ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

ERNEST CESÀRO

Considérations nouvelles sur le déterminant de Smith et Mansion

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 2 (1885), p. 425-435
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1885_3_2__425_0>

CONSIDÉRATIONS NOUVELLES

SUR LE

DÉTERMINANT DE SMITH ET MANSION,

PAR M. ERNEST CESÀRO,

ÉTUDIANT A L'UNIVERSITÉ DE ROME.

Le déterminant de Smith et Mansion est celui dont chaque élément égale une fonction quelconque, $F(i, j)$, du plus grand commun diviseur des indices i et j. Soit $\mu(x)$ une fonction généralement nulle, mais égale à l'unité pour $x = 1$ et à $(-1)^\tau$ lorsque x est le produit de τ facteurs premiers, inégaux. Définissons une autre fonction f par la relation

$$f(x) = \mu\left(\frac{x}{1}\right)F(1) + \mu\left(\frac{x}{2}\right)F(2) + \mu\left(\frac{x}{3}\right)F(3) + \ldots .$$

On sait que, inversement, $F(x)$ est la somme des valeurs de la fonction f, qui correspondent aux diviseurs de x. Par exemple, avec les notations de Gauss et d'Euler, pour $f(x) = \varphi(x)$, on a $F(x) = x$; pour $f(x) = x$, on a $F(x) = \int x$, etc. Cela étant, M. Mansion a démontré que le déterminant

$$\begin{vmatrix} F(1,1) & F(1,2) & F(1,3) & \ldots & F(1,n) \\ F(2,1) & F(2,2) & F(2,3) & \ldots & F(2,n) \\ F(3,1) & F(3,2) & F(3,3) & \ldots & F(3,n) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ F(n,1) & F(n,2) & F(n,3) & \ldots & F(n,n) \end{vmatrix}$$

a pour valeur

$$\Delta_n = f(1)f(2)f(3)\ldots f(n).$$

Dans le *Journal de Battaglini* (1885) et dans les *Nouvelles Annales*, nous avons poursuivi l'étude du déterminant Δ_n. Nous allons faire d'autres considérations en cherchant ce que devient Δ_n lorsqu'on y supprime les colonnes et les lignes, dont les indices sont respectivement $i_1, i_2, \ldots, i_\nu$ et $j_1, j_2, \ldots, j_\nu$. Le déterminant qui en résulte sera représenté par la notation

$$\begin{bmatrix} i_1 & i_2 & i_3 & \ldots & i_\nu \\ j_1 & j_2 & j_3 & \ldots & j_\nu \end{bmatrix}^{(n)}.$$

L'étude de Δ_n est basée sur la propriété suivante :

La somme

$$\mu\left(\frac{n}{1}\right)\mathrm{F}(1, x) + \mu\left(\frac{n}{2}\right)\mathrm{F}(2, x) + \mu\left(\frac{n}{3}\right)\mathrm{F}(3, x) + \ldots,$$

nulle en général, est égale à $f(n)$ lorsque x est divisible par n.

Supposons d'abord $\nu = 2$ et, dans le déterminant modifié, ajoutons à la dernière colonne toutes les autres, respectivement multipliées par $\mu\left(\frac{n}{1}\right)$, $\mu\left(\frac{n}{2}\right)$, $\mu\left(\frac{n}{3}\right)$, ... Le $r^{\text{ième}}$ élément devient

$$-\mu\left(\frac{n}{i_1}\right)\mathrm{F}(i_1, r) - \mu\left(\frac{n}{i_2}\right)\mathrm{F}(i_2, r);$$

mais on doit, en outre, ajouter $f(n)$ au dernier élément. En opérant de même sur les lignes, on trouve que le $r^{\text{ième}}$ élément de la dernière ligne est

$$-\mu\left(\frac{n}{j_1}\right)\mathrm{F}(j_1, r) - \mu\left(\frac{n}{j_2}\right)\mathrm{F}(j_2, r),$$

tandis que le dernier élément se change en

$$\begin{aligned} f(n) &+ \mu\left(\frac{n}{i_1}\right)\mu\left(\frac{n}{j_1}\right)\mathrm{F}(i_1, j_1) + \mu\left(\frac{n}{i_1}\right)\mu\left(\frac{n}{j_2}\right)\mathrm{F}(i_1, j_2) \\ &+ \mu\left(\frac{n}{i_2}\right)\mu\left(\frac{n}{j_1}\right)\mathrm{F}(i_2, j_1) + \mu\left(\frac{n}{i_2}\right)\mu\left(\frac{n}{j_2}\right)\mathrm{F}(i_2, j_2). \end{aligned}$$

