ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

P. APPELL

Sur une classe d'équations différentielles linéaires binômes à coefficients algébriques

Annales scientifiques de l'É.N.S. 2e série, tome 12 (1883), p. 9-46
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1883_2_12__9_0>

SUR UNE CLASSE
D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES
LINÉAIRES BINOMES
A COEFFICIENTS ALGÉBRIQUES [1],

PAR M. P. APPELL,
MAITRE DE CONFÉRENCES A L'ÉCOLE NORMALE.

Dans ce Mémoire, je m'occupe des équations différentielles linéaires de la forme

$$\text{(A)}\qquad \frac{d^k z}{dx^k} = \psi(x, y) z,$$

où $\psi(x, y)$ est une fonction rationnelle de x et y, la variable y étant liée à x par une équation algébrique

$$\text{(B)}\qquad F(x, y) = 0.$$

J'indique le moyen de reconnaître si l'équation (A) admet une intégrale de la forme

$$\text{(C)}\qquad z = e^{\int \varphi(x, y)\, dx};$$

$\varphi(x, y)$ étant une fonction rationnelle de x et y, et de trouver cette intégrale si elle existe

J'examine plus particulièrement le cas de $k = 2$

$$\text{(D)}\qquad \frac{d^2 z}{dx^2} = \psi(x, y) z;$$

[1] Mémoire présenté à l'Académie des Sciences dans la séance du 20 janvier 1882.

toute équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients rationnels en x et y

$$(\mathrm{E}) \qquad \frac{d^2 u}{dx^2} + \varphi_1(x, y)\frac{du}{dx} + \varphi_2(x, y)u = 0,$$

φ_1 et φ_2 étant des fonctions rationnelles, peut, comme il est connu, être ramenée à la forme (D) par la substitution

$$u = z e^{-\frac{1}{2}\int \varphi_1(x, y)\,dx};$$

et, si l'équation (E) admet une intégrale de la forme (C), il en est de même de l'équation (D), et réciproquement.

J'étudie plus spécialement les cas dans lesquels le genre p de l'équation (B) est égal à zéro ou à l'unité.

1. Soit d'abord une équation différentielle linéaire du second ordre de la forme [1]

$$(1) \qquad \frac{d^2 y}{dx^2} = y\psi(x),$$

$\psi(x)$ étant une fonction rationnelle de x. Voici comment on peut reconnaître si cette équation admet une intégrale de la forme

$$(2) \qquad y = e^{\int \varphi(x)\,dx},$$

où $\varphi(x)$ est rationnel, et trouver cette intégrale si elle existe.

On peut toujours ramener l'équation (1) à une autre de même forme, dans laquelle le point ∞ est un pôle ou un point ordinaire de l'intégrale. En effet, soit $x = x_0$ une valeur qui ne rende pas infinie la fonction $\psi(x)$; l'équation (1) admet, dans le voisinage de cette valeur x_0, un système fondamental d'intégrales holomorphes

$$y_1 = \lambda_0 + \lambda_1(x - x_0) + \lambda_2(x - x_0)^2 + \ldots,$$
$$y_2 = \mu_0 + \mu_1(x - x_0) + \mu_2(x - x_0)^2 + \ldots.$$

Cela posé, faisons, dans l'équation (1),

$$x - x_0 = \frac{1}{t}, \quad y = \frac{z}{t};$$

[1] Toute équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients rationnels peut être ramenée à cette forme.

elle devient

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{z}{t^4}\psi\left(x_0 + \frac{1}{t}\right), \tag{3}$$

équation qui, dans le voisinage du point $t = \infty$, admet le système fondamental d'intégrales

$$\begin{cases} z_1 = ty_1 = \lambda_0 t + \lambda_1 + \lambda_2 \frac{1}{t} + \ldots, \\ z_2 = ty_2 = \mu_0 t + \mu_1 + \mu_2 \frac{1}{t} + \ldots; \end{cases} \tag{4}$$

l'intégrale générale

$$z = k_1 z_1 + k_2 z_2 = (k_1\lambda_0 + k_2\mu_0)t + (k_1\lambda_1 + k_2\mu_1) + (k_1\lambda_2 + k_2\mu_2)\frac{1}{t} + \ldots$$

devient donc, au point $t = \infty$, infinie du premier ordre, et il existe une *intégrale particulière* qui reste finie pour $t = \infty$, à savoir celle que l'on obtient en déterminant les constantes arbitraires k_1 et k_2 par la condition

$$k_1\lambda_0 + k_2\mu_0 = 0.$$

Mais il ne peut pas arriver que cette intégrale particulière s'annule pour $t = \infty$, car il faudrait pour cela

$$k_1\lambda_1 + k_2\mu_1 = 0,$$

et alors l'intégrale particulière

$$y = k_1 y_1 + k_2 y_2$$

de l'équation (1) s'annulerait, ainsi que sa dérivée première au point $x = x_0$, ce qui est impossible.

