$a\int_{-t'}^{t''} \varphi \frac{\partial\varphi}{\partial N} dt = \frac{\partial \frac{1}{r_0}}{\partial N}\varphi\left(-\frac{r_0}{a}\right) + \frac{1}{r_0}\frac{\partial r_0}{\partial N}\int_{-t'}^{t''}\varphi\frac{\partial F(r_0+at)}{\partial t}dt,$$

expression dans laquelle $\varphi\left(-\frac{r_0}{a}\right)$ désigne la valeur de φ pour $t = -\frac{r_0}{a}$. Transformons la dernière intégrale au moyen d'une intégration par parties, et remarquons que la fonction F s'annule toutes les fois que la variable dont elle dépend prend une valeur finie; nous trouverons pour valeur de l'expression précédente

$$\frac{\partial \frac{1}{r_0}}{\partial N}\varphi\left(-\frac{r_0}{a}\right) - \frac{1}{a}\frac{1}{r_0}\frac{\partial r_0}{\partial N}\frac{\partial\varphi}{\partial t}.$$

Dans cette dernière expression, $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$ a la valeur qu'il prend pour $t = -\frac{r_0}{a}$.

En reportant dans l'égalité (7) les résultats que nous venons d'obtenir, et en changeant l'origine des temps de telle façon que l'instant qui, dans ce qui précède, servait d'origine, devienne maintenant l'instant t, nous obtiendrons le résultat suivant :

$$(9)\quad 4\pi\varphi_0(t) = \int\left[\frac{\partial \frac{1}{r_0}}{\partial N}\varphi\left(t-\frac{r_0}{a}\right) - \frac{1}{a}\frac{1}{r_0}\frac{\partial r_0}{\partial N}\frac{\partial\varphi\left(t-\frac{r_0}{a}\right)}{\partial t} - \frac{1}{r_0}f\left(t-\frac{r_0}{a}\right)\right]ds.$$

Les deux premiers termes de l'expression qui multiplie ds peuvent être réunis en un seul, qui est le suivant

$$\frac{\partial}{\partial N}\frac{\varphi\left(t-\frac{r_0}{a}\right)}{r_0},$$

en convenant, dans cette différentiation, de regarder r_0 comme seul variable, et de conserver aux autres quantités dont dépend $\varphi(t)$ les valeurs qu'elles ont en un point de l'élément ds. On a alors

$$4\pi\,\varphi_0(t) = \int \Omega\, ds, \tag{10}$$

égalité dans laquelle on a

$$\Omega = \frac{\partial}{\partial \mathrm{N}} \frac{\varphi\left(t - \dfrac{r_0}{a}\right)}{r_0} - \frac{f\left(t - \dfrac{r_0}{a}\right)}{r_0}, \tag{11}$$

et dans laquelle la fonction f a la signification définie par l'égalité (8).

De ces résultats découle la conséquence suivante :

Le mouvement de l'éther à l'intérieur de l'espace que limite la surface s peut être regardé comme provenant d'une couche de points lumineux distribués sur la surface s; en effet, chacun des deux termes qui composent Ω peut être regardé comme provenant d'une source de lumière concentrée en un point de l'élément ds.

Le raisonnement suivant permet de démontrer que, moyennant une certaine condition que nous supposerons toujours remplie dans la suite, l'équation (10) demeure encore exacte lorsque tous les points lumineux sont situés à l'intérieur de la surface s, et que le point o est extérieur à cette surface; seulement, dans ce cas, la normale N doit être comptée vers l'extérieur de la surface. Dans ce cas, appliquons l'égalité (10) à un espace limité intérieurement par la surface s et extérieurement par une sphère de rayon infiniment grand. Soit $d\mathrm{S}$ un élément de la surface de cette sphère. Nous obtiendrons l'égalité

$$4\pi\,\varphi_0(t) = \int \Omega\, ds + \int \Omega\, d\mathrm{S}.$$

Supposons maintenant que, jusqu'à une certaine valeur finie du temps, l'équilibre ait régné dans tout l'espace. Dès lors, pour une valeur négative et infiniment grande de t, les quantités $\varphi(t)$ et $f(t)$ sont égales à zéro en tous les points de l'espace, et, en particulier, en tous les points de la surface de la sphère infiniment grande. Cela étant, supposons que l'on choisisse le point o à distance finie et que l'on considère uniquement des valeurs finies du temps; la quantité Ω sera alors égale à zéro pour tous les éléments dS, car, en tout point de la surface de la sphère, $t - \frac{r_0}{a}$ est négatif et infiniment grand. Dès lors, nous obtiendrons l'équation (10). Nous avons introduit, il est vrai, cette restriction que le point o est situé à une distance finie et que le temps a une valeur finie; mais cette restriction n'est qu'apparente; quelle que soit la position du point o et la valeur de t, on peut choisir le rayon de la sphère assez grand pour que les considérations précédentes conservent leur valeur.

Si l'on applique l'égalité (10) à deux surfaces fermées qui ont une partie commune et qui renferment toutes deux le point o sans renfermer les points lumineux, ou toutes deux les points lumineux sans renfermer le point o, et si l'on retranche membre à membre les deux résultats obtenus de la sorte, on arrive à la conclusion suivante :

L'intégrale $\int \Omega\, ds$, étendue à une surface fermée qui ne renferme ni le point o, ni les points lumineux, est égale à zéro.

Cette intégrale s'annule encore pour une surface fermée qui enveloppe à la fois le point o et les points lumineux. On le reconnaît en appliquant successivement l'équation (10) à deux surfaces fermées qui ont une partie commune et dont l'une renferme le point o sans renfermer les points lumineux, tandis que l'autre renferme les points lumineux sans renfermer le point o.

On voit immédiatement comment on aura à appliquer l'équation (10) au problème qui nous occupe et qui a été énoncé au commencement du paragraphe précédent. Supposons que l'espace indéfini soit rempli par de l'éther homogène. Dans cet espace se trouve un point lumineux 1. Il engendre un mouvement auquel correspond une certaine fonction φ'. Supposons que, dans l'espace, on introduise un corps étranger; le mouvement est modifié; la fonction φ' se transforme en la fonction φ; le problème consiste à déterminer la valeur de la fonction φ pour tout point extérieur au corps. Désignons par ds un élément de la surface du corps et par dS un élément de la surface d'une sphère infiniment petite ayant pour centre le point lumineux. En vertu de l'égalité (10), nous aurons

$$4\pi\varphi_0 = \int \Omega\, dS + \int \Omega\, ds.$$

La première de ces deux intégrales a une valeur facile à déterminer. La variation que subit le mouvement en un point de l'élément dS par l'effet de l'introduction du corps étranger n'est pas infiniment grande, si l'on excepte un certain cas particulier. Comme d'ailleurs la surface sphérique dont fait partie l'élément dS est infiniment petite, cette variation n'a aucune influence sur la valeur de l'intégrale. On peut donc, dans cette intégrale, remplacer φ par φ'. Alors, en vertu de l'équation (10), si l'on désigne par $\varphi'(o)$ la valeur de φ' au point o, cette intégrale aura pour valeur $4\pi\,\varphi'(o)$. On a donc

$$4\pi\,\varphi(o) = 4\pi\,\varphi'(o) + \int \Omega\, ds. \tag{12}$$

Cette équation permet, en général, de déterminer $\varphi(o)$ lorsqu'on connaît la fonction φ' et que l'on connaît en outre, pour tous les points de la surface du corps, les valeurs de φ et de $\frac{\partial \varphi}{\partial N}$.

3. Avant de pousser plus loin nos recherches, il nous faut déterminer la valeur que prend l'intégrale $\int \Omega\, ds$ étendue à une surface *limitée*, au moins sous certaines conditions. C'est cette valeur que nous allons maintenant chercher.

Nous supposerons, pour effectuer cette recherche, que la longueur d'onde est infiniment petite. Nous supposerons que la quantité φ se rapporte au mouvement produit par un point lumineux et est, par conséquent, exprimée par l'égalité (4). Nous supposerons que, pour aucune portion d'étendue finie, soit de l'aire à laquelle s'étend l'intégration, soit de la ligne qui limite cette aire, la quantité $r_1 + r_0$ n'a une valeur constante ou une valeur différant infiniment peu d'une constante. Enfin, nous supposerons que la ligne droite qui joint les points 1 et o ne passe ni par un point du contour de la surface, ni par un point infiniment voisin de ce contour.

Dans ces conditions, nous démontrerons que l'intégrale considérée est égale à o si la ligne droite qui joint les points 1 et o ne rencontre pas la surface s. Le calcul nous montrera que, dans le cas où cette droite rencontre la surface s, l'intégrale en question a pour valeur $\pm 4\pi\varphi_0$, le signe $+$ devant être choisi si la normale N au point de rencontre fait un angle aigu avec la ligne droite menée du point 1 au point 0, et le signe — devant être choisi si cet angle est obtus. D'ailleurs, ce dernier résultat dérive immédiatement de l'équation (10), si, conformément à ce que nous venons d'énoncer, l'intégrale considérée est égale à 0 lorsque la droite ne rencontre pas la surface.