Il en résulte, en supposant $i_1 < i_2$, $j_1 < j_2$,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} i_1 & i_2 \\ j_1 & j_2 \end{bmatrix}^{(n)} = f(n)\begin{bmatrix} i_1 & i_2 \\ j_1 & j_2 \end{bmatrix}^{(n-1)} \\ &+ (-1)^{i_1+j_1}\mu\left(\frac{n}{i_1}\right)\mu\left(\frac{n}{j_1}\right)\begin{bmatrix} i_2 \\ j_2 \end{bmatrix}^{(n-1)} - (-1)^{i_1+j_2}\mu\left(\frac{n}{i_1}\right)\mu\left(\frac{n}{j_2}\right)\begin{bmatrix} i_2 \\ j_1 \end{bmatrix}^{(n-1)} \\ &- (-1)^{i_2+j_1}\mu\left(\frac{n}{i_2}\right)\mu\left(\frac{n}{j_1}\right)\begin{bmatrix} i_1 \\ j_2 \end{bmatrix}^{(n-1)} + (-1)^{i_2+j_2}\mu\left(\frac{n}{i_2}\right)\mu\left(\frac{n}{j_2}\right)\begin{bmatrix} i_1 \\ j_1 \end{bmatrix}^{(n-1)}. \end{aligned}$$

Soit $A_{ij}^{(n)}$ le complément algébrique de l'élément $F(i,j)$ dans Δ_n, de sorte que

$$\begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix}^{(n)} = (-1)^{i+j} A_{ij}^{(n)}.$$

Après avoir posé

$$\mu\left(\frac{x}{i}\right)\mu\left(\frac{x}{j}\right) = f(x)\, Q_{ij}^{(x)},$$

la dernière formule devient

$$\frac{1}{f(n)}\begin{bmatrix} i_1 & i_2 \\ j_1 & j_2 \end{bmatrix}^{(n)} = \begin{bmatrix} i_1 & i_2 \\ j_1 & j_2 \end{bmatrix}^{(n-1)} + (-1)^\rho \left[Q_{i_1 j_1}^{(n)} A_{i_2 j_2}^{(n-1)} - Q_{i_1 j_2}^{(n)} A_{i_2 j_1}^{(n-1)} - Q_{i_2 j_1}^{(n)} A_{i_1 j_2}^{(n-1)} + Q_{i_2 j_2}^{(n)} A_{i_1 j_1}^{(n-1)}\right],$$

où, pour abréger, ρ désigne la somme $i_1 + i_2 + j_1 + j_2$. Dans le *Journal de Battaglini*, nous avons démontré que l'on peut écrire

$$A_{ij}^{(n)} = \alpha_{ij}^{(n)} \Delta_n, \qquad \text{où} \qquad \alpha_{ij}^{(n)} = \sum_{r=1}^{r=n} Q_{ij}^{(r)}.$$

Nous avons donc

$$\frac{1}{\Delta_n}\begin{bmatrix} i_1 & i_2 \\ j_1 & j_2 \end{bmatrix}^{(n)} = \frac{1}{\Delta_{n-1}}\begin{bmatrix} i_1 & i_2 \\ j_1 & j_2 \end{bmatrix}^{(n-1)} + (-1)^\rho \left[Q_{i_1 j_1}^{(n)} \alpha_{i_2 j_2}^{(n-1)} - Q_{i_1 j_2}^{(n)} \alpha_{i_2 j_1}^{(n-1)} - Q_{i_2 j_1}^{(n)} \alpha_{i_1 j_2}^{(n-1)} + Q_{i_2 j_2}^{(n)} \alpha_{i_1 j_1}^{(n-1)}\right].$$

En supposant que i_2 ne soit inférieur à aucun des nombres i_1, j_1, j_2, on peut changer n en $n-1$, $n-2$, $\ldots$, i_2+1. Il vient, par addition,

$$\frac{1}{\Delta_n}\begin{bmatrix} i_1 & i_2 \\ j_1 & j_2 \end{bmatrix}^{(n)} = \frac{1}{\Delta_{i_2}}\begin{bmatrix} i_1 & i_2 \\ j_1 & j_2 \end{bmatrix}^{(i_2)} + (-1)^\rho \sum_{r=i_2+1}^{r=n} \left[Q_{i_1 j_1}^{(r)} \alpha_{i_2 j_2}^{(r-1)} - Q_{i_1 j_2}^{(r)} \alpha_{i_2 j_1}^{(r-1)} - Q_{i_2 j_1}^{(r)} \alpha_{i_1 j_2}^{(r-1)} + Q_{i_2 j_2}^{(r)} \alpha_{i_1 j_1}^{(r-1)}\right].$$

