Annales scientifiques de l'É.N.S.

P. Appell

Développements en série des fonctions doublement périodiques de troisième espèce

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 2 (1885), p. 9-36
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1885_3_2__9_0>

ANNALES

SCIENTIFIQUES

DE

L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIE

DES

FONCTIONS DOUBLEMENT PÉRIODIQUES

DE TROISIÈME ESPÈCE,

PAR M. P. APPELL,

MAITRE DE CONFÉRENCES A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

1. Soit $F(z)$ une fonction uniforme de z vérifiant les deux équations

$$(1) \qquad F(z+2K) = F(z), \quad F(z+2iK') = e^{-\frac{m\pi z i}{K}} F(z)$$

et n'ayant que des pôles dans un parallélogramme des périodes $2K$ et $2iK'$. J'ai montré (*Annales de l'École Normale*, 1884) que cette fonction $F(z)$ peut être décomposée en une somme d'éléments simples possédant chacun un seul pôle et en une partie entière qui est toujours nulle lorsque l'entier m est négatif. L'élément de cette décomposition est la fonction

$$(2) \qquad \chi_\mu(z, \alpha) = \frac{\pi}{2K} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{\frac{\mu n \pi \alpha i}{K}} q^{\mu n(n-1)} \cot \frac{\pi}{2K}(z - \alpha - 2niK'),$$

que l'entier m qui figure dans les relations (1) soit positif ou négatif.

Lorsque m est négatif, $m = -\mu$, l'élément de la décomposition de $F(z)$ est $\chi_\mu(z, \alpha)$, α étant un paramètre qui coïncide successivement avec les pôles de $F(z)$; lorsque m est positif, cet élément est la fonction $\chi_m(\alpha, z)$, où α coïncide successivement avec les pôles de $F(z)$.

Cette transcendante $\chi_\mu(z, \alpha)$ avait été rencontrée par M. Hermite dans des recherches déjà anciennes qui n'ont pas été publiées [1] et dont M. Hermite m'a donné communication, après l'impression de mon précédent Mémoire. Voici, en quelques mots, l'indication de la méthode suivie par M. Hermite. Envisageant une fonction de la forme

$$F(x) = \frac{\Theta(x-\alpha)\,\Theta(x-\beta)\ldots\Theta(x-\lambda)}{\Theta(x-a)\,\Theta(x-b)\ldots\Theta(x-l)\,\Theta(x-m)\ldots\Theta(x-r)},$$

où le nombre des Θ est plus grand au numérateur qu'au dénominateur, il ramène d'abord la décomposition de $F(x)$ en éléments simples à la décomposition d'une fonction analogue contenant un seul Θ au numérateur; et cela de la façon suivante. La fonction $F(x)$ peut être écrite

$$F(x) = \Phi(x)\,\frac{1}{\Theta(x-m)\ldots\Theta(x-r)},$$

où $\Phi(x)$ contient autant de Θ au numérateur qu'au dénominateur. Cette fonction $\Phi(x)$ est donc doublement périodique de seconde espèce et peut être mise sous la forme

$$\Phi(x) = A\,\frac{\Theta(x-a')}{\Theta(x-a)} + B\,\frac{\Theta(x-b')}{\Theta(x-b)} + \ldots + L\,\frac{\Theta(x-l')}{\Theta(x-l)};$$

remplaçant $\Phi(x)$ par cette expression, on trouve $F(x)$ décomposée en une somme de termes, tels que

$$\varphi(x) = A\,\frac{\Theta(x-a')}{\Theta(x-a)\,\Theta(x-m)\ldots\Theta(x-r)},$$

contenant un seul Θ au numérateur. Pour décomposer enfin cette fonction $\varphi(x)$ en éléments simples, M. Hermite considère le produit

$$f(z) = \varphi(z)\cot\frac{\pi}{2K}(z-x)$$

---

(1) Dans la publication intitulée : *In memoriam Dominici Chelini Collectanea mathematica* (Milan, 1881), M. Hermite a indiqué quelques formules très importantes relatives à ce sujet.

qui admet par rapport à z la période $2K$. L'intégrale $\frac{1}{2\pi i}\int f(z)\,dz$, prise le long d'un contour sur lequel $f(z)$ ne devient pas infinie, est égale à la somme des résidus de $f(z)$ relatifs aux pôles de cette fonction situés dans ce contour. Prenons pour contour d'intégration celui d'un parallélogramme PQRS dont les sommets sont les points

$$\begin{array}{ll} P(z_0+2niK'), & Q(z_0-2niK'), \\ R(z_0+2K-2niK'), & S(z_0+2K+2niK'), \end{array}$$

n désignant un entier positif. La fonction $f(z)$ devient infiniment petite sur les côtés PS et QR quand n augmente indéfiniment; il en est de même de l'intégrale $\int f(z)\,dz$ le long de ces côtés. De plus, comme $f(z)$ admet la période $2K$, l'intégrale $\int f(z)\,dz$ a des valeurs égales et de signes contraires sur les côtés PQ et RS. Donc la somme des résidus de $f(z)$ relatifs aux pôles situés dans ce parallélogramme tend vers zéro quand n augmente indéfiniment. En formant ces résidus et écrivant que leur somme est nulle, on obtient la fonction

$$\varphi(x) = A\,\frac{\Theta(x-a')}{\Theta(x-a)\,\Theta(x-m)\ldots\Theta(x-r)},$$

exprimée par la somme de séries convergentes qui ne diffèrent que par des facteurs constants des fonctions

$$\chi_\mu(x+t+iK',\, a+t),\quad \chi_\mu(x+t+iK',\, m+t),\quad \ldots,$$

t désignant la constante

$$\frac{1}{\mu}(a'-a-m-\ldots-r)-K$$

et μ l'excès du nombre des Θ du dénominateur sur celui du numérateur.

Le cas le plus simple qui puisse se présenter est celui où la quantité a' qui figure au numérateur de $\varphi(x)$ est égale à l'une des quantités a, m, …, r du dénominateur. Relativement à ce cas, je trouve, dans des Notes manuscrites que M. Hermite m'a fait l'honneur de me communiquer, la formule suivante. Soit

$$\Phi(x) = \Theta(x-a)\,\Theta(x-b)\ldots\Theta(x-l)$$

le nombre des facteurs étant égal à μ, et

$$\frac{1}{A} = H(a-b)H(a-c)\ldots H(a-l),$$

$$\frac{1}{B} = H(b-a)H(b-c)\ldots H(b-l),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

on a

$$\begin{aligned}\frac{2K}{\pi}\frac{H'(o)}{\Phi(x)} = \quad & A\sum i^{-\mu\nu} q^{\frac{\mu\nu^2}{4}} e^{\frac{\nu i\pi}{2K}(\mu a - s)} \cot\frac{\pi}{2K}(x-a-\nu iK') \\ & + B\sum i^{-\mu\nu} q^{\frac{\mu\nu^2}{4}} e^{\frac{\nu i\pi}{2K}(\mu b - s)} \cot\frac{\pi}{2K}(x-b-\nu iK') \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + L\sum i^{-\mu\nu} q^{\frac{\mu\nu^2}{4}} e^{\frac{\nu i\pi}{2K}(\mu l - s)} \cot\frac{\pi}{2K}(x-l-\nu iK'),\end{aligned}$$

les sommes étant étendues à toutes les valeurs *impaires* de ν, de $-\infty$ à $+\infty$, et s désignant la somme $a+b+\ldots+l$. On reconnaît immédiatement que les séries multipliées par A, B, ..., L sont des fonctions χ_μ, d'après la notation (2). Ainsi le coefficient de A est égal à

$$\frac{2K}{\pi} i^\mu \sqrt[4]{q^\mu} e^{-\frac{\pi i}{2K}(\mu a - s)} \chi_\mu\left(x - \frac{s}{\mu} - K + iK', a - \frac{s}{\mu} - K\right).$$

Je trouve encore, dans les mêmes Notes de M. Hermite, la formule

$$\text{(3)} \qquad \frac{2Ki}{\pi} H'(o) \frac{H(a-b)\Theta(x-p)}{\Theta(x-a)\Theta(x-b)} = H(a-p)f_a - H(b-p)f_b,$$

où

$$f_a = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} (-1)^n e^{\frac{i\pi\nu}{2K}(p-b)} q^{\frac{\nu^2}{4}} \cot\frac{\pi}{2K}(x-a-\nu iK'),$$

$$f_b = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} (-1)^n e^{\frac{i\pi\nu}{2K}(p-a)} q^{\frac{\nu^2}{4}} \cot\frac{\pi}{2K}(x-b-\nu iK'),$$

avec

$$\nu = 2n+1,$$

formule qui s'obtient immédiatement par l'application de la méthode de M. Hermite, exposée à la page 11. Si l'on pose

$$t = p - a - b - K,$$

on a

$$f_a = \frac{2K}{\pi i}\sqrt[4]{q}\,.\,e^{\frac{\pi(a+t)i}{2K}}\chi_1(x+t+iK', a+t),$$

$$f_b = \frac{2K}{\pi i}\sqrt[4]{q}\,.\,e^{\frac{\pi(b+t)i}{2K}}\chi_1(x+t+iK', b+t).$$