Prenons tout d'abord pour φ la valeur donnée par l'égalité (3); posons, par conséquent,

$$\varphi = \frac{1}{r_1}\cos 2\pi\left(\frac{r_1}{\lambda} - \frac{t}{T}\right).$$

Nous aurons alors

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial N}\frac{1}{r_0}\varphi\left(t-\frac{r_0}{a}\right) = &-\frac{1}{r_1 r_0^2}\frac{\partial r_0}{\partial N}\cos 2\pi\left(\frac{r_1+r_0}{\lambda}-\frac{t}{T}\right)\\ &-\frac{2\pi}{r_1 r_0\lambda}\frac{\partial r_0}{\partial N}\sin 2\pi\left(\frac{r_1+r_0}{\lambda}-\frac{t}{T}\right),\end{aligned}$$

puis, en vertu de l'égalité (8),

$$\begin{aligned}\frac{1}{r_0}f\left(t-\frac{r_0}{a}\right) = &-\frac{1}{r_1^2 r_0}\frac{\partial r_1}{\partial N}\cos 2\pi\left(\frac{r_1+r_0}{\lambda}-\frac{t}{T}\right)\\ &-\frac{2\pi}{r_1 r_0\lambda}\frac{\partial r_1}{\partial N}\sin 2\pi\left(\frac{r_1+r_0}{\lambda}-\frac{t}{T}\right).\end{aligned}$$

L'égalité (11) nous donnera alors

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned}\Omega = &\frac{1}{r_1 r_0}\left(\frac{1}{r_1}\frac{\partial r_1}{\partial N}-\frac{1}{r_0}\frac{\partial r_0}{\partial N}\right)\cos 2\pi\left(\frac{r_1+r_0}{\lambda}-\frac{t}{T}\right)\\ &+\frac{2\pi}{r_1 r_0\lambda}\left(\frac{\partial r_1}{\partial N}-\frac{\partial r_0}{\partial N}\right)\sin 2\pi\left(\frac{r_1+r_0}{\lambda}-\frac{t}{T}\right).\end{aligned}\right.$$

Pour déduire de cette valeur de Ω la valeur de l'intégrale considérée, nous prendrons pour point de départ le théorème suivant :

Soient $F(\zeta)$ *une fonction de* ζ *qui demeure continue lorsque* ζ *croît de* ζ_0 *à* ζ_1 *et* δ *une constante. L'intégrale*

$$(14)\quad \int_{\zeta_0}^{\zeta_1}\frac{dF}{d\zeta}\sin(K\zeta+\delta)\,d\zeta$$

tend vers 0 *lorsque* K *croît au delà de toute limite.*

L'exactitude de ce théorème peut être établie par des considérations tout à fait analogues à celles que Dirichlet a exposées, dans ses recherches sur la série de Fourier, au sujet d'une intégrale semblable. On partagera l'intervalle compris entre les limites de l'intégration en parties telles que, dans chacune d'elles, la quantité $\frac{dF}{d\zeta}$ conserve un signe constant et aille sans cesse en croissant ou sans cesse en décroissant; on supposera que le nombre de ces parties est fini; pour démontrer ensuite que l'intégrale considérée s'annule pour chacune de ces parties lorsque K devient infiniment grand, il suffira de partager chacune d'elles en intervalles secondaires, de telle façon que toutes les valeurs de ζ pour lesquelles $\sin(K\zeta+\delta)$ est égal à zéro marquent les points de division entre ces intervalles, et d'écrire les inégalités faciles à trouver auxquelles satisfont les valeurs absolues des intégrales relatives à ces intervalles.

Le théorème dont nous venons de parler entraîne le suivant :

Si la dérivée première de la fonction $F(\zeta)$ *est continue dans l'intervalle compris entre* $\zeta=\zeta_0$ *et* $\zeta=\zeta_1$, *on a, lorsque* K *croît au delà de toute limite, l'égalité limite*

$$(15)\qquad K\int_{\zeta_0}^{\zeta_1}\frac{dF}{d\zeta}\sin(K\zeta+\delta)\,d\zeta=-\left[\frac{dF}{d\zeta}\cos(K\zeta+\delta)\right]_{\zeta_0}^{\zeta_1}.$$

En effet, le premier membre de cette égalité peut, au moyen d'une intégration par parties, s'écrire

$$-\left[\frac{dF}{d\zeta}\cos(K\zeta+\delta)\right]_{\zeta_0}^{\zeta_1}+\int_{\zeta_0}^{\zeta_1}\frac{d^2F}{d\zeta^2}\cos(K\zeta+\delta)\,d\zeta;$$

mais la nouvelle intégrale qui figure dans cette expression est de même forme que l'intégrale (14). Elle tend donc vers zéro lorsque K croît au delà de toute limite.

Considérons maintenant une surface s, limitée de tous côtés, dont les courbures varient d'une manière continue d'un point à un autre. Soit ds un élément de cette surface. Soient r_1 et r_0 les distances d'un point de cet élément à deux points fixes 1 et 0, et posons

$$\zeta=r_1+r_0.$$

Désignons en outre par G une quantité qui varie d'une manière continue avec la position de l'élément ds, par δ une constante, et cherchons vers quelle limite tend l'intégrale

$$(16) \qquad \int G \sin(K\zeta + \delta)\, ds$$

lorsque K croît au delà de toute limite.

Pour y parvenir, traçons la surface représentée par l'équation

$$\zeta = \text{const.}$$

Cette surface est un ellipsoïde de révolution ayant pour foyers les deux points 1 et 0. Cet ellipsoïde coupe la surface suivant une certaine ligne. Envisageons la partie de la surface s qui se trouve comprise entre deux de ces lignes d'intersection, l'une correspondant à la valeur variable ζ et l'autre à une valeur constante arbitrairement choisie de ζ, que nous nommerons Z. Posons

$$(17) \qquad F(\zeta) = \pm \int G\, ds,$$

l'intégrale qui s'étend à la portion de la surface s que nous venons de définir étant précédée du signe + si l'on a $\zeta > Z$ et du signe − si l'on a $\zeta < Z$. D'après ces notations, si nous supposons que $d\zeta$ soit un accroissement positif, nous aurons

$$\frac{dF}{d\zeta} d\zeta = \int G\, ds,$$

l'intégration qui s'étend à la portion de la surface s comprise entre les lignes d'intersection de cette surface avec les deux ellipsoïdes qui correspondent aux valeurs ζ et $\zeta + d\zeta$ de ζ. Désignons par ζ_0 la moindre valeur de ζ sur la surface s et par ζ_1 la plus grande valeur de ζ sur la même surface. L'intégrale (16) aura alors pour valeur

$$\int_{\zeta_0}^{\zeta_1} \frac{dF}{d\zeta} \sin(K\zeta + \delta)\, d\zeta.$$

Elle deviendra donc identique à l'intégrale (14). Elle tend donc vers zéro lorsque K croît au delà de toute limite si la fonction $F(\zeta)$ est continue en tous les points de la surface s. C'est ce qui a lieu si ζ n'a une valeur constante pour aucune portion d'aire finie de la surface s.

Envisageons maintenant, en conservant les mêmes notations, l'expression

$$K\int G\sin(K\zeta+\delta)\,ds. \tag{19}$$

Par une transformation semblable elle devient identique à l'intégrale

$$K\int_{\zeta_0}^{\zeta_1}\frac{dF}{d\zeta}\sin(K\zeta+\delta)\,d\zeta$$

qui forme le premier membre de l'égalité (15). Si donc la quantité $\frac{dF}{d\zeta}$, définie par l'égalité (18), est continue en tous les points de la surface s, cette intégrale tend vers le second membre de l'égalité (15) lorsque K croît au delà de toute limite.

La dérivée $\frac{dF}{d\zeta}$ est discontinue si la quantité ζ est constante le long d'une portion d'étendue finie du contour de la surface s. Si l'on exclut ce cas d'exception, cette dérivée ne peut présenter de discontinuité que si la différentielle $d\zeta$ s'annule en un point de la surface. Il nous faudra chercher en particulier ce qui arrive dans ce cas. Si, pour le moment, laissant de côté ces cas d'exception, nous admettons l'exactitude de l'égalité (15), nous en déduisons sans peine que l'expression (19) tend vers zéro lorsque K croît au delà de toute limite. En effet, en vertu des hypothèses que nous faisons en rejetant les cas d'exception, c'est seulement pour un point ou pour un certain nombre de points du *contour* de la surface s que ζ atteint sa plus grande valeur. Il en est de même pour la plus petite valeur de ζ. Pour chacun des points dont il s'agit, l'intégrale $\int G\,ds$ dont il faut calculer la valeur pour obtenir, au moyen de l'égalité (18), la valeur correspondante de $\frac{dF}{d\zeta}$ est un infiniment petit d'un ordre plus élevé que l'ordre de $d\zeta$; la valeur correspondante de $\frac{dF}{d\zeta}$ est donc égale à zéro.