Remarquons, en outre, que, si l'équation (1) admet une intégrale de la forme (2), l'équation (3) admet une intégrale de la même forme

$$z = te^{-\int \varphi\left(x_0 + \frac{1}{t}\right)\frac{dt}{t^2}} = e^{\int \left[\frac{1}{t} - \frac{1}{t^2}\varphi\left(x_0 + \frac{1}{t}\right)\right]dt},$$

et, de plus, pour $t = \infty$, cette intégrale devient infinie ou reste finie Posons, pour abréger,

$$\frac{1}{t} - \frac{1}{t^2}\varphi\left(x_0 + \frac{1}{t}\right) = \varpi(t),$$

$$\frac{1}{t^4}\psi\left(x_0 + \frac{1}{t}\right) = f(t),$$

nous aurons une équation

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = z f(t), \tag{5}$$

admettant, dans le voisinage de $t = \infty$, un système fondamental de la forme (4); et il s'agit de chercher si cette équation admet une intégrale de la forme

$$z = e^{\int \varpi(t)\,dt}, \tag{6}$$

$f(t)$ et $\varpi(t)$ étant rationnels.

2. Si l'équation (5) admet une intégrale de la forme (6), il faut d'abord $\varpi(\infty) = 0$; car, sans cela, le point $t = \infty$ serait pour z un point singulier essentiel, ce qui n'est pas, d'après la forme (4) du système fondamental dans le voisinage de ce point.

Soient $a, b, c, \ldots, l$ les infinis de $\varpi(t)$; $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ les ordres respectifs de ces infinis. La fonction $\varpi(t)$ peut se mettre sous la forme

$$\varpi(t) = \sum \left[\frac{A_1}{t-a} + \frac{A_2}{(t-a)^2} + \ldots + \frac{A_\alpha}{(t-a)^\alpha}\right], \tag{7}$$

la somme étant étendue à tous les pôles. Pour $t = \infty$, la fonction $e^{\int \varpi(t)\,dt}$ devient infinie comme

$$t^{A_1 + B_1 + \ldots + L_1};$$

donc, d'après les remarques faites précédemment sur l'intégrale générale $z = k_1 z_1 + k_2 z_2$, on a

$$A_1 + B_1 + \ldots + L_1 = 1 \quad \text{ou} \quad = 0. \tag{8}$$

Pour que

$$z = e^{\int \varpi(t)\,dt}$$

soit une intégrale de l'équation (5), il faut et il suffit que l'on ait

$$f(t) = \varpi^2 + \frac{d\varpi}{dt}. \tag{9}$$

Donc il faut déjà que $f(\infty) = 0$, ce qui a lieu; car $f(t) = \frac{1}{t^4}\psi\left(x_0 + \frac{1}{t}\right)$ et $\psi(x_0)$ est fini. Voyons maintenant de quelle forme est le développement de $\varpi^2 + \frac{d\varpi}{dt}$ dans le voisinage d'un infini $t = a$. On a dans le domaine de ce point

$$\varpi(t) = \frac{A_\alpha}{(t-a)^\alpha} + \frac{A_{\alpha-1}}{(t-a)^{\alpha-1}} + \ldots + \frac{A_1}{t-a} + P_0 + P_1(t-a) + \ldots;$$

donc

$$\begin{aligned}\varpi^2(t) = {} & \frac{A_\alpha^2}{(t-a)^{2\alpha}} + \frac{2A_\alpha A_{\alpha-1}}{(t-a)^{2\alpha-1}} + \frac{A_{\alpha-1}^2 + 2A_\alpha A_{\alpha-2}}{(t-a)^{2\alpha-2}} + \ldots \\ & + \frac{2A_1A_\alpha + 2A_2A_{\alpha-1} + \ldots}{(t-a)^{\alpha+1}} + \frac{2A_\alpha P_0 + 2A_1A_{\alpha-1} + \ldots}{(t-a)^\alpha} + \ldots,\end{aligned}$$

