ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

A. LINDSTEDT

Sur la détermination des distances mutuelles dans le problème des trois corps

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 1 (1884), p. 85-102
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1884_3_1__85_0>

SUR LA

DÉTERMINATION DES DISTANCES MUTUELLES

DANS LE

PROBLÈME DES TROIS CORPS,

PAR M. AND. LINDSTEDT,

PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE DORPAT.

Dans un Mémoire récemment publié par l'Académie impériale de Saint-Pétersbourg et intitulé : *Beitrag zur Integration der Differential-gleichungen der Störungstheorie,* 7[e] série, t. XXXI, n° 4, j'ai considéré une classe d'équations différentielles du second ordre qui jouent un rôle important dans les recherches sur la théorie des perturbations, et en particulier dans celles de M. Gyldén. Le type général de ces équations était le système simultané des n équations

$$(1)\qquad \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \sum^{k} \Psi_k^{(i)} \mathrm{P}_k^{(i)}(x_1 x_2 \ldots x_n) \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

où les $\mathrm{P}_k^{(i)}$ désignent des fonctions entières des n variables $x_i, \ldots, x_n$, et les $\Psi_k^{(i)}$ sont des séries trigonométriques d'un nombre certain d'angles croissant proportionnellement au temps t. Dans les cas où les intégrales peuvent être représentées sous forme périodique et par des séries toujours convergentes, on était parvenu au résultat suivant : les arguments des séries intégrales se composent des arguments qui se trouvaient déjà dans les fonctions $\Psi_k^{(i)}$ et d'autant d'arguments nouveaux, en général, que l'on a d'équations différentielles dans le système proposé (1). En outre, on a donné, dans le Mémoire mentionné, pour le cas indiqué, une méthode très simple, par laquelle on sera capable d'établir les intégrales elles-mêmes.

Comme il est déjà dit, on a obtenu ces résultats en supposant l'existence des intégrales et sans entrer dans la discussion des conditions de convergence. A l'exception du cas où le système (1) est *linéaire*, la question de convergence semble si difficile, dans l'état actuel de l'Analyse, et notre connaissance des intégrales si imparfaite, que les résultats obtenus ne doivent pas être sans intérêt.

Les équations différentielles du problème des trois corps étant, comme on le sait, d'une nature encore plus compliquée que le système (1), la question de la forme des intégrales, et en particulier celle du nombre des arguments, n'est point jusqu'ici résolue d'une manière décisive; je dois donc croire que l'essai suivant, où l'on donnera une méthode pour trouver la forme des intégrales et établir leurs expressions analytiques dans un cas très important, ne sera pas tout à fait superflu.

En conservant les notations usuelles, les équations différentielles des mouvements relatifs des masses m et m' autour de la masse M sont les suivantes :

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} + x\left(\dfrac{M+m}{r^3} + \dfrac{m'}{\Delta^3}\right) = m'x'\left(\dfrac{1}{\Delta^3} - \dfrac{1}{r'^3}\right), \\ \dfrac{d^2x'}{dt^2} + x'\left(\dfrac{M+m'}{r'^3} + \dfrac{m}{\Delta^3}\right) = mx\left(\dfrac{1}{\Delta^3} - \dfrac{1}{r^3}\right), \end{cases}$$

et ainsi de suite pour les coordonnées y, y' et z, z'; r, r' et Δ désignent ici les distances mutuelles de M à m, de M à m' et de m à m' respectivement.

On voit donc, par la forme des équations (2), que la détermination des coordonnées rectangulaires, les expressions de r, r', Δ étant trouvées sous la forme de séries purement trigonométriques, conduira à l'intégration d'un système simultané linéaire. Mais, le dernier problème devant être considéré comme relativement plus simple, le problème principal sera la détermination des quantités r, r' et Δ comme fonctions du temps et nous nous en occuperons spécialement dans la présente Communication.

D'abord, on sait que l'on n'aura que neuf constantes d'intégration indépendantes dans les expressions analytiques des distances mutuelles, tandis que le problème complet en aura douze.

En effet, en supposant connues les expressions de r, r' et Δ sous la forme de séries trigonométriques, on doit les substituer dans les équations (2). On aura alors pour la détermination de x et x' un système linéaire simultané de la forme

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \Phi . x = \Psi' . x',$$

$$\frac{d^2x'}{dt^2} + \Phi' . x' = \Psi . x,$$

Φ, Φ', Ψ et Ψ' étant des séries trigonométriques. En désignant par Nt un argument quelconque de ces séries, on en conclut, comme il est montré dans le Mémoire mentionné, qu'un terme quelconque dans les expressions intégrales de x et de x' sera de la forme

$$a\mu_N \cos(n_0 + N)t + \alpha\mu'_N \sin(n_0 + N)t + \ldots$$
$$+ a'\nu_N \cos(n'_0 + N)t + \alpha'\nu'_N \sin(n'_0 + N)t,$$

où $n_0 t$ et $n'_0 t$ sont deux arguments, en général nouveaux, introduits par l'intégration, et a, α, a', α' désignent les quatre arbitraires. Pour y, y' et z, z' on aura des expressions semblables, que l'on déduira de celles de x, x', en remplaçant les a, α, a', α' par b, β, b', β' et par c, γ, c', γ' respectivement. Les coefficients μ_N, ... restent les mêmes pour une valeur donnée de N. Maintenant, en considérant les arbitraires a, b, c, a', ... comme les douze constantes d'intégration du problème complet, et si l'on forme de nouveau, à l'aide des expressions ainsi obtenues, les expressions pour r, r' et Δ par substitution dans les formules

$$(3) \qquad \begin{cases} r^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad r'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2, \\ \Delta^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2, \end{cases}$$

on verra qu'il n'y entrera que les fonctions suivantes de ces constantes :

$$\begin{aligned}
A &= a^2 + b^2 + c^2, & C &= a'^2 + b'^2 + c'^2, \\
B &= \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2, & D &= \alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2, \\
E &= a\alpha + b\beta + c\gamma, & H &= a'\alpha + b'\beta + c'\gamma, \\
F &= aa' + bb' + cc', & K &= \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma', \\
G &= a\alpha' + b\beta' + c\gamma', & L &= a'\alpha' + b'\beta' + c'\gamma'.
\end{aligned}$$