Appliquons les mêmes transformations au cas de $n = i_2$. Nous trouvons sans peine

$$\begin{bmatrix} i_1 & i_2 \\ j_1 & j_2 \end{bmatrix}^{(i_2)} = -(-1)^\rho \mu\left(\frac{i_2}{j_1}\right) A_{i_1 j_2}^{(i_2-1)} + (-1)^\rho \mu\left(\frac{i_2}{j_2}\right) A_{i_1 j_1}^{(i_2-1)}.$$

ou bien, en observant que $\mu(1) = 1$,

$$\frac{1}{\Delta_{i_2}}\begin{bmatrix} i_1 & i_2 \\ j_1 & j_2 \end{bmatrix}^{(i_2)} = (-1)^\rho \left[-\mathrm{Q}_{i_2 j_1}^{(i_2)} \alpha_{i_1 j_2}^{(i_2 - 1)} + \mathrm{Q}_{i_2 j_2}^{(i_2)} \alpha_{i_1 j_1}^{(i_2 - 1)} \right]$$

Conséquemment, si nous concevons que la quantité $\alpha_{ij}^{(n)}$ soit nulle lorsque n est inférieur à l'un des indices, ce qui est d'accord avec l'expression que nous en avons donnée en fonction des quantités Q, nous pourrons écrire

$$\frac{1}{\Delta_n}\begin{bmatrix} i_1 & i_2 \\ j_1 & j_2 \end{bmatrix}^{(n)} = (-1)^\rho \sum_{r=2}^{r=n} \left[\mathrm{Q}_{i_1 j_1}^{(r)} \alpha_{i_2 j_2}^{(r-1)} - \mathrm{Q}_{i_1 j_2}^{(r)} \alpha_{i_2 j_1}^{(r-1)} - \mathrm{Q}_{i_2 j_1}^{(r)} \alpha_{i_1 j_2}^{(r-1)} + \mathrm{Q}_{i_2 j_2}^{(r)} \alpha_{i_1 j_1}^{(r-1)} \right].$$

Or il est évident que

$$\sum_{r=2}^{r=n} \left[\mathrm{Q}_{\alpha\beta}^{(r)} \sum_{s=1}^{s=r-1} \mathrm{Q}_{\gamma\delta}^{(s)} + \mathrm{Q}_{\gamma\delta}^{(r)} \sum_{s=1}^{s=r-1} \mathrm{Q}_{\alpha\beta}^{(s)} \right] = \sum_{r=1}^{r=n} \mathrm{Q}_{\alpha\beta}^{(r)} \sum_{r=1}^{r=n} \mathrm{Q}_{\gamma\delta}^{(r)} - \sum_{r=1}^{r=n} \mathrm{Q}_{\alpha\beta}^{(r)} \mathrm{Q}_{\gamma\delta}^{(r)}.$$

En conséquence, si l'on observe que

$$\mathrm{Q}_{\alpha\beta}^{(x)} \mathrm{Q}_{\gamma\delta}^{(x)} = \frac{\mu\left(\frac{x}{\alpha}\right) \mu\left(\frac{x}{\beta}\right) \mu\left(\frac{x}{\gamma}\right) \mu\left(\frac{x}{\delta}\right)}{f^2(x)} = \mathrm{Q}_{\alpha\delta}^{(x)} \mathrm{Q}_{\beta\gamma}^{(x)},$$

on trouve définitivement

$$\frac{1}{\Delta_n}\begin{bmatrix} i_1 & i_2 \\ j_1 & j_2 \end{bmatrix}^{(n)} = (-1)^\rho \left[\alpha_{i_1 j_1}^{(n)} \alpha_{i_2 j_2}^{(n)} - \alpha_{i_1 j_2}^{(n)} \alpha_{i_2 j_1}^{(n)} \right].$$

