ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

DÉSIRÉ ANDRÉ

Sur le nombre des variations d'un polynome entier en x, dont les coefficients dépendent d'un paramètre α

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 2 (1885), p. 75-92

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1885_3_2__75_0>

SUR LE

NOMBRE DES VARIATIONS D'UN POLYNOME

ENTIER EN x,

DONT LES COEFFICIENTS DÉPENDENT D'UN PARAMÈTRE α,

PAR M. DÉSIRÉ ANDRÉ,

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

1. Si l'on considère un polynôme $f(x, \alpha)$, ordonné par rapport aux puissances décroissantes de la variable x, et où les coefficients des différentes puissances de cette variable soient des fonctions entières du paramètre α, on s'aperçoit immédiatement que le nombre des variations de ce polynôme dépend de la valeur numérique de α, et qu'il peut varier lorsque cette valeur varie. L'objet du présent Mémoire est de faire connaître un procédé simple pour déterminer ce nombre de variations lorsque α est donné, et pour suivre les changements qu'il éprouve lorsque α croît ou décroît d'une manière continue.

2. Nous examinons d'abord (Chap. I) le cas le plus facile, celui où aucun des coefficients du polynôme n'est, en α, d'un degré supérieur au premier. Nous montrons que, pour étudier le nombre des variations d'un pareil polynôme, il suffit de construire une certaine *ligne brisée*, et de voir comment cette ligne brisée est coupée par une certaine *droite*. Le nombre des variations est donné alors, pour une valeur quelconque de α, par un théorème très net, de la plus grande simplicité.

Nous appliquons (Chap. II) ce premier théorème à plusieurs exemples. Dans l'un d'eux, nous étudions le produit de la multiplication d'un polynôme entier en x, à coefficients numériques, par un binôme de la forme $x^h + \alpha$. Il est évident qu'un tel produit appartient au cas facile que nous venons de considérer.

Nous passons ensuite (Chap. III) au cas général, c'est-à-dire au cas où, dans le polynôme $f(x, \alpha)$, les coefficients des différentes puissances de x sont, en α, d'un degré quelconque. Nous montrons qu'il convient alors, pour étudier le nombre des variations du polynôme donné, de construire, non plus une ligne brisée unique, mais un *ensemble de lignes brisées,* constituant une sorte de réseau. Ce réseau construit, on n'a plus qu'à voir de quelle façon il est coupé par une certaine *droite.* On arrive ainsi à un théorème tout à fait général qui, par suite, comprend le théorème précédent, et qui n'est, dans son énoncé, ni moins net, ni moins simple que ce premier théorème.

Pour bien faire comprendre notre théorème général, nous l'appliquons (Chap. IV) à deux exemples, l'un où il s'agit d'un polynôme $f(x, \alpha)$ du sixième degré en x et du troisième en α, l'autre où nous considérons le produit de la multiplication d'un polynôme entier en x, à coefficients numériques, par le trinôme $x^2 + \alpha x + \alpha^2$. Nous faisons remarquer ensuite que l'examen du réseau correspondant au polynôme quelconque $f(x, \alpha)$ suggère, relativement à ce polynôme, les énoncés de différents théorèmes. Nous n'en citons que deux, qui sont pour ainsi dire évidents.

On sait le rôle que jouent, dans la plupart des théorèmes sur les équations algébriques, les nombres de variations de certains polynômes ou de certaines suites de polynômes. Nous déduisons (Chap. V) de tout ce qui précède une règle pour l'*abaissement* de la *limite de Descartes,* touchant le nombre des racines positives d'une équation donnée. Cette règle, comme nous le faisons voir sur des exemples, est d'une application extrêmement commode; elle possède ce triple avantage : de n'exiger pour ainsi dire aucun calcul; de pouvoir être variée par le choix d'un exposant arbitraire; de pouvoir enfin s'appliquer plusieurs fois de suite à la même équation, en donnant, à chaque fois, un nouvel abaissement.

3. Nous avons fait connaître déjà le principe et les premiers résultats du travail actuel dans une Note que notre illustre maître, M. Her-

mite, a bien voulu présenter [1] à l'Académie des Sciences. Nous avions antérieurement, dans deux Mémoires insérés aux *Annales scientifiques de l'École Normale supérieure* [2], étudié le nombre des variations que l'on perd ou que l'on gagne en multipliant par $x \pm \alpha$ un polynôme entier en x quelconque. Par son objet, le présent Mémoire est, en apparence, fort analogue à ces Mémoires antérieurs; en réalité, il s'en éloigne absolument par sa méthode, et ne s'en rapproche que très peu par ses résultats.

CHAPITRE PREMIER.

Étude du cas particulier le plus simple.