Cherchons maintenant la valeur de l'expression (19) dans le cas où

$d\zeta$ s'annule en un point de la surface s. Soient

$$g(x, y, z) = 0$$

l'équation de la surface s, et x, y, z les coordonnées du point où $d\zeta$ s'annule. On a alors

$$\frac{\partial r_1}{\partial x} + \frac{\partial r_0}{\partial x} = \mathrm{L}\frac{\partial g}{\partial x},$$
$$\frac{\partial r_1}{\partial y} + \frac{\partial r_0}{\partial y} = \mathrm{L}\frac{\partial g}{\partial y},$$
$$\frac{\partial r_1}{\partial z} + \frac{\partial r_0}{\partial z} = \mathrm{L}\frac{\partial g}{\partial z},$$

L désignant un facteur indéterminé. Soient α_1, β_1, γ_1 les cosinus des angles que fait avec les axes de coordonnées la ligne menée du point 1 au point de coordonnées x, y, z; soient α_0, β_0, γ_0 les cosinus des angles que fait avec les axes de coordonnées la ligne menée du point o au point de coordonnées x, y, z; soient, enfin, α, β, γ les cosinus des angles que fait avec les axes de coordonnées la normale N menée à la surface s au point de coordonnées x, y, z. Les égalités précédentes peuvent s'écrire

$$(20)\qquad \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_0 = \mathrm{M}\alpha, \\ \beta_1 + \beta_0 = \mathrm{M}\beta, \\ \gamma_1 + \gamma_0 = \mathrm{M}\gamma, \end{cases}$$

M désignant un nouveau facteur.

Ces égalités démontrent tout d'abord que les trois lignes r_1, r_0 et N sont dans un même plan; elles montrent aussi que l'on a

$$\mathrm{M}(\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1 + \gamma\gamma_1) = \mathrm{M}(\alpha\alpha_0 + \beta\beta_0 + \gamma\gamma_0).$$

Cette dernière égalité exprime que l'on a l'une des deux conséquences suivantes :

Ou bien l'on a

$$\mathrm{M} = 0,$$

c'est-à-dire

$$\alpha_1 = -\alpha_0, \qquad \beta_1 = -\beta_0, \qquad \gamma_1 = -\gamma_0,$$

et alors le point de coordonnées x, y, z est situé entre les points 1 et o sur la droite qui les joint.

Ou bien les deux directions que définissent les cosinus α_1, β_1, γ_1

et α_0, β_0, γ_0 forment des angles égaux avec la direction de la normale N. Dans ce dernier cas, les lignes r_1 et r_0 se trouvent de part et d'autre de la normale N, à moins qu'elles ne coïncident avec cette normale ou avec son prolongement; car les égalités (20) ne peuvent être vérifiées par $\alpha_0 = \alpha_1$, $\beta_0 = \beta_1$, $\gamma_0 = \gamma_1$, à moins que les lignes r_0 et r_1 ne coïncident avec la normale N ou avec son prolongement.

Changeons maintenant la signification des lettres x, y, z. Désignons par x, y, z les coordonnées d'un point variable de la surface s par rapport à un système de coordonnées ayant pour origine le point qui avait précédemment pour coordonnées x, y, z et ayant pour axe des z la normale N. Supposons, en outre, que la surface s soit réduite à une aire infiniment petite, bien qu'infiniment grande par rapport à $\frac{1}{K}$. Il nous suffira évidemment de calculer la valeur de l'intégrale (19) dans cette hypothèse, car ce que nous avons déjà démontré nous prouve que l'addition de nouvelles parties à la surface s ne modifierait pas la valeur de l'intégrale.

La surface s a alors pour équation

$$z = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2, \tag{21}$$

a_{11}, a_{12}, a_{22} étant des constantes. On a, en outre,

$$ds = dx\,dy.$$

Pour déterminer la forme des lignes d'intersection de la surface s avec les surfaces $\zeta = \text{const.}$, nous allons former l'expression de ζ et développer ζ suivant les puissances croissantes de x et de y.

Soient x_0, y_0, z_0 les coordonnées du point o, et posons

$$\rho_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}.$$

Nous aurons alors

$$r_0 = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$$

ou bien

$$r_0 = \sqrt{\rho_0^2 - 2xx_0 - 2yy_0 - 2zz_0 + x^2 + y^2 + z^2}.$$

Considérons x et y comme des quantités infiniment petites du second ordre, et développons r_0, en faisant usage de l'équation (21), jusqu'aux quantités du second ordre inclusivement. Nous aurons alors

$$r_0 = \rho_0 - \frac{xx_0 + yy_0}{\rho_0} - \frac{a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2}{\rho_0} z_0 + \frac{x^2+y^2}{2\rho_0} - \frac{(xx_0+yy_0)^2}{2\rho_0^3}.$$

Mais les quantités α_0, β_0, γ_0 qui figurent dans les égalités (20) vérifient les relations

$$\frac{x_0}{\rho_0} = -\alpha_0, \qquad \frac{y_0}{\rho_0} = -\beta_0, \qquad \frac{z_0}{\rho_0} = -\gamma_0;$$

on a donc

$$r_0 = \rho_0 + \alpha_0 x + \beta_0 y + (a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2)\gamma_0$$
$$+ \frac{1}{2\rho_0}[x^2(1-\alpha_0^2) - 2xy\alpha_0\beta_0 + y^2(1-\beta_0^2)].$$

Posons de même

$$\rho_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2};$$

nous trouverons

$$r_1 = \rho_1 + \alpha_1 x + \beta_1 y + (a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2)\gamma_1$$
$$+ \frac{1}{2\rho_1}[x^2(1-\alpha_1^2) - 2xy\alpha_1\beta_1 + y^2(1-\beta_1^2)].$$

Mais, grâce au système particulier de coordonnées que nous avons adopté, nous avons

$$\alpha = 0 \quad \text{et} \quad \beta = 0,$$

et, par conséquent, en vertu des égalités (20),

$$\alpha_1 + \alpha_0 = 0, \qquad \beta_1 + \beta_0 = 0.$$

Nous aurons donc

$$\zeta = A_0 + A_{11}x^2 + 2A_{12}xy + A_{22}y^2,$$

égalité dans laquelle on a

$$(22) \qquad \begin{cases} A_0 = \rho_0 + \rho_1, \\ A_{11} = a_{11}(\gamma_1 + \gamma_0) + \dfrac{1-\alpha_1^2}{2\rho_1} + \dfrac{1-\alpha_0^2}{2\rho_0}, \\ A_{12} = a_{12}(\gamma_1 + \gamma_0) - \dfrac{\alpha_1\beta_1}{2\rho_1} - \dfrac{\alpha_0\beta_0}{2\rho_0}, \\ A_{22} = a_{22}(\gamma_1 + \gamma_0) + \dfrac{1-\beta_1^2}{2\rho_1} + \dfrac{1-\beta_0^2}{2\rho_0}. \end{cases}$$

Les courbes d'intersection des surfaces $\zeta = \text{const.}$ avec la surface s sont, d'après cela, des sections coniques semblables et semblablement placées qui ont toutes pour centre l'origine des coordonnées. Supposons que l'équation de ces sections coniques rapportées à leurs axes principaux soit

$$\zeta - A_0 = \mu_1 x^2 + \mu_2 y^2,$$

ou bien, en d'autres termes, désignons par μ_1 et μ_2 les racines de l'équation du second degré

$$(A_{11} - \mu)(A_{22} - \mu) - A_{12}^2 = 0. \tag{23}$$

Si les deux quantités μ_1 et μ_2 sont de même signe, les sections coniques considérées sont des ellipses. Dans ce cas, si les quantités μ_1 et μ_2 sont toutes deux positives, A_0 est une valeur minima de ζ; si, au contraire, les quantités μ_1 et μ_2 sont toutes deux négatives, A_0 est un maximum de ζ. Dans le premier cas, l'aire de l'ellipse qui correspond à une certaine valeur de ζ a pour valeur

$$\frac{\pi(\zeta - A_0)}{\sqrt{\mu_1 \mu_2}}.$$

Dans le second cas, elle a pour valeur

$$\frac{\pi(A_0 - \zeta)}{\sqrt{\mu_1 \mu_2}}.$$

Dans les deux cas, les radicaux doivent être pris avec le signe $+$, de telle façon que la racine carrée d'une quantité positive soit elle-même une quantité positive.