$$\frac{d\varpi}{dt} = -\frac{\alpha A_\alpha}{(t-a)^{\alpha+1}} - \frac{(\alpha-1)A_{\alpha-1}}{(t-a)^\alpha} + \ldots - \frac{A_1}{(t-a)^2} + P_1 + \ldots.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}\varpi^2 + \frac{d\varpi}{dt} = {} & \frac{A_\alpha^2}{(t-a)^{2\alpha}} + \frac{2A_\alpha A_{\alpha-1}}{(t-a)^{2\alpha-1}} + \frac{A_{\alpha-1}^2 + 2A_\alpha A_{\alpha-2}}{(t-a)^{2\alpha-2}} + \ldots \\ & + \frac{2A_1A_\alpha + 2A_2A_{\alpha-1} + \ldots - \alpha A_\alpha}{(t-a)^{\alpha+1}} \\ & + \frac{2A_\alpha P_0 + 2A_1A_{\alpha-1} + \ldots - (\alpha-1)A_{\alpha-1}}{(t-a)^\alpha} + \ldots.\end{aligned}$$

Supposons d'abord $\alpha > 1$; alors le terme $\frac{A_\alpha^2}{(t-a)^{2\alpha}}$ ne peut se réduire avec aucun autre. Il faut que, si $f(t) = \varpi^2 + \frac{d\varpi}{dt}$ admet l'infini a à un degré supérieur à 2,

$$f(t) = \frac{k_{\alpha'}}{(t-a)^{\alpha'}} + \frac{k_{\alpha'-1}}{(t-a)^{\alpha'-1}} + \ldots + \frac{k_1}{t-a} + k_0 + k_1(t-a) + \ldots,$$

α' soit pair, $\alpha' = 2\alpha$; alors, en comparant cette expression de $f(t)$ à celle de $\varpi^2 + \frac{d\varpi}{dt}$,

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} & A_\alpha^2 = k_{2\alpha}, \quad 2A_\alpha A_{\alpha-1} = k_{2\alpha-1}, \quad A_{\alpha-1}^2 + 2A_\alpha A_{\alpha-2} = k_{2\alpha-2}, \quad \ldots. \\ & \qquad 2A_1A_\alpha + 2A_2A_{\alpha-1} + \ldots - \alpha A_\alpha = k_{\alpha+1},\end{aligned}\right.$$

ce qui donne α équations déterminant les coefficients

$$A_1, A_2, \ldots, A_\alpha.$$

Comme A_α a deux déterminations $\pm\sqrt{k_{2\alpha}}$ et que les relations (10) donnent tous les autres coefficients $A_{\alpha-1}, A_{\alpha-2}, \ldots, A_1$ par des équations du premier degré, on obtient, pour $A_1, A_2, \ldots, A_\alpha$, deux systèmes de valeurs :

$$A'_1,\ A'_2,\ \ldots,\ A'_\alpha,$$
$$A''_1,\ A''_2,\ \ldots,\ A''_\alpha.$$

On fera cette même détermination pour tous les infinis de $f(t)$ d'ordre supérieur à 2.

Soit maintenant $\alpha = 1$, c'est-à-dire supposons

$$\varpi(t) = \frac{A_1}{t-a} + P_0 + P_1(t-a) + \ldots;$$

alors

$$\varpi^2 + \frac{d\varpi}{dt} = \frac{A_1^2 - A_1}{(t-a)^2} + \frac{2A_1P_0}{t-a} + \ldots.$$

En écartant d'abord le cas de $A_1 = 1$, on voit que l'infini $t = a$ est double dans $f(t)$; donc, si

$$f(t) = \frac{k_2}{(t-a)^2} + \frac{k_1}{t-a} + \ldots,$$

$\varpi(t)$ admet l'infini simple $t = a$, et le résidu correspondant A_1 est donné par l'équation

$$A_1^2 - A_1 = k_2,$$

relation qui fournit deux valeurs pour A_1, que nous désignerons par A'_1 et A''_1.

Mais, si l'on suppose $A_1 = 1$, le terme en $\frac{1}{(t-a)^2}$ disparaît dans $\varpi^2 + \frac{d\varpi}{dt}$, et il pourrait arriver, en outre, que $P_0 = 0$: alors l'infini $t = a$ n'appartiendrait plus à $f(t)$. Il y a donc deux cas possibles : ou bien $f(t)$ admet l'infini $t = a$ au premier degré, ou bien $f(t)$ n'admet plus l'infini a.