Mais, comme on a la relation

$$\begin{vmatrix} A & E & F & G \\ E & B & H & K \\ F & H & C & L \\ G & K & L & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c & 0 \\ \alpha & \beta & \gamma & 0 \\ a' & b' & c' & 0 \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & 0 \end{vmatrix}^2 = 0$$

entre ces fonctions, on n'aura réellement que neuf constantes indépendantes d'intégration dans les expressions des distances mutuelles.

En cherchant les équations différentielles qui détermineront les quantités demandées r, r' et Δ, nous serons obligés d'introduire une variable auxiliaire q, laquelle sera définie par l'équation

$$\tfrac{1}{2}q = x\frac{dx'}{dt} + y\frac{dy'}{dt} + z\frac{dz'}{dt} - x'\frac{dx}{dt} - y'\frac{dy}{dt} - z'\frac{dz}{dt};$$

d'où l'on tire par différentiation, et en substituant pour $\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \ldots$ leurs valeurs données par les équations fondamentales

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{dq}{dt} + \mathrm{M}\left(\frac{1}{r'^3} - \frac{1}{r^3}\right)(r^2 + r'^2 - \Delta^2) \\ &\quad + m\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{\Delta^3}\right)(r^2 + \Delta^2 - r'^2) \\ &\quad + m'\left(\frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{r'^3}\right)(r'^2 + \Delta^2 - r^2) = 0. \end{aligned}\right.$$

Nous obtiendrons encore trois équations différentielles en différentiant trois fois les relations (3) et en nous servant aussi des équations fondamentales (2) pour avoir les valeurs des quantités

$$\frac{d^2x}{dt^2}, \quad \frac{d^3x}{dt^3}, \quad \frac{d^2y}{dt^2}, \quad \ldots, \quad \frac{d^2x'}{dt^2}, \quad \ldots, \quad \frac{d^3z'}{dt^3}.$$

En introduisant pour plus de concision les notations suivantes :

$$\frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{r'^3} = \varphi, \qquad \frac{1}{r^3} - \frac{1}{\Delta^3} = \psi, \qquad \frac{1}{r'^3} - \frac{1}{r^3} = \theta,$$

$$\frac{1}{\Delta^3} + \frac{1}{r'^3} = \varphi', \qquad \frac{1}{r^3} + \frac{1}{\Delta^3} = \psi', \qquad \frac{1}{r'^3} + \frac{1}{r^3} = \theta',$$

$$\frac{r^2 + \Delta^2 - r'^2}{2r^5} = \Phi, \qquad \frac{r'^2 + r^2 - \Delta^2}{2r'^5} = \Psi, \qquad \frac{\Delta^2 + r'^2 - r^2}{2\Delta^5} = \Theta,$$

$$\frac{r^2 + r'^2 - \Delta^2}{2r^5} = \Phi', \qquad \frac{r'^2 + \Delta^2 - r^2}{2r'^5} = \Psi', \qquad \frac{\Delta^2 + r^2 - r'^2}{2\Delta^5} = \Theta',$$

on aura de la manière indiquée

$$
(5)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{d^3 r^2}{dt^3} + \frac{dr^2}{dt}\left(\frac{\mathrm{M}+m}{r^3} + 2m'\varphi'\right) + m'\frac{dr'^2}{dt}(-2\varphi - 3\Psi) \\
&\qquad\qquad + m'\frac{d\Delta^2}{dt}(2\varphi - 3\Theta') + m'q\varphi = 0, \\
&\frac{d^3 r'^2}{dt^3} + \frac{dr'^2}{dt}\left(\frac{\mathrm{M}+m'}{r'^3} + 2m\psi'\right) + m\frac{dr^2}{dt}(2\psi - 3\Phi') \\
&\qquad\qquad + m\frac{d\Delta^2}{dt}(-2\psi - 3\Theta) + mq\psi = 0, \\
&\frac{d^3 \Delta^2}{dt^3} + \frac{d\Delta^2}{dt}\left(\frac{m+m'}{\Delta^3} + 2\mathrm{M}\theta'\right) + \mathrm{M}\frac{dr^2}{dt}(-2\theta - 3\Phi) \\
&\qquad\qquad + \mathrm{M}\frac{dr'^2}{dt}(2\theta - 3\Psi') + \mathrm{M}q\theta = 0.
\end{aligned}
\right.
$$

Dans ce qui suit nous ne ferons pas usage de l'équation (4) sous la forme présente. On verra plus tard qu'il vaudra mieux introduire une nouvelle équation en la différentiant. Ainsi l'équation

$$
(6)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{dr^2}{dt}(-m'\varphi + m\psi + \mathrm{M}\theta - 3\mathrm{M}\Phi' + 3m\Phi) \\
&\quad + \frac{dr'^2}{dt^2}(\;\; m'\varphi - m\psi + \mathrm{M}\theta - 3m'\Psi' + 3\mathrm{M}\Psi) \\
&\quad + \frac{d\Delta^2}{dt^2}(\;\; m'\varphi + m\psi - \mathrm{M}\theta - 3m\Theta' + 3m'\Theta) = 0,
\end{aligned}
\right.
$$

jointe aux équations (5), constituera le système simultané, dont l'intégration nous fournira les expressions des quantités r, r' et Δ. Ce système, étant du onzième ordre, donnerait naissance à onze arbitraires d'intégration; nous savons que le nombre d'arbitraires indépendantes doit être neuf. Alors nous aurons deux relations entre les onze arbitraires introduites par l'intégration du système (5) et (6). On indiquera, à la fin de ce Mémoire, comment on peut obtenir les deux relations demandées.