C'est un extrait de ces recherches que M. Hermite a donné dans les *Collectanea mathematica in memoriam Dominici Chelini;* la fonction

$$\varphi(x,\omega) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^n q^{\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2} e^{\frac{(2n+1)i\pi\omega}{2K}}}{\operatorname{tang}\frac{\pi}{2K}[x-(2n+1)iK']},$$

qu'il considère à la page 5, n'est autre chose que

$$\frac{2K}{\pi}\sqrt[4]{q}\,.\,e^{\frac{i\pi\omega}{2K}}\chi_1(x+\omega+K+iK', \omega+K);$$

et la formule de M. Hermite

$$\varphi(x)e^{\frac{i\pi}{K}(x+iK'+\omega)} = -\varphi(x+2iK') + \mathrm{H}(\omega)\left[1-e^{\frac{i\pi}{K}(x+iK'+\omega)}\right]$$

donne, par un simple changement de notations, la formule fondamentale relative à la fonction χ_1

$$\chi_1(z+2iK',\alpha) = e^{\frac{\pi z i}{K}}\chi_1(z,\alpha) - \frac{\pi i}{2K}\left(1+e^{\frac{\pi z i}{K}}\right)g_0^{(1)}(\alpha),$$

où

$$g_0^{(1)}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt[4]{q}}\,e^{\frac{\pi\alpha i}{2K}}\mathrm{H}_1(\alpha).$$

Il est intéressant de remarquer que la formule que M. Hermite donne sans démonstration à la fin de cet article se déduit de la formule (3) en y faisant $p=0$, et en changeant les lettres x, a, b respectivement en z, $x+iK'$, $y+iK'$.

2. Jusqu'ici nous avons exposé la méthode de M. Hermite en nous plaçant dans le cas particulier où la fonction à décomposer ne possède que des pôles *simples*. Lorsque cette fonction admet un pôle $x=a$

d'ordre m de multiplicité, la formule de décomposition contient l'élément simple qui admet pour pôle simple le point a et les $(m-1)$ premières dérivées de cet élément par rapport au paramètre. C'est ce qui résulte immédiatement de la méthode de M. Hermite. En effet, appliquons, par exemple, cette méthode à la fonction

$$\Phi(x) = \frac{\Theta(x-a')}{\Theta^2(x-a)\,\Theta(x-b)\ldots\Theta(x-l)},$$

qui admet pour pôle double le point $a + i\mathrm{K}'$ et ses homologues. Nous devons écrire, pour obtenir la formule de décomposition, que les pôles de la fonction de z

$$\Phi(z)\cot\frac{\pi}{2\mathrm{K}}(z-x),$$

situés dans le parallélogramme désigné précédemment par PQRS (p. 11) ont une somme qui tend vers zéro quand les côtés PS et QR s'éloignent indéfiniment. Voyons quels sont, dans cette somme, les termes provenant du facteur double $\Theta^2(z-a)$ du dénominateur. Dans le voisinage du pôle double

$$z = a + (2n+1)i\mathrm{K}',$$

en posant

$$z = a + (2n+1)i\mathrm{K}' + \varepsilon,$$

on a

$$\Phi(z) = \frac{\mathrm{R}_n}{\varepsilon^2} + \frac{\mathrm{R}'_n}{\varepsilon} + \ldots,$$

$$\begin{aligned}\cot\frac{\pi}{2\mathrm{K}}(z-x) &= \cot\frac{\pi}{2\mathrm{K}}[a+(2n+1)i\mathrm{K}'-x] \\ &\quad + \varepsilon\mathrm{D}_a\cot\frac{\pi}{2\mathrm{K}}[a+(2n+1)i\mathrm{K}'-x] + \ldots.\end{aligned}$$

Le résidu du produit $\Phi(z)\cot\frac{\pi}{2\mathrm{K}}(z-x)$ relativement à ce pôle est donc

$$\mathrm{R}'_n\cot\frac{\pi}{2\mathrm{K}}[a+(2n+1)i\mathrm{K}'-x] + \mathrm{R}_n\mathrm{D}_a\cot\frac{\pi}{2\mathrm{K}}[a+(2n+1)i\mathrm{K}'-x],$$

et la somme de ces résidus est composée linéairement avec l'élément simple et sa dérivée par rapport au paramètre. Ce fait résulte aussi d'une manière simple de la méthode que j'ai employée dans mon premier Mémoire (p. 153 et suiv.) pour obtenir la formule de décomposition.

Je citerai, comme exemples, les formules que M. Biehler a démontrées dans les nos 75, 77, 79 de sa Thèse en employant la méthode de M. Hermite. Il serait aisé de retrouver ces formules par l'application de la méthode que j'ai indiquée.

Pour cela, prenons la fonction

$$\varphi(z) = \frac{\Theta(z)}{\mathrm{H}_1^2(z)}$$

qui vérifie les deux équations

$$\begin{aligned} \varphi(z + 2\mathrm{K}) &= \varphi(z), \\ \varphi(z + 2i\mathrm{K}') &= e^{\frac{\pi i}{\mathrm{K}}(z+\mathrm{K}+i\mathrm{K}')}\varphi(z). \end{aligned}$$

Pour appliquer la méthode que j'ai donnée, il faut commencer par faire un changement de variable qui ramène ces équations à la forme (1); c'est ce que l'on réalise en posant

$$z + \mathrm{K} + i\mathrm{K}' = t;$$

la fonction à décomposer devient

$$\Phi(t) = \frac{\Theta(t - \mathrm{K} - i\mathrm{K}')}{\mathrm{H}_1^2(t - \mathrm{K} - i\mathrm{K}')} = \frac{\Theta_1(t - i\mathrm{K}')}{\mathrm{H}^2(t - i\mathrm{K}')};$$

cette fonction vérifie les deux équations

$$\Phi(t + 2\mathrm{K}) = \Phi(t), \quad \Phi(t + 2i\mathrm{K}') = e^{\frac{\pi t i}{\mathrm{K}}}\Phi(t),$$

qui sont bien de la forme (1); elle a, dans un parallélogramme des périodes, le seul pôle $t = i\mathrm{K}'$ qui est un pôle double. La formule de décomposition sera de la forme

$$\Phi(t) = \mathrm{A}\,\chi_1(t, i\mathrm{K}') + \mathrm{B}\,\chi_1'(t, i\mathrm{K}'),$$

$\chi_1'(t, i\mathrm{K}')$ désignant la dérivée $\frac{d\chi_1(t, \alpha)}{d\alpha}$ dans laquelle on remplace α par $i\mathrm{K}'$. Ces deux coefficients A et B sont les coefficients de

$$\frac{1}{t - i\mathrm{K}'}, \quad \frac{1}{(t - i\mathrm{K}')^2}$$

dans le développement de $\Phi(t)$ au voisinage du pôle $t = i\mathrm{K}'$. Pour les trouver faisons

$$t = i\mathrm{K}' + \varepsilon;$$

alors

$$\Phi(t) = \frac{\Theta_1(\varepsilon)}{\mathrm{H}^2(\varepsilon)} = \frac{\Theta_1(\mathrm{o}) + \varepsilon^2\Theta''_1(\mathrm{o}) + \ldots}{\mathrm{H}'^2(\mathrm{o})\varepsilon^2 + \ldots},$$

$$\Phi(t) = \frac{\Theta_1(\mathrm{o})}{\mathrm{H}'^2(\mathrm{o})}\frac{1}{\varepsilon^2} + \ldots;$$

le coefficient A de $\frac{1}{\varepsilon}$ est donc nul, et l'on a

$$\mathrm{B} = \frac{\Theta_1(\mathrm{o})}{\mathrm{H}'^2(\mathrm{o})} = \frac{\theta_1}{k\theta^2},$$

donc enfin

$$\frac{\Theta_1(t - i\mathrm{K}')}{\mathrm{H}^2(t - i\mathrm{K}')} = \frac{\theta_1}{k\theta^2}\chi'_1(t, i\mathrm{K}'). \tag{4}$$

Revenant à la variable z par la formule

$$t = z + \mathrm{K} + i\mathrm{K}',$$

on a enfin

$$\frac{\Theta(z)}{\mathrm{H}_1^2(z)} = \frac{\theta_1}{k\theta^2}\chi'_1(z + \mathrm{K} + i\mathrm{K}', i\mathrm{K}'),$$

ce qui, d'après l'expression (2) de $\chi_1(z, \alpha)$ et l'expression qu'on en déduit,

$$\chi'_1(z, \alpha) = \frac{\pi^2}{4\mathrm{K}^2}\sum e^{\frac{n\pi\alpha i}{\mathrm{K}}} q^{n(n-1)}\left[2ni\cot\frac{\pi}{2\mathrm{K}}(z - \alpha - 2ni\mathrm{K}') + \frac{1}{\sin^2\frac{\pi}{2\mathrm{K}}(z - \alpha - 2ni\mathrm{K}')}\right],$$

n'est autre chose que la première des formules données par M. Biehler dans le n° 77.