3. En résumé, pour qu'il y ait une intégrale de la forme $e^{\int \varpi(t)\,dt}$, il faut d'abord que tous les infinis de $f(t)$ soient d'ordre pair, excepté certains d'entre eux qui peuvent être du premier ordre. Si a est un infini de $f(t)$ d'ordre 2α, $\varpi(t)$ devient infini en ce point comme

$$\frac{A'_1}{t-a} + \frac{A'_2}{(t-a)^2} + \ldots + \frac{A'_\alpha}{(t-a)^\alpha}$$

ou comme

$$\frac{A_1''}{t-a} + \frac{A_2''}{(t-a)^2} + \ldots + \frac{A_\alpha''}{(t-a)^\alpha};$$

soit n le nombre de ces infinis. Si a est un infini du premier ordre de $f(t)$, $\varpi(t)$ devient infini en ce point comme $\frac{1}{t-a}$; soit n' le nombre de ces infinis. Enfin $\varpi(t)$ peut devenir infini du premier ordre en n'' points autres que les infinis de $f(t)$. Ces infinis ont tous le résidu 1. Les nombres n et n' sont connus; n'' est inconnu. D'après la condition (8), on doit avoir

$$(8') \qquad \Sigma A_1 + n' + n'' = 0 \text{ ou } = 1.$$

La somme ΣA_1 a 2^n déterminations distinctes, puisque chacune des n quantités A_1 a deux valeurs A_1' et A_1''. A cause de la relation (8'), il faut exclure de toutes ces déterminations celles pour lesquelles

$$\Sigma A_1 + n' - 1$$

n'est pas un entier négatif ou nul. S'il faut exclure toutes les déterminations des quantités A_1, l'équation n'admet pas d'intégrale de la forme considérée. S'il y a des déterminations satisfaisant à la condition $\Sigma A_1 + n' - 1 =$ un entier négatif ou nul, on déterminera n'' par la relation (8') qui donne, en général, deux valeurs pour n'', excepté dans le cas où $\Sigma A_1 + n' - 1 = 0$; alors $n'' = 0$. On formera ensuite les fonctions $\varpi(t)$ correspondantes en nombre fini contenant n'' fractions simples

$$\frac{1}{t-u_1} + \frac{1}{t-u_2} + \ldots + \frac{1}{t-u_{n''}},$$

les quantités u_i étant indéterminées; et l'on essayera chacune de ces fonctions $\varpi(t)$ pour vérifier l'équation

$$\varpi^2 + \frac{d\varpi}{dt} = f(t).$$

Si l'une d'elles vérifie cette équation, l'équation différentielle (5) admet pour intégrale

$$z = e^{\int \varpi(t)\, dt}.$$

4. *Exemple.* — Soit l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{3x^2 - 18x + 19}{4(1-x)^4}y.$$

Le coefficient de y reste fini pour $x = 0$; faisons

$$x = \frac{1}{t}, \quad y = \frac{z}{t},$$

l'équation devient

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{z}{t^2(t-1)^4}\,\frac{19t^2 - 18t + 3}{4}.$$

Dans le cas actuel

$$f(t) = \frac{19t^2 - 18t + 3}{4t^2(t-1)^4} = \frac{1}{(t-1)^4} + \frac{3}{(t-1)^3} + \ldots + \frac{3}{4}\frac{1}{t^2} + \ldots;$$

$f(t)$ ayant tous ses infinis d'ordre pair, il n'est pas impossible qu'il y ait une intégrale de la forme

$$z = e^{\int \varpi(t)\,dt},$$

$\varpi(t)$ étant rationnel. Cette fonction $\varpi(t)$ devra admettre l'infini $t = 1$ au second ordre, et $t = 0$ au premier; elle pourra avoir, en outre, n'' infinis du premier ordre de résidu 1. Dans le voisinage de $t = 1$,