Reprenons maintenant l'égalité (17). Donnons la valeur A_0 à la quantité que, dans cette équation, nous avions désignée par Z. Pour toutes les valeurs de ζ qui correspondent à des ellipses situées entièrement à l'intérieur de la surface s, nous aurons, dans l'un comme dans l'autre cas,

$$F(\zeta) = G \frac{\pi(\zeta - A_0)}{\sqrt{\mu_1 \mu_2}},$$

égalité dans laquelle G se rapporte au point de coordonnées $x = 0$,

$y = 0$. Nous aurons alors

$$\frac{dF}{d\zeta} = G\frac{\pi}{\sqrt{\mu_1\mu_2}}.$$

Supposons qu'aucune partie du contour de la surface s ne coïncide avec l'une des ellipses que nous considérons; $\frac{dF}{d\zeta}$ varie alors d'une manière continue à l'intérieur de cette surface; cette quantité s'annule pour la deuxième valeur limite que prend ζ sur la surface s. Donc, lorsque K croît au delà de toute limite, si μ_1 et μ_2 ont des valeurs positives, l'expression (19) tend vers

$$G\frac{\pi}{\sqrt{\mu_1\mu_2}}\cos(KA_0 + \delta) \tag{24}$$

et, si μ_1 et μ_2 ont des valeurs négatives, elle tend vers

$$G\frac{\pi}{\sqrt{\mu_1\mu_2}}\cos(KA_0 + \delta). \tag{25}$$

Le calcul à effectuer n'est pas aussi simple dans le cas où μ_1 et μ_2 ont des signes contraires. Les sections coniques sont alors des hyperboles. Dans ce cas, $\frac{dF}{d\zeta}$ est discontinu pour $\zeta = A_0$. Prenons les axes principaux des sections coniques pour axes de coordonnées et donnons à la surface s une forme particulière : celle d'un rectangle dont les côtés, parallèles aux axes principaux, sont représentés par les équations

$$x = \pm a, \qquad y = \pm b.$$

Arrangeons-nous de telle manière que les sommets de ce rectangle soient sur les asymptotes. Il faudra pour cela que nous ayons

$$a\sqrt{\mu_1} = b\sqrt{-\mu_2} = c,$$

μ_1 étant supposé positif et μ_2 négatif. L'axe transverse de l'hyperbole qui correspond à une certaine valeur de ζ coïncide alors avec l'axe des x si, pour cette valeur de ζ, $\zeta - A_0$ est positif, et avec l'axe des y si $\zeta - A_0$ est négatif. Donnons maintenant de nouveau à la quantité Z, définie à propos de l'égalité (17), la valeur A_0, et nous aurons, pour les valeurs de ζ supérieures à A_0,

$$F(\zeta) = G\left(2ab - \frac{4}{\sqrt{-\mu_2}}\int_{\sqrt{\frac{\zeta - A_0}{\mu_1}}}^{a} \sqrt{\mu_1 x^2 - \zeta + A_0}\, dx\right),$$

G se rapportant encore au point de coordonnées $x = 0$, $y = 0$. De là, nous déduisons

$$\frac{dF}{d\zeta} = G\frac{2}{\sqrt{-\mu_2}}\int_{\sqrt{\frac{\zeta - A_0}{\mu_1}}}^{a} \frac{dx}{\sqrt{\mu_1 x^2 - \zeta + A_0}}.$$

Mais on a

$$\int_1^z \frac{dz}{\sqrt{z^2 - 1}} = \log(z + \sqrt{z^2 - 1}).$$

On a donc

$$\frac{dF}{d\zeta} = G\frac{2}{\sqrt{-\mu_1\mu_2}}\log\frac{c + \sqrt{c^2 - \zeta + A_0}}{\sqrt{\zeta - A_0}}.$$

On trouve de même, pour les valeurs de ζ inférieures à A_0,

$$\frac{dF}{d\zeta} = G\frac{2}{\sqrt{-\mu_1\mu_2}}\log\frac{c + \sqrt{c^2 + \zeta - A_0}}{\sqrt{A_0 - \zeta}}.$$

Remarquons maintenant que la moindre valeur de ζ correspond aux points de coordonnées $x = 0$, $y = \pm b$ et est égale à $A_0 - c^2$, tandis que la plus grande valeur de ζ correspond aux points de coordonnées $x = \pm a$, $y = 0$, et est égale à $A_0 + c^2$; nous aurons alors, pour valeur de l'expression (19),

$$G\frac{2}{\sqrt{\mu_1\mu_2}}K\left[\int_{A_0 - c^2}^{A_0} \log\frac{c + \sqrt{c^2 + \zeta - A_0}}{\sqrt{A_0 - \zeta}}\sin(K\zeta + \delta)\, d\zeta \right.$$
$$\left. + \int_{A_0}^{A_0 + c^2} \log\frac{c + \sqrt{c^2 - \zeta + A_0}}{\sqrt{\zeta - A_0}}\sin(K\zeta + \delta)\, d\zeta\right].$$

Dans la première de ces intégrales, posons

$$A_0 - \zeta = \xi.$$

Dans la seconde, posons

$$\zeta - A_0 = \xi.$$

L'expression précédente deviendra

$$G\frac{2}{\sqrt{-\mu_1\mu_2}}K\int_0^{c^2}\log\frac{c+\sqrt{c^2-\xi}}{\sqrt{\xi}}[\sin(K\xi+KA_0+\delta)-\sin(K\xi-KA_0-\delta)]\,d\xi$$

ou bien

$$G\frac{4}{\sqrt{-\mu_1\mu_2}}K\sin(KA_0+\delta)\int_0^{c^2}\log\frac{c^2+\sqrt{c^2-\xi}}{\sqrt{\xi}}\cos K\xi\,d\xi.$$

Mais on a

$$\begin{aligned}K\int_0^{c^2}&\log\frac{c+\sqrt{c^2-\xi}}{\sqrt{\xi}}\cos K\xi\,d\xi\\ &=\left(\sin K\xi\log\frac{c+\sqrt{c^2-\xi}}{\sqrt{\xi}}\right)_{\xi=0}^{\xi=c^2}-\int_0^{c^2}\sin K\xi\frac{d}{d\xi}\log(c+\sqrt{c^2-\xi})\,d\xi\\ &\qquad+\frac{1}{2}\int_0^{c^2}\frac{\sin K\xi}{\xi}\,d\xi.\end{aligned}$$

Le premier de ces trois termes est égal à o pour toute valeur de K, car la quantité entre parenthèses s'annule aussi bien pour $\xi=c^2$ que pour $\xi=0$; la deuxième rentre dans la forme générale de l'expression (14); comme $\log(c+\sqrt{c^2-\xi})$ est continu même pour $\xi=c^2$, elle tend vers o lorsque K croît au delà de toute limite, bien que sa dérivée croisse au delà de toute limite. Enfin, pour $K=\infty$, le troisième terme devient

$$\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{\sin u\,du}{u},$$

c'est-à-dire $\frac{\pi}{4}$.

La valeur de l'expression (19), valeur que nous cherchions à déterminer, est donc, dans le cas où les quantités μ_1 et μ_2 sont de signe contraire,

$$G\frac{\pi}{\sqrt{\mu_1\mu_2}}\sin(KA_0+\delta). \tag{26}$$

Pour continuer la discussion des expressions (24), (25) et (26), nous aurons à faire usage de cette relation

$$\mu_1\mu_2=A_{11}A_{22}-A_{12}^2; \tag{27}$$

que l'on obtient tout de suite en remarquant que μ_1 et μ_2 sont les racines de l'équation (23). Dans cette égalité (27), A_{11}, A_{12}, A_{22} ont les valeurs données par les égalités (22).

Ainsi que nous l'avons déduit des équations (20), les raisonnements qui précèdent se rapportent à deux cas distincts : le premier de ces deux cas est celui où la surface s est rencontrée par la ligne droite qui joint le point 1 au point 0; le second est celui où la surface s renferme un point jouissant de la propriété suivante. Les lignes menées de ce point au point 1 et au point 0 sont dans un même plan avec la normale à la surface en ce point et forment des angles égaux avec cette normale. Le premier de ces deux cas demande à être examiné de plus près.

Dans ce cas, on a

$$\alpha_1 + \alpha_0 = 0, \qquad \beta_1 + \beta_0 = 0, \qquad \gamma_1 + \gamma_0 = 0.$$

Les égalités (22) donnent alors

$$\begin{aligned} A_{11} &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_0}\right)(1 - \alpha_1^2), \\ A_{12} &= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_0}\right)\alpha_1\beta_1, \\ A_{22} &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_0}\right)(1 - \beta_1^2). \end{aligned}$$

Ces égalités, jointes à l'égalité (27), donnent

$$\mu_1\mu_2 = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_0}\right)^2 \gamma_1^2.$$

Les racines μ_1 et μ_2 de l'équation (23) sont

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_0}\right) \quad \text{et} \quad \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_0}\right)\gamma_1^2.$$

Elles sont toutes deux positives. On peut donc remplacer l'expression (19) par l'expression (24) qui devient égale à

$$\pm 2\pi G \frac{\rho_1\rho_0}{\rho_1 + \rho_0} \frac{1}{\gamma_1} \cos[K(\rho_1 + \rho_0) + \delta]. \tag{28}$$

Dans cette expression, on prendra le signe + ou le signe — suivant que γ_1 sera positif ou négatif.