Si, dans la formule (4), on fait

$$t - i\mathrm{K}' = z,$$

on obtient le développement de $\frac{\Theta_1(z)}{\mathrm{H}^2(z)}$ tel qu'il est donné par M. Biehler.

Du reste, dès que l'on a obtenu le développement de l'une des quatre fonctions d'un même groupe (d'après la classification de M. Biehler), on en conclut celui des trois autres en augmentant z de

$$\mathrm{K},\quad i\mathrm{K}',\quad \mathrm{K}+i\mathrm{K}'.$$

C'est ainsi que le développement de $\dfrac{\mathrm{H}(z)}{\Theta_1^2(z)}$ se déduit de celui de $\dfrac{\Theta(z)}{\mathrm{H}_1^2(z)}$ par le changement de z en $z+i\mathrm{K}'$. Comme l'on a

$$\frac{\Theta(z+i\mathrm{K}')}{\mathrm{H}_1^2(z+i\mathrm{K}')} = i\sqrt[4]{q}\,.\,e^{\frac{\pi z i}{2\mathrm{K}}}\,\frac{\mathrm{H}(z)}{\Theta_1^2(z)},$$

on trouve ainsi

$$\theta_1\eta_1^2\theta^2\,\frac{\mathrm{H}(z)}{\Theta_1^2(z)} = -\frac{i}{\sqrt[4]{q}}\,e^{-\frac{\pi z i}{2\mathrm{K}}}\sum_m q^{m^2}\left[\frac{1}{\cos^2(x-\nu\omega)} - 2mi\,\mathrm{tang}(x-\nu\omega)\right],$$

où

$$x=\frac{\pi z}{2\mathrm{K}},\qquad \nu = 2m-1,\qquad \omega=\frac{i\pi\mathrm{K}'}{2\mathrm{K}}.$$

On reconnaît, comme il suit, l'identité de ce développement avec celui que donne M. Biehler. En faisant passer le facteur e^{-xi} sous le signe Σ, on trouve, pour le terme général de la série, l'expression

$$q^{m^2}e^{-xi}\left[\frac{1}{\cos^2(x-\nu\omega)} - 2mi\,\mathrm{tang}(x-\nu\omega)\right]$$

ou encore, puisque $e^{\omega i}=\sqrt{q}$,

$$q^{m^2-m+\frac{1}{2}}e^{-(x-\nu\omega)i}\left[\frac{1}{\cos^2(x-\nu\omega)} - 2mi\,\mathrm{tang}(x-\nu\omega)\right].$$

Mais on a identiquement

$$e^{-iu}\left(\mathrm{A}\,\mathrm{tang}\,u+\frac{\mathrm{B}}{\cos^2 u}\right) = \frac{\mathrm{B}-i\mathrm{A}}{\cos u} - \frac{i\mathrm{B}\sin u}{\cos^2 u} + i\mathrm{A}e^{-iu};$$

on en conclut que le facteur de $q^{m^2-m+\frac{1}{2}}$ est égal à

$$-\frac{2m-1}{\cos(x-\nu\omega)} - \frac{i\sin(x-\nu\omega)}{\cos^2(x-\nu\omega)} + 2me^{-(x-\nu\omega)i}.$$

On obtient enfin, en transformant ainsi le terme général,

$$\theta_1\eta_1^2\theta^2\,\frac{\mathrm{H}(z)}{\Theta_1^2(z)} = -\sum q^{\frac{\nu^2}{4}}\left[\frac{\sin(x-\nu\omega)}{\cos^2(x-\nu\omega)} + \frac{\nu i}{\cos(x-\nu\omega)}\right] - \frac{i}{\sqrt[4]{q}}\sum_{-\infty}^{+\infty} 2mq^{m^2}e^{-ix}.$$

Cette dernière somme étant nulle, on obtient bien le développement tel qu'il est donné par M. Biehler.

Enfin, je terminerai ces remarques en appliquant la méthode que j'ai indiquée dans mon précédent Mémoire à la démonstration des deux formules

$$\left[\frac{\theta\theta_1\eta}{\theta(x)}\right]^2 = \sum_\nu q^{\frac{\nu^2}{2}}\left(\frac{2K}{\pi}D_x - 2i\nu\right)\cot\frac{\pi}{2K}(x - i\nu K'),$$

$$\left[\frac{\theta\theta_1\eta}{H(x)}\right]^2 = \sum_\mu q^{\frac{\mu^2}{2}}\left(2i\mu - \frac{2K}{\pi}D_x\right)\cot\frac{\pi}{2K}(x - i\mu K'),$$

qui m'ont été communiquées par M. Hermite, et dont la démonstration est très simple par sa méthode; dans ces séries, l'entier ν prend toutes les valeurs *impaires* et μ toutes les valeurs *paires* de $-\infty$ à $+\infty$.

La fonction

$$F(x) = \frac{1}{\theta^2(x)}$$

vérifie les relations

$$F(x + 2K) = F(x), \quad F(x + 2iK') = e^{\frac{2\pi i}{K}(x+iK')}F(x);$$

faisant alors

$$x + iK' = z, \quad \Phi(z) = F(x) = F(z - iK'),$$

on a

$$\Phi(z) = -\sqrt[2]{q}\,.\,e^{-\frac{\pi z i}{K}}\frac{1}{H^2(z)},$$

et cette fonction vérifie les équations

$$\Phi(z + 2K) = \Phi(z), \quad \Phi(z + 2iK') = e^{\frac{2\pi z i}{K}}\Phi(z),$$

qui sont de la forme (1) où $m = -2$. La fonction $\Phi(z)$ a, dans un parallélogramme des périodes, le seul pôle $z = 0$, et, dans le voisinage de ce point, on a

$$\Phi(z) = -\frac{\sqrt[2]{q}}{H'^2(0)}\left(\frac{1}{z^2} - \frac{\pi i}{K}\frac{1}{z}\right) + \ldots.$$

On aura donc, d'après la formule de décomposition en éléments simples,

$$\Phi(z) = -\frac{\sqrt[2]{q}}{H'^2(0)}\left[\chi_2'(z, 0) - \frac{\pi i}{K}\chi_2(z, 0)\right]$$

où, d'après l'équation (2) définissant χ_μ,

$$\sqrt[2]{q}\,\chi_2(z,\alpha) = \frac{\pi}{2K}\sum e^{\frac{2n\pi\alpha i}{K}} q^{\frac{(2n-1)^2}{2}} \cot\frac{\pi}{2K}(z-\alpha-2niK'),$$

$$\sqrt[2]{q}\,\chi_2'(z,\alpha) = \frac{\pi^2}{4K^2}\sum e^{\frac{2n\pi\alpha i}{K}} q^{\frac{(2n-1)^2}{2}} \left[4ni\cot\frac{\pi}{2K}(z-\alpha-2niK') + \frac{1}{\sin^2\frac{\pi}{2K}(z-\alpha-2niK')}\right]$$

En faisant, dans ces formules, $\alpha = 0$ et substituant, on aura le développement de $\Phi(z)$, et, en revenant à la variable x par la formule

$$F(x) = \Phi(x + iK'),$$

on obtiendra le développement de $\frac{1}{\Theta^2(x)}$ tel qu'il est écrit plus haut.

Notre calcul donne en même temps le développement de $\frac{1}{H^2(z)}$ qui est égal à

$$-\frac{1}{\sqrt[2]{q}}\, e^{\frac{\pi z i}{K}}\,\Phi(z).$$

Le terme général de la série ainsi obtenue contiendra en facteur l'exponentielle $e^{\frac{\pi z i}{K}}$, que l'on fera disparaître en appliquant à ce terme général l'identité [1]

$$e^{2ui}\left(A\cot u + \frac{B}{\sin^2 u}\right) = (A + 2Bi)\cot u + \frac{B}{\sin^2 u} + iA(1 + e^{2ui}) - 2B$$

et remarquant que, dans la somme, la partie entière disparaît.