La relation que nous venons d'obtenir se déduit d'une autre plus générale, que nous fournit immédiatement la théorie des déterminants réciproques. Observons d'abord que, d'après les notations adoptées, le complément algébrique du mineur

$$\begin{vmatrix} \mathrm{F}(i_1, j_1) & \mathrm{F}(i_2, j_1) & \mathrm{F}(i_3, j_1) & \ldots & \mathrm{F}(i_\nu, j_1) \\ \mathrm{F}(i_1, j_2) & \mathrm{F}(i_2, j_2) & \mathrm{F}(i_3, j_2) & \ldots & \mathrm{F}(i_\nu, j_2) \\ \mathrm{F}(i_1, j_3) & \mathrm{F}(i_2, j_3) & \mathrm{F}(i_3, j_3) & \ldots & \mathrm{F}(i_\nu, j_3) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \mathrm{F}(i_1, j_\nu) & \mathrm{F}(i_2, j_\nu) & \mathrm{F}(i_3, j_\nu) & \ldots & \mathrm{F}(i_\nu, j_\nu) \end{vmatrix}$$

est

$$(-1)^\rho \begin{bmatrix} i_1 & i_2 & i_3 & \ldots & i_\nu \\ j_1 & j_2 & j_3 & \ldots & j_\nu \end{bmatrix}^{(n)}, \quad \text{où} \quad \rho = i_1 + i_2 + \ldots + i_\nu + j_1 + j_2 + \ldots + j_\nu.$$

On sait, d'ailleurs, que le mineur homologue, dans le déterminant réciproque de Δ_n, est précisément égal au complément dont il s'agit, multiplié par la $(\nu - 1)^{\text{ième}}$ puissance de Δ_n. On en déduit aisément

$$\frac{(-1)^\rho}{f(1)f(2)\ldots f(n)}\begin{bmatrix} i_1 & i_2 & \ldots & i_\nu \\ j_1 & j_2 & \ldots & j_\nu \end{bmatrix}^{(n)} = \begin{vmatrix} \alpha_{i_1 j_1}^{(n)} & \alpha_{i_2 j_1}^{(n)} & \alpha_{i_3 j_1}^{(n)} & \ldots & \alpha_{i_\nu j_1}^{(n)} \\ \alpha_{i_1 j_2}^{(n)} & \alpha_{i_2 j_2}^{(n)} & \alpha_{i_3 j_2}^{(n)} & \ldots & \alpha_{i_\nu j_2}^{(n)} \\ \alpha_{i_1 j_3}^{(n)} & \alpha_{i_2 j_3}^{(n)} & \alpha_{i_3 j_3}^{(n)} & \ldots & \alpha_{i_\nu j_3}^{(n)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{i_1 j_\nu}^{(n)} & \alpha_{i_2 j_\nu}^{(n)} & \alpha_{i_3 j_\nu}^{(n)} & \ldots & \alpha_{i_\nu j_\nu}^{(n)} \end{vmatrix}.$$

Arrêtons-nous de nouveau au cas de $\nu = 2$, et supposons $i_1 = j_1 = 1$, $i_2 = j_2 = 2$, de sorte que le déterminant résultant est celui qui a $F(i+2, j+2)$ pour élément général. On a

$$\frac{1}{\Delta_n}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{(n)} = \sum_{r=1}^{r=n}\frac{\mu^2(r)}{f(r)}\sum_{r=1}^{r=n}\frac{\mu^2\left(\frac{r}{2}\right)}{f(r)} - \left[\sum_{r=1}^{r=n}\frac{\mu(r)\,\mu\left(\frac{r}{2}\right)}{f(r)}\right]^2$$
$$= \sum_{r,s}\frac{\left[\mu(r)\,\mu\left(\frac{s}{2}\right) - \mu(s)\,\mu\left(\frac{r}{2}\right)\right]^2}{f(r)f(s)},$$

où r et s doivent varier, séparément, de 1 à n. Si l'on veut considérer exclusivement les valeurs de r et de s, qui donnent des termes différents de zéro, on doit remarquer qu'elles ne sont liées à n par d'autres conditions que de lui être inférieures, de sorte qu'il est possible de les calculer une fois pour toutes, en supprimant, ensuite, celles qui surpassent n. Le numérateur

$$\left[\mu(r)\,\mu\left(\frac{s}{2}\right) - \mu(s)\,\mu\left(\frac{r}{2}\right)\right]^2$$

ne peut avoir que les valeurs 1 et 0 : cherchons pour quelles valeurs de r et s il est égal à l'unité. Si l'on désigne par u_1, u_2, u_3, ... les termes de la série

1, 3, 5, 7, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 29, 31, 33, 35, ...,

qui sont impairs et privés de facteurs carrés, on reconnaît que trois hypothèses seulement sont possibles :

$$r = u_i, \quad s = 2u_j; \qquad r = u_i, \quad s = 4u_j; \qquad r = 2u_i, \quad s = 4u_j.$$

Posons, pour abréger,

$$\mathrm{A} = \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{1}{f(u_r)}, \qquad \mathrm{B} = \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{1}{f(2u_r)}, \qquad \mathrm{C} = \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{1}{f(4u_r)}.$$