$$\varpi(t) = \frac{A_2}{(t-1)^2} + \frac{A_1}{(t-1)} + \ldots;$$

donc

$$A_2^2 = 1, \quad 2A_2(A_1 - 1) = 3,$$

ce qui donne deux systèmes de valeurs

$$A'_2 = 1, \qquad A'_1 = \frac{5}{2},$$

$$A''_2 = -1, \quad A''_1 = -\frac{1}{2};$$

dans le voisinage de $t = 0$

$$\varpi(t) = \frac{B_1}{t} + \ldots;$$

donc

$$B_1^2 - B_1 = \frac{3}{4};$$

ce qui donne deux valeurs

$$B'_1 = -\frac{1}{2}, \quad B''_1 = \frac{3}{2}.$$

D'après la relation (8'), il faut

$$A_1 + B_1 + n'' = 1 \quad \text{ou} \quad = 0,$$

car ici n', nombre des infinis du premier ordre de $f(t)$, est nul. Donc $A_1 + B_1 - 1$ doit être un nombre entier négatif ou nul. Or on a

$$\begin{aligned} A'_1 + B'_1 - 1 &= 1, \\ A''_1 + B'_1 - 1 &= -2, \\ A'_1 + B''_1 - 1 &= 3, \\ A''_1 + B''_1 - 1 &= 0. \end{aligned}$$

Les seules combinaisons possibles sont donc

$$A''_1,\ B'_1, \quad n'' = 1 \quad \text{ou} \quad n'' = 2,$$

et

$$A''_1,\ B''_1, \quad n'' = 0.$$

Cette dernière étant la plus simple, essayons la fonction correspondante

$$\varpi(t) = \frac{A''_1}{t-1} + \frac{A''_2}{(t-1)^2} + \frac{B''_1}{t} = -\frac{1}{2}\frac{1}{t-1} - \frac{1}{(t-1)^2} + \frac{3}{2}\frac{1}{t}.$$

On vérifie facilement que

$$\frac{d\varpi}{dt} + \varpi^2 = f(t);$$

donc on a l'intégrale $z = e^{\int \varpi(t)\, dt} = \sqrt{\dfrac{t^3}{t-1}}\, e^{\frac{1}{t-1}}$.

5. Je vais maintenant appliquer la méthode précédente à la solution d'une question plus générale.

Soit $F(x, y) = 0$ une équation algébrique entre x et y; et soit $\psi(x, y)$ une fonction rationnelle de x et y; je considère une équation différentielle de la forme

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = z\psi(x, y), \tag{11}$$

et je me propose de chercher si cette équation admet une intégrale z de la forme

$$z = e^{\int \varphi(x,y)\,dx}, \tag{12}$$

où $\varphi(x,y)$ est rationnel en x et y. Je suppose que la courbe $F(x,y) = 0$ est du degré m et du genre $p > 0$ [1], et que tous les points critiques soient du second ordre, c'est-à-dire qu'il n'y ait que des points où deux racines seulement deviennent égales. On sait que l'on peut, par une substitution rationnelle, ramener le cas général à ce cas particulier.

Comme précédemment, nous transformerons d'abord l'équation (11) en une autre de même forme dans laquelle le point ∞ soit un pôle ou un point ordinaire pour les m branches de la fonction intégrale. Pour cela désignons par $x = x_0$ un point qui ne soit ni un point critique de la fonction algébrique y de x, ni un infini de $\psi(x,y)$; et soient

$$y_{01},\ y_{02},\ \ldots,\ y_{0m}$$

les m valeurs de y correspondant à $x = x_0$. Faisons dans l'équation (11)

$$x = x_0 + \frac{1}{\xi}, \quad y = \frac{\eta}{\xi}, \quad z = \frac{\zeta}{\xi};$$

cette équation devient

$$\frac{d^2\zeta}{d\xi^2} = \frac{1}{\xi^4}\,\psi\left(x_0 + \frac{1}{\xi}, \frac{\eta}{\xi}\right)\zeta \tag{13}$$

avec

$$F\left(x_0 + \frac{1}{\xi}, \frac{\eta}{\xi}\right) = 0,$$

et dans cette nouvelle équation (13) le point $\xi = \infty$ est un pôle ou un point ordinaire, pour les m branches de la fonction intégrale. En effet, dans le voisinage de $x = x_0$, une des valeurs y_i de y est de la forme

$$y_i = y_{0i} + \lambda_{1i}(x - x_0) + \lambda_{2i}(x - x_0)^2 + \ldots \quad (i = 1, 2, \ldots, m);$$

et, si l'on remplace dans l'équation (11) y par ce développement y_i,

---

(1) Le cas de $p = 0$ se ramène immédiatement au problème traité précédemment; il suffit pour cela de remplacer dans (11) x et y par leurs expressions en fonction rationnelle d'un paramètre.