Les équations (4) et (5) sont essentiellement les mêmes qu'a établies Lagrange dans son célèbre Mémoire *Essai sur le problème des trois corps* (*Œuvres*, édition Serret, t. VI). Jusqu'à ce point le grand géomètre a conservé la symétrie entre les trois masses M, m et m'.

Mais, à la fin de son Mémoire, en passant à l'intégration de ses équations, il abandonne la symétrie. En ne considérant que le cas où l'un des trois corps est très éloigné des deux autres, et en particulier ce cas : le Soleil, la Terre, la Lune, il effectue l'intégration, en deux approximations, par la substitution d'une série de coefficients indéterminés. Il est donc clair que ces résultats, quant aux approximations suivantes, ne peuvent être décisifs.

En nous proposant le problème indiqué plus haut, nous chercherons surtout à conserver la symétrie qui doit exister entre les trois corps. Il suit de là que nous n'avons pas en vue de donner la méthode qui serait la plus convenable dans des applications numériques. Notre but principal sera, en effet, de montrer comment on est capable, théoriquement, par les moyens actuels de l'Analyse, de trouver dans un cas remarquable la vraie forme analytique des expressions des distances mutuelles des trois masses.

Les méthodes connues dans la théorie des perturbations reposent sur les suppositions suivantes :

1° Les excentricités des orbites des masses m et m' autour de la masse M sont assez petites;

2° Le rapport $\frac{r}{r'}$ doit être constamment ou < 1 ou > 1;

3° L'inclinaison mutuelle des deux orbites ne surpasse pas une certaine limite supérieure. D'ailleurs, dans le cas actuel du système solaire, les masses m et m' sont très petites.

Nous essayerons de formuler ces conditions d'une manière symétrique par rapport aux trois corps.

Quant à la condition 1°, on voit d'abord qu'elle s'exprime analytiquement en posant

$$r^2 = a^2(1+\rho), \quad r'^2 = a'^2(1+\rho'),$$

a, a' étant deux constantes et ρ, ρ' désignant deux quantités qui restent toujours des fractions pures.

Pour la troisième distance Δ, on peut écrire, comme on le sait,

$$\Delta^2 = r^2 + r'^2 - 2rr'\cos H = (r^2 + r'^2)\left(1 - \frac{2rr'}{r^2+r'^2}\cos H\right),$$

en désignant par H l'angle compris entre r et r'. Donc, si l'on a, comme le dit la condition 2°, ou $\frac{r}{r'} > 1$ ou $\frac{r'}{r} > 1$, on aura de même

$$\frac{2rr'}{r^2 + r'^2} < 1.$$

On peut donc, à la condition 2°, substituer la suivante :

$$\Delta^2 = d^2(1 + \delta),$$

où la valeur numérique de la fonction δ reste toujours une fraction pure; par d, nous avons désigné une constante.

Par cette raison, notre problème sera surtout restreint aux cas où l'on peut poser

$$(7) \qquad \begin{cases} r^2 = a^2\,(1 + \rho), \\ r'^2 = a'^2(1 + \rho'), \\ \Delta^2 = d^2\,(1 + \delta), \end{cases}$$

les modules des quantités ρ, ρ' et δ restant toujours, c'est-à-dire pour toute valeur finie de t, des *fractions pures*.

Ces conditions sont remplies, par exemple, dans les cas du Soleil, des huit planètes principales et des satellites. Ainsi, dans le cas

Soleil-Terre-Lune,

les trois quantités ρ, ρ' et δ conservent toujours de très petites valeurs numériques. Mais le cas le plus fréquent est que δ a une valeur plus considérable que ρ, ρ'. Mais on se convaincra facilement toutefois que δ reste toujours une fraction pure. Ainsi, pour Jupiter et Saturne, par exemple, on a, en négligeant les excentricités,

$$\delta = 0,84 \cos \mathrm{H},$$

et ainsi de suite.

Il suit de là que notre méthode, qui se fondera sur le développement suivant les puissances des quantités ρ, ρ' et δ, ne sera convenable, pour le calcul numérique, que dans la minorité des cas du système solaire. Mais il faut observer que nous n'avons pas en vue, pour le moment, de donner une telle méthode.

Maintenant, en substituant pour r, r' et Δ les expressions (7) dans les parenthèses des équations (5) et (6), ces parenthèses se changeront en des séries suivant les puissances entières et positives des quantités ρ, ρ' et δ. Dans ces développements, nous séparerons par des notations distinctes les termes constants des termes ne renfermant que les puissances des ρ, ρ' et δ. Ainsi le coefficient de $\frac{dr^2}{dt}$ dans la première des équations (5), par exemple, sera désigné par $\alpha_1 - U_1$, où α_1 est la partie constante

$$\alpha_1 = \frac{M+m}{a^3} + 2m'\left(\frac{1}{a'^3} + \frac{1}{d^3}\right),$$

et U_1 la somme des puissances de ρ, ρ' et δ,

$$U_1 = \alpha_1 - \left[\frac{M+m}{a^3}(1+\rho)^{-\frac{3}{2}} + \frac{2m'}{a'^3}(1+\rho')^{-\frac{3}{2}} + \frac{2m'}{d^3}(1+\delta)^{-\frac{3}{2}}\right],$$

et ainsi de suite.