4. Dans toute l'étendue du présent travail, nous désignons par $f(x, \alpha)$ un polynôme quelconque, entier en x et en α, ordonné suivant les puissances décroissantes de x, et, d'ailleurs, complet ou incomplet. Les coefficients des diverses puissances de x y sont évidemment des polynômes entiers en α. Dans ce premier Chapitre, nous considérons le cas particulier le plus simple, celui où ces coefficients sont, par rapport à α, au plus du premier degré.

Dans ce premier Chapitre, par conséquent, ces coefficients sont ou de simples constantes, ou des constantes multipliées par α, ou des binômes de la forme $A\alpha + B$. Cette dernière forme peut être regardée comme la forme générale. Elle comprend, en effet, les deux précédentes, si l'on convient que A et B désignent des constantes dont une seule puisse être égale à zéro.

5. Les signes des coefficients des différentes puissances de x, et, par conséquent, les variations et permanences du polynôme $f(x, \alpha)$, dépendent évidemment de la valeur de α. Il s'agit de découvrir un procédé qui permette de trouver le nombre de ces variations lorsque α prend une valeur donnée, et de suivre les changements que ce nombre éprouve lorsque l'on fait varier cette valeur.

Afin de simplifier nos théorèmes, et dans leurs énoncés et dans leurs

(1) Le 28 juillet 1884.
(2) Volume de 1883, Supplément.

démonstrations, nous ne ferons varier α que de o à $+\infty$, en d'autres termes, nous ne donnerons à cette indéterminée que des valeurs *positives*. Cette manière de procéder suffit à tous les cas, car l'étude, pour les valeurs négatives de α, du nombre des variations du polynôme $f(x, \alpha)$ revient évidemment à l'étude, pour les valeurs positives de α, du nombre des variations du polynôme $f(x, -\alpha)$.

6. Cette dernière remarque s'étend à tout le présent Mémoire : nous n'y faisons jamais varier α que depuis o jusqu'à $+\infty$. Encore devons-nous dire depuis o exclusivement, car les premières valeurs que nous donnions à α sont des valeurs positives, à la vérité aussi petites que l'on veut, mais dont aucune n'est égale à zéro.

Ces premières valeurs de α en sont les *valeurs initiales*. On voit immédiatement, sans aucun calcul, les signes que prennent, pour ces premières valeurs, tous les termes de notre polynôme. Ces signes forment des variations et des permanences : ce sont les *variations* et les *permanences initiales* du polynôme considéré.

7. Ainsi, nous connaissons immédiatement le nombre des *variations initiales* du polynôme $f(x, \alpha)$. Restent à suivre les changements qu'éprouve ce nombre lorsque l'on fait croître α.

Pour suivre ces changements, nous considérons, dans le polynôme $f(x, \alpha)$, les coefficients des différentes puissances de x. Nous pouvons, d'après ce qui précède, les regarder tous comme des fonctions linéaires de α. Ces fonctions linéaires, égalées à zéro, nous donneront autant d'équations du premier degré qu'il y a de coefficients; et chacune de ces équations aura sa racine ou nulle, ou infinie, ou négative, ou positive.

8. Étudions d'abord le cas où cette équation du premier degré a sa racine positive, et désignons par α_1 la valeur de cette racine. Tant que α sera inférieur à α_1, le coefficient correspondant gardera son signe initial; dès que α dépassera α_1, ce coefficient prendra le signe contraire. Si nous marquons, sur une ordonnée correspondant à ce coefficient, le *gros point* α_1 qui répond à cette racine, et si nous traçons l'horizontale $y = \alpha$, que nous nommerons d'ordinaire l'*horizontale* α,

tant que cette horizontale passera au-dessous du gros point α_1, le coefficient gardera son signe initial; dès que cette horizontale passera au-dessus de ce gros point, ce coefficient prendra le signe contraire.

9. Étudions à présent le cas où l'équation du premier degré n'a point sa racine positive. Que cette racine soit alors nulle, infinie ou négative, il est évident que le coefficient correspondant gardera son signe initial pour toutes les valeurs positives de α. Pour opérer comme précédemment, nous marquerons un gros point sur l'ordonnée correspondant à ce coefficient, à l'endroit où cette ordonnée coupe une parallèle à l'axe des abscisses, que nous supposons tracée très haut et que nous appelons la *droite de l'infini*. L'horizontale α passera toujours au-dessous de cette parallèle et, par conséquent, du gros point. Nous pourrons donc dire, comme dans le cas précédent, que le coefficient considéré garde son signe initial, tant que l'horizontale α passe au-dessous du gros point correspondant.