Dans tous les raisonnements dont l'expression (19) a été l'objet jusqu'à présent, δ était considéré comme une constante; mais ces raisonnements resteraient exacts si δ représentait, comme G, une quantité qui varie d'une manière continue avec la position de l'élément ds; il faudrait seulement, dans les expressions (24), (25), (26) et (28), entendre que δ se rapporte, comme G, au point de coordonnées $x = 0$, $y = 0$. On le reconnaît au moyen de la remarque suivante :

La formule

$$\sin(K\zeta + \delta) = \cos\delta \sin K\zeta + \sin\delta \cos K\zeta$$

permet, dans le cas où δ est une quantité variable, de remplacer l'intégrale (19) par une somme de deux intégrales de même forme, dans l'une desquelles δ a la valeur constante 0, tandis que, dans l'autre, δ a la valeur constante $\frac{\pi}{2}$.

Les résultats que nous venons d'obtenir nous rendent maintenant facile la démonstration de la proposition relative à l'intégrale $\int \Omega\, ds$ que nous avions énoncée au début de ce paragraphe.

Supposons tout d'abord que Ω ait la forme donnée par l'égalité (13), c'est-à-dire que φ ait la forme donnée par l'égalité (3). Posons

$$\frac{2\pi}{\lambda} = K,$$

$$-2\pi\frac{t}{T} = \delta.$$

Nous voyons alors que la partie de l'intégrale considérée qui provient du premier terme de Ω est toujours égale à 0; quant à la partie de cette intégrale qui provient du second terme de Ω, elle est aussi égale à 0, à moins que la surface s ne soit rencontrée par la ligne qui joint le point 0 au point 1, ou bien encore qu'il n'existe sur la surface s un point tel que les lignes joignant ce point aux deux points 0 et 1 soient situées dans un même plan avec la normale à la surface s en ce point et forment avec elles des angles égaux.

Mais, même dans ce dernier cas d'exception, l'intégrale considérée est égale à 0; en effet, pour obtenir sa valeur, il faut, dans les expressions (24), (25) ou (26), remplacer G par la valeur que prend au point considéré la quantité

(29) $$\frac{1}{r_1 r_0}\left(\frac{\partial r_1}{\partial N} - \frac{\partial r_0}{\partial N}\right).$$

Mais $\frac{\partial r_1}{\partial N}$ et $\frac{\partial r_0}{\partial N}$ sont les cosinus d'angles qui sont égaux entre eux. La valeur en question n'est donc autre que o.

Par conséquent, c'est seulement dans le cas où la surface s est rencontrée par la ligne qui joint les deux points o et 1 que l'intégrale $\int \Omega\, ds$ diffère de o. Pour obtenir, dans ce cas, la valeur de cette intégrale, il suffit, dans l'expression (28), de remplacer G par la valeur de la quantité (29) au point de rencontre de la droite qui joint les points o et 1 avec la surface s. Supposons que la direction de la normale N, qui figure dans l'égalité (13), coïncide avec l'axe des z auquel se rapporte la quantité γ_1 qui figure dans l'expression (28). Nous aurons

$$\frac{\partial r_1}{\partial N} = \gamma_1, \qquad \frac{\partial r_0}{\partial N} = -\gamma_1,$$

et, par conséquent, la quantité (29) aura pour valeur

$$\frac{2\gamma_1}{\rho_1 \rho_0}.$$

Dès lors, nous aurons

$$\int \Omega\, ds = \pm \frac{4\pi}{\rho_1 + \rho_0} \cos 2\pi\left(\frac{\rho_1 + \rho_0}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)$$

ou bien

$$\int \Omega\, ds = \pm 4\pi \varphi_0.$$

Dans cette égalité, on prendra le signe + ou le signe − selon que γ_1 est positif ou négatif, c'est-à-dire selon que la normale N fait avec la ligne qui joint le point 1 au point o un angle aigu ou un angle obtus.

Le raisonnement que nous venons d'exposer démontre la proposition énoncée pour le cas particulier où φ a la forme donnée par l'égalité (3). Cette proposition ne cesse pas d'être exacte lorsqu'on passe, par le procédé qui a été indiqué, de la forme de φ donnée par l'égalité (3) à la forme plus générale donnée par l'égalité (4).

4. Il n'est possible de déduire des conséquences de l'équation (12) que si l'on a auparavant déterminé les valeurs de φ et de $\frac{\partial \varphi}{\partial N}$ à la surface du corps dont cette équation suppose l'existence.

Supposons que des ondes lumineuses planes, se propageant dans un milieu transparent, viennent tomber sur la surface plane qui sépare ce milieu d'un autre milieu. Elles donnent naissance à des ondes planes réfléchies et réfractées. Le fait que ces ondes existent et présentent la direction que l'expérience leur assigne peut être regardé comme la conséquence de la proposition suivante :

Entre les déplacements que subissent des particules d'éther situées dans les deux milieux au voisinage immédiat de la surface de séparation des deux milieux et les dérivées de ces déplacements, il existe des relations linéaires, homogènes, à coefficients constants.

Supposons que φ_i soit la valeur de la quantité φ au point de coordonnées ξ, η, ζ, pour la lumière incidente; que φ_r soit la valeur de la quantité φ au même point pour la lumière réfléchie. Supposons que ζ soit négatif pour le premier milieu et positif pour le second milieu.

Soit

$$\varphi_i = \mathrm{A} \cos 2\pi \left(\frac{l\xi + m\eta + n\zeta}{\lambda} - \frac{t + \alpha}{\mathrm{T}} \right),$$

l, m, n désignant les cosinus des angles que fait avec les axes de coordonnées la normale à l'onde incidente dirigée dans le sens où cette onde se propage. On a alors, d'après la supposition que nous venons d'indiquer,

$$\varphi_r = c\mathrm{A} \cos 2\pi \left(\frac{l\xi + m\eta - n\zeta}{\lambda} - \frac{t + \alpha + \gamma}{\mathrm{T}} \right).$$

Dans cette formule, c et γ sont des constantes dont la valeur dépend de la variable que représente le symbole φ, de l'angle d'incidence, de l'état de polarisation de la lumière incidente et de la nature des deux milieux. D'après cela, on a, pour $\zeta = 0$, en remplaçant les symboles φ_i et φ_r par les symboles $\varphi_i(t)$ et $\varphi_r(t)$ auxquels on attribuera la même signification,

$$\varphi_r(t) = c\,\varphi_i(t+\gamma) \tag{30}$$

et

$$\frac{\partial\,\varphi_r(t)}{\partial\zeta} = -c\,\frac{\partial\,\varphi_i(t+\gamma)}{\partial\zeta}.$$

Si l'on désigne par N, comme dans ce qui précède, la normale à la surface de séparation des deux milieux dirigée vers l'intérieur du premier milieu, la seconde équation pourra aussi s'écrire

$$\frac{\partial\,\varphi_r(t)}{\partial N} = -c\,\frac{\partial\,\varphi_i(t+\gamma)}{\partial N}. \tag{30 bis}$$

Si la lumière incidente était composée d'un ensemble d'ondes diversement orientées, les quantités φ_i et φ_r seraient l'une et l'autre la somme d'un certain nombre de termes dont chacun serait analogue aux quantités que, dans les égalités précédentes, nous avons désignées par ces mêmes lettres φ_i et φ_r; chacun de ces termes vérifierait alors des égalités analogues aux égalités (30) et (30 *bis*).

Ces théorèmes trouvent une application immédiate au cas auquel s'applique l'équation (12), si l'on suppose que la longueur d'onde λ est infiniment petite, et que la courbure de la surface du corps considéré ne prend en aucun point une valeur infiniment grande.

En vertu de l'équation (12), la quantité φ_0, c'est-à-dire la valeur de φ pour un point quelconque o de l'espace considéré, se présente comme une somme de termes dont l'un provient de l'action du point lumineux 1, et les autres d'une couche de points lumineux distribués sur la surface qui limite cet espace. Prenons un point o infiniment voisin de cette surface, et supposons même que sa distance à cette surface puisse être regardée comme infiniment petite par rapport à λ. Les ondes lumineuses qui rencontrent ce point doivent être regardées les unes comme des ondes incidentes, les autres comme des ondes réfléchies ou réfractées, selon qu'elles marchent du point vers la surface ou de la surface vers le point. Les points lumineux dont proviennent les premières ondes sont tous situés d'un même côté d'un plan indéfini mené par le point o parallèlement à l'élément de la surface limite le plus voisin du point o. Les points lumineux d'où proviennent les secondes ondes sont situés de l'autre côté de ce même plan. Supposons qu'il n'existe dans le second milieu aucune onde incidente; le premier renfermera alors uniquement des ondes incidentes et des ondes réfléchies. Supposons que la quantité φ_i se rapporte au mouvement déterminé au point que désigne ici la lettre o par la lumière incidente; que φ_r se rapporte au mouvement déterminé par la lumière réfléchie; enfin φ au mouvement résultant des deux précédents. Nous aurons

$$\varphi = \varphi_i + \varphi_r$$

et

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \mathrm{N}} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial \mathrm{N}} + \frac{\partial \varphi_r}{\partial \mathrm{N}}.$$

En outre, on aura à faire usage des équations (30) et (30 *bis*) si la lumière se compose d'un seul système d'ondes; si l'on a à considérer plusieurs systèmes d'ondes, on fera usage des égalités qui correspondent alors aux équations (30) et (30 *bis*). A propos de ces dernières, nous avons indiqué en quoi consistaient ces égalités.