On a

$$\frac{1}{\Delta_n}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{(n)} = \mathrm{BC} + \mathrm{CA} + \mathrm{AB},$$

en faisant $f(x) = \infty$ pour $x > n$, ce qui est permis, vu qu'il n'y a pas lieu de considérer, dans le déterminant donné, des valeurs de $f(x)$, pour lesquelles x surpasse n. Ainsi, dans le cas de $n = 5$, on trouve

$$\begin{vmatrix} \mathrm{F}(3,3) & \mathrm{F}(3,4) & \mathrm{F}(3,5) \\ \mathrm{F}(4,3) & \mathrm{F}(4,4) & \mathrm{F}(4,5) \\ \mathrm{F}(5,3) & \mathrm{F}(5,4) & \mathrm{F}(5,5) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} f(1)+f(3) & f(1) & f(1) \\ f(1) & f(1)+f(2)+f(4) & f(1) \\ f(1) & f(1) & f(1)+f(5) \end{vmatrix}$$

$$= f(1)f(2)f(3)f(4)f(5)\left[\frac{1}{f(1)f(2)} + \frac{1}{f(1)f(4)} + \frac{1}{f(2)f(3)} + \frac{1}{f(2)f(4)} \right.$$
$$\left. + \frac{1}{f(2)f(5)} + \frac{1}{f(3)f(4)} + \frac{1}{f(4)f(5)}\right].$$

Soit encore, n étant quelconque, $f(x) = x^k$, et posons

$$s_k = 1 + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} + \frac{1}{4^k} + \frac{1}{5^k} + \ldots.$$

On obtient aisément

$$\mathrm{A} = 2^k\mathrm{B} = 2^{2k}\mathrm{C} = \frac{2^k}{2^k+1}\,\frac{s_k}{s_{2k}},$$

et, par suite, pour n indéfiniment grand,

$$\lim \frac{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{(n)}}{(1.\ 2.\ 3\ldots n)^k} = \frac{2^{2k}+2^k+1}{2^k(2^k+1)^2}\left(\frac{s_k}{s_{2k}}\right)^2.$$

En particulier, pour $k = 2$, on trouve que, *si* D_n *est le déterminant, de degré* $n - 2$, *dont chaque élément, aux indices* i *et* j, *représente la somme des carrés des diviseurs communs à* $i + 2$ *et* $j + 2$, *on a*

$$\lim \left(\frac{e}{n}\right)^{2n+1} \mathrm{D}_n = \frac{189e}{2\pi^3}.$$

Nous trouvons aussi, en faisant $\nu = 3$, l'égalité

$$\frac{1}{\Delta_n}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}^{(n)} = \alpha_{11}^{(n)}\alpha_{22}^{(n)}\alpha_{33}^{(n)} + 2\alpha_{23}^{(n)}\alpha_{31}^{(n)}\alpha_{12}^{(n)} - \left\{\alpha_{11}^{(n)}[\alpha_{23}^{(n)}]^2 + \alpha_{22}^{(n)}[\alpha_{31}^{(n)}]^2 + \alpha_{33}^{(n)}[\alpha_{12}^{(n)}]^2\right\}.$$

Soient $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots$ les termes de la série $1, 5, 7, 11, 13, 17, \ldots$, premiers ou produits de nombres premiers, inégaux, autres que 2 et 3. Posons

$$\sigma_m = \frac{1}{f(m\varphi_1)} + \frac{1}{f(m\varphi_2)} + \frac{1}{f(m\varphi_3)} + \ldots.$$

En supposant $f(x) = \infty$, pour $x > n$, on trouve

$$\begin{aligned} \alpha_{11}^{(n)} &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_6, & \alpha_{23}^{(n)} &= \sigma_6, \\ \alpha_{22}^{(n)} &= \sigma_2 + \sigma_4 + \sigma_6 + \sigma_{12}, & \alpha_{31}^{(n)} &= -(\sigma_3 + \sigma_6), \\ \alpha_{33}^{(n)} &= \sigma_3 + \sigma_6 + \sigma_9 + \sigma_{18}, & \alpha_{12}^{(n)} &= -(\sigma_2 + \sigma_6). \end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta_n}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}^{(n)} = {} & \sigma_2\sigma_3\sigma_6 + \sigma_1\sigma_3\sigma_6 + \sigma_1\sigma_2\sigma_6 + \sigma_1\sigma_2\sigma_3 \\ & + (\sigma_1 + \sigma_2)(\sigma_3 + \sigma_6)(\sigma_4 + \sigma_{12}) + (\sigma_1 + \sigma_3)(\sigma_2 + \sigma_6)(\sigma_9 + \sigma_{18}) \\ & + (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_6)(\sigma_4 + \sigma_{12})(\sigma_9 + \sigma_{18}). \end{aligned}$$

