ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

G. KOENIGS

Recherches sur les intégrales de certaines équations fonctionnelles

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3^e série, tome 1 (1884), p. 3-41 (supplément)
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1884_3_1__S3_0>

RECHERCHES SUR LES INTÉGRALES

DE

CERTAINES ÉQUATIONS FONCTIONNELLES[1],

PAR M. G. KOENIGS,

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE BESANÇON.

INTRODUCTION.

Dans le premier Mémoire que j'ai publié au *Bulletin des Sciences mathématiques* sur le sujet qui m'occupe, j'ai omis de citer les noms de MM. Schrœder et Korkine, qui m'avaient précédé dans cette voie : peut-être ne sont-ils pas les seuls; mais je dois, dès le début du présent travail, réparer cette omission involontaire, du moins pour ceux dont les noms me sont connus.

Quoique, dans ses deux Mémoires [2], M. Schrœder aborde le sujet sous un point de vue différent du mien, néanmoins le premier théorème qui sert de base à mes recherches [3] avait été donné par ce géomètre : je veux parler de la proposition qui énonce la condition nécessaire pour qu'un point soit limite dans l'acception ordinaire du mot.

Le Mémoire [4] de M. Korkine, publié en 1882, a pour objet une équation traitée par Abel et qui, si on pouvait la résoudre, donnerait immédiatement la forme générale de la fonction itérative $\varphi_p(z)$ en fonction de p et de z. En présence de l'impossibilité de trouver une solution, même

---

(1) Les principaux résultats contenus dans le présent Mémoire ont été présentés à l'Institut dans la séance du 8 décembre 1884.

(2) *Ueber unendlich viele Algorithmen zur Auflösung der Gleichungen* (*Mathematische Annalen*, t. II); *Ueber iterirte Functionen* (*ibid.*, t. III).

(3) *Recherches sur les substitutions uniformes* (*Bulletin des Sciences mathématiques*, 2e série, année 1883).

(4) *Sur un problème d'interpolation* (*Bulletin des Sciences mathématiques*, année 1882).

particulière, de l'équation d'Abel, M. Korkine a recours au développement en série : l'identification de deux séries fournit des équations linéaires à l'aide desquelles on peut de proche en proche calculer les coefficients.

Dans ses recherches, M. Schrœder avait rencontré une équation fonctionnelle, de laquelle on déduit celle d'Abel en prenant les logarithmes des deux membres. Résoudre l'équation d'Abel ou celle de M. Schrœder, c'est donc au fond le même problème.

C'est à l'étude de cette dernière équation que M. J. Farkas a consacré tout récemment un Mémoire (¹), inséré au *Journal de Mathématiques*.

Le résultat le plus saillant de ce Mémoire, c'est la condition d'holomorphisme qu'a trouvée M. Farkas pour la solution de l'équation de M. Schrœder dans le domaine d'un point limite.

Un caractère que j'ai essayé d'imprimer à mes recherches, soit antérieures, soit actuelles, c'est la réduction au nombre minimum nécessaire des diverses hypothèses qui servent de base aux travaux de mes prédécesseurs. Ces hypothèses portent soit sur la possibilité de certaines différentiations, soit sur l'existence de certaines limites.

Puissé-je ne pas me tromper en pensant avoir réussi à montrer que ces hypothèses se réduisent toutes à une seule, le fait de l'holomorphisme en un point limite de la fonction qui figure dans la substitution.

Mais j'ai pu aller plus loin, car il résulte de mes raisonnements que, sous cette seule condition, l'équation de M. Schrœder admet toujours une infinité de solutions holomorphes ou méromorphes en un point limite, et j'apprends à les déduire toutes de l'une d'elles $B(z)$, dont je donne une expression.

Si l'on passe maintenant à l'équation d'Abel, il en résulte que toute solution de cette équation admet une singularité essentielle au point limite; une seule y admet une singularité logarithmique, et c'est $\log B(z)$ à un facteur constant près.

Il existe d'ailleurs une infinité d'équations fonctionnelles auxquelles ma méthode s'étend et dans lesquelles la fonction $B(z)$ permet de donner la solution générale une fois que l'on a une solution particulière : or j'apprends à former une telle solution.

(¹) *Sur les fonctions itératives* (*Journal de Mathématiques* de M. Resal, mars 1884).

Je devais naturellement rechercher ce qui se passait dans le cas des groupes limites que j'ai définis dans mon premier Mémoire, et j'ai effectivement rencontré des résultats *presque* analogues, offrant un exemple assez remarquable de périodicité.

J'ai donné quelques exemples; mais je n'ai pu les multiplier, de crainte d'allonger outre mesure ce Mémoire. Dans un travail ultérieur, j'en réunirai plusieurs particulièrement intéressants, qui rattachent ces recherches à des théories classiques.

Avant de terminer cette Introduction, je dois dire quelques mots sur la méthode que j'ai suivie. La nature même de la question exige l'emploi des théorèmes les plus généraux de la théorie des fonctions. Je me suis principalement inspiré du beau Mémoire *Sur les fonctions discontinues*, que M. Darboux a publié au tome IV de la 2e série des *Annales de l'École Normale*.

Une extension facile des résultats de ce Mémoire aux quantités complexes a mis hors de doute à mes yeux la légitimité du théorème suivant, qui sert de base à tout mon travail :

Si la série

$$\varphi(z) = u_0 + u_1 + u_2 + \dots,$$

dont chaque terme est une fonction holomorphe de z dans une région U *du plan, est* UNIFORMÉMENT *convergente dans cette région, la somme* $\varphi(z)$ *de cette série est une fonction continue de z dans cette région.*

En second lieu, si la série formée par les dérivées des termes de la première

$$\varphi_1(z) = u'_0 + u'_1 + u'_2 + u'_3 + \dots$$

est elle aussi UNIFORMÉMENT *convergente dans la région* U, *la fonction continue* $\varphi_1(z)$ *qu'elle représente est la dérivée de la fonction* $\varphi(z)$, *en sorte que la fonction* $\varphi(z)$ *est* HOLOMORPHE *dans toute la région* U.

I. — Résultats antérieurs.

1. Je rappellerai d'abord en quelques mots les faits généraux que j'ai mis en évidence dans mon Mémoire précité, en les précisant et les complétant un peu.

La suite des quantités $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_p, \dots$ est dite converger *régulière-*

rement vers une limite x, lorsqu'à tout nombre positif ε, aussi petit que l'on voudra, il est possible d'en faire connaître un autre N_ε assez grand pour que, sous la *seule* condition $p \geqq N_\varepsilon$, on ait $\mathrm{mod}(\alpha_p - x) < \varepsilon$.

Lorsque la série proposée n'offre pas ce caractère, mais que la suite qu'on en déduit en prenant les termes de k en k le présente, je dis que la suite primitive converge *périodiquement; k* est la période.

2. Soit une fonction $\varphi(z)$ uniforme dans tout l'intérieur d'une région R du plan, et jouissant de la propriété que, si z est intérieur à cette région, il en est de même du point $z_1 = \varphi(z)$; si nous posons généralement $\varphi(z_i) = z_{i+1}$, les points de la suite

$$z,\ z_1,\ z_2,\ z_3,\ \ldots,\ z_p,\ \ldots$$

sont tous intérieurs à la région R.

Lorsque cette suite converge régulièrement vers une limite x, qui n'est pas pour $\varphi(z)$ un point essentiel, on sait que x est un zéro de la fonction $z - \varphi(z)$, qui doit vérifier l'inégalité $\mathrm{mod}\,\varphi'(x) < 1$.

Réciproquement, soit x un zéro de la fonction $z - \varphi(z)$ qui vérifie l'inégalité $\mathrm{mod}\,\varphi'(x) < 1$; j'ai démontré que le point x est le centre d'un cercle C_x, à l'intérieur duquel : 1° $\varphi(z)$ est holomorphe; 2° le module $\frac{\varphi(z) - x}{z - x}$ reste constamment inférieur à l'unité et diffère même de l'unité d'une quantité qui reste finie.

En appelant alors H une quantité comprise entre 0 et 1, on peut poser

$$\mathrm{mod}\,\frac{\varphi(z) - x}{z - x} < \mathrm{H} \quad \text{ou} \quad \mathrm{mod}\,\frac{z_1 - x}{z - x} < \mathrm{H} < 1.$$

Les points $z,\ z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_p,\ \ldots$ s'approchent donc sans cesse du point x, à mesure que leur indice augmente, et, puisque tous ces points sont ainsi intérieurs au cercle C_x, nous pourrons poser

$$\mathrm{mod}\,\frac{\varphi(z) - x}{z - x} < \mathrm{H} \quad \text{ou} \quad \mathrm{mod}\,\frac{\varphi(z_1) - x}{z_1 - x} < \mathrm{H},\ \ldots,\ \mathrm{mod}\,\frac{\varphi(z_{p_1}) - x}{z_{p-1} - x} < \mathrm{H};$$

on en déduit

$$\mathrm{mod}(z_p - x) < \mathrm{H}^p\,\mathrm{mod}(z - x) < \mathrm{H}^p r,$$

où r est le rayon du cercle C_x.

Or, ε étant une quantité positive aussi petite que l'on voudra, posons

$$N_\varepsilon = \text{partie entière de } \frac{\log \frac{r}{H_\varepsilon}}{\log \frac{1}{H}};$$

il suffira d'avoir $p \geq N_\varepsilon$ pour que le module de $z_p - x$ soit inférieur à ε, ce qui démontre la convergence régulière de la suite $z, z_1, z_2, \ldots$.

3. Mais ce qui précède nous conduit à une notion dont je ferai le plus grand usage dans ce travail.

Appelons Γ_ε un cercle de centre x et de rayon ε, que je suppose intérieur à C_x; il est clair qu'après N_ε substitutions, quel que soit le point z d'où l'on est parti, pourvu qu'il soit intérieur à C_x, on tombera sur un point z_{N_ε} certainement intérieur à Γ_ε.

J'appellerai généralement *hauteur* d'un point z, par rapport à un cercle tel que Γ_ε, intérieur à C_x, le nombre de substitutions nécessaire et suffisant pour conduire du point z à un point intérieur au cercle Γ_ε.