Au lieu des équations (4) et (5), on pourra donc écrire

$$\begin{aligned}
&\frac{d^3 r^2}{dt^3} + (\alpha_1 - U_1)\frac{dr^2}{dt} + (\beta_1 - U'_1)\frac{dr'^2}{dt} + (\gamma_1 - V_1)\frac{d\Delta^2}{dt} + (\varepsilon_1 - Q_1)q = 0,\\
&\frac{d^3 r'^2}{dt^3} + (\alpha_2 - U_2)\frac{dr^2}{dt} + (\beta_2 - U'_2)\frac{dr'^2}{dt} + (\gamma_2 - V_2)\frac{d\Delta^2}{dt} + (\varepsilon_2 - Q_2)q = 0,\\
&\frac{d^3 \Delta^2}{dt^3} + (\alpha_3 - U_3)\frac{dr^2}{dt} + (\beta_3 - U'_3)\frac{dr'^2}{dt} + (\gamma_3 - V_3)\frac{d\Delta^2}{dt} + (\varepsilon_3 - Q_3)q = 0,\\
&\frac{d^2 q}{dt^2} + (\alpha_0 - U_0)\frac{dr^2}{dt} + (\beta_0 - U'_0)\frac{dr'^2}{dt} + (\gamma_0 - V_0)\frac{d\Delta^2}{dt} = 0.
\end{aligned}$$

Ici les U, U′, V et Q sont des séries suivant les puissances des ρ, ρ' et δ, mais sans termes constants. Les α, β, γ et ε désignent les termes constants des développements correspondants.

De plus, nous poserons

$$\frac{dr^2}{dt} = u, \quad \frac{dr'^2}{dt} = u', \quad \frac{d\Delta^2}{dt} = v.$$

Donc, après avoir déterminé les quantités u, u' et v comme fonctions du temps, nous aurons, par intégration,

$$(8)\qquad \begin{cases} r^2 = a^2 + \int u\,dt,\\ r'^2 = a'^2 + \int u'\,dt,\\ \Delta^2 = d^2 + \int v\,dt,\end{cases}$$

a^2, a'^2 et d^2 étant ainsi les arbitraires introduites par l'intégration indiquée. On aura donc aussi, eu égard à (7),

$$(9)\quad \begin{cases} \rho = \dfrac{1}{a^2}\int u\,dt, \\ \rho' = \dfrac{1}{a'^2}\int u'\,dt, \\ \delta = \dfrac{1}{d^2}\int v\,dt. \end{cases}$$

Enfin nous introduirons, par analogie avec les principes énoncés dans le Mémoire déjà mentionné, un nombre de constantes préalablement indéterminées,

$$\lambda_0,\ \mu_0,\ \nu_0,\ \tau_0,\ \lambda_1,\ \mu_1,\ \nu_1,\ \tau_1,\ \lambda_2,\ \mu_2,\ \ldots.$$

Nos équations prennent donc la forme suivante :

$$(10)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2 q}{dt^2} + (\alpha_0 - \lambda_0)u + (\beta_0 - \mu_0)u' + (\gamma_0 - \nu_0)v - \tau_0 q \\ \qquad = (U_0 - \lambda_0)u + (U'_0 - \mu_0)u' + (V_0 - \nu_0)v - \tau_0 q, \\ \dfrac{d^2 u}{dt^2} + (\alpha_1 - \lambda_1)u + (\beta_1 - \mu_1)u' + (\gamma_1 - \nu_1)v + (\varepsilon_1 - \tau_1)q \\ \qquad = (U_1 - \lambda_1)u + (U'_1 - \mu_1)u' + (V_1 - \nu_1)v + (Q_1 - \tau_1)q, \\ \dfrac{d^2 u'}{dt^2} + (\alpha_2 - \lambda_2)u + (\beta_2 - \mu_2)u' + (\gamma_2 - \nu_2)v + (\varepsilon_2 - \tau_2)q \\ \qquad = (U_2 - \lambda_2)u + (U'_2 - \mu_2)u' + (V_2 - \nu_2)v + (Q_2 - \tau_2)q, \\ \dfrac{d^2 v}{dt^2} + (\alpha_3 - \lambda_3)u + (\beta_3 - \mu_3)u' + (\gamma_3 - \nu_3)v + (\varepsilon_3 - \tau_3)q \\ \qquad = (U_3 - \lambda_3)u + (U'_3 - \mu_3)u' + (V_3 - \nu_3)v + (Q_3 - \tau_3)q. \end{cases}$$

Nous obtiendrons les intégrales de ces équations par une suite d'opérations successives, mais nous ne demanderons pas des développements suivant les puissances de deux des masses, par exemple m et m'. Les trois masses entrant dans les équations différentielles d'une manière symétrique, et en ayant égard au problème des deux corps, où l'on développe suivant les puissances de l'excentricité, c'est-à-dire d'une arbitraire d'intégration, nous développerons donc suivant les puissances de quatre quantités η, η', k et k', qui s'introduiront comme constantes d'intégration, en supposant pour elles-mêmes de telles valeurs numériques que les séries obtenues seront convergentes pour toute valeur de t.