10. Supposons qu'on ait tracé toutes les ordonnées correspondant aux différents coefficients du polyuôme, et que, sur chacune d'elles, on ait marqué, à distance finie ou infinie, le gros point dont on a parlé. Considérons deux consécutives de ces ordonnées, et joignons-en les deux gros points par un trait, *plein* si, à l'instant initial, les deux coefficients correspondants présentent une *permanence*, *ponctué* si, à ce même instant, ils présentent une *variation*.

Lorsque l'horizontale α passe au-dessous des deux gros points, chacun des deux coefficients garde son signe initial, la permanence ou variation initiale se conserve. Lorsque l'horizontale α passe au-dessus des deux gros points, les deux signes initiaux sont remplacés par les signes contraires, mais on peut dire encore, et bien qu'elle change d'aspect, que la permanence ou variation initiale se conserve. Dans ces deux cas, le polynôme donné ne perd ni ne gagne, à cet endroit, aucune variation; et l'on peut remarquer que l'horizontale α ne rencontre pas le trait qui joint les deux gros points.

Si l'horizontale α passe entre les deux gros points, l'un des signes initiaux se conserve, tandis que l'autre est remplacé par le signe contraire; la permanence ou variation initiale se change en variation ou en permanence; et l'on peut remarquer alors que le trait qui joint les deux gros points est coupé par l'horizontale α.

Il suit immédiatement de tout cela qu'il ne se perd une variation que quand un trait ponctué est coupé par l'horizontale α, et qu'il ne s'en gagne une que quand un trait plein est coupé par cette même horizontale.

11. En résumé, étant donné le polynôme $f(x, \alpha)$, où aucun coefficient n'est, en α, d'un degré supérieur au premier, pour étudier le nombre des variations de ce polynôme, on tracera autant d'ordonnées verticales équidistantes qu'il y a de coefficients; on limitera ces ordonnées, en bas, par un axe horizontal des abscisses, en haut, par une parallèle à cet axe, qui sera pour nous la droite de l'infini; sur chaque ordonnée, on marquera un gros point, à la hauteur α_1 si le coefficient correspondant s'annule pour cette valeur positive de α, à la rencontre avec la droite de l'infini si ce coefficient ne s'annule pour aucune valeur positive de ce paramètre; on joindra enfin, à partir de la gauche, le gros point de chaque ordonnée à celui de l'ordonnée suivante, par un trait plein ou ponctué, suivant que les coefficients correspondants présenteront une permanence ou une variation initiale. Tous ces traits, tracés bout à bout, formeront une ligne brisée qui sera la ligne représentative du polynôme. On mènera, au travers de tout le Tableau ainsi construit, ce que nous appelons l'horizontale α; et l'on pourra énoncer alors le théorème suivant, qui sera notre premier théorème :

THÉORÈME I. — *Étant donné le polynôme entier $f(x, \alpha)$, ordonné par rapport aux puissances décroissantes de x, et du premier degré seulement en α, le nombre des variations de ce polynôme, pour une valeur déterminée de α, est juste égal au nombre des variations initiales, plus le nombre des traits pleins coupés par l'horizontale α, moins le nombre des traits ponctués coupés par la même horizontale.*

12. Ce théorème, on peut le remarquer sur sa démonstration, non seulement convient au cas considéré par nous, mais encore s'étend, sans modification, à tous les cas où les coefficients des différentes puis-

sances de x sont des fonctions de α, dont aucune ne change plus d'une fois de signe, lorsque α croît de o à $+\infty$.

Quant à l'énoncé qui précède, c'est en quelque sorte un énoncé *graphique*. C'est à cette circonstance qu'il est redevable de sa simplicité et de sa netteté. Cet énoncé, d'ailleurs, se rapporte au cas général, c'est-à-dire au cas où l'horizontale α ne rencontre aucun des gros points. Dans le cas exceptionnel où le contraire aurait lieu, l'examen du Tableau, comme on le verra sur les exemples, suffirait pour lever toutes les difficultés.

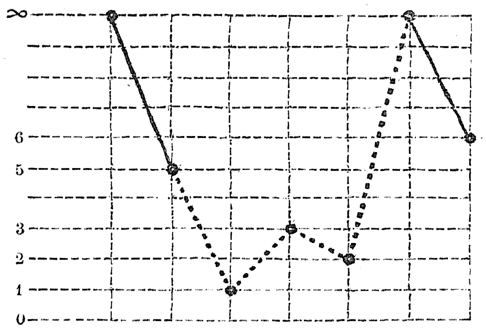
CHAPITRE II.

Applications du premier théorème.