D'après cela, la plus grande hauteur par rapport à un cercle donné Γ_ε des points du cercle C_x est un nombre *fini parfaitement déterminé*. J'en ferai fréquemment usage.

Considérons une fonction $\theta(z)$ holomorphe à l'intérieur du cercle Γ_ε; il est clair que la fonction de z, $\theta[\varphi_i(z)]$, sera holomorphe dans tout le cercle C_x, pourvu que i soit au moins égal à la hauteur maximum des points du cercle C_x par rapport au cercle Γ_ε.

On trouvera une application immédiate de ces principes dans les lemmes préliminaires qui vont suivre.

II. — Lemmes préliminaires.

4. Lemme I. — *Soit $f(z)$ une fonction de z holomorphe au point x et, de plus, nulle en ce point; on peut déterminer un nombre h assez grand pour que la série*

$$\sum_h^\infty f[\varphi_i(z)]$$

ait une valeur finie, et soit uniformément convergente dans tout le cercle C_x.

Nous pouvons poser, en effet,

$$f(z)=(z-x)^m\theta(z),$$

où m est un entier au moins égal à 1, et $\theta(z)$ une fonction holomorphe à l'intérieur d'un cercle C_0 de centre x.

Soient Θ une quantité à laquelle le module de $\theta(z)$ reste inférieur dans le cercle C_0 et h la hauteur maximum par rapport à ce cercle des points du cercle C_x. On prendra $h=0$ si C_x n'est pas extérieur à C_0.

D'après ce qui précède, il suffit que i soit supérieur à h ou au moins égal pour que la fonction $\theta[\varphi_i(z)]$ soit holomorphe dans tout le cercle C_x et que l'on ait

$$\operatorname{mod}\theta[\varphi_i(z)]<\Theta.$$

Prenons alors un nombre q au moins égal à h, nous aurons

$$\sum_q^\infty \operatorname{mod} f[\varphi_i(z)]<\Theta\sum_q^\infty \operatorname{mod}(z_i-x)^m;$$

nous savons aussi que $\operatorname{mod}(z_i-x)<r\mathrm{H}^i$ et, par conséquent,

$$\sum_q^\infty \operatorname{mod} f[\varphi_i(z)]<\Theta\sum_q^\infty \operatorname{mod}(z_i-x)^m<\frac{\Theta r^m}{1-\mathrm{H}^m}\mathrm{H}^{mq}.$$

En faisant $q=h$, on reconnaît d'abord l'absolue convergence de la série

$$\sum_h^\infty f[\varphi_i(z)];$$

en s'arrêtant au terme d'indice q dans cette série et appelant $\mathcal{R}_q$ le reste, l'inégalité précédente fait voir que

$$\operatorname{mod}\mathcal{R}_q<\frac{\Theta r^m}{1-\mathrm{H}^m}\mathrm{H}^{mq};$$

et, sans insister davantage, cette inégalité suffit pour établir l'*uniformité* de la convergence.

5. Lemme II. — *Soit* $\mathrm{F}(z)$ *une fonction holomorphe au point* x *et, de plus, égale à l'unité en ce point; il est toujours possible de trouver un*

nombre g assez grand pour que le produit

$$\prod_{g}^{\infty} F[\varphi_i(z)]$$

ait une valeur finie, et même puisse être mis sous la forme

$$G(z)\, e^{\sum_{h}^{\infty} f[\varphi_i(z)]},$$

la fonction $G(z)$ *étant holomorphe dans tout le cercle* C_x, *et la série en exponentielle uniformément convergente dans ce même cercle.*

Nous pouvons poser effectivement

$$F(z) = 1 + (z - x)^m \psi(z);$$

l'exposant m est un entier au moins égal à 1 et $\psi(z)$ une fonction holomorphe à l'intérieur d'un certain cercle C_ψ. J'appelle g la hauteur maximum des points du cercle C_x par rapport au cercle C_ψ, et Ψ une quantité à laquelle le module de $\psi(z)$ reste inférieur à l'intérieur de son cercle d'holomorphisme C_ψ.

Considérons le cercle Γ de centre x et de rayon $\frac{1}{\sqrt[m]{\Psi}}$; à l'intérieur de ce cercle, le module de la fonction $(z - x)^m \psi(z)$ reste inférieur à l'unité, ce qui prouve que chaque branche de la fonction

$$\log[1 + (z - x)^m \psi(z)]$$

est holomorphe dans tout ce cercle Γ. J'appellerai $f(z)$ la branche holomorphe qui s'annule au point x. En désignant alors par h la hauteur maximum des points du cercle C_x par rapport au cercle Γ, il suffira d'avoir $i \geq h$ pour que la fonction $f[\varphi_i(z)]$ soit holomorphe dans tout le cercle C_x, et, d'après le lemme précédent, la série

$$\sum_{h}^{\infty} f[\varphi_i(z)]$$

sera uniformément convergente dans tout ce cercle.

Maintenant on peut toujours prendre Ψ assez grand pour que le cercle Γ ne soit pas extérieur au cercle C_ψ, c'est-à-dire que l'on peut

toujours supposer $h \geq g$; alors, pourvu que $i \geq h$, on pourra toujours poser

$$F[\varphi_i(z)] = e^{f[\varphi_i(z)]},$$

la fonction $f[\varphi_i(z)]$ étant holomorphe dans tout le cercle C_x, comme il a été dit, et de là

$$\prod_h^\infty F[\varphi_i(z)] = e^{\sum_h^\infty f[\varphi_i(z)]},$$

où l'on a déjà vu que la série exponentielle est uniformément convergente.

Du reste, le produit $\prod_g^{h-1} F[\varphi_i(z)] = G(z)$ est évidemment holomorphe dans tout le cercle C_x, en sorte que l'on a finalement

$$\prod_g^\infty F[\varphi_i(z)] = G(z) e^{\sum_h^\infty f[\varphi_i(z)]},$$

ce qui démontre la proposition énoncée.

6. Je vais compléter cette proposition par la démonstration d'une inégalité qui me sera utile.

Conservons les notations précédentes, et envisageons le produit

$$\prod_p^q F[\varphi_i(z)] = e^{\sum_p^q f[\varphi_i(z)]},$$

où les nombres p et q sont uniquement soumis aux conditions

$$q > p \geq h.$$

Si nous mettons la fonction $f(z)$ sous la forme $(z - x)^m \theta(z)$ comme dans la démonstration du lemme I, en reprenant aussi les notations que nous y avions adoptées, nous aurons

$$\sum_p^q \operatorname{mod} f[\varphi_i(z)] < \Theta[\operatorname{mod}(z_p - x)^m + \operatorname{mod}(z_{p+1} - x)^m + \ldots + \operatorname{mod}(z_q - x)^m]$$

ou encore

$$\sum_{p}^{q} \operatorname{mod} f[\varphi_i(z)] < \Theta[(\mathrm{H}^p r)^m + (\mathrm{H}^{p+1} r)^m + \ldots + (\mathrm{H}^q r)^m],$$

et, *a fortiori*,

$$\sum_{p}^{q} \operatorname{mod} f[\varphi_i(z)] < \frac{\Theta r^m}{1 - \mathrm{H}^m} \mathrm{H}^{mp}$$

ou, puisque $\mathrm{H} < 1$,

$$\sum_{p}^{q} \operatorname{mod} f[\varphi_i(z)] < \frac{\Theta r^m}{1 - \mathrm{H}^m}.$$

On remarquera maintenant que l'on a toujours

$$\operatorname{mod} e^u < e^{\operatorname{mod} u},$$

c'est-à-dire, ici,

$$\operatorname{mod} \prod_{p}^{q} \mathrm{F}[\varphi_i(z)] < e^{\frac{\Theta r^m}{1 - \mathrm{H}^m}}.$$

Ainsi, quels que soient p et $q > p$, pourvu qu'ils soient supérieurs à h, on peut toujours trouver une quantité *indépendante de p et de q*, finie, à laquelle le module de $\prod_{p}^{q} \mathrm{F}[\varphi_i(z)]$ reste inférieur.

Cette remarque trouve une application dans la démonstration du troisième lemme qui suit :

7. Lemme III. — *La série* $\sum_{0}^{\infty} \frac{d\varphi_i(z)}{dz}$ *est uniformément convergente dans tout le cercle* C_x.

La fonction $\varphi(z)$ peut toujours se mettre sous la forme

$$\varphi(z) = x + (z - x)\varphi'(x)[1 + (z - x)^m \eta_1(z - x)],$$

où la fonction $\eta(z - x)$ est holomorphe dans tout le cercle C_x; m est un entier au moins égal à 1.

Posons, pour abréger,

$$z - x = \zeta, \quad z_i - x = \zeta_i, \quad \varphi'(x) = a$$

nous trouvons

$$\zeta_{i+1} = a\zeta_i[1 + \zeta_i^m \eta(\zeta_i)].$$

La fonction $1 + \zeta^m \eta(z)$ est précisément dans les conditions de la fonction $F(z)$ du lemme II. Son logarithme, je veux dire celui qui admet le point x pour zéro de l'ordre m, est holomorphe à l'intérieur d'un cercle Γ, et pour toutes les valeurs de i supérieures ou égales à la hauteur maximum h des points du cercle C_x par rapport au cercle Γ, on peut écrire

$$1 + \zeta_i^m \eta_1(\zeta_i) = e^{\lambda(\zeta_i)},$$

où $\lambda(\zeta_i)$ est une fonction de ζ holomorphe dans tout le cercle C_x, et, par suite,

$$\zeta_{i+1} = a\zeta_i e^{\lambda(\zeta_i)},$$

d'où, par différentiation,

$$\frac{d\zeta_{i+1}}{d\zeta_i} = ae^{\lambda(\zeta_i)}[1 + \zeta_i \lambda'(\zeta_i)].$$

Or la fonction $1 + \zeta\lambda'(\zeta)$ est, elle aussi, dans les conditions de la fonction $F(z)$ du lemme II, en sorte que l'on pourra poser encore

$$1 + \zeta_i \lambda'(\zeta_i) = e^{\mu(\zeta_i)};$$

la fonction $\mu(\zeta_i)$ est une fonction de ζ holomorphe dans tout le cercle C_x, pourvu que l'indice i soit au moins égal à un nombre déterminé h' qui est lui-même au moins égal à h.