Nous verrons, de plus, que les quantités

$$u,\ u',\ v,\ q;\quad \rho,\ \rho',\ \delta;\quad r^2,\ r'^2,\ \Delta^2$$

sont en général des séries purement trigonométriques contenant quatre arguments distincts, que nous désignerons par

$$(11)\qquad \begin{cases} nt \ + \pi \ = w_1, \\ n't + \pi' = w_2, \\ \nu t \ + \omega \ = w_3, \\ \nu' t + \omega' = w_4; \end{cases}$$

π, π', ω, ω' étant les quatre arbitraires restantes du problème. Chaque terme dont l'argument est

$$i w_1 \pm i' w_2 \pm j w_3 \pm j' w_4,$$

i, i', j, j' étant des nombres entiers positifs, aura comme facteur la quantité

$$\eta^i \eta'^{i'} k^j k'^{j'}.$$

Donc nous dirons que le terme est de l'*ordre*

$$i + i' + j + j'.$$

La première approximation nous fournira les termes du premier ordre; de même la seconde nous donnera ceux du deuxième ordre, et ainsi de suite.

Quant aux quantités n, n', ν et ν', elles sont des sommes de termes constants, qui sont tous d'un ordre *pair*. Ainsi, la deuxième approximation ne corrigera pas les valeurs obtenues pour ces quantités par la première; de même, la quatrième conservera les valeurs de la troisième, et ainsi de suite, de sorte que l'on pourra effectuer deux approximations consécutives avec les mêmes valeurs des arguments, ce qui sera d'une grande importance dans la pratique.

Enfin, les constantes d'intégration étant les onze quantités désignées par

$$a^2,\ a'^2,\ d^2,\ \eta,\ \eta',\ k,\ k',\ \pi,\ \pi',\ \omega,\ \omega',$$

nous savons, comme nous l'avons mis en évidence ci-dessus, que l'on aura deux relations entre ces arbitraires et les masses.

Maintenant supposons que nous ayons trouvé un système de valeurs approximatives pour les quantités u, u', v et q. A l'aide des formules (9), nous calculerons, par la substitution de ces valeurs, les seconds membres des équations (10). Ces équations prendront donc la forme suivante :

$$(12)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2q}{dt^2} + u(\alpha_0-\lambda_0) + u'(\beta_0-\mu_0) + v(\gamma_0-\nu_0) - \tau_0 = \mathrm{T}_q, \\ \dfrac{d^2u}{dt^2} + u(\alpha_1-\lambda_1) + u'(\beta_1-\mu_1) + v(\gamma_1-\nu_1) + q(\varepsilon_1-\tau_1) = \mathrm{T}_u, \\ \dfrac{d^2u'}{dt^2} + u(\alpha_2-\lambda_2) + u'(\beta_2-\mu_2) + v(\gamma_2-\nu_2) + q(\varepsilon_2-\tau_2) = \mathrm{T}_{u'}, \\ \dfrac{d^2v}{dt^2} + u(\alpha_3-\lambda_3) + u'(\beta_3-\mu_3) + v(\gamma_3-\nu_3) + q(\varepsilon_3-\tau_3) = \mathrm{T}_v, \end{cases}$$

T_q, T_u, $\mathrm{T}_{u'}$, T_v désignant des fonctions explicites du temps et ne contenant, ce que nous verrons plus tard, que des termes périodiques. Nous obtiendrons donc une nouvelle approximation, en intégrant le système (12) par les méthodes connues. Il faut alors, comme on le sait bien, que l'on intègre d'abord les mêmes équations en supposant nulles les quantités T. Pour cela, nous aurons à résoudre l'équation suivante en w :

$$(13)\quad \begin{vmatrix} w-\tau_0 & \alpha_0-\lambda_0 & \beta_0-\mu_0 & \gamma_0-\nu_0 \\ \varepsilon_1-\tau_1 & w+\alpha_1-\lambda_1 & \beta_1-\mu_1 & \gamma_1-\nu_1 \\ \varepsilon_2-\tau_2 & \alpha_2-\lambda_2 & w+\beta_2-\mu_2 & \gamma_2-\nu_2 \\ \varepsilon_2-\tau_3 & \alpha_3-\lambda_3 & \beta_3-\mu_3 & w+\gamma_3-\nu_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Dans le cas supposé, les racines de cette équation seront réelles et négatives, savoir $-n^2$, $-n'^2$, $-\nu^2$, $-\nu'^2$, ce qui nous fournira des valeurs approchées pour ces constantes, lesquelles déterminent, par les formules (11), nos quatre arguments w_1, w_2, w_3, w_4.

Cependant, en intégrant le système (12), qui est un système d'équations linéaires à coefficients constants, tout terme dans les quantités T, qui aurait un argument de la forme

$$nt,\ n't,\ \nu t \quad \text{ou} \quad \nu' t$$

donnera naissance à des termes séculaires dans les intégrales. C'est pour éviter cet inconvénient, qui n'est pas, en général, fondé dans la nature du problème, que nous avons introduit les constantes indéterminées λ, μ, ν et τ. En effet, on pourra toujours déterminer ces constantes d'une manière telle, que les termes indiqués dans les fonctions T se détruisent. De plus, il faut remarquer, que les T et aussi les quantités q, u, u' et v, ne contiendront pas de termes constants, d'où il suit, eu égard aux équations (8) et (9), qu'il n'y aura pas des termes séculaires dans les expressions des distances mutuelles des trois masses.