13. Prenons, pour premier exemple, le polynôme

$$\begin{array}{r|r|r|r|r|r} x^7+5 & x^6-1 & x^5+3 & x^3-2 & x^2+8 & x+6 \\ -\alpha & +\alpha & -\alpha & +\alpha & +\alpha & -\alpha \end{array}.$$

Si nous en construisons la ligne brisée représentative, nous formons le Tableau suivant :



D'abord, pour les valeurs très petites de α, nous constatons, sur ce Tableau, que le polynôme donné a 4 variations. C'est le nombre des variations initiales; il est juste égal au nombre des traits ponctués que la ligne brisée nous présente.

Supposons qu'on nous demande le nombre des variations que possède le polynôme donné lorsque α est égal à 4. Évidemment alors l'horizontale α coupe deux traits ponctués. Donc, d'après notre théorème, le nombre des variations est égal à $4 - 2$, c'est-à-dire à 2.

Lorsque α est égal à 4, l'horizontale α ne passe par aucun gros point. Si nous donnons à α la valeur 3, cette horizontale passe par l'un des gros points, et elle coupe deux traits ponctués. Au point qu'elle rencontre, le Tableau montre qu'il se perd deux variations. Donc, lorsque α est égal à 3, le nombre des variations du polynôme est égal à $4 - 2 - 2$, c'est-à-dire à zéro.

14. Ainsi, par l'examen seul de notre Tableau, nous voyons, comme nous l'avions annoncé (n° 12), ce qui arrive dans les cas exceptionnels où l'horizontale α passe par un ou plusieurs des sommets de notre ligne brisée. Dans les cas généraux où elle ne passe par aucun d'eux, nous n'avons qu'à appliquer littéralement notre théorème. Il nous suffit de considérer l'horizontale α, en la faisant mouvoir s'il est nécessaire, pour résoudre, sans aucune peine, les quatre problèmes suivants :

1° *Quels changements éprouve le nombre des variations du polynôme donné lorsque α varie de 0 à $+\infty$?*

2° *Combien ce polynôme présente-t-il de variations lorsque α a une valeur positive déterminée?*

3° *Entre quelles limites la valeur de α doit-elle être comprise pour que ce polynôme ait un nombre donné de variations?*

4° *Entre quelles limites la valeur de α doit-elle être comprise pour que ce polynôme ait le plus grand ou le plus petit nombre possible de variations?*

15. Comme seconde application de notre théorème I, nous pouvons considérer le produit du polynôme

$$x^7 + x^6 - 2x^5 - 3x^4 + x^3 + x^2 - 5x - 11$$

par le binôme $x^2 + \alpha$.

Ce produit évidemment est un polynôme entier en x et en α, du genre de ceux que nous considérons présentement. Si nous en construisons la ligne brisée, puis que, sur le Tableau formé, nous fassions monter l'horizontale α de 0 à $+\infty$, nous obtenons une suite de résultats qui peuvent se résumer ainsi : pour toutes les valeurs de α inférieures à $\frac{1}{2}$ ou supérieures à 5, le produit considéré présente trois variations; il n'en présente qu'une, lorsque α est soit égal à $\frac{1}{2}$, soit égal à 5, soit compris entre $\frac{1}{2}$ et 5.

16. Le produit que nous venons d'étudier n'est qu'un cas très particulier du produit qu'on obtient en multipliant un polynôme entier en x quelconque par le binôme $x^h + \alpha$. Notre théorème I s'applique évidemment à tous les produits de cette sorte. Quand on ne considère qu'eux seuls, on peut remplacer l'énoncé graphique de ce théorème par un énoncé analytique, fondé sur la considération de certains groupes, élévateurs ou abaisseurs, de 4 coefficients chacun. Mais, comme cet énoncé analytique n'est qu'un énoncé particulier et incommode, nous ne le donnerons point.

CHAPITRE III.

Étude du cas général.

17. Dans tout ce qui précède, nous avons supposé le polynôme $f(x, \alpha)$ du premier degré seulement en α. Nous supposons maintenant que ce polynôme soit de degré quelconque par rapport à ce paramètre, c'est-à-dire que, dans ce polynôme, ordonné par rapport aux puissances décroissantes de x, le coefficient de chaque puissance de x soit un polynôme entier en α et de degré quelconque.

18. Ces coefficients, égalés séparément à zéro, nous donnent chacun une équation algébrique, dont les racines réelles peuvent être nulles, ou infinies, ou négatives, ou positives. Nous nous attachons principalement aux racines réelles et positives; nous supposons que celui des coefficients qui en a le plus de cette espèce en ait un nombre égal à m; et nous supposons, en outre, que ces m racines soient distinctes.

Étant tracée l'ordonnée correspondant à ce coefficient et marqués sur elle les m gros points répondant à ces m racines, il est évident que, tant que l'horizontale α passera au-dessous de tous ces gros points, le coefficient considéré gardera son signe initial, c'est-à-dire le signe évident qu'il possède lorsque α est positif et très voisin de zéro; il est évident aussi que ce coefficient changera de signe, chaque fois que l'horizontale α, supposée animée d'un mouvement ascensionnel, dépassera l'un de ces m gros points.