3. Les recherches de M. Hermite, que je viens de rappeler et dont j'ai donné plusieurs exemples, avaient été entreprises afin de démontrer dans toute sa généralité une loi que M. Biehler, dans son excellente Thèse, a vérifiée sur un grand nombre d'exemples :

Si l'on développe une fonction doublement périodique de troisième espèce en une série ordonnée par rapport aux puissances de q, on voit apparaître dans les sinus et cosinus qui forment le coefficient de $q^{\frac{N}{4}}$ les

---

[1] Voir *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique* de M. Hermite, p. 321 et suiv.

combinaisons $\frac{\delta' \pm m\delta}{2}$ *des diviseurs conjugués* δ *et* δ' *de* N; *le signe* $+$ *convenant au cas où il y a au numérateur m fonctions* Θ *de plus qu'au dénominateur et le signe* $-$ *au cas où il y a au dénominateur m fonctions* Θ *de plus qu'au numérateur.*

Quoique M. Hermite ait complètement démontré cette loi, il a bien voulu m'engager à publier les résultats que j'ai trouvés sur ce sujet en suivant la méthode employée dans mon précédent Mémoire.

4. Je me propose, en conséquence, de former des développements en série des fonctions

$$\chi_\mu(x+i\mathrm{K}', a+i\mathrm{K}'),\ \chi_\mu(x+i\mathrm{K}', a),\ \chi_\mu(x, a+i\mathrm{K}'),\ \chi_\mu(x, a),$$

ordonnés suivant les puissances de q. Ces développements une fois connus, il suffira, pour former les développements en série de toutes les fonctions, telles que (1), d'appliquer à ces fonctions la formule de décomposition en éléments simples et de développer ensuite chaque élément.

Reprenons le développement de la fonction (2) sous la forme

$$(5)\qquad \chi_\mu(x, a) = \frac{\pi i}{2\mathrm{K}} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{\frac{\mu n \pi a i}{\mathrm{K}}} q^{\mu n(n-1)} \frac{e^{\frac{\pi(x-a)i}{\mathrm{K}}} + q^{2n}}{e^{\frac{\pi(x-a)i}{\mathrm{K}}} - q^{2n}};$$

en y changeant x et a en $x+i\mathrm{K}'$ et $a+i\mathrm{K}'$, on obtient

$$(5')\qquad \frac{2\mathrm{K}}{\pi i}\chi_\mu(x+i\mathrm{K}', a+i\mathrm{K}') = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{\frac{\mu n \pi a i}{\mathrm{K}}} q^{\mu n^2} \frac{e^{\frac{\pi(x-a)i}{\mathrm{K}}} + q^{2n}}{e^{\frac{\pi(x-a)i}{\mathrm{K}}} - q^{2n}}.$$

Faisons, pour abréger,

$$(6)\qquad \alpha = \frac{\pi(x-a)}{\mathrm{K}},\quad \beta = \frac{\mu\pi a}{\mathrm{K}}$$

et réunissons, dans la série (5′), les termes correspondant à des valeurs de n égales et de signes contraires, après avoir isolé le terme correspondant à $n=0$.

Nous aurons alors

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{2K}{\pi i}\chi_\mu(x+iK', a+iK') \\ &\quad = \frac{e^{\alpha i}+1}{e^{\alpha i}-1} + \sum_{n=1}^{n=\infty} q^{\mu n^2}\left(e^{n\beta i}\frac{e^{\alpha i}+q^{2n}}{e^{\alpha i}-q^{2n}} + e^{-n\beta i}\frac{e^{\alpha i}+q^{-2n}}{e^{\alpha i}-q^{-2n}}\right). \end{aligned}\right.$$

Supposons que le module de $e^{\alpha i}$ soit compris entre celui de q^2 et celui de $\frac{1}{q^2}$,

$$|q^2| < |e^{\alpha i}| < \left|\frac{1}{q^2}\right|;$$

nous aurons, pour toutes les valeurs positives de n,

$$\frac{e^{\alpha i}+q^{2n}}{e^{\alpha i}-q^{2n}} = \frac{1+q^{2n}e^{-\alpha i}}{1-q^{2n}e^{-\alpha i}} = 1 + 2\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} q^{2n\nu}e^{-\nu\alpha i},$$

car le module de $q^{2n}e^{-\alpha i}$ est moindre que l'unité; de même,

$$\frac{e^{\alpha i}+q^{-2n}}{e^{\alpha i}-q^{-2n}} = -\frac{1+q^{2n}e^{\alpha i}}{1-q^{2n}e^{\alpha i}} = -1 - 2\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} q^{2n\nu}e^{\nu\alpha i}.$$

Portant ces développements dans le terme général de la série (7), nous obtenons la série double

$$\begin{aligned} &\frac{2K}{\pi i}\chi_\mu(x+iK', a+iK') \\ &\quad = \frac{e^{\alpha i}+1}{e^{\alpha i}-1} + \sum_{n=1}^{n=\infty} q^{\mu n^2}(e^{n\beta i}-e^{-n\beta i}) + 2\sum_{n=1}^{n=\infty}\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} q^{\mu n^2+2n\nu}(e^{n\beta i-\nu\alpha i}-e^{-n\beta i+\nu\alpha i}) \end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned} &\frac{K}{\pi}\chi_\mu(x+iK', a+iK') \\ &\quad = \tfrac{1}{2}\cot\frac{\alpha}{2} - \sum_{n=1}^{n=\infty} q^{\mu n^2}\sin n\beta - 2\sum_{n=1}^{n=\infty}\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} q^{\mu n^2+2n\nu}\sin(n\beta-\nu\alpha); \end{aligned}$$

ce que l'on peut écrire

$$\frac{K}{\pi}\chi_\mu(x+iK', a+iK') = \tfrac{1}{2}\cot\frac{\alpha}{2} - \sum_{n=1}^{n=\infty}\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} 2q^{\mu n^2+2n\nu}\sin(n\beta-\nu\alpha),$$

en convenant que le facteur 2 qui figure dans le terme général de la série doit être remplacé par 1 lorsque $\nu = 0$. Si l'on remet pour α et β leurs valeurs (6), on obtient ainsi le développement

$$(8)\quad \begin{cases} \dfrac{K}{\pi}\chi_\mu(x+iK', a+iK') \\ \quad = \frac{1}{2}\cot\dfrac{\pi}{2K}(x-a) - \displaystyle\sum_{n=1}^{n=\infty}\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} 2q^{\mu n^2+2n\nu}\sin\left[(\mu n+\nu)\dfrac{\pi a}{K} - \nu\dfrac{\pi x}{K}\right]. \end{cases}$$

Si l'on ordonne cette série suivant les puissances de q

$$(9)\quad \frac{K}{\pi}\chi_\mu(x+iK', a+iK') = \tfrac{1}{2}\cot\frac{\pi}{2K}(x-a) - \sum_{N=1}^{N=\infty} q^N A_N^{(\mu)}(x, a),$$

quelle sera l'expression du coefficient $A_N^{(\mu)}(x, a)$ de q^N? Pour la trouver, supposons

$$N = \mu n^2 + 2n\nu = n(\mu n + 2\nu);$$

soit

$$N = \delta\delta'$$

une décomposition de N en deux facteurs, δ désignant le plus petit des deux facteurs (si ces facteurs sont inégaux), on aura

$$n = \delta, \quad \mu n + 2\nu = \delta',$$

d'où

$$\nu = \frac{\delta' - \mu\delta}{2}, \quad \mu n + \nu = \frac{\delta' + \mu\delta}{2};$$

on aura, par suite, pour l'expression du coefficient $A_N^{(\mu)}(x, a)$,

$$(9')\quad A_N^{(\mu)}(x, a) = \sum_{\delta, \delta'} 2\sin\left(\frac{\delta' + \mu\delta}{2}\frac{\pi a}{K} - \frac{\delta' - \mu\delta}{2}\frac{\pi x}{K}\right),$$

la somme étant étendue aux couples de diviseurs de N pour lesquels $\dfrac{\delta' - \mu\delta}{2}$ est un *entier positif* ou *nul* avec cette convention que, lorsque $\dfrac{\delta' - \mu\delta}{2}$ sera nul, on remplacera le coefficient 2 qui multiplie le sinus par le coefficient 1. On peut remarquer que le diviseur δ est au plus égal à $\sqrt{\frac{N}{\mu}}$, car, en multipliant par δ la condition

$$\delta' - \mu\delta \geqq 0,$$

on obtient

$$N - \mu\delta^2 \geqq 0.$$

5. Voici maintenant le développement de la fonction $\chi_\mu(x + i\mathrm{K}', a)$. Si, dans l'équation de définition (5), on change x en $x + i\mathrm{K}'$, on obtient une série qui peut être écrite de la façon suivante :

$$(10)\quad \chi_\mu(x + i\mathrm{K}', a) = \frac{\pi i}{2\mathrm{K}\sqrt[4]{q^\mu}} e^{\frac{\mu\pi a i}{2\mathrm{K}}} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{\frac{(2n-1)\mu\pi a i}{2\mathrm{K}}} q^{\mu\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2} \frac{e^{\frac{\pi(x-a)i}{\mathrm{K}}} + q^{2n-1}}{e^{\frac{\pi(x-a)i}{\mathrm{K}}} - q^{2n-1}}.$$