La première approximation s'obtient en faisant

$$\rho = \rho' = \delta = 0$$

dans les équations (10), ce qui revient à supposer des valeurs constantes pour les quantités r, r' et Δ. Nous aurons dans (12) toutes les quantités T égales à zéro. De même, on a, dans cette approximation comme dans la suivante :

$$\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \mu_0 = \ldots = \tau_3 = 0.$$

Ayant résolu dans cette supposition l'équation (13), nous obtiendrons pour q, u, u' et v des expressions de la forme suivante :

$$(14) \qquad \left\{\begin{aligned} q &= \eta_0 \sin w_1 + \eta'_0 \sin w_2 + k_0 \sin w_3 + k' \sin w_4, \\ u &= \eta \sin w_1 + \eta'_1 \sin w_2 + k_1 \sin w_3 + k'_1 \sin w_4, \\ u' &= \eta_2 \sin w_1 + \eta' \sin w_2 + k_2 \sin w_3 + k'_2 \sin w_4, \\ v &= \eta_3 \sin w_1 + \eta'_3 \sin w_2 + k \sin w_3 + k'_3 \sin w_4, \end{aligned}\right.$$

η, η', k, k' désignant quatre arbitraires d'intégration. Les quatre arbitraires restantes entrent dans les arguments w_1, w_2, w_3, w_4 de la manière indiquée par les formules (11). Quant aux autres coefficients, on a désigné par η_0, η_2, η_3 des quantités de l'ordre η; les η'_0, η'_1, η'_3 contiennent le facteur η', et ainsi de suite. En outre, ces coefficients s'obtiennent d'une manière bien connue par les valeurs que prennent les déterminants mineurs de (13) par les substitutions successives

$$w = -n^2, \quad w = -n'^2, \quad w = -\nu^2, \quad w = -\nu'^2.$$

Mais, comme nous n'avons ici qu'à donner un aperçu court de notre méthode, il semble superflu d'entrer dans des détails.

Afin d'obtenir une seconde approximation, nous calculerons les produits Uu, ... à l'aide des expressions (14); on ne doit y avoir égard qu'aux *premières* puissances des quantités ρ, ρ' et δ. En remarquant que l'on a $\rho = \frac{1}{a^2}\int u\,dt$, ..., on voit que les fonctions U, U', V et Q prendront la forme

$$\alpha\cos w_1 + \beta\cos w_2 + \gamma\cos w_3 + \delta\cos w_4,$$

de sorte que les seconds membres des équations (12) seront composés de termes qui ne contiennent que des *sinus* des angles

$$\begin{gathered} 2w_1,\quad 2w_2,\quad 2w_3,\quad 2w_4, \\ w_1+w_2,\quad w_2+w_3,\quad w_1+w_3,\quad \ldots,\quad w_1-w_2,\quad \ldots, \end{gathered}$$

et les coefficients de ces termes seront du *deuxième* ordre.

Puis, en effectuant de nouveau l'intégration, on aura pour les q, u, u' et v de nouvelles expressions, qui ne différeront des formules (14) que par des termes du deuxième ordre. Ainsi, en désignant par $[\eta^2]$, ..., $[\eta\eta']$, ... des quantités de l'ordre $\eta^2 \ldots \eta\eta' \ldots$ respectivement, on aura, par exemple, pour q une valeur de la forme

$$\begin{aligned} q = {} & \eta_0\sin w_1 + \eta'_0\sin w_2 + k_0\sin w_3 + k'\sin w_4 \\ & + [\eta^2]\sin 2w_1 + [\eta'^2]\sin 2w_2 + \ldots + [\eta\eta']\sin(w_1+w_2) \\ & + [\eta\eta']\sin(w_1-w_2) + [\eta k]\sin(w_1+w_3) + \ldots. \end{aligned}$$

En outre, il suit des formules (9) et (8) que les valeurs corrigées des ρ, ρ' et δ, ainsi que des r^2, r'^2 et Δ^2, seront des séries semblables, mais qui ne contiendront que les *cosinus* des mêmes angles.

La *troisième* approximation se trouvera d'une manière semblable, mais nous aurons besoin de déterminer, pour la première fois, des valeurs convenables pour les constantes λ, μ, ...

A l'aide des expressions déjà obtenues pour les quantités ρ, ρ', δ, q, u, u' et v, et en nous restreignant aux termes du troisième ordre, nous calculerons de nouveau les sommes

$$U_i u + U'_i u' + V_i v + Q_i q \quad (i = 0, 1, 2, 3;\ Q_0 = 0),$$

qui se trouvent dans les seconds membres des équations (10).

Donc nous obtiendrons pour ces sommes des expressions de la forme suivante :

$$\begin{aligned}
&U_i u + U'_i u' + V_i v + Q_i q \\
&\quad = l_i \eta \sin w_1 + m_i \eta' \sin w_2 + n_i k \sin w_3 + t_i k' \sin w_4 \\
&\qquad + \sum_{\alpha,\beta} [2]_{\alpha,\beta} \sin(w_\alpha \pm w_\beta) + \sum_{\alpha,\beta,\gamma} [3]_{\alpha,\beta,\gamma} \sin(w_\alpha \pm w_\beta \pm w_\gamma),
\end{aligned}$$

où les coefficients $[2]_{\alpha,\beta}$ et $[3]_{\alpha,\beta,\gamma}$ sont des quantités du deuxième et du troisième ordre respectivement. Dans la somme $w_\alpha \pm w_\beta \pm w_\gamma$, de telles combinaisons qui se réduisent à un des angles w_1, w_2, w_3, w_4 doivent être rejetées. De plus, les coefficients l_i, m_i, n_i et t_i sont, comme on peut s'en convaincre aisément, du deuxième ordre.