Par suite, le coefficient considéré aura son signe initial, toutes les fois que l'horizontale α laissera, au-dessous d'elle, un nombre *pair* de gros points; et aura le signe contraire, toutes les fois qu'elle en laissera un nombre *impair*.

19. Considérons maintenant un autre coefficient du polynôme $f(x, \alpha)$, et supposons qu'il ait moins de m racines positives. Nous marquerons sur son ordonnée, à distances finies, les gros points correspondant à ses m' racines; puis, à la rencontre de cette ordonnée avec la droite de l'infini, un gros point supplémentaire qui correspondra à lui seul aux $m - m'$ racines positives que le coefficient devrait avoir encore pour posséder m racines positives. Nous pourrons répéter alors, pour ce coefficient, ce que nous avons dit pour le précédent : il aura son signe initial ou le signe contraire, suivant que l'horizontale α laissera au-dessous d'elle, sur l'ordonnée de ce coefficient, des gros points en nombre pair ou impair.

20. Supposons que l'opération que nous venons de faire (nos 18 et 19) sur deux coefficients ait été effectuée sur tous; et, dans le Tableau formé, considérons, en particulier, deux ordonnées consécutives. Nous pouvons, en allant de bas en haut sur chaque ordonnée, joindre, par un trait, le premier gros point de l'ordonnée de gauche au premier gros point de l'ordonnée de droite; puis, par un deuxième trait, le deuxième gros point de gauche au deuxième de droite; et ainsi de suite, en prenant soin, d'ailleurs, de tracer des traits tous *pleins* ou tous *ponctués*, suivant que les coefficients correspondant à nos deux ordonnées présentent, à l'instant initial, une *permanence* ou une *variation*.

21. Lorsque l'horizontale α traverse l'ensemble de nos deux ordonnées consécutives et des traits compris entre elles, il peut évidemment se présenter trois cas : ou bien, entre ces deux ordonnées, cette horizontale ne coupe aucun trait; ou bien elle en coupe un nombre pair; ou bien elle en coupe un nombre impair.

Si elle ne rencontre aucun trait, c'est qu'elle laisse sur chaque ordonnée le même nombre de gros points au-dessous d'elle; par suite, que les coefficients correspondants ont, tous les deux, leurs signes initiaux ou, tous les deux, les signes contraires : la permanence ou variation initiale n'est point changée.

Si l'horizontale α coupe un nombre pair de traits, il en est encore de même; la permanence ou variation initiale est conservée, car, sur les deux ordonnées, les nombres de gros points que l'horizontale laisse au-dessous d'elle sont tous les deux pairs ou tous les deux impairs.

Si l'horizontale α coupe un nombre impair de traits, c'est que, sur nos deux ordonnées, les nombres de gros points que cette horizontale laisse au-dessous d'elle ont une différence impaire; partant, que l'un de ces nombres est pair et l'autre impair; partant, que l'un des coefficients conserve son signe initial, tandis que l'autre prend le signe contraire. Il s'ensuit que, s'il y avait permanence initiale, cette permanence se change en variation; et inversement que, s'il y avait variation initiale, cette variation se change en permanence.

22. Les mêmes faits se reproduisent dans toute l'étendue de notre Tableau. Si donc, pour abréger, nous désignons par l'expression de *système de traits* l'ensemble des traits compris entre deux ordonnées consécutives et coupés par l'horizontale α, et que nous appelions *système impair* tout système composé d'un nombre impair de traits, nous pouvons énoncer le théorème suivant :

Théorème II. — *Étant donné le polynôme entier $f(x, \alpha)$, ordonné par rapport aux puissances décroissantes de x, et de degré quelconque en x et en α, le nombre des variations de ce polynôme est juste égal au nombre des variations initiales, plus le nombre des systèmes impairs de traits pleins coupés par l'horizontale α, moins le nombre des systèmes impairs de traits ponctués coupés par la même horizontale.*

23. Ce théorème est tout à fait général. Il comprend notre théorème I comme cas particulier, puisqu'un simple trait est un système impair. Son énoncé, comme celui du théorème I, est en quelque sorte un énoncé graphique. Il se rapporte, d'ailleurs, au cas général où l'horizontale α ne passe par aucun des gros points du Tableau : dans le cas

exceptionnel où elle passerait par un ou plusieurs de ces points, on verrait immédiatement, sur le Tableau même, si, en ces divers points, quelque variation est perdue ou gagnée.

24. Dans la construction de notre Tableau, nous avons supposé simples toutes les racines positives que nous avons considérées. Pour compléter nos indications, nous avons à dire ce qu'il faut faire lorsqu'on rencontre une racine positive multiple.