Supposons, en conséquence, que i soit supérieur non seulement à h, mais encore qu'il soit au moins égal à h'. Nous aurons tout d'abord

$$\frac{d\zeta_i}{d\zeta} = \frac{d\zeta_i}{d\zeta_{h'}} \frac{d\zeta_{h'}}{d\zeta}.$$

Je ne me préoccupe que du premier facteur.

En vertu de l'identité

$$\frac{d\zeta_i}{d\zeta_{h'}} = \frac{d\zeta_i}{d\zeta_{i-1}} \frac{d\zeta_{i-1}}{d\zeta_{i-2}} \cdots \frac{d\zeta_{h'+1}}{d\zeta_{h'}}$$

et de la valeur précédemment trouvée pour $\frac{d\zeta_{i+1}}{d\zeta_i}$, nous aurons

$$\frac{d\zeta_i}{d\zeta_{h'}} = a^{i-h'} e^{\sum_{h'}^{i-1} \lambda(\zeta_k)} \times e^{\sum_{h'}^{i-1} \mu(\zeta_k)}.$$

Mais, d'après l'inégalité établie dernièrement au n° 6, on peut trouver deux quantités finies indépendantes de i et auxquelles les modules de $e^{\sum_{h'}^{i-1} \lambda(\zeta_k)}$ et de $e^{\sum_{h'}^{i-1} \mu(\zeta_k)}$ restent respectivement inférieurs pour si grand que soit i; appelons alors A le produit de ces deux quantités, et désignons par ξ_i une quantité imaginaire convenable dépendant de i, et dont le module sera inférieur à l'unité; nous pourrons poser

$$e^{\sum_{h'}^{i-1} \lambda(\zeta_k)} \times e^{\sum_{h'}^{i-1} \mu(\zeta_k)} = \Lambda \xi_i,$$

d'où

$$\frac{d\zeta_i}{d\zeta} = \frac{\Lambda}{a^{h'}} \frac{d\zeta_{h'}}{d\zeta} a^i \xi_i$$

et enfin

$$\sum_{h'}^{\infty} \frac{d\zeta_i}{d\zeta} = \frac{\Lambda}{a^{h'}} \frac{d\zeta_{h'}}{d\zeta} \sum_{h'}^{\infty} a^i \xi_i.$$

La série $\sum_{h'}^{\infty} a^i \xi_i$ est évidemment uniformément convergente dans tout le cercle C_x, puisque $\operatorname{mod} a < 1$.

Le troisième lemme est démontré par cela même, sans qu'il soit nécessaire d'insister.

III. — Définition de certaines fonctions holomorphes.

8. Ces trois lemmes suffisent pour démontrer les théorèmes suivants qui servent de base à tout le reste du Mémoire :

Théorème I. — *Si $f(z)$ est une fonction de z holomorphe au point x et nulle en ce point, on peut trouver un nombre h assez grand pour que la*

série

$$\sum_{h}^{\infty} f[\varphi_i(z)]$$

représente une fonction holomorphe dans tout le cercle C_x.

Reprenons les notations employées dans la démonstration du lemme I. En vertu de ce lemme, la série $\sum_{h}^{\infty} f[\varphi_i(z)]$ représente une fonction finie et continue dans le cercle C_x. Si la série des dérivées est, elle aussi, uniformément convergente dans tout le cercle C_x, il en résulte que la fonction finie et continue définie précédemment sera, en outre, monogène et, par conséquent, holomorphe dans tout le cercle C_x.

Tout revient donc à démontrer la convergence uniforme dans tout le cercle C_x de la série

$$\sum_{h}^{\infty} \frac{df[\varphi_i(z)]}{dz}.$$

La fonction $f'(z)$ est holomorphe dans le même cercle de centre x que la fonction $f(z)$; il en résulte immédiatement que $f'[\varphi_i(z)]$ sera holomorphe dans tout le cercle C_x, pourvu que i soit au moins égal à h. Appelons A une quantité à laquelle le module de $f'(z)$ reste inférieur dans le cercle d'holomorphisme de cette fonction. On aura, pourvu toujours que $i \geq h$,

$$\operatorname{mod} f'[\varphi_i(z)] < A,$$

d'où

$$\sum_{h}^{\infty} \operatorname{mod} \frac{df[\varphi_i(z)]}{dz} < A \sum_{h}^{\infty} \operatorname{mod} \frac{d\varphi_i(z)}{dz}.$$

Or, d'après le lemme III, la série du second membre, dont les termes correspondent chacun à chacun aux termes de celle du premier membre, est uniformément convergente. On peut donc en conclure la même chose pour la série du premier membre, et le théorème est ainsi démontré.

9. Théorème II. — *Si* $F(z)$ *est holomorphe au point* x, *et si de plus la fonction est égale à l'unité en ce point, il est possible de trouver un nombre* g *assez grand pour que la fonction représentée par le produit*

$$\prod_{g}^{\infty} F[\varphi_i(z)]$$

soit holomorphe dans tout le cercle C_x.

J'adopterai les notations du lemme II. En vertu de ce lemme, nous avons

$$\prod_{g}^{\infty} F[\varphi_i(z)] = G(z)\, e^{\sum_{h}^{\infty} f[\varphi_i(z)]}.$$

Or, d'après le théorème précédent, la série en exponentielle est holomorphe dans tout le cercle C_x; il en est de même, du reste, de la fonction $G(z)$, et, par suite, le théorème est démontré.

Le cas particulier suivant est particulièrement intéressant, et c'est même lui qui a provoqué mes recherches.

10. Théorème III. — *La limite du rapport* $\frac{\varphi_p(z) - x}{[\varphi'(x)]^p}$ *est holomorphe dans tout le cercle* C_x.

En adoptant les notations du n° 7, ce rapport peut s'écrire

$$\frac{\zeta_p}{a^p} = \frac{\zeta_p}{a\zeta_{p-1}} \frac{\zeta_{p-1}}{a\zeta_{p-2}}, \quad \ldots, \quad \frac{\zeta_{h+1}}{a\zeta_h} \frac{\zeta_h}{a^h} = \frac{\zeta_h}{a^h} \prod_{h}^{p-1} [1 + \zeta_i^m \eta_i(\zeta_i)].$$

Lorsque i est au moins égal à h, on peut écrire $1 + \zeta_i^m \eta(\zeta_i) = e^{\lambda(\zeta_i)}$, où $\lambda(\zeta_i)$ est une fonction de ζ holomorphe dans tout le cercle C_x, et l'on a

$$\frac{\zeta_p}{a^p} = \frac{\zeta_h}{a^h} e^{\sum_{h}^{p-1} \lambda(\zeta_i)} = \frac{\varphi_h(z) - x}{a^h} e^{\sum_{h}^{p-1} \lambda(\zeta_i)}.$$

Pour p infini, la série en exponentielle tend vers une fonction $\omega(z)$ holomorphe dans tout le cercle C_x, et par conséquent

$$\lim \frac{\varphi_p(z) - x}{[\varphi'(x)]^p} = \frac{\varphi_h(z) - x}{[\varphi'(x)]^h} e^{\omega(z)}.$$

J'appellerai $B(z)$ cette fonction de z, en sorte que

$$B(z) = \frac{\varphi_h(z) - x}{a^h} e^{\omega(z)}.$$

IV. — Propriétés de la fonction $B(z)$.

11. On remarquera d'abord que la fonction $B(z)$ admet pour zéros ceux de $\varphi_h(z) - x$ qui sont intérieurs au cercle C_x, et avec le même degré de multiplicité.

En particulier :

Le point limite x est un zéro simple de la fonction $B(z)$.

12. La fonction $B(z)$ jouit encore d'une autre propriété importante; de l'identité

$$\frac{\varphi_{p+1}(z) - x}{a^{p+1}} = \frac{1}{a} \frac{\varphi_p[\varphi(z)] - x}{a^p},$$

on tire en effet, en passant à la limite,

$$B(z) = \frac{1}{a} B[\varphi(z)].$$

La fonction $B(z)$ est donc une solution de l'équation

$$\Xi[\varphi(z)] = c\Xi(z), \tag{S}$$

où $\Xi(z)$ est une fonction inconnue et c une constante.

Dans le cas actuel, la solution est donnée par les déterminations $\Xi(z) = B(z)$, $c = a$; nous représenterons cette solution par le symbole $\{B(z), a\}$.

Il est clair que, généralement, si $\{\Xi, c\}$ représente une solution de l'équation (S), il en est de même des symboles $\{\Xi^n, c^n\}$, $\{\alpha\Xi, c\}$, où n est un entier positif ou négatif et α une constante. Ainsi, on déduit de la solution précédente le type suivant

$$\{\alpha[B(z)]^n, a^n\},$$

qui contient une double infinité de solutions de l'équation (S). Celles pour lesquelles n est positif sont holomorphes dans tout le cercle C_x;

si n est négatif, elles sont méromorphes dans ce cercle, et notamment au point x. Dans tous les cas, n indique l'ordre du point x, soit comme zéro, soit comme pôle de la fonction.

13. La proposition réciproque suivante mettra en évidence l'importance de la fonction $B(z)$ dans cette question.

THÉORÈME IV. — *Toute solution de l'équation* (S) *qui est holomorphe ou méromorphe au point x ne diffère que par un facteur constant d'une puissance entière positive ou négative de la fonction* $B(z)$.