Mais, comme on aura aussi, par la substitution de la deuxième approximation,

$$\begin{aligned}
&\lambda_i u + \mu_i u' + \nu_i v + \tau_i q \\
&\quad = (\lambda_i \eta + \mu_i \eta_2 + \nu_i \eta_3 + \tau_i \eta_0) \sin w_1 + (\lambda_i \eta'_1 + \mu_i \eta' + \nu_i \eta'_3 + \tau_i \eta'_0) \sin w_2 \\
&\qquad + (\lambda_i k_1 + \mu_i k_2 + \nu_i k + \tau_i k_0) \sin w_3 + (\lambda_i k'_1 + \mu_i k'_2 + \nu_i k'_3 + \tau_i k') \sin w_4 \\
&\qquad + \sum_{\alpha,\beta} [4]'_{\alpha,\beta} \sin(w_\alpha \pm w_\beta),
\end{aligned}$$

où les $[4]'_{\alpha,\beta}$ seront composés de quantités du deuxième ordre et des λ_i, μ_i, ..., qui sont effectivement, comme nous le verrons, du même ordre, de sorte que les $[4]'_{\alpha,\beta}$ désigneront des coefficients du quatrième ordre, on doit rejeter ces termes dans la présente approximation.

Il faut surtout remarquer que l'on pourra déterminer les constantes λ_i, μ_i, ν_i et τ_i de telle manière, que les termes contenant $\sin w_1$, $\sin w_2$, $\sin w_3$, $\sin w_4$ dans l'expression

$$(U_i - \lambda_i) u + (U'_i - \mu_i) u' + (V_i - \nu_i) v + (Q_i - \tau_i) q,$$

c'est-à-dire dans les seconds membres des équations (10), se détruisent. En effet, il ne faut pour cela que déterminer ces constantes par résolution du système linéaire,

$$(15) \qquad \left\{\begin{aligned}
&\lambda_i \eta + \mu_i \eta_2 + \nu_i \eta_3 + \tau_i \eta_0 = l_i \eta, \\
&\lambda_i \eta'_1 + \mu_i \eta' + \nu_i \eta'_3 + \tau_i \eta'_0 = m_i \eta', \\
&\lambda_i k_1 + \mu_i k_2 + \nu_i k + \tau_i k_0 = n_i k, \\
&\lambda_i k'_1 + \mu_i k'_2 + \nu_i k'_3 + \tau_i k' = t_i k',
\end{aligned}\right.$$

pour $i = 0, 1, 2, 3$. Mais, comme la première de ces équations est divisible par η, la seconde par η', et ainsi de suite, on voit que les λ_i, μ_i, ... seront du même ordre en général que les l_i, m_i, ..., c'est-à-dire du deuxième, comme nous l'avons déjà dit ci-dessus.

Après avoir déterminé les λ_i, μ_i, ... des équations (15), les équations (10) prennent la forme (12), où les T ne contiennent pas de termes constants ni de termes en $\sin w_1$, $\sin w_2$, ... Alors on peut effectuer l'intégration, après avoir résolu l'équation (13) pour notre cas. Les intégrales ainsi obtenues seront complètes jusqu'aux termes du troisième ordre inclusivement. Quant aux quantités n, n', ν et ν', qui déterminent les arguments, elles sont corrigées par des quantités du deuxième ordre; parce que les T ne contiennent aucun terme constant, il en sera de même, comme on le sait, des intégrales q, u, u' et ν. Ainsi on n'aura pas de termes séculaires dans les expressions pour r, r' et Δ.

Maintenant il est facile de comprendre comment se feront les opérations suivantes : on se convaincra aisément que l'on pourra éviter constamment des termes séculaires, et que nos opérations nous conduiront ainsi à des intégrales *rigoureuses*. En d'autres termes, s'il est possible de développer les intégrales des systèmes (6) et (5) en des séries trigonométriques, qui soient toujours convergentes entre certaines limites des valeurs numériques des constantes d'intégration et des masses, ces séries auront nécessairement la forme énoncée ci-dessus.

Cependant, quoique l'on puisse supposer, en général, que nos développements sont exacts, les arbitraires ne dépassant pas certaines limites, on peut imaginer des cas où ils ne le seraient pas. Ainsi, par exemple, si l'on peut déterminer les nombres entiers i, i', j et j' de telle manière que la somme

$$in + i'n' + j\nu + j'\nu'$$

soit exactement égale à zéro, nous obtiendrons dans les valeurs de u, u', ... des termes constants, ce qui conduira à des termes séculaires dans les distances mutuelles.

Mais cela n'est possible que pour des valeurs très particulières des masses et des constantes d'intégration. En elles-mêmes, les quantités n, n', ν et ν' n'ont pas, en général, de telles valeurs.

Nous aurons une idée de ces quantités en résolvant l'équation (13). Mais, comme les approximations successives ne changent leurs valeurs que de quantités d'un ordre supérieur, il suffit d'y supposer les quantités λ_i, μ_i, ν_i et τ_i égales à zéro. On voit donc que l'on peut prendre

$$(16) \qquad \begin{cases} \nu = n + n' + \sigma, \\ \nu' = n - n' + \sigma', \end{cases}$$

où les quantités σ et σ' sont, en général, différentes l'une de l'autre. En outre, ces quantités ont la propriété de s'évanouir quand on suppose $M = 0$, $m = 0$ ou $M = 0$, $m' = 0$, ou enfin $m = 0$, $m' = 0$, de sorte qu'elles seront, dans le cas actuel du système solaire, de l'ordre des masses m et m'.