Faisons, pour abréger,

$$(11)\qquad \alpha = \frac{\pi(x-a)}{\mathrm{K}}, \quad \gamma = \frac{\mu\pi a}{2\mathrm{K}}$$

et réunissons, dans la série (10), les termes qui correspondent à des valeurs de $(2n-1)$ égales et de signes contraires; nous aurons

$$(10')\quad \left\{ \begin{aligned} &\chi_\mu(x + i\mathrm{K}', a) \\ &\quad = \frac{\pi i}{2\mathrm{K}\sqrt[4]{q^\mu}} e^{\gamma i} \sum_{n=1}^{n=\infty} q^{\mu\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2} \left(e^{(2n-1)\gamma i} \frac{e^{\alpha i} + q^{2n-1}}{e^{\alpha i} - q^{2n-1}} + e^{-(2n-1)\gamma i} \frac{e^{\alpha i} + q^{-(2n-1)}}{e^{\alpha i} - q^{-(2n-1)}} \right) \end{aligned} \right.$$

Si l'on suppose que le module de $e^{\alpha i}$ est compris entre les modules de q et $\frac{1}{q}$

$$|q| < |e^{\alpha i}| < \left|\frac{1}{q}\right|,$$

on a, pour toutes les valeurs positives de l'entier n,

$$\frac{e^{\alpha i} + q^{2n-1}}{e^{\alpha i} - q^{2n-1}} = \frac{1 + q^{2n-1}e^{-\alpha i}}{1 - q^{2n-1}e^{-\alpha i}} = 1 + 2\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} q^{(2n-1)\nu} e^{-\nu\alpha i};$$

de même,

$$\frac{e^{\alpha i} + q^{-(2n-1)}}{e^{\alpha i} - q^{-(2n-1)}} = -\frac{1 + q^{2n-1}e^{\alpha i}}{1 - q^{2n-1}e^{\alpha i}} = -1 - 2\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} q^{(2n-1)\nu} e^{\nu\alpha i}.$$

Portant ces développements dans le terme général de la série (10'), on a

$$\chi_\mu(x+i\mathrm{K}',a)=\frac{\pi i}{2\mathrm{K}\sqrt[4]{q^\mu}}e^{\gamma i}\sum_{n=1}^{n=\infty}q^{\mu\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2}\left(e^{(2n-1)\gamma i}-e^{-(2n-1)\gamma i}\right)$$

$$+\frac{\pi i}{2\mathrm{K}\sqrt[4]{q^\mu}}e^{\gamma i}\sum_{n=1}^{n=\infty}\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty}2q^{\mu\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2+(2n-1)\nu}\left(e^{(2n-1)\gamma i-\nu\alpha i}-e^{-(2n-1)\gamma i+\nu\alpha i}\right)$$

ou encore

$$\frac{\mathrm{K}}{\pi}\sqrt[4]{q^\mu}e^{-\gamma i}\chi_\mu(x+i\mathrm{K}',a)$$
$$=-\sum_{n=1}^{n=\infty}q^{\mu\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2}\sin(2n-1)\gamma$$
$$-\sum_{n=1}^{n=\infty}\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty}2q^{\mu\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2+(2n-1)\nu}\sin[(2n-1)\gamma-\nu\alpha];$$

ce que l'on peut écrire plus simplement

$$\frac{\mathrm{K}}{\pi}\sqrt[4]{q^\mu}e^{-\gamma i}\chi_\mu(x+i\mathrm{K}',a)=-\sum_{n=1}^{n=\infty}\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty}2q^{\mu\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2+(2n-1)\nu}\sin[(2n-1)\gamma-\nu\alpha],$$

en convenant que dans les termes dans lesquels $\nu=0$ le coefficient 2 doit être remplacé par 1. On obtient ainsi, en remettant pour α et γ leurs valeurs (11), la série

$$(12)\quad\left\{\begin{aligned}&\frac{\mathrm{K}}{\pi}\sqrt[4]{q^\mu}e^{-\frac{\mu\pi ai}{2\mathrm{K}}}\chi_\mu(x+i\mathrm{K}',a)\\&=-\sum_{n=1}^{n=\infty}\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty}2q^{\mu\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2+(2n-1)\nu}\sin\left[\frac{\mu(2n-1)+2\nu}{2}\frac{\pi a}{\mathrm{K}}-\frac{\nu\pi x}{\mathrm{K}}\right].\end{aligned}\right.$$

Si l'on ordonne cette série suivant les puissances de q

$$(13)\qquad\frac{\mathrm{K}}{\pi}\sqrt[4]{q^\mu}e^{-\frac{\mu\pi ai}{2\mathrm{K}}}\chi_\mu(x+i\mathrm{K}',a)=-\sum_{1}^{\infty}q^{\frac{\mathrm{N}}{4}}\mathrm{B}_\mathrm{N}^{(\mu)}(x,a),$$

quelle sera l'expression du coefficient $\mathrm{B}_\mathrm{N}^{(\mu)}(x,a)$ de $q^{\frac{\mathrm{N}}{4}}$?

Tout d'abord, comme on a

$$N = \mu(2n-1)^2 + 4(2n-1)\nu, \tag{14}$$

on voit que les exposants N, qui figurent dans le développement (13), sont des entiers positifs satisfaisant à la condition

$$N \equiv \mu \pmod 4. \tag{15}$$

Soient alors N un entier vérifiant la condition (15) et δ un *diviseur impair* de N

$$N = \delta\delta', \quad (\delta \equiv 1, \bmod 2);$$

on aura, d'après (14),

$$\delta = (2n-1), \quad \delta' = \mu(2n-1) + 4\nu,$$

d'où

$$\nu = \frac{\delta' - \mu\delta}{4}, \quad \mu(2n-1) + 2\nu = \frac{\delta' + \mu\delta}{2};$$

il importe de remarquer que, pourvu que δ soit un diviseur impair de N, $\delta' - \mu\delta$ est divisible par 4, de sorte que ν est un entier pour toutes les combinaisons δ, δ'. De plus, comme ν doit être positif ou nul, δ est au plus égal à $\sqrt{\frac{N}{\mu}}$. On a donc

$$B_N^{(\mu)}(x, a) = \sum_{\delta, \delta'}{}' 2 \sin\left(\frac{\delta' + \mu\delta}{4}\frac{\pi a}{K} - \frac{\delta' - \mu\delta}{4}\frac{\pi x}{K}\right), \tag{16}$$

la somme Σ' étant étendue à tous les couples de diviseurs de N dans lesquels δ est impair et au plus égal à $\sqrt{\frac{N}{\mu}}$, avec cette convention que le coefficient 2 du sinus doit être remplacé par 1 lorsque δ devient égal à $\sqrt{\frac{N}{\mu}}$.

Pour montrer que, sous les suppositions qui ont été faites, $\frac{\delta' - \mu\delta}{4}$ est entier, écrivons les deux congruences

$$N \equiv \mu, \quad \mu\delta^2 \equiv \mu \pmod 4,$$

dont la seconde résulte de ce que δ est *impair;* on en conclut

$$N - \mu\delta^2 \equiv 0, \quad \delta(\delta' - \mu\delta) \equiv 0,$$

et enfin

$$\delta' - \mu\delta \equiv 0 \pmod{4}.$$

6. Nous allons maintenant appliquer les formules précédentes à quelques cas particuliers. Supposons d'abord $\mu = 1$, et rappelons-nous que, d'après une formule démontrée dans mon premier Mémoire sur les fonctions doublement périodiques de troisième espèce (*Annales de l'École Normale*, 1884, p. 151), on a

$$\chi_1(x, \mathrm{K}) = \frac{\mathrm{H}'(0)}{i} \frac{e^{-\frac{\pi x i}{2\mathrm{K}}}}{\mathrm{H}_1(x)};$$

Changeant x en $x + \mathrm{K} + i\mathrm{K}'$, on a

$$\chi_1(x + \mathrm{K} + i\mathrm{K}', \mathrm{K}) = -\frac{i\mathrm{H}'(0)}{\sqrt[4]{q}} \frac{1}{\Theta(x)}. \tag{17}$$