Il suffit de démontrer le cas de l'holomorphisme. Remarquons d'abord que de l'équation (S) on déduit

$$\Xi[\varphi_i(z)] = c^i \Xi(z),$$

et, pour $z = x$, il en résulte

$$(1 - c^i)\Xi(x) = 0.$$

Il est impossible que, pour toute valeur entière et positive de i, on ait $1 - c^i = 0$, car il faudrait que c fût égal à 1; il en résulterait

$$\Xi[\varphi_i(z)] = \Xi(z),$$

et, pour i infini,

$$\Xi(z) = \Xi(x) = \text{const.}$$

Il faut donc que $\Xi(x)$ soit nul, c'est-à-dire que toute solution de l'équation (S) qui est holomorphe au point x s'y annule. J'ajoute que cette fonction est déterminée si l'on se donne l'ordre n de son zéro x. Soit, en effet,

$$\Xi(z) = (z - x)^n \Phi(z),$$

où $\Phi(z)$ est holomorphe et non nul au point x; on aura

$$\Xi[\varphi(z)] = [\varphi(z) - x]^n \Phi[\varphi(z)] = c\,\Phi(z).(z - x)^n,$$

d'où

$$\left[\frac{\varphi(z) - x}{z - x}\right]^n \Phi[\varphi(z)] = c\,\Phi(z);$$

en faisant tendre z vers x, on trouve

$$c = [\varphi'(x)]^n = a^n;$$

en remplaçant alors c par sa valeur, il vient

$$[\varphi(z)-x]^n\Phi[\varphi(z)]=a^n\Xi(z);$$

on en déduit

$$[\varphi_i(z)-x]^n\Phi[\varphi_i(z)]=a^{ni}\Xi(z)$$

ou encore

$$\left[\frac{\varphi_i(z)-x}{a_i}\right]^n\Phi[\varphi_i(z)]=\Xi(z).$$

Faisons croître i indéfiniment, nous trouvons à la limite

$$[\mathrm{B}(z)]^n\Phi(x)=\Xi(z),$$

ce qui démontre le théorème dans le cas de l'holomorphisme.

Le cas du méromorphisme se traite de même, et l'on trouve le même résultat, sauf le signe de n.

L'équation (S) n'est autre que celle de M. Schrœder, et, d'après ce qui précède, les seules solutions de cette équation qui soient holomorphes ou méromorphes au point x sont contenues dans le type général

$$\{\alpha[\mathrm{B}(z)]^n,[\varphi'(x)]^n\};$$

d'ailleurs ces solutions sont toutes holomorphes ou méromorphes dans tout le cercle C_x, comme je l'ai déjà expliqué.

14. Considérons actuellement l'équation d'Abel

$$\Xi[\varphi(z)]=1+\Xi(z). \tag{A}$$

Si dans l'équation (S) on prend les logarithmes des deux membres et qu'on divise ensuite par $\log c$, on tombe sur l'équation (A).

Il en résulte que l'équation d'Abel ne peut avoir aucune solution holomorphe ni méromorphe en x, et qu'elle en admet une, et une seule, pour laquelle ce point est un point logarithmique, à savoir

$$\frac{\log\mathrm{B}(z)}{\log\varphi'(x)}.$$

15. Il reste à montrer maintenant comment on pourra trouver à l'aide de la fonction $\mathrm{B}(z)$ la solution générale de l'équation (S) et de l'équation (A) dans le cercle C_x.

Le quotient de deux solutions de l'équation (S), ou la différence de deux solutions de l'équation (A), est une solution de l'équation

$$\Xi[\varphi(z)] = \Xi(z); \tag{P}$$

et réciproquement, si l'on représente par $X(z)$ l'intégrale générale de l'équation (P), les expressions

$$b(z) + X(z), \quad B(z) \times X(z)$$

représentent les intégrales générales des équations d'Abel et de M. Schrœder.

Tout revient donc à trouver $X(z)$. On peut toujours prendre $X(z)$ sous la forme $\Omega[b(z)]$, où Ω est une fonction qu'il faudra déterminer. On aura

$$X[\varphi(z)] = \Omega\{b[\varphi(z)]\} = \Omega[b(z)+1],$$

et, puisque $X(z)$ est l'intégrale générale de l'équation (P), il faudra avoir

$$\Omega[b(z)+1] = \Omega[b(z)],$$

c'est-à-dire que l'on devra prendre pour Ω une fonction périodique quelconque, dont la période sera l'unité.

Ce résultat coïncide entièrement avec celui obtenu par M. Korkine, quand il a démontré que l'intégrale générale de l'équation d'Abel pouvait se déduire d'une solution particulière de cette équation. La connaissance de la fonction $B(z)$, et par suite de $b(z)$, permet ainsi de donner explicitement les intégrales des équations de M. Schrœder et d'Abel.

V. — Exemples.

16. Je vais donner des exemples destinés à éclaircir les considérations précédentes.

Dans son Mémoire déjà cité, Abel a considéré le cas de $\varphi(z) = z^\mu$, sans spécifier la nature de la constante μ. C'est cet exemple que je vais traiter en premier lieu.

Les points racines de l'équation $z^\mu - z = 0$ peuvent seuls être des points limites à convergence régulière; on a $\varphi'(z) = \mu z^{\mu-1}$. Si μ est supérieur à 1, on trouve que $z = 0$ est seul un point limite, et encore,

pourvu que μ soit entier. J'exclue donc ce cas, et je supposerai que $\mu < 1$. Alors, sauf $z = 0$ que je rejette, tous les points racines sont des points limites, car, dans ce cas, $\varphi'(x) = \mu < 1$. Je distinguerai deux cas, suivant que μ sera commensurable ou non.

17. Soit d'abord $\mu = \frac{n}{m} < 1$; on obtient toutes les racines en faisant varier r de 0 à $(m - n - 1)$ dans l'expression

$$x = e^{2i\pi \frac{r}{m-n}}. \tag{1}$$

Posons $z = \rho e^{i\theta}$ avec $0 < \theta < 2\pi$; les m valeurs de la fonction z^μ sont comprises dans la formule générale

$$\rho^\mu e^{i\left(\theta\mu + 2\pi \frac{s}{m}\right)}, \tag{2}$$

où s doit varier de 0 à $m - 1$. Remarquons que chaque branche est caractérisée par une valeur de s à l'intérieur de tout contour simple ne renfermant pas l'origine. Une de ces branches prend en x la valeur x : c'est celle-là que nous considérerons et que nous appellerons $\varphi(z)$.

On trouve que, si le point x est celui qui est donné par la formule (1), il faut prendre $s = r$; en conséquence,

$$\varphi(z) = \rho^\mu e^{i\left(\theta\mu + 2\pi \frac{r}{m}\right)}.$$

Cette fonction est holomorphe à l'intérieur du cercle C, de rayon 1, qui a x pour centre. D'ailleurs, comme on vérifie que $\theta\mu + 2\pi \frac{r}{m}$ est toujours compris entre 0 et 2π, en posant $\varphi(z) = z_1 = \rho_1 e^{i\theta_1}$ avec $0 < \theta_1 < 2\pi$, on aura

$$\rho_1 = \rho^\mu, \quad \theta_1 = \theta\mu + 2\pi \frac{r}{m},$$

d'où

$$\varphi_p(z) = z_p = \rho_p e^{i\theta_p}, \quad \rho_p = \rho^{\mu^p}, \quad \theta_p = \theta\mu^p + \frac{2\pi r}{m-n}(1 - \mu^p);$$

et pour p infini, on trouve $\rho_\infty = 1$, $\theta_\infty = \frac{2\pi r}{m-n}$, c'est-à-dire $z_\infty = x$.

Cherchons maintenant $B(z)$, c'est-à-dire la limite de $\frac{\varphi_p(z) - x}{\mu^p}$.

Appelons ρ' le logarithme arithmétique de ρ, et posons

$$\rho' + i\left(\theta - \frac{2\pi r}{m-n}\right) = \sigma,$$

nous aurons

$$\frac{\varphi_p(z) - x}{\mu^p} = \frac{x}{\mu^p}(e^{\sigma.\mu^p} - 1) = \frac{x}{\mu^p}\left(\sigma\mu^p + \frac{\sigma^2\mu^{2p}}{1.2} + \dots\right)$$

et, pour p infini, μ^p tendant vers zéro,

$$B(z) = x\sigma.$$

A l'intérieur du cercle C, toutes les branches du logarithme de $\frac{z}{x}$ sont holomorphes; appelons $\log\frac{z}{x}$ celle de ces branches qui s'annule en x, nous aurons

$$\log\frac{z}{x} = \rho' + i\left(\theta - \frac{2\pi r}{m-n}\right) = \sigma;$$

donc

$$B(z) = x\log\frac{z}{x}.$$

On a d'ailleurs

$$B(z_1) = x\left[\rho'_1 + i\left(\theta_1 - \frac{2\pi r}{m-n}\right)\right] = \mu x\left[\rho' + i\left(\theta - \frac{2\pi r}{m-n}\right)\right] = \mu B(z),$$

c'est-à-dire

$$B[\varphi(z)] = \varphi'(x)\,B(z).$$

On remarquera la nécessité d'introduire x en dénominateur dans le signe logarithmique.

La solution $\log z$, trouvée par Abel, s'obtient en faisant $r = 0$, elle correspond au cas de $x = 1$, elle est holomorphe dans le cercle de rayon 1 qui a son centre au point 1; mais cette solution n'est pas la seule, et il y en a $(m - n - 1)$ autres ayant chacune leur cercle d'holomorphisme, et relatives chacune à un point limite et à une branche différente de z^μ.

18. Ces résultats se conservent dans le cas de μ incommensurable; on trouve même alors une infinité de points limites et de fonctions $B(z)$. Les points limites sont tous sur le cercle Γ, de rayon 1, qui a pour centre l'origine; on les obtient tous, en effet, en attribuant à k toutes les va-

leurs entières de $-\infty$ à $+\infty$ dans l'expression

$$x = e^{2i\pi\frac{k}{1-\mu}}; \tag{1}$$

on voit même que, si A est un point quelconque du cercle Γ, il existe une infinité de points racines dont la distance au point A est moindre qu'une quantité ε aussi petite qu'on voudra.

Toutes les déterminations de z^μ sont données par la formule

$$\rho^\mu e^{i(\theta\mu+2\pi h\mu)},$$

où h doit varier de $-\infty$ à $+\infty$ par valeurs entières.

Si z reste compris à l'intérieur d'un contour simple ne contenant pas l'origine, chaque branche de z^μ est holomorphe et se trouve caractérisée par une valeur de h. Quelle est la branche qui, au point x, prend la valeur x?