Il nous restera donc à déterminer les deux relations qui doivent se trouver entre les onze constantes d'intégration. Pour cela nous remarquons d'abord que l'équation (4) doit être satisfaite. Cette condition impliquant, en effet, que l'on n'aura pas de terme constant dans l'expression de $\frac{dq}{dt}$, nous fournira une relation entre les onze arbitraires ou, à vrai dire, entre les sept constantes

$$a,\ a',\ d,\ \eta,\ \eta',\ k,\ k'.$$

Ainsi on a, par exemple, dans la première approximation,

$$M(a^2 + a'^2 - d^2)\left(\frac{1}{a'^3} - \frac{1}{a^3}\right) + m(a^2 + d^2 - a'^2)\left(\frac{1}{a^3} - \frac{1}{d^3}\right) + m'(a'^2 + d^2 - a^2)\left(\frac{1}{d^3} - \frac{1}{a'^3}\right) = 0,$$

et ainsi de suite.

Mais il faut que l'on ait encore une relation. L'équation qui nous la donnera est bien connue. Elle exprime la quantité q à l'aide de r, r', Δ, et leurs quotients différentiels du premier et du second ordre. Lagrange a le premier donné cette équation dans le Mémoire déjà cité; elle y porte la lettre (N). Mais, comme cette équation est bien compliquée, nous nous bornerons à la mentionner ici.

Le nombre des arguments par lesquels on exprime les distances mutuelles étant, dans le problème des deux corps, égal à 1, dans celui des trois corps égal à 4, on peut se convaincre que ce nombre, dans le cas général de n corps, sera égal à $(n-1)^2$. De plus, on peut remarquer qu'il en est de même dans le cas où la loi d'attraction $f(r)$ est autre que la loi newtonienne et que notre méthode est applicable aussi à ce cas plus général.

Enfin on sait, par les recherches bien connues de Lagrange et de Laplace sur les variations séculaires des excentricités et des inclinaisons mutuelles, eu égard aux termes des premiers ordres par rapport aux masses, que l'on a trouvé, dans les expressions pour les rayons vecteurs, de certains termes d'une période très longue et de coefficients considérables, que M. Gyldén a nommés *élémentaires*.

A l'aide de l'analyse précédente, bien que notre méthode ne soit donnée ici qu'en abrégé, on pourra découvrir sans difficulté la vraie nature et l'origine de ces termes.

Pour fixer les idées, nous ne considérerons pour le moment que l'expression de la distance r entre les masses M et m. Si l'on avait $m' = 0$, on sait que l'orbite de m autour de M serait une ellipse keplérienne. Il est clair que nous aurons dans le cas des trois corps, comme expression de r, la série correspondant au mouvement elliptique, plus des termes dus à la présence de la troisième masse m'.

Dans le cas du système solaire, les masses m et m' étant des fractions très petites de la masse M, on a cru quelquefois que les termes en r dus à l'action de m' devraient avoir des coefficients qui seraient aussi très petits, ou, comme on s'exprime usuellement, de l'ordre de cette masse perturbatrice. En effet, il en est ainsi pour la plupart de ces termes; mais il se trouve aussi, dans l'expression complète de r, des termes qui ne correspondent pas au mouvement keplérien et dont les coefficients peuvent être très grands, même pour une valeur extrêmement petite de m'. Comme nous le verrons, ces termes se divisent naturellement en deux classes distinctes. Les uns ont une période qui est presque égale au temps d'une révolution de la planète m; les autres sont en général d'une période d'autant plus longue que les masses m et m' sont plus petites.

En effet, en se servant des formules (16), on aura, dans la fonction T_u des équations (12), des termes de la forme

$$\alpha \sin[(n \pm i\sigma \pm i'\sigma')t + A],$$

où α sera multiplié par m'. La méthode connue d'intégration du système linéaire (12) nous fournira donc pour u un terme semblable correspondant, mais dont le coefficient sera divisé par la valeur que prend le déterminant (13) en y substituant

$$w = -(n \pm i\sigma \pm i'\sigma')^2.$$

Mais, comme le déterminant s'évanouit pour $w = -n^2$, ce diviseur sera du même ordre que σ et σ', c'est-à-dire de l'ordre des masses m et m'. On voit de plus que le coefficient α sera, en outre, multiplié par l'une des quantités

$$\eta k,\quad \eta k',\quad \eta' k,\quad \eta' k',\quad \ldots,$$

de sorte que les termes considérés, qui sont de la première classe, seront au moins du premier ordre par rapport aux excentricités et à l'inclinaison mutuelle des orbites kepleriennes.

En second lieu, on trouvera dans T_u des termes de la forme

$$\beta \sin[(i\sigma \pm i'\sigma') + B],$$

où β sera multiplié par m'. A cause des équations (8), on aura dans r^2 le terme correspondant

$$-\frac{\beta}{i\sigma \pm i'\sigma'} \cos[(i\sigma \pm i'\sigma')t + B],$$

qui est le caractère des termes élémentaires de la seconde classe. On remarque aussi que ces termes auront comme facteurs l'une des quantités

$$\eta\eta' k,\quad \eta\eta' k',\quad \eta^2 kk',\quad \ldots,$$

de sorte qu'ils seront au moins du deuxième ordre par rapport aux excentricités et à l'inclinaison mutuelle.

Il faut observer que les termes indiqués ont un caractère qui est essentiellement différent de ceux où l'on a

$$in \pm i'n' \pm j\nu \pm j'\nu',$$

à peu près égal à zéro pour un rapport presque rationnel entre n et n'.