Il est un cas plus simple et plus accessible à l'imagination que le cas général. C'est celui où le second milieu est formé par un corps *complètement noir,* c'est-à-dire par un corps qui ne peut ni réfléchir la lumière ni la transmettre. L'expérience montre que si la lumière se propage dans un corps avec la même vitesse que dans le milieu ambiant, que si, de plus, ce corps absorbe les rayons lumineux avec une énergie suffisante, ce corps sera complètement noir. Dans ce cas, comme dans le cas d'un corps opaque quelconque, il n'existe aucune onde qui se meuve à l'intérieur du corps et qui vienne rencontrer sa surface; nous nous trouvons donc dans les conditions que nous avons supposées remplies. De plus, pour un semblable corps, la quantité que nous avons désignée par c est toujours égale à o. Donc, les conditions qui doivent être supposées remplies à la surface d'un corps complètement noir sont les suivantes :

$$(31) \qquad \varphi_r = 0, \qquad \frac{\partial \varphi_r}{\partial \mathrm{N}} = 0.$$

Cela posé, si nous imaginons que le corps dont l'équation (12) suppose l'existence soit un corps parfaitement noir et que sa surface soit convexe en tout point, nous trouverons aisément les valeurs que φ et

$\frac{\partial \varphi}{\partial N}$ doivent prendre aux divers points de la surface de ce corps. Menons un plan tangent à la surface du corps, et, du côté de ce plan où le corps ne se trouve point, menons un second plan parallèle au premier et infiniment voisin du premier. La surface du corps est située tout entière d'un même côté de ce plan. Dès lors, les termes qui proviennent d'un élément quelconque ds de la surface figurent toujours dans l'expression de la quantité φ_r, jamais dans l'expression de la quantité φ_i. Traçons un cône ayant pour sommet le point lumineux 1 et tangent à la surface. La ligne de contact de ce cône avec la surface partage cette dernière en deux régions : l'une est vue du point lumineux, l'autre lui est cachée. Désignons ici encore par φ' la valeur de la fonction φ relative au mouvement que prendrait le point o si le corps noir était enlevé. Si le point o est infiniment voisin de la région de la surface du corps qui est vue du point 1, le terme qui provient du point 1 entre dans l'expression de φ_i et a pour valeur φ'. Si, au contraire, le point o est infiniment voisin de la région cachée au point 1, c'est dans l'expression de φ_r qu'entre le terme provenant du point 1.

On a donc, pour tous les points de la première région,

$$\varphi = \varphi', \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial N} = \frac{\partial \varphi'}{\partial N}; \tag{32}$$

pour tous les points de la seconde région, on a

$$\varphi_i = 0, \qquad \frac{\partial \varphi_i}{\partial N} = 0,$$

ou bien, en vertu des égalités (31),

$$\varphi = 0, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial N} = 0. \tag{33}$$

Supposons maintenant que le corps noir, au lieu d'être entièrement convexe, ait une forme quelconque. Les équations (31) seront encore vérifiées si l'on écrit les équations (32) pour tous les points où la surface du corps est rencontrée *pour la première fois* par une droite issue du point 1, et les équations (33) pour tous les autres points. En effet, si l'on admet l'exactitude de ces équations, on déduit du théorème démontré au n° 3 que l'intégrale $\int \Omega\, ds$, étendue à toute la surface du corps, s'annule lorsque le point o est infiniment voisin de la *première* région de la surface, et est égale à $-4\pi\varphi'_0$ lorsque le point o est infiniment voisin de la *seconde* région; cela étant, il suffit de faire usage de l'égalité (12) pour obtenir pour toute la surface les égalités (31).

Mais le théorème que nous avons démontré conduit à une autre conséquence : supposons le point o situé n'importe où dans un milieu transparent. Si la ligne qui joint les points 1 et o ne rencontre pas le corps noir, nous aurons $\varphi_0 = \varphi'_0$. Si, au contraire, cette ligne rencontre le corps noir deux ou plusieurs fois, nous aurons $\varphi_0 = 0$. Remarquons maintenant que nous pouvons regarder φ_0 comme représentant l'une quelconque des composantes u, v, w du déplacement du point o, et nous pourrons énoncer de la manière suivante la proposition que nous venons de démontrer : dans le premier des deux cas que nous venons d'indiquer, le mouvement lumineux au point o est le même que si le corps noir n'existait pas; dans le second cas, le point o se trouve dans une complète obscurité. Cette proposition nous montre que le corps noir porte une *ombre*, que la lumière se propage *rectilignement* en *rayons* que l'on peut regarder comme indépendants les uns des autres.

5. Dans le numéro précédent, nous avons fait usage d'un théorème énoncé au commencement du n° 3. En énonçant ce théorème, nous avons indiqué certaines conditions sans lesquelles il n'est plus exact. Lorsque ces conditions ne sont pas remplies, les conséquences que nous venons de déduire du théorème ne sont plus vraies. Alors se produisent des *phénomènes de diffraction*.

Concevons un point lumineux 1 entouré par un écran complètement noir percé d'une ouverture. Nous appellerons *bord* de l'ouverture la ligne de contact de la surface du corps qui forme l'écran avec un cône issu du point 1 et circonscrit à cette surface. Cette ligne partage la surface de l'écran en deux régions, une région intérieure et une région extérieure.

Désignons par s une surface limitée au bord de l'ouverture et formant, soit avec la surface interne de l'écran, soit avec la surface externe, une surface fermée qui entoure le point lumineux.

Supposons que le point o occupe une position quelconque extérieure à ces deux surfaces fermées. Alors, en vertu de l'équation (12), des hypothèses relatives aux corps noirs, des équations (32) et (33), enfin en vertu de l'équation (10), nous aurons

$$4\pi\varphi_0 = \int \Omega\, ds, \tag{34}$$

en entendant que, pour former la fonction Ω qui figure dans cette égalité, on remplacera φ par φ'. L'intégration s'étend à la surface s.

Les phénomènes de diffraction ne peuvent se présenter que dans les deux cas suivants : ou bien la quantité $r_1 + r_0$ est constante à un infiniment petit près pour une portion finie de la surface s ou de son contour, ou bien la ligne droite qui joint les points 1 et o passe infiniment près du contour de la surface s.

Fresnel a observé les phénomènes qui se produisent aux divers points de l'axe d'une ouverture circulaire ou d'un écran circulaire, le point lumineux appartenant lui-même à cet axe. Les deux quantités r_1 et r_0 étaient alors sensiblement constantes pour tous les points du contour, et, par conséquent, il en était de même de $r_1 + r_0$.

Dans les phénomènes que Fresnel a nommés *phénomènes de diffraction*, par exemple dans les franges qui se produisent près du bord de l'ombre d'un écran, la ligne qui joint les points 1 et o passe infiniment près du contour de la surface s.

Fraunhofer a étudié une autre classe de phénomènes de diffraction. Considérons seulement le cas où ces phénomènes sont produits, sans le secours d'aucune lentille, sur un tableau infiniment éloigné au moyen d'un point lumineux infiniment éloigné. Dans ce cas, $r_1 + r_0$ est sensiblement constant pour tous les points de l'ouverture.

Cherchons quelle est, dans ce cas, la valeur de l'intensité lumineuse au point o. Dans ce but, posons tout d'abord, conformément à l'égalité (3),

$$\varphi' = \frac{1}{r_1}\cos 2\pi\left(\frac{r_1}{\lambda} - \frac{t}{T}\right). \tag{35}$$

La quantité Ω prend alors la valeur donnée par l'égalité (13). Les deux termes dont se compose cette quantité, grâce à l'infinie petitesse de λ, ne sont pas du même ordre de grandeur, à moins que la quantité

$$\frac{\partial r_1}{\partial N} - \frac{\partial r_0}{\partial N}$$

ne soit infiniment petite; il est inutile de considérer ici ce cas particulier.