Pour avoir le développement en série de $\frac{1}{\Theta(x)}$, il suffira de faire, dans la formule (13),

$$\mu = 1, \quad a = \mathrm{K},$$

et d'y remplacer x par $x + \mathrm{K}$. On a ainsi la formule

$$i\frac{\mathrm{K}}{\pi}\sqrt[4]{q}\,\chi_1(x + \mathrm{K} + i\mathrm{K}', \mathrm{K}) = \sum_1^\infty q^{\frac{\mathrm{N}}{4}} \mathrm{B}_{\mathrm{N}}^{(1)}(x + \mathrm{K}, \mathrm{K})$$

et par suite, d'après (17),

$$\frac{\mathrm{K}}{\pi} \frac{\mathrm{H}'(0)}{\Theta(x)} = \sum_1^\infty q^{\frac{\mathrm{N}}{4}} \mathrm{B}_{\mathrm{N}}^{(1)}(x + \mathrm{K}, \mathrm{K}),$$

où le coefficient $\mathrm{B}_{\mathrm{N}}^{(1)}(x + \mathrm{K}, \mathrm{K})$ est donné par l'équation (16)

$$\mathrm{B}_{\mathrm{N}}^{(1)}(x + \mathrm{K}, \mathrm{K}) = \sum_{\delta, \delta'}{}' 2 \sin\left[(\delta' + \delta)\frac{\pi}{4} - (\delta' - \delta)\frac{\pi}{4} - (\delta' - \delta)\frac{\pi x}{4\mathrm{K}}\right],$$

c'est-à-dire

$$\mathrm{B}_{\mathrm{N}}^{(1)}(x + \mathrm{K}, \mathrm{K}) = \sum_{\delta, \delta'}{}' 2(-1)^{\frac{\delta - 1}{2}} \cos(\delta' - \delta)\frac{\pi x}{4\mathrm{K}},$$

expression qui est d'accord avec celle que donne M. Biehler à la page 106 de sa Thèse pour le développement $\frac{1}{\Theta(x)}$. On a, en effet, en adoptant les notations que M. Biehler emprunte à M. Hermite,

$$\frac{K}{\pi} H'(0) = \tfrac{1}{2}\, \theta\theta_1\eta.$$

7. La fonction de y

$$\chi_\mu(iK', y)$$

admet, dans un parallélogramme des périodes, un seul pôle $y = iK'$ avec le résidu -1 et $(\mu + 1)$ zéros, parmi lesquels se trouvent, quel que soit μ, les points $y = 0$, $y = K + iK'$; on vérifie que ces points sont bien des zéros de la fonction en faisant, dans la formule (8),

$$x = 0, \quad a = K,$$

ce qui donne

$$\chi_\mu(iK', K + iK') = 0,$$

et, dans la formule (12),

$$x = 0, \quad a = 0,$$

ce qui donne

$$\chi_\mu(iK', 0) = 0.$$

Cette remarque faite, supposons d'abord $\mu = 1$. La fonction

$$\chi_1(iK', y)$$

admet alors, dans un parallélogramme des périodes, le seul pôle iK' et les deux seuls zéros $y = 0$, $y = K + iK'$; de plus, elle vérifie les deux équations

$$\chi_1(iK', y + 2K) = \chi_1(iK', y),$$

$$\chi_1(iK', y + 2iK') = e^{-\frac{\pi y i}{K}} \chi_1(iK', y);$$

mais la fonction

$$e^{\frac{\pi y i}{2K}} \frac{H(y)\,\Theta_1(y)}{\Theta(y)}$$

admet les mêmes zéros, les mêmes infinis, et vérifie les mêmes relations. On a donc

$$\chi_1(iK', y) = C e^{\frac{\pi y i}{2K}} \frac{H(y)\,\Theta_1(y)}{\Theta(y)},$$

C étant une constante que nous allons déterminer par la condition que le résidu relatif au pôle $y = iK'$ est égal à -1. Pour cela, faisons

$$y = z + iK',$$

la formule précédente donne

$$\chi_1(iK', z + iK') = C\sqrt[4]{q}\,\frac{\Theta(z)\,H_1(z)}{H(z)};$$

le résidu du deuxième membre relatif au pôle $z = 0$ devant être -1, on a

$$C = -\frac{1}{\sqrt[4]{q}}\,\frac{H'(0)}{\Theta(0)\,H_1(0)} = -\frac{1}{\sqrt[4]{q}}\sqrt{\frac{\pi}{2K}},$$

car

$$H'(0) = \sqrt{k}\,\Theta(0), \quad H_1(0) = \sqrt{\frac{2Kk}{\pi}}.$$

n obtient ainsi les deux formules

$$(18) \qquad \chi_1(iK', y) = -\frac{1}{\sqrt[4]{q}}\sqrt{\frac{\pi}{2K}}\,e^{\frac{\pi y i}{2K}}\,\frac{H(y)\,\Theta_1(y)}{\Theta(y)},$$

$$(18') \qquad \chi_1(iK', z + iK') = -\sqrt{\frac{\pi}{2K}}\,\frac{\Theta(z)\,H_1(z)}{H(z)}.$$

D'après cela, la formule (13), dans laquelle on fait $x = 0$, $\mu = 1$ et $a = y$ donne le développement de

$$\sqrt{\frac{K}{2\pi}}\,\frac{H(y)\,\Theta_1(y)}{\Theta(y)},$$

et la formule (9), dans laquelle on fait les mêmes substitutions, donne celui de

$$\sqrt{\frac{K}{2\pi}}\,\frac{\Theta(y)\,H_1(y)}{H(y)}.$$

On retrouve ainsi les développements en série indiqués par M. Hermite, qui ont été le point de départ des recherches de M. Biehler, et qu'il est inutile de reproduire ici.

On obtiendrait de même des formules données par M. Biehler, en remarquant que la fonction de y

$$\chi_2(iK', y)$$

admet, dans un parallélogramme des périodes, le seul pôle $y = i\mathrm{K}'$ avec le résidu -1 et les trois zéros

$$y = 0, \quad y = \mathrm{K}, \quad y = \mathrm{K} + i\mathrm{K}'.$$

On conclut de là

$$\chi_2(i\mathrm{K}', y) = \mathrm{D}\, e^{\frac{\pi y i}{\mathrm{K}}} \frac{\mathrm{H}(y)\,\mathrm{H}_1(y)\,\Theta_1(y)}{\Theta(y)},$$

D étant une constante déterminée par la condition que le résidu relatif au pôle $y = i\mathrm{K}'$ est égal à -1. En faisant, comme plus haut, $y = z + i\mathrm{K}'$, la formule précédente donne

$$\chi_2(i\mathrm{K}', z + i\mathrm{K}') = \mathrm{D}\sqrt[2]{q}\, \frac{\mathrm{H}_1(z)\,\Theta(z)\,\Theta_1(z)}{\mathrm{H}(z)};$$

en écrivant que le résidu relatif à $z = 0$ est -1, on trouve

$$\mathrm{D} = -\frac{1}{\sqrt[2]{q}} \frac{\mathrm{H}'(0)}{\mathrm{H}_1(0)\,\Theta(0)\,\Theta_1(0)} = -\frac{1}{\sqrt[2]{q}} \frac{\pi}{2\mathrm{K}}.$$

Les formules (9) et (13), dans lesquelles on fait $x = 0$, $\mu = 2$ et $a = y$ donneront alors les développements des deux fonctions

$$\frac{\mathrm{H}_1(y)\,\Theta(y)\,\Theta_1(y)}{\mathrm{H}(y)}, \quad \frac{\mathrm{H}(y)\,\mathrm{H}_1(y)\,\Theta_1(y)}{\Theta(y)},$$

tels qu'ils ont été indiqués par M. Biehler.

8. Enfin, comme dernier exemple, considérons la fonction

$$\mathrm{F}(x) = \frac{\mathrm{K}}{\pi} \frac{e^{-\frac{\pi x i}{\mathrm{K}}}\,\mathrm{H}(2a)\,\mathrm{H}'(0)}{\mathrm{H}(x-a)\,\mathrm{H}(x+a)}, \tag{19}$$

qui vérifie les deux équations

$$\mathrm{F}(x + 2\mathrm{K}) = \mathrm{F}(x), \quad \mathrm{F}(x + 2i\mathrm{K}') = e^{\frac{2\pi x i}{\mathrm{K}}}\,\mathrm{F}(x).$$

Cette fonction devient infinie aux points homologues des deux points

$$x = a, \quad x = -a,$$

et les résidus correspondants sont

$$\frac{K}{\pi} e^{-\frac{\pi a i}{K}}, \quad -\frac{K}{\pi} e^{\frac{\pi a i}{K}}.$$

On a donc, d'après la formule de décomposition en éléments simples appliquée au cas actuel où $\mu = 2$,

$$F(x) = \frac{K}{\pi}\left[e^{-\frac{\pi a i}{K}} \chi_2(x, a) - e^{\frac{\pi a i}{K}} \chi_2(x, -a)\right].$$

Changeons, dans cette formule, x en $x + iK'$, et remarquons que

$$(20) \qquad F(x + iK') = -\frac{1}{\sqrt[2]{q}} \frac{K}{\pi} \frac{H(2a) H'(0)}{\Theta(x-a)\Theta(x+a)},$$

nous aurons

$$(21) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{K}{\pi} \frac{H(2a) H'(0)}{\Theta(x-a)\Theta(x+a)} \\ &= -\frac{K}{\pi} \sqrt[2]{q} e^{-\frac{\pi a i}{K}} \chi_2(x + iK', a) + \frac{K}{\pi} \sqrt[2]{q} e^{\frac{\pi a i}{K}} \chi_2(x + iK', -a). \end{aligned} \right.$$