Appelons g la partie entière de $\frac{k}{1-\mu}$ et ν la partie fractionnaire; l'argument de x compris entre o et 2π est $2\pi\nu$, en sorte qu'il faudra avoir, λ étant un entier convenable,

$$2\pi\nu.\mu + 2\pi h\mu = 2\pi\nu + 2\lambda\pi$$

ou

$$\nu\mu + h\mu = \nu + \lambda$$

ou, en remplaçant ν par $\frac{k}{1-\mu} - g$,

$$k + \lambda - g + g\mu = h\mu.$$

Comme μ est incommensurable, il faut avoir $h = g$, $k + \lambda - g = 0$; on aura donc

$$\varphi(z) = \rho^\mu e^{i(\theta\mu+2g\mu)}.$$

Soient g' la partie entière de $g\mu$ et ν' la partie fractionnaire; on peut écrire

$$\varphi(z) = \rho^\mu e^{i(\theta\mu+2\pi\nu')}.$$

Si $\mu + \nu' \leq 1$, alors $0 < \theta\mu + 2\pi\nu' < 2\pi$, et θ_1 étant l'argument de $\varphi(z)$ compris entre o et 2π, on peut écrire

$$\varphi(z) = \rho_1 e^{i\theta_1}, \quad \rho_1 = \rho^\mu, \quad \theta_1 = \theta\mu + 2\pi\nu';$$

d'où

$$\varphi_p(z) = \rho_p e^{i\theta_p}, \quad \rho_p = \rho\mu^p, \quad \theta_p = \theta\mu^p + \frac{2\pi\nu'}{1-\mu}(1-\mu^p)$$

et, pour p infini,

$$\lim \varphi_p(z) = e^{i\frac{2\pi\nu'}{1-\mu}} = x,$$

et le reste comme plus haut.

Tout dépend donc de la somme $\mu + \nu'$; or nous avons

$$g'\mu = g' + \nu', \quad \frac{k}{1-\mu} = g + \nu;$$

donc

$$g' + \nu' = \left(\frac{k}{1-\mu} - \nu\right)\mu = \frac{\mu k}{1-\mu} - \mu\nu = -k + \frac{k}{1-\mu} - \mu\nu = g - k + \nu(1-\mu),$$

c'est-à-dire que

$$g' = g - k, \quad \nu' = \nu(1-\mu);$$

donc

$$\mu + \nu' = \mu + \nu - \mu\nu = 1 - (1-\mu)(1-\nu) < 1.$$

Ainsi tout point racine est limite, même dans le cas de μ incommensurable. Il est même remarquable que tous ces points limites en nombre infini soient tous sur le cercle Γ de rayon 1, ainsi que je l'ai déjà expliqué.

19. Dans tous les cas, que μ soit commensurable ou non, en désignant par x un point limite, la fonction $B(z)$ a pour expression $x \log\frac{z}{x}$ ou $\log\frac{z}{x}$ à un facteur constant près. Cette fonction est holomorphe dans le cercle de rayon 1 et de centre x, et c'est une solution de l'équation fonctionnelle

$$\Xi(z^\mu) = \mu\,\Xi(z).$$

On en déduit pour $b(z)$, à une constante additive près,

$$\frac{\log\log\frac{z}{x}}{\log\mu},$$

d'où, pour l'expression générale de la solution de l'équation fonctionnelle,

$$\Omega\left(\frac{\log\log\frac{z}{x}}{\log\mu}\right)\times\log\frac{z}{x},$$

où $\Omega(z)$ représente une fonction périodique dont la période est l'unité.

20. Le second exemple que je veux citer, c'est celui des substitutions linéaires. Un des points doubles est limite pour la substitution $|z, \varphi(z)|$, l'autre pour la substitution inverse.

Si l'on ne savait que toute substitution linéaire peut être définie par le symbole $|z, z_1|$, où l'on a

$$\frac{z_1-x}{z_1-x'}=\mathrm{K}\frac{z-x}{z-x'},$$

x et x' étant les points doubles, notre méthode générale nous l'apprendrait. On trouve, en effet, que $\mathrm{B}(z)$ est ici égal à $\frac{z-x}{z-x'}$ à un facteur constant près, et, comme $\varphi'(x)=\mathrm{K}$, l'équation précédente exprime justement la propriété

$$\mathrm{B}[\varphi(z)]=\varphi'(x)\,\mathrm{B}(z);$$

mais ce qu'il est permis d'ajouter, c'est que les solutions de l'équation fonctionnelle

$$\Xi[\varphi(z)]=c\,\Xi(z),$$

qui sont holomorphes ou méromorphes en x et x', ne diffèrent que par un facteur constant d'une puissance entière de $\frac{z-x}{z-x'}$; encore faut-il que c soit une puissance entière de K. Pour toute autre valeur de c, les solutions admettent nécessairement en x et x' des singularités essentielles. Tel est le cas, par exemple, de $c=1$; on retombe alors sur des considérations d'origine récente, mais qui sont bien connues.

VI. — Extension des propositions précédentes.

21. Les propriétés de la fonction $\mathrm{B}(z)$ sont susceptibles d'extension au cas d'équations fonctionnelles plus générales que les équations (S) et (A).

Le premier théorème nous apprend que la série

$$\mathcal{F}(z) = -\sum_{0}^{\infty} f[\varphi_i(z)]$$

définit une fonction holomorphe dans tout le cercle C_x, pourvu que $f(z)$ soit aussi holomorphe dans ce cercle et s'annule au point x. Or la fonction $\mathcal{F}(z)$ ainsi définie jouit évidemment de la propriété

$$\mathcal{F}[\varphi(z)] = F(z) + f(z);$$

c'est donc une solution de l'équation fonctionnelle

$$\Xi[\varphi(z)] = \Xi(z) + f(z). \tag{N}$$

La différence de deux solutions de cette équation étant une solution de l'équation

$$\Xi[\varphi(z)] = \Xi(z), \tag{P}$$

qui n'admet, dans le cercle C_x, aucune solution holomorphe ni méromorphe; on voit que l'équation (N), où $f(z)$ est donné, n'admet pas d'autre solution que $\mathcal{F}(z)$ holomorphe dans le cercle C_x; aucune solution n'est méromorphe dans ce cercle.

Enfin la connaissance de la fonction $b(z)$ nous donne l'expression de l'intégrale générale de l'équation (N), à savoir

$$\mathcal{F}(z) + \Omega[b(z)],$$

où $\Omega(z)$ est une fonction périodique dont la période est l'unité.

22. Prenons maintenant la fonction $g(z)$ holomorphe dans tout le cercle C_x et égale à l'unité au point x; le produit

$$\mathcal{G}(z) = \prod_{0}^{\infty} g[\varphi_i(z)]$$

représente, d'après le théorème II, une fonction holomorphe dans tout le cercle C_x. On reconnaît d'ailleurs que cette fonction est une solution

de l'équation fonctionnelle

$$(N') \qquad \Xi[\varphi(z)] = \frac{1}{g(z)}\Xi(z).$$

Le rapport de deux solutions de l'équation (N') est une solution de l'équation (P) : de là les mêmes conséquences que précédemment.

L'équation (N') n'admet, dans le cercle C_x, aucune solution méromorphe, elle admet une seule solution holomorphe dans ce cercle, $\mathcal{G}(z)$, et l'expression de l'intégrale générale sera

$$\mathcal{G}(z)\Omega[b(z)],$$

où $\Omega(z)$ est une fonction périodique dont la période est l'unité.

23. Prenons, par exemple, $g(z) = \frac{\varphi'(z)}{a}$ avec $a = \varphi'(x)$. La fonction $\mathcal{G}(z) = \prod_0^\infty \frac{\varphi'[\varphi_i(z)]}{a}$, qui est holomorphe dans tout le cercle C_x, est la dérivée d'une fonction $\mathcal{B}(z)$ holomorphe dans ce même cercle; disposons de la constante pour que $\mathcal{B}(z)$ s'annule au point x.

La formule

$$\mathcal{G}[\varphi(z)] = \frac{a}{\varphi'(z)}\mathcal{G}(z)$$

nous donne

$$\mathcal{B}'[\varphi(z)]\varphi'(z) = a\mathcal{B}'(z),$$

c'est-à-dire

$$\mathcal{B}[\varphi(z)] = a\mathcal{B}(z).$$

En se reportant au théorème IV, il faut donc que $\mathcal{B}(z)$ ne diffère de $B(z)$ que par un facteur constant

$$\mathcal{B}(z) = CB(z)$$

ou, eu égard à l'expression de $B(z)$,

$$\mathcal{B}(z) = C\frac{\varphi_h(z) - x}{a^h}e^{\omega(z)};$$

on remarquera que, pour $z = x$, $\omega(z)$ est nul : donc la dérivée du second membre se réduit à C pour $z = x$.

Maintenant, comme $\mathcal{G}(x) = 1$, il en résulte que $C = 1$, et, par suite, on a

$$\mathcal{B}(z) = B(z),$$

d'où

$$\mathcal{G}(z) = B'(z);$$

d'où, enfin,

$$B'(z) = \prod_0^\infty \frac{\varphi'[\varphi_i(z)]}{a}.$$

Remarquons tout de suite que, si l'on envisage l'expression $\frac{\varphi_p(z) - x}{a}$, sa dérivée s'exprime par le produit

$$\prod_0^{p-1} \frac{\varphi'[\varphi_i(z)]}{a};$$

à la limite, $\frac{\varphi_p(z) - x}{a^p}$ a bien pour valeur $B(z)$, mais en résulte-t-il nécessairement que $B'(z)$ ait pour limite le produit $\prod_0^\infty \frac{\varphi'[\varphi_i(z)]}{a^p}$? C'est ce qu'on ne pouvait admettre *a priori*. Mais cela résulte des théorèmes généraux que j'ai démontrés, en sorte que le développement en produit de $B'(z)$, que l'on pouvait seulement pressentir, se trouve rigoureusement établi.