On voit donc que le second membre se réduit à une somme de quantités analogues à $\frac{1}{f(x)f(y)f(z)}$, où x, y, z sont trois nombres non supérieurs à n, et différents entre eux. Si l'on cherche à généraliser par induction les propriétés qui précèdent, on est conduit à énoncer le théorème que voici :

Le déterminant, de degré $n - \nu$, dont l'élément général est $F(i + \nu, j + \nu)$, est égal à la somme de certains produits, $n - \nu$ à $n - \nu$, des nombres $f(1), f(2), f(3), \ldots, f(n)$.

Pour $\nu = 0$, on retrouve immédiatement le théorème de M. Mansion. On a vu que le théorème est encore vrai pour $\nu = 1$, $\nu = 2$, $\nu = 3$. Dans le cas de $\nu = n - 1$, le déterminant se réduit à $F(n)$, et il doit être égal à la somme de quelques-uns des nombres $f(1), f(2), \ldots, f(n)$, ce qui est exact : il suffit que x divise n pour que $f(x)$ fasse partie de la somme en question. On vérifie facilement le théorème dans les cas de $\nu = n - 2$, $n - 3$, ... Subsiste-t-il en général? Quoi qu'il en soit, on aurait tort de croire que, plus généralement, tout mineur de Δ_n, d'ordre ν, est, en valeur absolue, une somme de produits ν à ν des nombres $f(1), f(2), \ldots, f(n)$. Il est, en effet, bien aisé de trouver des mineurs qui ne possèdent pas cette propriété. Il en est ainsi, par exemple, du mineur

$$\begin{vmatrix} F(i,j) & F(i,n) \\ F(n,j) & F(n,n) \end{vmatrix},$$

toutes les fois que n a des facteurs communs avec les quotients de i et de j par leur plus grand commun diviseur. Cependant, les mineurs de l'ordre $n-1$ satisfont toujours au théorème, ainsi que ceux du premier ordre. Reprenons, en effet, la formule

$$A_{ij}^{(n)} = \Delta_n \sum_r \frac{\mu\left(\frac{r}{i}\right)\mu\left(\frac{r}{j}\right)}{f(r)},$$

où l'on suppose $f(x) = \infty$, pour $x > n$. Si m est le plus petit multiple commun de i et de j, et que l'on représente par i' et j' les quotients de i et de j par leur plus grand diviseur commun, il est clair que l'on peut écrire

$$A_{ij}^{(n)} = \mu(i'j')\Delta_n \sum_r \frac{1}{f(mr)},$$

en sous-entendant que les valeurs attribuées à r soient premières avec i' et j', et n'admettent pas de facteurs carrés. Si $i'j'$ admet des facteurs carrés, $A_{ij}^{(n)}$ est nul, quel que soit n : dans le cas contraire, on voit que $A_{ij}^{(n)}$ est égal, en valeur absolue, à la somme de certains produits $n-1$ à $n-1$ des nombres $f(1), f(2), \ldots, f(n)$. En particulier,

$$A_{ii}^{(n)} = f(1)f(2)\ldots f(n)\left[\frac{1}{f(i)} + \frac{1}{f(2i)} + \frac{1}{f(3i)} + \frac{1}{f(5i)} + \frac{1}{f(6i)} + \ldots\right].$$

L'expression de $\alpha_{ij}^{(n)}$ est très utile pour répondre à la question posée plus haut. On devrait étudier, en effet, le déterminant

$$\nabla_\nu^{(n)} = \begin{vmatrix} \alpha_{11}^{(n)} & \alpha_{12}^{(n)} & \alpha_{13}^{(n)} & \ldots & \alpha_{1\nu}^{(n)} \\ \alpha_{21}^{(n)} & \alpha_{22}^{(n)} & \alpha_{23}^{(n)} & \ldots & \alpha_{2\nu}^{(n)} \\ \alpha_{31}^{(n)} & \alpha_{32}^{(n)} & \alpha_{33}^{(n)} & \ldots & \alpha_{3\nu}^{(n)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{\nu 1}^{(n)} & \alpha_{\nu 2}^{(n)} & \alpha_{\nu 3}^{(n)} & \ldots & \alpha_{\nu\nu}^{(n)} \end{vmatrix},$$