En appliquant la formule (13), dans laquelle on fait $\mu = 2$, on obtient immédiatement le développement en série de chacun des termes du second membre, et l'on trouve ainsi

$$(22) \qquad \frac{K}{\pi} \frac{H(2a) H'(0)}{\Theta(x-a)\Theta(x+a)} = \sum_{1}^{\infty} q^{\frac{N}{4}} [B_N^{(2)}(x, a) - B_N^{(2)}(x, -a)].$$

Le coefficient de $q^{\frac{N}{4}}$ est donc, d'après (16),

$$\sum_{\delta, \delta'}' \left[2 \sin\left(\frac{\delta' + 2\delta}{4} \frac{\pi a}{K} - \frac{\delta' - 2\delta}{4} \frac{\pi x}{K}\right) + 2 \sin\left(\frac{\delta' + 2\delta}{4} \frac{\pi a}{K} + \frac{\delta' - 2\delta}{4} \frac{\pi x}{K}\right)\right]$$

ou enfin

$$\sum_{\delta, \delta'}' 4 \sin \frac{\delta' + 2\delta}{4} \frac{\pi a}{K} \cos \frac{\delta' - 2\delta}{4} \frac{\pi x}{K},$$

où il faut, d'après une convention antérieure, remplacer le coefficient 4 par 2 dans les termes de la somme dans lesquels $\delta' - 2\delta = 0$ [1].

---

[1] *Voyez*, pour une formule analogue, une Note de M. Kronecker, *Monatsbericht der Akademie zu Berlin*, décembre 1881.

En changeant, dans la formule (21), a en $a + i\mathrm{K}'$, on obtiendrait une nouvelle formule dont on pourrait développer le second membre d'après la formule (9); mais je laisse ce calcul de côté pour examiner ce que donne la relation (22) quand a tend vers zéro. Divisant les deux membres par a et faisant tendre a vers zéro, on obtient la formule

$$(23) \qquad \frac{2\mathrm{K}}{\pi}\frac{\mathrm{H}'^2(0)}{\Theta^2(x)} = \sum_1^\infty q^{\frac{\mathrm{N}}{4}} b_\mathrm{N},$$

où b_N a pour valeur

$$b_\mathrm{N} = \sum_{\delta,\,\delta'}{}' \frac{\pi}{\mathrm{K}}(\delta' + 2\delta)\cos\frac{\delta' - 2\delta}{4}\frac{\pi x}{\mathrm{K}},$$

le cosinus devant être affecté du coefficient $\frac{1}{2}$ quand $\delta' - 2\delta = 0$.

9. Pour achever le tableau complet de ces formules, il reste à former les développements de $\chi_\mu(x, a)$ et $\chi_\mu(x, a + i\mathrm{K}')$. Nous arriverons aux formules cherchées en faisant une transformation importante dont deux cas particuliers ont déjà été signalés aux pages 17 et 19 et qui, dans les formules de M. Biehler, permet de passer du développement d'une fonction d'un groupe à celui des trois autres. Cette transformation nous a été suggérée par la méthode qu'emploie M. Hermite dans les *Collectanea mathematica*, etc., pour tirer des développements de $\frac{1}{\Theta(x)}$ et $\frac{1}{\mathrm{H}(x)}$ les propriétés fondamentales de ces fonctions.

En multipliant les deux membres de la série (5) par $e^{\frac{\mu\pi(x-a)i}{2\mathrm{K}}}$, on obtient la formule

$$\frac{2\mathrm{K}}{\pi} e^{\frac{\mu\pi(x-a)i}{2\mathrm{K}}} \chi_\mu(x, a) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{\frac{\mu n\pi a i}{\mathrm{K}}} q^{\mu n(n-1)} e^{\frac{\mu\pi(x-a)i}{2\mathrm{K}}} \cot\frac{\pi}{2\mathrm{K}}(x - a - 2ni\mathrm{K}'),$$

qui peut être écrite

$$(24) \qquad \frac{2\mathrm{K}}{\pi} e^{\frac{\mu\pi(x-a)i}{2\mathrm{K}}} \chi_\mu(x, a) = \sum e^{\frac{\mu n\pi a i}{\mathrm{K}}} q^{\mu n^2} e^{\mu\alpha i} \cot\alpha$$

en faisant

$$(25) \qquad \alpha = \frac{\pi}{2\mathrm{K}}(x - a - 2ni\mathrm{K}').$$

Pour transformer le terme général de cette série (24), nous distinguerons deux cas suivant que μ est pair ou impair.

Soit d'abord μ pair. Alors on a identiquement

$$e^{\mu\alpha i}\cot\alpha = \cot\alpha + i(e^{\mu\alpha i} + 2e^{(\mu-2)\alpha i} + 2e^{(\mu-4)\alpha i} + \ldots + 2e^{2\alpha i} + 1);$$

en remplaçant, dans (24), $e^{\mu\alpha i}\cot\alpha$ par cette valeur, on obtient

$$(24')\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{2K}{\pi} e^{\frac{\mu\pi(x-a)i}{2K}} \chi_\mu(x, a) \\ &\quad = \sum e^{\frac{\mu n\pi ai}{K}} q^{\mu n^2} \cot\alpha + i\sum e^{\frac{\mu n\pi ai}{K}} q^{\mu n^2}(e^{\mu\alpha i} + 2e^{(\mu-2)\alpha i} + \ldots + 2e^{2\alpha i} + 1). \end{aligned}\right.$$

La première série qui figure dans le second membre est, d'après (5′), la fonction $\frac{2K}{\pi}\chi_\mu(x + iK', a + iK')$; quant à la deuxième série, elle se partage en $\left(\frac{\mu}{2} + 1\right)$ séries qui sont, en remettant pour α sa valeur (25) :

$$\begin{aligned} \sum e^{\frac{\mu n\pi ai}{K}} q^{\mu n^2} e^{\mu\alpha i} &= e^{\frac{\mu\pi(x-a)i}{2K}} g_0^{(\mu)}(a), \\ 2\sum e^{\frac{\mu n\pi ai}{K}} q^{\mu n^2} e^{(\mu-2)\alpha i} &= 2e^{\frac{\mu\pi(x-a)i}{2K}} e^{-\frac{2\pi xi}{2K}} g_1^{(\mu)}(a), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ 2\sum e^{\frac{\mu n\pi ai}{K}} q^{\mu n^2} e^{(\mu-2\nu)\alpha i} &= 2e^{\frac{\mu\pi(x-a)i}{2K}} e^{-\frac{2\nu\pi xi}{2K}} g_\nu^{(\mu)}(a), \\ \sum e^{\frac{\mu n\pi ai}{K}} q^{\mu n^2} &= e^{\frac{\mu\pi(x-a)i}{2K}} e^{-\frac{\mu\pi xi}{2K}} g_{\frac{\mu}{2}}^{(\mu)}(a), \end{aligned}$$

les fonctions $g_\nu^{(\mu)}$ étant celles que j'ai définies dans mon premier Mémoire par les équations (4), page 138. D'après ces notations, la formule (24′) donne pour ce cas (μ pair)

$$(26)\quad \left\{\begin{aligned} \chi_\mu(x, a) = {} & e^{\frac{\mu\pi(a-x)i}{2K}} \chi_\mu(x + iK', a + iK') \\ & + \frac{\pi i}{2K}\left[g_0^{(\mu)}(a) + 2e^{-\frac{2\pi xi}{2K}} g_1^{(\mu)}(a) + \ldots \right. \\ & \left. + 2e^{-\frac{2\nu\pi xi}{2K}} g_\nu^{(\mu)}(a) + \ldots + e^{-\frac{\mu\pi xi}{2K}} g_{\frac{\mu}{2}}^{(\mu)}(a)\right]; \end{aligned}\right.$$

formule qui ramène le développement de $\chi_\mu(x, a)$ à celui de $\chi_\mu(x + i\mathrm{K}', a + i\mathrm{K}')$ indiqué précédemment (n° 4).