VII. — Des groupes circulaires limites.

24. Les points limites à convergence régulière ne sont pas les seuls points limites qu'il y ait lieu de considérer. J'en ai défini d'autres dans mon premier travail, et, à leur égard, je vais rappeler rapidement les résultats que j'ai obtenus, ainsi que je l'ai fait au début pour le cas de la convergence régulière.

Appelons E_k l'équation $z - \varphi_k(z) = 0$; supposons que x_0 soit une racine de l'équation E_k et qu'elle ne vérifie aucune équation $E_{k'}$, où l'on aurait $k' < k$. La quantité x_0 est dite alors appartenir à l'indice k. Les quantités $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}$, où l'on pose généralement $x_i = \varphi(x_{i-1})$,

appartiennent toutes à l'indice k, et elles sont permutées circulairement par la substitution $|z, \varphi(z)|$. Leur ensemble constitue un groupe circulaire de k racines.

25. Posons généralement

$$a_i = \varphi'(x_i) \quad \text{et} \quad a = a_0 a_1 a_2 \dots a_{k-1};$$

si la condition $\operatorname{mod} a < 1$ est vérifiée, le groupe est un groupe circulaire limite. Voici ce que je veux dire par là.

Tout point x_i du groupe est alors le centre d'un cercle C_i, à l'intérieur duquel : 1° $\varphi(z)$ est holomorphe; 2° le module du quotient $\frac{\varphi_k(z) - x}{z - x}$ reste inférieur à une quantité H_i comprise entre 0 et 1. Il en résulte que le point x_i est un point limite à convergence régulière pour la substitution $|z, \varphi_k(z)|$; le cercle C_i n'est autre que le cercle que j'ai appelé C_x dans les numéros précédents.

Maintenant, considérons une seconde série de cercles C'_i ainsi définis. Le cercle C'_i est concentrique et intérieur au cercle C_i; si l'on part d'un point z intérieur à C'_i, les points $\varphi(z)$, $\varphi_2(z)$, $\varphi_3(z)$, ..., $\varphi_{k-1}(z)$ sont tous intérieurs : le premier au cercle C_{i+1}, le second au cercle C_{i+2}, ..., le dernier au cercle C_{k-1}.

Si nous partons alors du point z intérieur à C'_i, les points $z_1, z_2, \dots, z_{k-1}$ sauteront d'un cercle C au cercle suivant, après quoi l'on reviendra avec z_k dans le cercle C'_i et à une distance de x_i moindre que la distance précédente de z à x_i. Les points $z_{k+1}, \dots, z_{k+k-1}$ effectueront les mêmes sauts que précédemment, seulement on remarquera que z_{k+j} sera plus près du point x_{i+j} que ne l'était le point z_j. En continuant indéfiniment les substitutions, on voit ce qui va arriver : les points z, z_k, z_{2k}, ... iront sans cesse en se rapprochant de x_i et auront ce point pour limite; les points z_1, z_{1+k}, z_{1+2k}, ... auront, au contraire, pour limite x_{i+1}, et généralement les points z_j, z_{j+k}, z_{j+2k}, ..., où $j < k$, auront pour limite le point x_{i+j}, où $i + j$ doit être réduit suivant le module k, et même iront sans cesse en se rapprochant de ce point à mesure que leur indice augmentera. Cela montre donc que la suite

converge périodiquement vers chacun des points du groupe circulaire limite.

J'ai démontré, dans mon premier Mémoire, que ce cas était le plus général où l'on eût une convergence périodique vers un point limite qui ne fût pas un point singulier essentiel de $\varphi(z)$. Rien ne s'oppose d'ailleurs à ce que l'infini et un pôle fassent partie d'un pareil groupe, car il se peut que l'infini soit un point limite à convergence régulière, pourvu que l'infini soit un pôle de $\varphi(z)$. Je n'ai pas traité le cas de l'infini dans mes recherches actuelles, mais on voit assez quelles modifications il faudrait apporter, sans que j'aie cru nécessaire d'y insister.

26. Je me propose de chercher ce que devient la fonction $B(z)$, qui a joué un rôle si important dans les numéros précédents, lorsqu'on se place dans l'hypothèse d'une convergence périodique.

VIII. — Les fonctions $\mathfrak{B}_i(z)$.

Le théorème III nous apprend que la limite du rapport

$$\frac{\varphi_{kp}(z)-x_i}{a^p}$$

est holomorphe dans tout le cercle C_i. J'appellerai $\mathfrak{B}_i(z)$ cette limite.

Le point x_i est un zéro simple de cette fonction, et, de plus, elle vérifie l'équation

$$\mathfrak{B}_i[\varphi_k(z)]=a\,\mathfrak{B}_i(z); \tag{1}$$

mais la fonction $\mathfrak{B}_i(z)$ n'étant plus définie hors du cercle C_i, on ne peut plus rien dire de $\mathfrak{B}_i[\varphi(z)]$ lorsque z est intérieur à ce cercle. Toutefois il existe entre deux fonctions $\mathfrak{B}_i$ consécutives une relation importante qui sert de clef à cette théorie.

Prenons le point z dans le cercle C_i'; le point $\varphi_j(z)$, où $j<k$, sera intérieur au cercle C_{i+j}, en sorte que la fonction $\mathfrak{B}_{i+j}[\varphi_j(z)]$ est holomorphe dans tout le cercle C_i'. On a d'ailleurs

$$\mathfrak{B}_{i+j}[\varphi_j(z)]=\lim\frac{\varphi_{kp}[\varphi_j(z)]-x_{i+j}}{a^p};$$

et, en formant le quotient

$$\frac{\dfrac{\varphi_{kp}[\varphi_j(z)]-x_{i+j}}{a^p}}{\dfrac{\varphi_{kp}(z)-x_i}{a^p}},$$

dont la limite est $\dfrac{\mathfrak{V}_{i+j}[\varphi_j(z)]}{\mathfrak{V}_i(z)}$, on voit que l'on a

$$\frac{\mathfrak{V}_{i+j}[\varphi_j(z)]}{\mathfrak{V}_i(z)}=\lim\frac{\varphi_{kp}[\varphi_j(z)]-x_{i+j}}{\varphi_{kp}(z)-x_i};$$

or nous avons

$$\frac{\varphi_{kp}[\varphi_j(z)]-x_{i+j}}{\varphi_{kp}(z)-x_i}=\frac{\varphi_j(z_{kp})-\varphi_j(x_i)}{z_{kp}-x_i}$$

et, pour p infini, c'est-à-dire pour $z_{kp}=x_i$, nous trouvons la limite

$$\varphi'(x_i)\,\varphi'(x_{i+1})\ldots\varphi'(x_{i+j-1}),$$

c'est-à-dire que

$$\mathfrak{V}_{i+j}[\varphi_j(z)]=a_i a_{i+1}\ldots a_{i+j-1}\mathfrak{V}_i(z). \tag{2}$$

Cette équation est légitime pour tous les points z intérieurs au cercle C_i' et quel que soit j, pourvu que $j<k$. En particulier, pour $j=1$,

$$\mathfrak{V}_{i+1}[\varphi(z)]=a_i.\mathfrak{V}_i(z). \tag{3}$$

Si l'on faisait, au contraire $j=k$, on retrouverait l'équation (1).

27. Appelons donc $f(z)$ une fonction qui coïncide avec $\mathfrak{V}_0(z)$ dans tout le cercle C_0, avec $\mathfrak{V}_1(z)$ dans le cercle C_1, ..., avec $\mathfrak{V}_{k-1}(z)$ dans le cercle C_{k-1}. Cette fonction jouira de la propriété que le quotient $\dfrac{f[\varphi(z)]}{f(z)}$ restera constant dans le cercle C_i', seulement cette valeur constante sera a_0 pour le cercle C_0', a_1 pour le cercle C_1', ..., c'est-à-dire qu'elle changera d'un cercle à l'autre.

La fonction $f(z)$ ne sera pas, à proprement parler, une solution de l'équation

$$\Xi[\varphi(z)]=c\Xi(z). \tag{8}$$

Proposons-nous alors le problème préliminaire suivant :

Trouver l'expression générale d'une fonction $\Xi(z)$ *holomorphe ou méromorphe en tous les points du groupe et qui, dans chaque cercle* C_i', *jouisse de la propriété que le quotient* $\frac{\Xi[\varphi(z)]}{\Xi(z)}$ *soit constant, cette valeur constante pouvant d'ailleurs varier d'un cercle à l'autre.*

Prenons un cercle C_i'' concentrique et intérieur à C_i', tel que, si l'on part d'un point z intérieur à C_i'', les points $z_1, z_2, \ldots, z_{k-1}$ soient respectivement intérieurs aux cercles $C_{i+1}', C_{i+2}', \ldots, C_{i+k+1}'$; on aura

$$\frac{\Xi[\varphi(z)]}{\Xi(z)} = \lambda_i, \quad \frac{\Xi[\varphi_2(z)]}{\Xi[\varphi(z)]} = \lambda_{i+1}, \quad \ldots, \quad \frac{\Xi[\varphi_k(z)]}{\Xi[\varphi_{k+1}(z)]} = \lambda_{i+k-1},$$

où les λ sont les diverses valeurs de ces quotients constants dans chacun des cercles C_i'.

On en tire

$$\frac{\Xi[\varphi_k(z)]}{\Xi(z)} = \lambda_0\lambda_1\ldots\lambda_{k-1};$$

en recommençant le tour, on trouverait

$$\frac{\Xi[\varphi_{2k}(z)]}{\Xi[\varphi(z)]} = \lambda_0\lambda_1\ldots\lambda_{k-1},$$

d'où

$$\Xi[\varphi_{2k}(z)] = (\lambda_0\lambda_1\ldots\lambda_{k-1})^2\,\Xi(z)$$

et généralement

$$\Xi[\varphi_{kp}(z)] = (\lambda_0\lambda_1\ldots\lambda_{k-1})^p\,\Xi(z).$$

Donc toute fonction $\Xi(z)$ qui jouit de la propriété que $\frac{\Xi[\varphi(z)]}{\Xi(z)}$ soit constant dans chaque cercle C_i' est une solution de l'équation

$$\Xi[\varphi_k(z)] = c\,\Xi(z).$$

Les seules solutions holomorphes ou méromorphes en x_i sont comprises dans le symbole

$$\{\alpha_i[\mathfrak{B}_i(z)]^n, a^n\},$$

où α_i est une constante arbitraire et n un entier positif ou négatif.