D'après ce que nous venons de dire, l'équation (34) donne

$$\varphi_0 = \frac{1}{2\lambda}\int \frac{1}{r_1 r_0}\left(\frac{\partial r_1}{\partial N} - \frac{\partial r_0}{\partial N}\right)\sin 2\pi\left(\frac{r_1 + r_0}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) ds.$$

Pour éviter les longueurs, supposons que la surface s soit plane et que ses dimensions soient assez petites par rapport à r_0 et à r_1 pour que, toutes les fois que r_0 et r_1 ou bien leurs dérivées par rapport à N figurent autrement que comme argument d'un sinus, on puisse les regarder comme des constantes; supposons, en même temps, que les lignes r_0 forment des angles infiniment petits avec les prolongements des lignes r_1. Nous aurons alors

$$\frac{\partial r_0}{\partial N} = -\frac{\partial r_1}{\partial N}$$

et

$$\varphi_0 = \frac{1}{\lambda r_1 r_0}\frac{\partial r_1}{\partial N}\int \sin 2\pi\left(\frac{r_1 + r_0}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) ds.$$

Supposons maintenant que l'on généralise l'expression de φ' par la méthode que nous avons indiquée pour passer de l'égalité (3) à l'égalité (4). Nous aurons alors

$$(36) \qquad \varphi' = \frac{D}{r_1}\cos 2\pi\left(\frac{r_1}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) + \frac{D'}{r_1}\sin 2\pi\left(\frac{r_1}{\lambda} - \frac{t}{T}\right),$$

D et D′ étant des quantités qui dépendent de la direction du rayon allant du point lumineux 1 au point de coordonnées x, y, z. Cette égalité conduira à la suivante

$$\varphi_0 = \frac{1}{\lambda r_1 r_0}\frac{\partial r_1}{\partial N}\left[D\int \sin 2\pi\left(\frac{r_1 + r_0}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) ds - D'\int \cos 2\pi\left(\frac{r_1 + r_0}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) ds\right],$$

D et D′ ayant la même signification que dans l'égalité précédente.

Nous pouvons maintenant supposer que φ désigne l'une quelconque des composantes u, v, w du déplacement. Faisons cette supposition, et remplaçons D et D′ par A et A′ si φ représente u, par B et B′ si φ représente v, par C et C′ si φ représente w. Dès lors, d'après la définition donnée au n° 1 pour l'unité d'intensité, l'intensité de la lumière en un point de l'ouverture diffringente a pour valeur

$$\frac{1}{2r_1^2}(A^2 + A'^2 + B^2 + B'^2 + C^2 + C'^2).$$

Désignons cette intensité par I, et posons

$$c = \int \cos 2\pi \frac{r_1 + r_0}{\lambda}\, ds,$$

$$s = \int \sin 2\pi \frac{r_1 + r_0}{\lambda}\, ds;$$

l'intensité au point o aura pour valeur

$$I \frac{1}{\lambda^2 r_0^2} \left(\frac{\partial r_1}{\partial N}\right)^2 (c^2 + s^2).$$

Un grand nombre de mesures ont montré l'accord de cette formule avec l'expérience (1).

6. L'égalité que nous venons de démontrer suppose essentiellement que les dimensions de l'ouverture diffringente sont très grandes par rapport à la longueur d'onde. Pour obtenir les *spectres de diffraction*, on emploie souvent des réseaux dont les fentes ont seulement une largeur d'un petit nombre de longueurs d'onde. On ne saurait donc regarder comme permise l'application de l'égalité précédente à ces réseaux (2). Cependant, les mesures auxquelles nous devons la connaissance des longueurs d'onde ont montré que l'emploi de cette égalité donnait avec une grande exactitude la *position* des maxima de lumière. Les considérations suivantes montrent comment ce fait peut s'expliquer au moyen des hypothèses fondamentales qui ont été admises par nous.

---

(1) *Voir* Fröhlich, *Wiedemann's Annalen der Physik und Chemie*, Band VI, p. 429.

(2) *Voir* Fröhlich, *Wiedemann's Annalen der Physik und Chemie*, Band VI, p. 430, et Band XV, p. 592.

Considérons un réseau sur la nature duquel il nous est inutile de faire aucune hypothèse; ce pourra être un réseau de fils ou un réseau tracé sur noir de fumée, ou encore un réseau à traits de diamant. Supposons que ce réseau soit placé dans l'ouverture d'un écran plan formé par un corps complètement noir. Supposons que cet écran s'étende indéfiniment dans tous les sens. Désignons par ds un élément du plan du réseau ou, pour parler d'une manière plus précise, un élément d'un plan infiniment voisin du réseau et situé du côté du réseau où se trouve le point o. Nous pouvons alors faire usage de l'égalité (9). Si l'on suppose que r_0 soit infiniment grand, cette égalité se simplifie et devient

$$4\pi\varphi_0(t) = -\int \frac{1}{r_0}\left[f\left(t-\frac{r_0}{a}\right)+\frac{1}{a}\frac{\partial r_0}{\partial N}\frac{\partial\varphi\left(t-\frac{r_0}{a}\right)}{\partial t}\right]ds.$$

Prenons le plan auquel appartient l'élément ds pour plan des xy du système de coordonnées. Supposons que l'axe des x soit perpendiculaire aux traits du réseau et que l'origine soit au centre du réseau supposé rectangulaire. Soit ρ_0 la distance de l'origine au point o. Soient α_0, β_0, γ_0 les cosinus des angles que la droite menée de l'origine au point o fait avec les axes coordonnés. Nous aurons

$$r_0 = \rho_0 - \alpha_0 x - \beta_0 y,$$

$$\frac{\partial r_0}{\partial N} = \gamma_0 \qquad \text{et} \qquad ds = dx\,dy.$$

On a ensuite

$$\varphi(t) = A\cos 2\pi\frac{t}{T} + A'\sin 2\pi\frac{t}{T},$$

$$f(t) = \frac{\partial\varphi(t)}{\partial N} = B'\cos 2\pi\frac{t}{T} + B\sin 2\pi\frac{t}{T},$$

$$\frac{1}{a}\frac{\partial\varphi(t)}{\partial t} = \frac{2\pi A'}{\lambda}\cos 2\pi\frac{t}{T} - \frac{2\pi A}{\lambda}\sin 2\pi\frac{t}{T},$$

égalités dans lesquelles A, A′, B, B′ sont des fonctions de x et de y. En reportant ces valeurs dans l'expression de φ_0 et en choisissant convenablement l'origine des temps, on trouve

$$\varphi_0 = \int\int\left[C\cos 2\pi\left(\frac{t}{T}+\frac{\alpha_0 x+\beta_0 y}{\lambda}\right) + C'\sin 2\pi\left(\frac{t}{T}+\frac{\alpha_0 x+\beta_0 y}{\lambda}\right)\right]dx\,dy.$$

Les quantités C et C′ sont inversement proportionnelles à ρ_0; ce sont des fonctions linéaires de γ_0. Enfin, circonstance fort importante à remarquer, ce sont des fonctions linéaires et homogènes de A, A′ et B, B′, à coefficients indépendants de x et de y.

Supposons maintenant que la source de lumière soit un point lumineux rejeté à l'infini dans la direction de l'axe des z négatifs. Désignons par $2b$ la longueur des traits, par $2n$ leur nombre et par e la distance de deux points correspondants de deux traits consécutifs, la largeur du réseau sera $2ne$.

Supposons ensuite que les quantités A, A′, B, B′ et, par conséquent, aussi les quantités C et C′ soient liées à y de telle façon qu'elles demeurent constantes, tandis que y varie de $-b$ à $+b$ et qu'elles s'annulent lorsque y prend des valeurs situées en dehors de cet intervalle; supposons qu'elles soient liées à x de telle façon que, x variant de $-ne$ à $+ne$, ces quantités soient des fonctions périodiques de x ayant pour période e, et qu'elles s'annulent pour les autres valeurs de x. Par suite de ces hypothèses, nous aurons tout d'abord

$$\varphi_0 = \frac{\sin 2\pi \dfrac{\beta b_0}{\lambda}}{\dfrac{\beta_0 \pi}{\lambda}} \int_{-ne}^{ne} \left[\mathrm{C} \cos 2\pi \left(\frac{t}{\mathrm{T}} + \frac{\alpha_0 x}{\lambda} \right) + \mathrm{C}' \sin 2\pi \left(\frac{t}{\mathrm{T}} + \frac{\alpha_0 x}{\lambda} \right) \right] dx;$$

λ étant infiniment petit par rapport à b, le facteur qui précède le signe d'intégration sera infiniment petit par rapport à b si β_0 a une valeur finie. Il aura, au contraire, une valeur finie si β_0 est un infiniment petit de l'ordre de $\frac{\lambda}{b}$.