dont la $i^{\text{ième}}$ colonne peut être écrite comme il suit :

$$\begin{array}{l}
\mu\left(\frac{1}{1}\right)\mu\left(\frac{1}{i}\right)\xi_1+\mu\left(\frac{2}{1}\right)\mu\left(\frac{2}{i}\right)\xi_2+\mu\left(\frac{3}{1}\right)\mu\left(\frac{3}{i}\right)\xi_3+\ldots+\mu\left(\frac{n}{1}\right)\mu\left(\frac{n}{i}\right)\xi_n,\\
\mu\left(\frac{1}{2}\right)\mu\left(\frac{1}{i}\right)\xi_1+\mu\left(\frac{2}{2}\right)\mu\left(\frac{2}{i}\right)\xi_2+\mu\left(\frac{3}{2}\right)\mu\left(\frac{3}{i}\right)\xi_3+\ldots+\mu\left(\frac{n}{2}\right)\mu\left(\frac{n}{i}\right)\xi_n,\\
\mu\left(\frac{1}{3}\right)\mu\left(\frac{1}{i}\right)\xi_1+\mu\left(\frac{2}{3}\right)\mu\left(\frac{2}{i}\right)\xi_2+\mu\left(\frac{3}{3}\right)\mu\left(\frac{3}{i}\right)\xi_3+\ldots+\mu\left(\frac{n}{3}\right)\mu\left(\frac{n}{i}\right)\xi_n,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\mu\left(\frac{1}{n}\right)\mu\left(\frac{1}{i}\right)\xi_1+\mu\left(\frac{2}{n}\right)\mu\left(\frac{2}{i}\right)\xi_2+\mu\left(\frac{3}{n}\right)\mu\left(\frac{3}{i}\right)\xi_3+\ldots+\mu\left(\frac{n}{n}\right)\mu\left(\frac{n}{i}\right)\xi_n.
\end{array}$$

Pour simplifier l'écriture, nous représentons par ξ_r l'inverse de $f(r)$. Cela étant, on voit que le déterminant considéré est décomposable en n^ν autres déterminants. Si l'on ne considère, dans la $i^{\text{ième}}$ colonne, que les termes contenant ξ_{ε_i}, le déterminant partiel correspondant a pour élément général

$$\mu\left(\frac{\varepsilon_i}{j}\right)\mu\left(\frac{\varepsilon_i}{i}\right)\xi_{\varepsilon_i}.$$

Il est donc égal à

$$\xi_{\varepsilon_1}\xi_{\varepsilon_2}\xi_{\varepsilon_3}\ldots\xi_{\varepsilon_\nu}\,\mu\left(\frac{\varepsilon_1}{1}\right)\mu\left(\frac{\varepsilon_2}{2}\right)\mu\left(\frac{\varepsilon_3}{3}\right)\ldots\mu\left(\frac{\varepsilon_\nu}{\nu}\right)M_{(\varepsilon_1,\,\varepsilon_2,\,\ldots,\,\varepsilon_\nu)},$$

où l'on a posé

$$M_{(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_\nu)}=\begin{vmatrix}
\mu\left(\frac{\varepsilon_1}{1}\right) & \mu\left(\frac{\varepsilon_2}{1}\right) & \mu\left(\frac{\varepsilon_3}{1}\right) & \cdots & \mu\left(\frac{\varepsilon_\nu}{1}\right)\\
\mu\left(\frac{\varepsilon_1}{2}\right) & \mu\left(\frac{\varepsilon_2}{2}\right) & \mu\left(\frac{\varepsilon_3}{2}\right) & \cdots & \mu\left(\frac{\varepsilon_\nu}{2}\right)\\
\mu\left(\frac{\varepsilon_1}{3}\right) & \mu\left(\frac{\varepsilon_2}{3}\right) & \mu\left(\frac{\varepsilon_3}{3}\right) & \cdots & \mu\left(\frac{\varepsilon_\nu}{3}\right)\\
\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots\\
\mu\left(\frac{\varepsilon_1}{\nu}\right) & \mu\left(\frac{\varepsilon_2}{\nu}\right) & \mu\left(\frac{\varepsilon_3}{\nu}\right) & \cdots & \mu\left(\frac{\varepsilon_\nu}{\nu}\right)
\end{vmatrix}.$$