En conséquence, la fonction cherchée $\Xi(z)$ doit coïncider

$$\begin{aligned}&\text{Avec } \alpha_0[\mathfrak{V}_0(z)]^{n_0} \text{ dans le cercle } C'_0,\\ &\text{Avec } \alpha_1[\mathfrak{V}_1(z)]^{n_1} \text{ dans le cercle } C'_1,\\ &\text{Avec } \alpha_2[\mathfrak{V}_2(z)]^{n_2} \text{ dans le cercle } C'_2,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

Maintenant, on remarquera qu'il faudra avoir

$$\lambda_0\lambda_1\ldots\lambda_{k-1} = a^{n_0} = a^{n_1} = a^{n_2}\ldots,$$

ce qui exigera que

$$n_0 = n_1 = n_2 = \ldots = n;$$

en sorte que :

Tous les points du groupe sont des zéros ou des pôles du même ordre de la fonction $\Xi(z)$.

Il est d'ailleurs facile d'avoir l'expression des constantes λ en fonction des constantes α : remarquons, en effet, que

$$\lambda_i = \frac{\alpha_{i+1}\{\mathfrak{V}_{i+1}[\varphi(z)]\}^n}{\alpha_i[\mathfrak{V}_i(z)]^n},$$

et, comme $\mathfrak{V}_{i+1}[\varphi(z)] = a_i\,\mathfrak{V}_i(z)$,

$$\lambda_i = \frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_i}\,a_i^n.$$

IX. — Les fonctions $B(z)$.

28. Nous pouvons maintenant résoudre le problème qui consiste à chercher les solutions les plus générales de l'équation (S) qui sont holomorphes ou méromorphes aux points du groupe; il suffit, en effet, de déterminer les constantes α par la condition que toutes les constantes λ_i deviennent égales. On aura, en appelant λ leur valeur commune,

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_0}\,a_0^n = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\,a_1^n = \ldots = \frac{\alpha_{k-1}}{\alpha_{k-2}}\,a_{k-2}^n = \frac{\alpha_0}{\alpha_{k-1}}\,a_{k-1}^n = \lambda;$$

d'où

$$\alpha_1 = \alpha_0\frac{\lambda}{a_0^n},\quad \alpha_2 = \alpha_0\frac{\lambda^2}{a_0^n a_1^n},\quad \alpha_3 = \alpha_0\frac{\lambda^3}{a_0^n a_1^n a_2^n},\quad \ldots,\quad \alpha_{k-1} = \alpha_0\frac{\lambda^{k-1}}{a_0^n a_1^n\ldots a_{k-2}^n},$$

et, en outre,

$$\lambda^k = a_0^n a_1^n \dots a_{k-1}^n = a^n.$$

La quantité α_0 figure en facteur commun, et la faire égale à 1 revient à multiplier $\Xi(z)$ par une constante. Supposons, en outre, $n = 1$; il est clair que, pour repasser au cas de n quelconque, il suffira d'élever les constantes α et les fonctions $\mathfrak{B}_i(z)$ à la puissance n, c'est-à-dire de prendre la puissance $n^{\text{ième}}$ de $\Xi(z)$.

Prenons donc pour λ une racine de l'équation binôme

$$\lambda^k = a,$$

nous appellerons $B(z)$ une fonction de z qui coïncidera

$$\text{Avec } \frac{\lambda}{a_0}\,\mathfrak{B}_0(z) \text{ dans le cercle } C'_0,$$

$$\text{Avec } \frac{\lambda^2}{a_0 a_1}\,\mathfrak{B}_1(z) \text{ dans le cercle } C'_1,$$

$$\text{Avec } \frac{\lambda^i}{a_0 a_1 \dots a_{i-1}}\,\mathfrak{B}_i(z) \text{ dans le cercle } C'_i,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$\text{Avec } \frac{\lambda^{k-1}}{a_0 a_1 \dots a_{k-2}}\,\mathfrak{B}_{k-1}(z) \text{ dans le cercle } C'_{k-1}.$$

Cette fonction, holomorphe en chaque point du groupe, satisfera à l'équation

$$B[\varphi(z)] = \lambda B(z);$$

ce sera donc une solution de l'équation

$$\Xi[\varphi(z)] = c\,\Xi(z). \tag{S}$$

Puisque λ admet k déterminations, on aura k systèmes de constantes α, et par suite k fonctions $B(z)$; mais il faut remarquer que dans l'un quelconque des cercles C'_i les rapports de ces k fonctions sont constants.

Pour avoir maintenant le type général des solutions de l'équation (S) qui sont holomorphes ou méromorphes en chaque point du groupe, il suffit de faire

$$\Xi(z) = \alpha_0 [B(z)]^n, \quad c = \lambda^n,$$

où α_0 est une constante et n un entier positif ou négatif.

29. L'équation d'Abel admet encore la solution

$$b(z) = \frac{\log B(z)}{\log \lambda},$$

et tous les résultats précédents subsistent. L'essentiel était d'obtenir la fonction $B(z)$.

X. — Exemple.

30. Je donnerai encore un exemple qui ne sera que la continuation de celui que j'ai développé au § V. Pour ne pas trop m'étendre, je me restreindrai au cas de μ commensurable. On a

$$\varphi(z) = z^{\mu} \quad \text{et} \quad \varphi_p(z) = z^{\mu^p};$$

les racines appartenant à l'indice p sont données par la formule générale

$$x = e^{2i\pi \frac{k}{m^p - n^p}},$$

où k doit prendre une valeur entière comprise entre o et $m^p - n^p$, différente de $\frac{m^p - n^p}{m^{p'} - n^{p'}}$ (p' désigne l'unité ou l'un quelconque des diviseurs de p), sans quoi l'on aurait aussi des racines appartenant à des indices inférieurs à p.

Un raisonnement que j'ai présenté ailleurs (¹) conduit à l'expression suivante pour le nombre des points appartenant à l'indice p

$$\mathfrak{N}_p = \left(m^p - \Sigma m^{\frac{p}{a}} + \Sigma m^{\frac{p}{ab}} - \dots\right) - \left(n^p - \Sigma n^{\frac{p}{a}} + \Sigma n^{\frac{p}{ab}} - \dots\right),$$

où a, b, c, ... sont les diviseurs premiers de p.

Soit $x_0, x_1, \dots, x_{p-1}$ un groupe de p racines; on a

$$\varphi'(x_1)\,\varphi'(x_2)\,\varphi'(x_3)\dots\varphi'(x_{p-1}) = \mu^p < 1;$$

(¹) Sur une généralisation du théorème de Fermat, et ses rapports avec la théorie générale des substitutions uniformes (*Bull. des Sc. math.*, 1884). Je profite de cette occasion pour réparer l'omission que j'ai faite, en oubliant d'associer le nom de M. Kantor à ceux de MM. Lucas et Picquet dans mes citations; j'aurais pu citer encore M. Pellet, qui a, lui aussi, présenté une Note aux *Comptes rendus* sur cette généralisation.

il suffit donc que l'on puisse définir une branche de la fonction z^μ, holomorphe en $x_0, x_1, \ldots, x_{p-1}$, qui prenne en x_0 la valeur x_1, en x_1 la valeur $x_2, \ldots$, en x_{p-1} la valeur x_0.

31. Étudions le cas du groupe binaire, $p = 2$, et soit une branche de la fonction z^μ

$$\varphi(z) = \rho^\mu e^{i\left(\theta\mu + 2\pi\frac{r}{m}\right)},$$

qui est caractérisée par le nombre r, pris entre o et m, quand on fait varier z dans un contour simple ne comprenant pas l'origine. Sous quelles conditions, et pour quelle valeur de r aurons-nous

$$x_1 = \varphi(x_0), \quad x_0 = \varphi(x_1),$$

où x_0 et x_1 ont pour expressions

$$x_0 = e^{2i\pi\frac{\alpha_0}{m^2-n^2}}, \quad x_1 = e^{2i\pi\frac{\alpha_1}{m^2-n^2}},$$

α_0 et α_1 étant des entiers non divisibles par $m+n$, compris entre o et $m^2 - n^2$? L'équation $x_1 = \varphi(x_0)$ nous donne

$$\frac{\alpha_0 n}{(m^2-n^2)m} + \frac{r}{m} = \lambda_0 + \frac{\alpha_1}{m^2-n^2},$$

où λ_0 est égal à 1 ou à zéro; on en conclut que $\alpha_0 - rn$ doit être divisible par m, et l'on peut poser

$$\alpha_0 - rn = \beta_0 m, \tag{1}$$

l'équation précédente devient alors

$$\beta_0 + rm = \alpha_1 + \lambda_0(m^2 - n^2). \tag{2}$$

En exprimant au contraire que $\varphi(x_1) = x_0$, on trouve encore

$$\alpha_1 - rn = \beta_1 m, \tag{3}$$

$$\beta_1 + rm = \alpha_0 + \lambda_1(m^2 - n^2), \tag{4}$$

où β_1 est un entier et λ_1 zéro ou l'unité.