Si le degré de multiplicité de cette racine est impair, on traite la racine absolument comme une racine simple, marquant un gros point, à la hauteur convenable, sur l'ordonnée correspondante, puis joignant ce gros point, par un trait plein ou ponctué, au gros point de même rang, à partir du bas, de l'ordonnée précédente, et au gros point de même rang de l'ordonnée suivante.

Si le degré de multiplicité est pair, on marque sur l'ordonnée correspondante, à la hauteur indiquée par la valeur de la racine, non plus un gros point, mais un signe quelconque, par exemple une croix, et on laisse cette croix isolée, sans la joindre à quoi que ce soit par aucun trait. Lorsque l'horizontale α ne passe pas par cette croix, on fait abstraction de ce signe. Lorsque cette horizontale y passe, le coefficient correspondant s'annule; et il faut voir, sur le Tableau, si la lacune qui se produit alors dans le polynôme fait perdre ou gagner quelque variation.

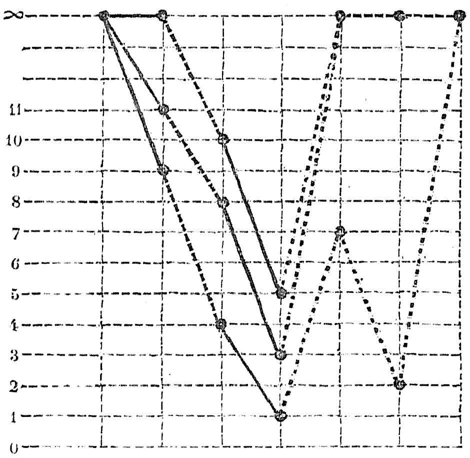
CHAPITRE IV.

Applications du théorème II.

25. Pour donner une première application de notre théorème II, considérons le polynôme suivant, dont les coefficients sont des polynômes entiers en α, la plupart d'un degré supérieur au premier,

$$\begin{array}{r|r|r|r|r|l}
x^6 + 99 & x^5 - 320 & x^4 - 15 & x^3 + 7 & x^2 - 2\alpha & x + 11. \\
- 20\alpha & + 152\alpha & + 23\alpha & + 6\alpha & + \alpha^2 & \\
+ \alpha^2 & - 22\alpha^2 & - 9\alpha^2 & - \alpha^2 & & \\
& + \alpha^3 & + \alpha^3 & & &
\end{array}$$

Dans ce polynôme, ceux des coefficients qui ont le plus de racines positives en ont trois. D'après ce que nous avons dit, nous tracerons autant d'ordonnées verticales équidistantes qu'il y a de coefficients. Sur chacune d'elles, nous marquerons les gros points représentant les racines positives du coefficient correspondant. Si le nombre de ces racines est inférieur à trois, nous marquons, en outre, à l'intersection de l'ordonnée considérée et de la droite de l'infini, un gros point représentant toutes les racines positives qu'il faudrait adjoindre à celles qu'on a trouvées pour atteindre le nombre 3. Nous joignons ensuite, en allant de gauche à droite, par un trait plein ou ponctué, chaque gros point de chaque ordonnée au gros point de même rang, à partir du bas, de l'ordonnée suivante, et nous obtenons de cette façon le Tableau que voici :



Nous voyons immédiatement, sur ce Tableau, que le nombre des variations initiales est égal à 4. Pour trouver le nombre des variations lorsque α est, par exemple, égal à 6, nous menons l'horizontale $y = 6$. Cette droite coupe quatre systèmes impairs de traits ponctués, composés, l'un de trois traits et les autres d'un trait seulement chacun; elle ne coupe aucun système impair de traits pleins. Si donc nous appliquons littéralement notre théorème général, nous trouvons, lorsque α est égal à 6, que le nombre des variations de notre polynôme est égal à $4 + 0 - 4$, c'est-à-dire à zéro.

Considérons une autre valeur de α, la valeur 2 par exemple, pour laquelle l'horizontale α passe par l'un des gros points du Tableau. Cette droite coupe un système impair de traits pleins et un système impair de traits ponctués. Au gros point qu'elle rencontre, nous voyons, sur le Tableau même, qu'il se perd 2 variations. Donc, lorsque α est égal à 2, le nombre des variations de notre polynôme est égal à $4+1-1-2$, c'est-à-dire à 2.

26. En faisant, sur le Tablean précédent, mouvoir, de bas en haut, l'horizontale α, depuis l'axe des abscisses jusqu'à la droite de l'infini, on pourrait suivre les changements qu'éprouve, lorsque α croît, le nombre des variations du polynôme considéré; et, par conséquent, résoudre sans aucune peine tous les problèmes que nous avons énoncés déjà (n° 14).