Si deux quantités ε sont égales entre elles, M est nul. Par suite, le déterminant ∇ est bien une combinaison linéaire des produits ν à ν des quantités $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$; mais il faudrait faire voir que chacun de ces produits entre dans l'expression de ∇, avec le coefficient 0 ou 1. Du reste, ayant pris ν nombres inégaux $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_\nu$, non supérieurs à n, il est facile de chercher le coefficient du produit $\xi_{\varepsilon_1}, \xi_{\varepsilon_2}, \ldots, \xi_{\varepsilon_\nu}$. Permutons les indices $1, 2, 3, \ldots, \nu$ des quantités ε de toutes les manières possibles : suivant que la permutation $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \ldots, \tau_\nu$ obtenue est de la première ou de la seconde classe, on a

$$\mathrm{M}_{(\varepsilon_{\tau_1}, \varepsilon_{\tau_2}, \ldots, \varepsilon_{\tau_\nu})} = \pm \mathrm{M}_{(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_\nu)}.$$

Il en résulte que le coefficient cherché est

$$\mathrm{M}_{(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_\nu)} \sum \pm \mu\left(\frac{\varepsilon_{\tau_1}}{1}\right) \mu\left(\frac{\varepsilon_{\tau_2}}{2}\right) \cdots \mu\left(\frac{\varepsilon_{\tau_\nu}}{\nu}\right) = \mathrm{M}^2_{(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_\nu)}.$$

Conséquemment

$$\nabla_\nu^{(n)} = \sum \frac{\mathrm{M}^2_{(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots, \varepsilon_\nu)}}{f(\varepsilon_1) f(\varepsilon_2) f(\varepsilon_3) \ldots f(\varepsilon_\nu)},$$

les nombres ε formant, de toutes les manières possibles, une combinaison de ν nombres entiers, non supérieurs à n. Il resterait donc à rechercher si les déterminants M peuvent avoir d'autres valeurs que $0, +1, -1$.

Il serait intéressant d'étudier, plus généralement, le déterminant

$$\mathfrak{M}^{(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_\nu)}_{(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_\nu)} = \begin{vmatrix} \mu\left(\frac{\varepsilon_1}{\eta_1}\right) & \mu\left(\frac{\varepsilon_2}{\eta_1}\right) & \mu\left(\frac{\varepsilon_3}{\eta_1}\right) & \cdots & \mu\left(\frac{\varepsilon_\nu}{\eta_1}\right) \\ \mu\left(\frac{\varepsilon_1}{\eta_2}\right) & \mu\left(\frac{\varepsilon_2}{\eta_2}\right) & \mu\left(\frac{\varepsilon_3}{\eta_2}\right) & \cdots & \mu\left(\frac{\varepsilon_\nu}{\eta_2}\right) \\ \mu\left(\frac{\varepsilon_1}{\eta_3}\right) & \mu\left(\frac{\varepsilon_2}{\eta_3}\right) & \mu\left(\frac{\varepsilon_3}{\eta_3}\right) & \cdots & \mu\left(\frac{\varepsilon_\nu}{\eta_3}\right) \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ \mu\left(\frac{\varepsilon_1}{\eta_\nu}\right) & \mu\left(\frac{\varepsilon_2}{\eta_\nu}\right) & \mu\left(\frac{\varepsilon_3}{\eta_\nu}\right) & \cdots & \mu\left(\frac{\varepsilon_\nu}{\eta_\nu}\right) \end{vmatrix},$$

qui, probablement, ne diffère pas de l'unité, en valeur absolue, à moins qu'il ne soit nul. En opérant comme ci-dessus, on trouve facilement la formule

$$(-1)^\rho \begin{bmatrix} i_1 & i_2 & \ldots & i_\nu \\ j_1 & j_2 & \ldots & j_\nu \end{bmatrix}^{(n)} = \sum \frac{f(1) f(2) \ldots f(n)}{f(\varepsilon_1) f(\varepsilon_2) \ldots f(\varepsilon_\nu)} \mathfrak{M}^{(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_\nu)}_{(i_1, i_2, \ldots, i_\nu)} \mathfrak{M}^{(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_\nu)}_{(j_1, j_2, \ldots, j_\nu)},$$

d'après laquelle tout mineur de Δ_n serait une somme *algébrique* de produits ν à ν des nombres $f(1), f(2), \ldots, f(n)$, l'ordre du mineur étant ν.

Nous pourrions, d'ailleurs, par la simple dérivation des déterminants ∇, relativement à chaque variable ξ, nous assurer que celle-ci entre linéairement dans le déterminant considéré. Nous reprendrons bientôt l'étude des déterminants $\mathfrak{M}$, et d'autres déterminants arithmétiques qui s'en déduisent.

FIN DU TOME II DE LA III^{e} SÉRIE.