Sous le signe d'intégration, supposons que nous développions C et C′ suivant les sinus et cosinus des multiples de $\frac{2\pi x}{e}$. Nous aurons alors, en désignant par h un nombre entier ou nul, à considérer les intégrales de la forme

$$\int_{-ne}^{ne} \cos h \frac{2\pi x}{e} \sin \frac{2\pi \alpha_0 x}{\lambda} dx$$

et de la forme

$$\int_{-ne}^{ne} \sin h \frac{2\pi x}{e} \cos \frac{2\pi \alpha_0 x}{\lambda} dx,$$

qui sont égales à o, et les intégrales de la forme

$$\int_{-ne}^{ne} \cos h \frac{2\pi x}{e} \cos \frac{2\pi \alpha_0 x}{\lambda} dx$$

et de la forme

$$\int_{-ne}^{ne} \sin h \frac{2\pi x}{\lambda} \sin \frac{2\pi \alpha_0 x}{\lambda} dx,$$

qui ont respectivement pour valeur

$$\frac{\sin 2\pi ne\left(\frac{h}{e} - \frac{\alpha_0}{\lambda}\right)}{2\pi\left(\frac{h}{e} - \frac{\alpha_0}{\lambda}\right)} + \frac{\sin 2\pi ne\left(\frac{h}{e} + \frac{\lambda}{\alpha_0}\right)}{2\pi\left(\frac{h}{e} + \frac{\alpha_0}{\lambda}\right)}$$

et

$$\frac{\sin 2\pi ne\left(\frac{h}{e} - \frac{\lambda}{\alpha_0}\right)}{2\pi\left(\frac{h}{e} - \frac{\alpha_0}{\lambda}\right)} - \frac{\sin 2\pi ne\left(\frac{h}{e} + \frac{\alpha_0}{\lambda}\right)}{2\pi\left(\frac{h}{e} + \frac{\alpha_0}{\lambda}\right)}.$$

Ces expressions sont en général infiniment petites par rapport à ne, si l'on regarde λ comme infiniment petit par rapport à ne; mais elles deviennent finies dans le cas où

$$\alpha_0 \pm h \frac{\lambda}{e}$$

est une quantité infiniment petite de l'ordre de $\frac{\lambda}{ne}$.

On peut supposer que la quantité φ désigne l'une quelconque des composantes u, v, w du déplacement du point o. On voit alors que, pour

$$\alpha_0 = \pm h \frac{\lambda}{e}, \qquad \beta_0 = 0,$$

l'intensité de la lumière aura une valeur infiniment grande par rapport à l'intensité de la lumière reçue en tout autre point du champ. C'est précisément ce que l'expérience a montré.

7. Les considérations que nous avons exposées permettent bien aisément de démontrer la loi de la *réflexion* des rayons lumineux. Opposons un corps quelconque au point lumineux 1. Pour simplifier, supposons

que la surface de ce corps soit recouverte par une couche d'une substance noire laissant seulement une petite ouverture en regard du point lumineux. Supposons, en outre, que l'on ait choisi la forme géométrique du corps de telle sorte que le rayon réfléchi, tel que le fournit l'expérience, ne rencontre pas une seconde fois la surface du corps. Supposons enfin, comme dans ce qui précède, que la quantité φ' se rapporte au mouvement qui existerait dans le milieu si le corps étranger ne s'y trouvait pas.

Commençons par admettre que la quantité φ' soit représentée par l'équation (35). On satisfera alors aux conditions à remplir en posant :

1° Pour la partie de la surface du corps qui est mise à nu,

$$\varphi_i = \varphi', \qquad \frac{\partial \varphi_i}{\partial N} = \frac{\partial \varphi'}{\partial N'}$$

et, par conséquent, d'après l'égalité (30),

$$\varphi_r = \frac{c}{r_1} \cos 2\pi \left(\frac{r_1}{\lambda} - \frac{t+\gamma}{T} \right),$$

$$\frac{\partial \varphi_r}{\partial N} = -c \frac{\partial}{\partial N} \frac{1}{r_1} \cos 2\pi \left(\frac{r_1}{\lambda} - \frac{t+\gamma}{T} \right),$$

égalités d'où l'on déduit

$$\varphi = \varphi' + \frac{c}{r_1} \cos 2\pi \left(\frac{r_1}{\lambda} - \frac{t+\gamma}{T} \right).$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial N} = \frac{\partial \varphi'}{\partial N} - c \frac{\partial}{\partial N} \frac{1}{r_1} \cos 2\pi \left(\frac{r_1}{\lambda} - \frac{t+\gamma}{T} \right);$$

2° Pour tous les points de la surface noircie en lesquels celle-ci est rencontrée pour la première fois par une ligne issue du point 1,

$$\varphi = \varphi', \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial N} = \frac{\partial \varphi'}{\partial N};$$

3° Enfin, pour tous les autres points de la surface noircie,

$$\varphi = 0, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial N} = 0.$$

D'après les égalités (11) et (12), la quantité dont la valeur de φ_0 dans le cas actuel surpasse la valeur que prendrait la même quantité φ_0

si la surface *tout entière* du corps étranger était noircie est la somme des deux intégrales

$$-\frac{1}{4\pi}\int\frac{c}{r_1 r_0}\left(\frac{1}{r_1}\frac{\partial r_1}{\partial N}+\frac{1}{r_0}\frac{\partial r_0}{\partial N}\right)\cos 2\pi\left(\frac{r_1+r_0}{\lambda}-\frac{t}{T}\right)ds$$

et

$$(37)\qquad -\frac{1}{2\lambda}\int\frac{c}{r_1 r_0}\left(\frac{\partial r_1}{\partial N}+\frac{\partial r_0}{\partial N}\right)\sin 2\pi\left(\frac{r_1+r_0}{\lambda}-\frac{t+\gamma}{T}\right)ds.$$

L'intégration s'étend à la portion de surface mise à nu, portion que nous appellerons la surface s (1); λ étant infiniment petit, si l'on suppose le point o situé à une distance finie de la surface, on pourra négliger la première intégrale devant la seconde. La différence qui existe entre les deux valeurs de φ_0 est donc représentée par l'intégrale (37).

Il en est encore de même si φ', au lieu d'être représenté par l'égalité (35), est représenté par l'égalité (36); seules, les valeurs de c et de γ sont différentes. L'intégrale (37) a la forme de l'intégrale (19). Les raisonnements relatifs à cette dernière intégrale montrent que l'intégrale (37) s'annule en général. L'intégrale (19) ne s'annule pas lorsque la surface s est traversée par la ligne qui joint les points 1 et o; mais l'intégrale (37) s'annule encore dans ce cas; car, au point de rencontre de la ligne et de la surface, on a

$$\frac{\partial r}{\partial N}+\frac{\partial r_1}{\partial N}=0.$$

L'intégrale (37) ne peut donc différer de o que s'il existe sur la surface s un point tel que les lignes joignant ce point au point o et au point 1 soient dans un même plan avec la normale à la surface en ce point, et fassent avec cette normale des angles égaux. Ceci démontre l'existence des rayons réfléchis et donne leur direction; toutefois, la loi de la réflexion sera troublée par des phénomènes de diffraction si la quantité r_1+r_0 est constante à un infiniment petit près pour une por-

(1) Il serait facile de démontrer que, si le point o est situé sur la surface ou dans son voisinage, cette expression redonne bien les valeurs de φ et de $\frac{\partial\varphi}{\partial N}$ que nous avons admises. Toutefois, nous passerons cette démonstration sous silence.

tion finie de la surface s ou de son contour, ou bien encore si le point o se trouve au voisinage immédiat de la surface qui limite le faisceau de rayons réfléchis.

La loi que nous venons de démontrer détermine les directions des rayons réfléchis. On peut en déduire les propriétés géométriques d'un faisceau de rayons émis par un point lumineux et réfléchis sur une surface courbe; mais, en outre, les calculs exposés au n° 3 permettent de reconnaître comment l'intensité et la phase du mouvement lumineux varient d'un point à un autre le long d'un rayon d'un semblable faisceau.

La partie de la quantité φ_0 qui correspond à la lumière réfléchie, c'est-à-dire l'expression (37), est donnée par l'une des égalités (24), (25) ou (26), pourvu que l'on pose dans ces expressions

$$G = \frac{K}{\rho_0},$$

K désignant une quantité indépendante de ρ_0. Il résulte de là que, le long d'un rayon réfléchi, l'intensité varie avec ρ_0 de manière à rester inversement proportionnelle à la valeur absolue de

$$\rho_0^2 \mu_1 \mu_2.$$

D'après les égalités (27) et (22), cette dernière expression peut s'écrire

$$(b_{11}\rho_0 + c_{11})(b_{22}\rho_0 + c_{22}) - (b_{12}\rho_0 + c_{12})^2,$$

les quantités b et c étant indépendantes de ρ_0, et les quantités c vérifiant les égalités

$$c_{11} = \tfrac{1}{2}(1 - \alpha_0^2),$$
$$c_{12} = -\tfrac{1}{2}\alpha_0\beta_0,$$
$$c_{22} = \tfrac{1}{2}(1 - \beta_0^2).$$

En égalant l'expression précédente à zéro, on obtient une équation du second degré en ρ_0 dont les racines sont toujours réelles. Nous les désignerons par f_1 et f_2. L'intensité est alors inversement proportionnelle à la valeur absolue de

$$(\rho_0 - f_1)(\rho_0 - f_2).$$

L'intensité est infinie aux points $\rho_0 = f_1$ et $\rho_0 = f_2$. Ces deux points sont les foyers du rayon.

Quant à ce qui concerne la phase, il faut remarquer que, d'après les expressions (24), (25) et (26), cette phase varie brusquement de $\frac{\pi}{2}$ au moment où le point o traverse l'un des foyers.

Il est à peine nécessaire d'observer que la réfraction de la lumière peut donner lieu à une étude analogue à celle que nous avons faite sur la réflexion.