27. Comme seconde application de notre théorème II, nous pouvons considérer le produit du polynôme $x^5-3x^4+2x^3-4x^2-6x+88$ par le trinôme $x^2+\alpha x+\alpha^2$. Dans ce produit, les coefficients des différentes puissances de x seront des polynômes entiers en α, en général du second degré. Si l'on construit le Tableau relatif à ce polynôme, on voit que le nombre des variations initiales est 4; et si l'on trace sur ce Tableau l'horizontale $y=3,5$, par exemple, on voit que cette horizontale coupe un système impair de traits pleins, et trois systèmes impairs de traits ponctués. Il s'ensuit que, pour cette valeur 3,5 de α, le nombre des variations du produit considéré est égal à $4+1-3$, c'est-à-dire à 2.

28. L'examen attentif des Tableaux que nous avons enseigné à construire nous conduit, tout naturellement, à plusieurs théorèmes nouveaux. Nous ne donnerons que les deux suivants, qui sont pour ainsi dire évidents, et qui reposent sur la considération des racines positives des coefficients du polynôme $f(x,\alpha)$.

Théorème. — *Si le polynôme $f(x,\alpha)$ possède v variations initiales, et si, parmi les racines positives de ses coefficients, les p plus petites, supposées chacune d'un degré impair de multiplicité, appartiennent à des coefficients tous différents, dont deux quelconques ne sont pas consécutifs et dont chacun est placé entre deux variations initiales, on peut toujours* *trouver des valeurs de α telles que, pour ces valeurs, le polynôme considéré conserve, au plus, $v - 2p$ variations.*

THÉORÈME. — *Si le polynôme $f(x, \alpha)$ possède v variations initiales, et si, parmi les racines positives de ses coefficients, les p plus petites, supposées chacune d'un degré impair de multiplicité, appartiennent à des coefficients tous différents, dont deux quelconques ne sont pas consécutifs, et dont chacun est placé entre deux permanences initiales, on peut toujours trouver des valeurs de α telles que, pour ces valeurs, le polynôme considéré prenne, au moins, $v + 2p$ variations.*

CHAPITRE V.

Abaissement de la limite de Descartes.

29. Descartes est le premier qui ait donné une limite supérieure du nombre des racines positives des équations algébriques. Cette limite repose sur la considération des combinaisons de signes que nous nommons à présent *variations* ou *permanences;* et cette considération, qui nous paraît entièrement due à Descartes, est si intimement liée au nombre des racines des équations algébriques, qu'elle se retrouve dans la plupart, peut-être même dans la totalité, des théorèmes connus aujourd'hui sur le nombre de ces racines.

C'est l'énoncé de la limite dont nous parlons qui constitue ce qu'on appelle, à volonté, le *théorème* ou la *règle des signes de Descartes*, théorème ou règle qui consiste en ceci : *Le nombre des racines positives de l'équation algébrique $f(x) = 0$ est, au plus, égal au nombre des variations du polynôme $f(x)$; et, s'il est inférieur à cette limite, c'est d'un nombre pair.*

Le grand avantage de cette limite de Descartes c'est qu'elle s'obtient, sans aucun calcul, par l'examen seul du premier membre de l'équation donnée. Son inconvénient, c'est que, dans beaucoup de cas, le nombre qu'elle fournit est trop élevé. Il serait utile de trouver, pour l'abaisser, quelque procédé général et simple.

30. Considérons l'équation de degré quelconque $f(x) = 0$, et, en même temps, le produit $f(x)\varphi(x)$, dont le multiplicateur $\varphi(x)$ n'a

aucune racine positive. L'équation $f(x)\varphi(x) = 0$ a évidemment les mêmes racines positives que l'équation proposée. Si donc son premier membre $f(x)\varphi(x)$ a moins de variations que n'en avait $f(x)$, c'est que le nombre v des variations de $f(x)$ était une limite trop élevée : on lui substituera le nombre v' des variations du produit $f(x)\varphi(x)$.

Par conséquent, pour abaisser la limite de Descartes, il suffit de voir si l'on peut trouver un multiplicateur $\varphi(x)$, dépourvu de racines positives, et tel que le produit $f(x)\varphi(x)$ ait moins de variations que le multiplicande $f(x)$.