On tire de là

$$\beta_0 = r - (n\lambda_0 + m\lambda_1),$$
$$\beta_1 = r - (m\lambda_0 + n\lambda_1),$$
$$\alpha_1 - \alpha_0 = m(m-n)(\lambda_1 - \lambda_0);$$

et comme on ne saurait avoir $\alpha_1 = \alpha_0$, car il en résulterait $x_1 = x_0$, il faut que des deux quantités λ_1 et λ_0 l'une soit zéro et l'autre l'unité : faisons en conséquence

$$\lambda_0 = 0, \quad \lambda_1 = 1,$$

on trouve

$$\beta_0 = r - m, \quad \beta_1 = r - n,$$
$$\alpha_0 = r(m+n) - m^2, \quad \alpha_1 = r(m+n) - mn,$$
$$\alpha_1 - \alpha_0 = m(m-n).$$

Introduisons le reste et le quotient de la division de mn par $m+n$, en sorte que

$$mn = (m+n)h + \varepsilon, \quad 0 < \varepsilon < m+n;$$

on peut écrire

$$\alpha_0 = (m+n)(r - m + h) + \varepsilon,$$
$$\alpha_1 = (m+n)(r-h) - \varepsilon.$$

Comme $\alpha_1 > \alpha_0$, il suffit que α_0 soit positif et α_1 inférieur à $m^2 - n^2$. On trouve ainsi que α_0 et α_1 doivent être congrus l'un à mn et l'autre à $-mn$, suivant le module $(m+n)$, et que l'on doit avoir

$$\alpha_0 = (m+n)s_0 + \varepsilon, \tag{5}$$
$$\alpha_1 = (m+n)s_1 - \varepsilon \tag{6}$$

avec

$$s_1 - s_0 = m - 2h > 0 : \tag{7}$$

s_0 peut prendre l'une quelconque des valeurs 0, 1, 2, 3, ..., $2(h-n)$, et r sera donné par la formule

$$r = s + m - h; \tag{8}$$

on va constater que les formules (5), (6), (7) et (8) résolvent complètement le problème.

32. Menons par le point $z = 0$ deux demi-droites, l'une OX origine des arguments, l'autre OV correspondant à l'argument $2\frac{m-r}{n}\pi$ qui est inférieur à 2π; ces deux demi-droites divisent le plan en deux régions. Dans la région R_0 on aura

$$\text{argum. } z < 2\pi\frac{m-r}{n},$$

et dans l'autre région R_1

$$\text{argum. } z > 2\pi\frac{m-r}{n};$$

l'argument de z que l'on considère est celui qui est compris entre 0 et 2π.

On remarquera que le point x_0 est dans la région R_0 et le point x_1 dans la région R_1.

Considérons l'expression

$$\varphi(z) = \rho^{\mu} e^{i\left(0\mu + 2\pi\frac{r}{m}\right)};$$

l'argument $0\mu + 2\pi\frac{r}{m}$ ne peut être inférieur à 4π, mais peut être supérieur à 2π; il est inférieur à 2π si z est pris dans la région R_0, il lui est supérieur si z est pris dans la région R_1.

Appelons donc θ_1 l'argument de $\varphi(z)$ qui est compris entre 0 et 2π, on aura

$$\text{Dans la région } R_0 \ldots\ldots \quad \theta_1 = 0\mu + 2\pi\frac{r}{m},$$

$$\text{Dans la région } R_1 \ldots\ldots \quad \theta_1 = 0\mu - 2\pi\frac{m-r}{m}.$$

Mais je vais plus loin. Supposons que l'on parte d'un point z de la région R_0, je dis que $\varphi(z)$ est un point de la région R_1. Il suffit de montrer que

$$0\mu + 2\pi\frac{r}{m} > 2\pi\frac{m-r}{n};$$

or, de l'inégalité

$$(m-h)(m+n) = m^2 + \varepsilon > m^2,$$

on déduit, puisque $r > m - h$ en vertu de l'équation (8) et de $s_0 > 0$,

$$r(m+n) > m^2$$

ou

$$\frac{r}{m} > \frac{m-r}{n},$$

d'où

$$0\mu + 2\pi\frac{r}{m} > 2\pi\frac{m-r}{n}.$$

Partons, au contraire, d'un point de la région R_1; je dis que l'on tombe sur un point de la région R_0 après une substitution. Il suffit de prouver que

$$0\mu - 2\pi\frac{m-r}{m} < 2\pi\frac{m-r}{n}$$

ou que

$$0 < 2\pi\frac{m}{n}\left(\frac{m-r}{n} + \frac{m-r}{n}\right);$$

or le second membre est supérieur à 2π; l'inégalité est donc toujours vérifiée, puisque l'on prend

$$0 < 0 < 2\pi.$$

Si le point z est intérieur à la région R_0, le point $\varphi_{2q}(z)$ sera aussi intérieur à cette région, et l'on aura, en posant $\varphi_{2q}(z) = \rho_{2q}e^{i\theta_{2q}}$, $0 < \theta_{2q} < 2\pi$,

$$\rho_{2q} = \rho^{\mu^{2q}}, \quad \theta_{2q} = 0\mu^{2q} + 2\pi\frac{\alpha_0}{m^2-n^2}(1-\mu^{2q});$$

en partant, au contraire, d'un point z intérieur à R_1, z_{2q} sera aussi intérieur à R_1, et l'on trouve

$$\rho_{2q} = \rho^{\mu^{2q}}, \quad \theta_{2q} = 0\mu^{2q} + 2\pi\frac{\alpha_1}{m^2-n^2}(1-\mu^{2q}).$$

On a, dans un cas,

$$\lim\theta_{2q} = \frac{2\pi\alpha_0}{m^2-n^2} \quad \text{ou} \quad \lim z_{2q} = x_0$$

et, dans l'autre,

$$\lim\theta_{2q} = \frac{2\pi\alpha_1}{m^2-n^2} \quad \text{ou} \quad \lim z_{2q} = x_1.$$

Mais si, pour fixer les idées, on part d'un point de R_0 et que l'on

forme les quantités $\varphi_1(z)$, $\varphi_2(z)$, ..., $\varphi_{2q}(z)$, $\varphi_{2q+1}(z)$, ..., on trouve

$$\varphi_{2q}(z) = \rho\mu^{2q} e^{i\left(\theta - \frac{2\pi\alpha_0}{m^2-n^2}\right)\mu^{2q} + 2\pi\frac{\alpha_0}{m^2-n^2}},$$

$$\varphi_{2q+1}(z) = \rho\mu^{2q+1} e^{i\left(\theta - \frac{2\pi\alpha_0}{m^2-n^2}\right)\mu^{2q} + 2\pi\frac{\alpha_1}{m^2-n^2}},$$

ce qui montre bien la convergence alternative vers x_0 et x_1 des termes de la suite

$$z,\ z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_{2q},\ z_{2q+1},\ \ldots,$$

selon la parité de leur indice.

32. La même méthode qui a donné $B(z)$, au n° 17, nous donne ici

$$\mathfrak{B}_0(z) = x_0 \log\frac{z}{x_0},$$

$$\mathfrak{B}_1(z) = x_1 \log\frac{z}{x_1},$$

et $\mathfrak{B}_0(z)$ et $\mathfrak{B}_1(z)$ sont holomorphes dans les régions R_0 et R_1 respectivement.

On vérifie, d'ailleurs, que dans la région R_0 on a

$$\mathfrak{B}_1[\varphi(z)] = \mu\frac{x_1}{x_0}\mathfrak{B}_0(z)$$

et dans la région R_1

$$\mathfrak{B}_0[\varphi(z)] = \mu\frac{x_0}{x_1}\mathfrak{B}_1(z).$$

Dans le cas actuel on trouve donc

$$a_0 = \mu\frac{x_1}{x_0}, \quad a_1 = \mu\frac{x_0}{x_1}, \quad a = a_0 a_1 = \mu^2;$$

λ est défini par l'équation $\lambda^2 - a = 0$, c'est-à-dire que $\lambda = \pm\mu$; prenons $\lambda = \mu$, on a

$$\alpha_1 = \frac{\alpha_0\lambda}{a_0} = \frac{\mu x_0}{\mu x_1} = \alpha_0\frac{x_0}{x_1}.$$

On peut faire $\alpha_0 = \frac{1}{x_0}$, et alors $\alpha_1 = \frac{1}{x_1}$, en sorte que la fonction

$B(z)$ doit coïncider avec $\log\frac{z}{x_0}$ dans la région R_0, et avec $\log\frac{z}{x_1}$ dans la région R_1.

XI. — Remarques finales.

34. Dans la théorie générale, nous ne sommes pas sorti du cercle C_x; ce dernier exemple nous montre cependant que, dans certains cas, il est possible d'en sortir et de lui substituer des régions plus étendues. Supposons qu'un point z du plan conduise au point x; il devra conduire en un point z_k intérieur au cercle C_x après un nombre fini k de substitutions. Si le point z_k n'est pas, ainsi que je le suppose, un point essentiel pour la fonction $\varphi_k(z)$, il existera autour de z une région continue de points qui conduiront tous à l'intérieur du cercle C_x après k substitutions; si l'on remplace alors dans tous les théorèmes précédents la hauteur maximum h des points du cercle C_x par rapport à un cercle concentrique Γ, par cette hauteur augmentée de k, les théorèmes deviennent applicables à la région qui entoure le point z.

Plus généralement, soit U une région du plan, il suffit que tous ses points conduisent à l'intérieur du cercle C_x pour tomber sur le point x après un nombre infini de substitutions.

Si l'on appelle k la hauteur maximum des points de la région U par rapport à C_x, il suffira d'augmenter h de k pour que tous les théorèmes soient applicables à la région U.

Si l'on envisage la totalité des points du plan qui conduisent de la sorte à l'intérieur du cercle C_x et, par suite, au point x, on pourrait étendre à la région qu'ils forment les théorèmes généraux. Mais on ne sait rien de général sur la manière dont cette région est limitée, et l'on ne peut pas affirmer *a priori* que le mode de délimitation n'est pas de nature à restreindre cette extension.

L'importance de la division du plan en régions d'après le point limite auquel conduisent ses points se trouve ainsi une fois de plus mise en évidence. Mais on concevra quelle difficulté s'attache au problème, en songeant qu'il y a généralement une infinité de groupes circulaires limites, pour si grand que soit l'indice auquel ce groupe appartient.

M. Cayley a mis le premier en avant ce problème dans le cas de la règle de Newton; mais, même dans le cas d'un simple polynôme entier,

le nombre des groupes limites peut être infini, et, si le problème a pu être résolu dans le cas d'une équation du second degré, cela tient à ce qu'aucun des points racines d'indice supérieur n'est limite dans ce cas, et qu'ils sont tous sur la droite, lieu des points équidistants des points racines, droite qui, on le sait, divise le plan en deux régions telles, que tout point de l'une d'elles conduit au point limite qu'elle contient.

FIN DU TOME PREMIER DE LA IIIe SERIE.