Passons maintenant au cas où μ est *impair*; dans ce cas, l'on transformera le terme général de la série (24) à l'aide de l'identité

$$e^{\mu\alpha i}\cot\alpha = \frac{1}{\sin\alpha} + i(e^{\mu\alpha i} + 2e^{(\mu-2)\alpha i} + 2e^{(\mu-4)\alpha i} + \ldots + 2e^{\alpha i}); \tag{27}$$

ce qui donne

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{2\mathrm{K}}{\pi} e^{\frac{\mu\pi(x-a)i}{2\mathrm{K}}} \chi_\mu(x, a) \\ &\quad = \sum e^{\frac{\mu n\pi a i}{\mathrm{K}}} q^{\mu n^2} \frac{1}{\sin\alpha} \\ &\quad + i\sum e^{\frac{\mu n\pi a i}{\mathrm{K}}} q^{\mu n^2} [e^{\mu\alpha i} + 2e^{(\mu-2)\alpha i} + 2e^{(\mu-4)\alpha i} + \ldots + 2e^{\alpha i}]. \end{aligned}\right. \tag{28}$$

La première série qui figure dans le second membre définit une fonction des variables x et a

$$\omega_\mu(x, a) = \frac{\pi}{2\mathrm{K}} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{\frac{\mu n\pi a i}{\mathrm{K}}} q^{\mu n^2} \frac{1}{\sin\frac{\pi}{2\mathrm{K}}(x - a - 2ni\mathrm{K}')}; \tag{29}$$

quant à la deuxième série, elle se partage en $\frac{\mu+1}{2}$ séries qui sont respectivement égales au produit de $e^{\frac{\mu\pi(x-a)i}{2\mathrm{K}}}$ par les fonctions

$$g_0^{(\mu)}(a),\ 2e^{-\frac{2\pi x i}{2\mathrm{K}}} g_1^{(\mu)}(a),\ \ldots,\ 2e^{-\frac{2\nu\pi x i}{2\mathrm{K}}} g_\nu^{(\mu)}(a),\ \ldots,\ 2e^{-\frac{(\mu-1)\pi x i}{2\mathrm{K}}} g_{\frac{\mu-1}{2}}^{(\mu)}(a).$$

La formule (28) donne donc, pour le cas de μ impair,

$$\left\{\begin{aligned} \chi_\mu(x, a) = \omega_\mu(x, a) + \frac{\pi i}{2\mathrm{K}} \Big[& g_0^{(\mu)}(a) + e^{-\frac{2\pi x i}{2\mathrm{K}}} g_1^{(\mu)}(a) + \ldots \\ & + 2e^{-\frac{2\nu\pi x i}{2\mathrm{K}}} g_\nu^{(\mu)}(a) + 2e^{-\frac{(\mu-1)\pi x i}{2\mathrm{K}}} g_{\frac{\mu-1}{2}}^{(\mu)}(a) \Big], \end{aligned}\right. \tag{30}$$

formule qui ramène le développement de $\chi_\mu(x, a)$ à celui de $\omega_\mu(x, a)$.

Si, dans ces formules (26) et (30), on change a en $a + i\mathrm{K}'$ et si l'on se rappelle que

$$\chi_\mu(x + i\mathrm{K}', a + 2i\mathrm{K}') = e^{-\frac{\mu\pi a i}{\mathrm{K}}}\chi_\mu(x + i\mathrm{K}', a),$$

on voit que, quand μ est pair, le développement de $\chi_\mu(x, a + i\mathrm{K}')$ est ramené à celui de $\chi_\mu(x + i\mathrm{K}', a)$ qui a été effectué dans le n° 5, et, quand μ est impair, ce développement se ramène à celui de la fonction

$$(31) \quad \omega_\mu(x, a + i\mathrm{K}') = \frac{\pi}{2\mathrm{K}} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} e^{\frac{\mu n\pi a i}{\mathrm{K}}} q^{\mu n(n+1)} \frac{1}{\sin\frac{\pi}{2\mathrm{K}}[x - a - (2n+1)i\mathrm{K}']}.$$

10. Il nous reste donc à développer en série, suivant les puissances de q, les deux fonctions (29) et (31), dont la première, pour le cas de $\mu = 1$, se trouve écrite avec d'autres notations au bas de la page 4 de l'article de M. Hermite dans les *Collectanea mathematica*, etc.

Écrivons la série (29) sous la forme

$$\begin{aligned}\frac{2\mathrm{K}}{\pi}\omega_\mu(x, a) = &\frac{1}{\sin\frac{\pi}{2\mathrm{K}}(x - a)}\\ &+ \sum_{n=1}^{n=\infty} q^{\mu n^2}\left[\frac{e^{\frac{\mu n\pi a i}{\mathrm{K}}}}{\sin\frac{\pi}{2\mathrm{K}}(x - a - 2ni\mathrm{K}')} + \frac{e^{-\frac{\mu n\pi a i}{\mathrm{K}}}}{\sin\frac{\pi}{2\mathrm{K}}(x - a + 2ni\mathrm{K}')}\right],\end{aligned}$$

puis développons la quantité entre crochets suivant les puissances de q; nous obtenons, sous les conditions $|q^2| < \left|e^{\frac{\pi(x-a)i}{\mathrm{K}}}\right| < \left|\frac{1}{q^2}\right|$,

$$(32) \quad \left\{\begin{aligned}&\frac{e^{\frac{\mu n\pi a i}{\mathrm{K}}}}{\sin\frac{\pi}{2\mathrm{K}}(x - a - 2ni\mathrm{K}')} + \frac{e^{-\frac{\mu n\pi a i}{\mathrm{K}}}}{\sin\frac{\pi}{2\mathrm{K}}(x - a + 2ni\mathrm{K}')}\\ &\quad = -4\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} q^{n\nu}\sin\left[(2\mu n + \nu)\frac{\pi a}{2\mathrm{K}} - \nu\frac{\pi x}{2\mathrm{K}}\right],\end{aligned}\right.$$

où ν prend toutes les valeurs *impaires* de 1 à $+\infty$. On aura donc

$$(33)\quad \frac{2K}{\pi}\omega_\mu(x,a)=\frac{1}{\sin\frac{\pi}{2K}(x-a)}-4\sum_{n=1}^{n=\infty}\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty}q^{\mu n^2+n\nu}\sin\left[(2\mu n+\nu)\frac{\pi a}{2K}-\nu\frac{\pi x}{2K}\right];$$

d'où l'on conclut que, si l'on fait

$$\frac{2K}{\pi}\omega_\mu(x,a)=\frac{1}{\sin\frac{\pi}{2K}(x-a)}-4\sum_{N}q^N C_N^{(\mu)}(x,a),$$

on a, pour le coefficient $C_N^{(\mu)}(x,a)$, l'expression

$$C_N^{(\mu)}(x,a)=\sum_{\delta,\delta'}''\sin\left[(\delta'+\delta\mu)\frac{\pi a}{2K}-(\delta'-\delta\mu)\frac{\pi x}{2K}\right],$$

la somme Σ'' étant étendue à tous les diviseurs conjugués δ et δ' de N, pour lesquels $\delta'-\delta\mu$ est un entier *positif impair*.

Écrivons de même la série (31) sous la forme

$$\begin{aligned}&\frac{2K}{\pi}\sqrt[4]{q^\mu}\,e^{\frac{\mu\pi a i}{2K}}\omega_\mu(x,a+i'K')\\ &=\sum_{m=1}^{m=\infty}q^{\mu\frac{m^2}{4}}\left[\frac{e^{\frac{\mu m\pi a i}{2K}}}{\sin\frac{\pi}{2K}(x-a-miK')}+\frac{e^{-\frac{\mu m\pi a i}{2K}}}{\sin\frac{\pi}{2K}(x-a+miK')}\right],\end{aligned}$$

où

$$m=2n+1.$$

Le coefficient de $q^{\mu\frac{m^2}{4}}$ ne diffère du terme (32) qu'en ce que n est remplacé par $\frac{m}{2}$; on aura donc immédiatement, d'après (33),

$$(34)\quad \left\{\begin{aligned}&\frac{2K}{\pi}\sqrt[4]{q^\mu}\,e^{\frac{\mu\pi a i}{2K}}\omega_\mu(x,a+iK')\\ &=-4\sum_{m=1}^{m=\infty}\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty}q^{\frac{\mu m^2+2m\nu}{4}}\sin\left[(\mu m+\nu)\frac{\pi a}{2K}-\nu\frac{\pi x}{2K}\right],\end{aligned}\right.$$

$$|q|<\left|e^{\frac{\pi(x-a)i}{K}}\right|<\left|\frac{1}{q}\right|,$$

où m et ν prennent toutes les valeurs positives impaires. Si l'on ordonne le second membre suivant les puissances de q, les exposants de q sont de la forme $\frac{N}{4}$, où

(35) $$N \equiv \mu + 2 \pmod 4,$$

et, sous cette condition (35), le coefficient de $q^{\frac{N}{4}}$, dans la série du second membre de (34), sera

$$E_N^{(\mu)}(x, a) = \sum_{\delta, \delta'}''' \sin\left(\frac{\delta' + \mu\delta}{2} \frac{\pi a}{2K} - \frac{\delta' - \mu\delta}{2} \frac{\pi x}{2K}\right),$$

la somme Σ''' étant étendue à tous les systèmes de diviseurs conjugués δ et δ' de N dans lesquels δ est impair et moindre que $\sqrt{\frac{N}{\mu}}$.

On se trouve ainsi en possession de méthodes et de formules générales permettant de trouver facilement et rapidement les développements en série des fonctions doublement périodiques de troisième espèce, et comprenant comme cas particuliers les formules, si précieuses pour l'Arithmétique, que M. Biehler a établies dans son intéressant travail en suivant la voie ouverte par M. Hermite.