31. On peut évidemment chercher le multiplicateur $\varphi(x)$ parmi les polynômes de bien des sortes. Pour simplifier, nous le chercherons uniquement parmi les binômes de la forme $x^h + \alpha$, où h désigne un entier positif quelconque, et α un paramètre positif. Cela étant, notre règle pour l'abaissement de la limite de Descartes pourra s'énoncer ainsi :

Règle. — *Soit $f(x) = 0$ l'équation donnée et v le nombre des variations de $f(x)$. Pour abaisser la limite v, on essayera d'abord le multiplicateur $x + \alpha$, c'est-à-dire qu'on cherchera quelles valeurs il faut donner à α pour que le produit de $f(x)$ par $x + \alpha$ ait le nombre minimum de variations. Si ce nombre minimum v' est inférieur à v, le nombre des racines positives de l'équation proposée est, au plus, égal à v'; et, s'il est inférieur à cette limite, c'est d'un nombre pair.*

Si la multiplication par $x + \alpha$ ne permet pas d'abaisser la limite de Descartes, on essaye, par notre procédé habituel, la multiplication par $x^2 + \alpha$. Si celle-ci ne réussit point non plus, on essaye $x^3 + \alpha$; et ainsi de suite.

32. C'est un fait digne de remarque, que la présente règle, dans beaucoup de cas, peut s'appliquer plusieurs fois de suite à la même équation. Supposons, par exemple, que la multiplication par $x + \alpha$ réussisse, c'est-à-dire qu'il existe des valeurs de α, telles que α_1, pour lesquelles v' soit inférieur à v. On effectuera la multiplication de $f(x)$ par $x + \alpha_1$, ce qui nous donnera un produit $F(x)$ présentant v' variations. Rien ne nous empêchera d'appliquer notre règle à ce nouveau polynôme $F(x)$; et ainsi de suite. Dans le premier des exemples que nous allons donner, notre règle s'applique jusqu'à trois fois.

33. Comme premier exemple, considérons l'équation ayant pour premier membre le polynôme

$$x^6 - x^5 + 2x^4 - 5x^3 + 15x^2 - 50x + 300,$$

qui présente 6 variations. D'après le théorème de Descartes, cette équation a, au plus, 6 racines positives.

Pour appliquer notre règle, essayons la multiplication par $x+\alpha$. En examinant la ligne brisée du polynôme donné, nous constatons qu'il suffit d'attribuer à α la valeur 1, pour que le produit par $x+\alpha$ n'ait plus que 4 variations. Ainsi, après la première application de notre règle, nous savons que l'équation proposée a, au plus, 4 racines positives.

Multiplions le polynôme donné par $x+1$. Nous obtenons le polynôme

$$x^7 + x^5 - 3x^4 + 10x^3 - 35x^2 + 250x + 300.$$

Sur ce nouveau polynôme, essayons la multiplication par $x+\alpha$. Nous constatons, sur le Tableau correspondant à ce polynôme, qu'il suffit, pour lui faire perdre deux variations, de donner à α la valeur 3. Après avoir appliqué deux fois notre méthode, nous pouvons donc affirmer que l'équation proposée n'a pas plus de 2 racines positives.

Afin de l'appliquer une troisième fois, effectuons la multiplication par $x+3$ dont nous venons de parler. Nous obtenons, comme produit, le nouveau polynôme

$$x^8 + 3x^7 + x^6 + x^4 - 5x^3 + 145x^2 + 1050x + 900,$$

auquel nous constatons que la multiplication par $x+\alpha$ fait encore perdre 2 variations, pour toutes les valeurs de α depuis 5 jusqu'à 29. Le produit par $x+6$, par exemple, n'aurait donc plus aucune variation. Donc, l'équation proposée n'a aucune racine positive.

34. Nous prendrons, comme second exemple de l'application de notre règle, l'équation du neuvième degré qui a pour premier membre

$$x^9 + x^8 - 2x^7 - 5x^6 + 16x^5 + 35x^4 - x^3 - 35x^2 + 6x + 315.$$

En essayant la multiplication par $x+\alpha$, nous trouvons que, pour aucune valeur de α, elle ne fait disparaître de variations. N'obtenant rien ainsi, nous sommes conduit à étudier la multiplication par $x^2 + \alpha$, et à construire la ligne brisée qui, dans cette multiplication, correspond à notre polynôme. Cette ligne nous montre que, dans cette multiplication, il se perd 4 variations pour toutes les valeurs de α comprises entre 5 et 6. Or le polynôme donné ne présentait que 4 variations. Donc l'équation donnée ne possède aucune racine positive.

35. La règle qui précède (n° 31), et dont nous venons de présenter deux exemples, nous paraît la plus simple qu'on ait encore donnée, pour l'abaissement de la limite de Descartes. Ses avantages peuvent se résumer ainsi : elle ne nécessite pour ainsi dire aucun calcul; elle présente une indéterminée h qui permet d'essayer successivement la multiplication par plusieurs binômes; enfin, comme on l'a vu sur notre premier exemple, elle peut s'appliquer plusieurs fois à la même équation, en donnant, à chaque fois, un nouvel abaissement.