on a dans le voisinage de $x = x_0$ un système fondamental d'intégrales de la forme

$$\left.\begin{aligned} z_{i1} &= \mu_{0i} + \mu_{1i}(x - x_0) + \mu_{2i}(x - x_0)^2 + \ldots \\ z_{i2} &= \nu_{0i} + \nu_{1i}(x - x_0) + \nu_{2i}(x - x_0)^2 + \ldots \end{aligned}\right\} \quad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Dans l'intégrale générale

$$z_i = k_{i1} z_{i1} + k_{i2} z_{i2},$$

on peut déterminer les constantes arbitraires k_{i1} et k_{i2} de façon que z_i devienne nul pour $x = x_0$; mais alors $\frac{dz_i}{dx}$ ne peut pas s'annuler pour $x = x_0$, car autrement, d'après l'équation différentielle, toutes les dérivées de z_i s'annuleraient pour cette valeur.

Si l'on passe aux variables ξ, η, ζ, on voit que, dans le voisinage de $\xi = \infty$, η a m valeurs distinctes de la forme

$$\eta_i = y_{0i}\xi + \lambda_{1i} + \lambda_{2i}\frac{1}{\xi} + \lambda_{3i}\frac{1}{\xi^2} + \ldots,$$

et le système fondamental d'intégrales correspondantes est

$$(14) \qquad \left\{\begin{aligned} \zeta_{i1} &= \xi z_{i1} = \mu_{0i}\xi + \mu_{1i} + \mu_{2i}\frac{1}{\xi} + \mu_{3i}\frac{1}{\xi^2} + \ldots, \\ \zeta_{i2} &= \xi z_{i2} = \nu_{0i}\xi + \nu_{1i} + \nu_{2i}\frac{1}{\xi} + \nu_{3i}\frac{1}{\xi^2} + \ldots; \end{aligned}\right.$$

d'où il résulte qu'une intégrale quelconque

$$\zeta_i = k_{i1}\zeta_{i1} + k_{i2}\zeta_{i2}$$

est infinie du premier ordre pour $\xi = \infty$ ou reste finie, mais ne peut pas s'annuler pour $\xi = \infty$.

De plus, il est évident que, si l'équation (11) admet une intégrale de la forme (12), l'équation (13) admettra une intégrale de la forme

$$\zeta = e^{\int \varpi(\xi, \eta)\, d\xi},$$

où $\varpi(\xi, \eta)$ est une fonction rationnelle

$$\varpi(\xi, \eta) = \frac{1}{\xi} - \frac{1}{\xi^2}\varphi\left(x_0 + \frac{1}{\xi}, \frac{\eta}{\xi}\right),$$

et réciproquement. Faisant alors

$$f(\xi, \eta) = \frac{1}{\xi^4}\,\varphi\left(x_0 + \frac{1}{\xi}, \frac{\eta}{\xi}\right),$$

$$G(\xi, \eta) = F\left(x_0 + \frac{1}{\xi}, \frac{\eta}{\xi}\right),$$

et remplaçant, pour plus de commodité, les lettres ξ, η, ζ par x, y, z, on a une équation différentielle

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = z\,f(x, y) \tag{15}$$

avec

$$G(x, y) = 0,$$

et une intégrale quelconque de l'équation (15) est, pour $x = \infty$, infinie du premier ordre ou finie, mais jamais nulle. Il s'agit alors de chercher si cette équation (15) admet une intégrale de la forme

$$z = e^{\int \varpi(x, y)\, dx}, \tag{16}$$

et, si une pareille intégrale existe, de la trouver. Pour cela, nous emploierons une méthode analogue à la précédente, en nous rappelant qu'une fonction rationnelle $\varpi(x, y)$ de x et y est déterminée quand on connaît sa valeur en un point, ses infinis et la façon dont elle y devient infinie.

L'expression analytique d'une fonction rationnelle déterminée de cette façon est fournie par la formule de Roch, analogue à la formule de décomposition des fractions rationnelles en fractions simples. (Voir *Journal de Crelle*, t. 84, p. 294; Lettre de M. Lindemann à M. Hermite.)

6. Remarquons d'abord que, si l'équation (15) admet une intégrale telle que (16), toutes les déterminations de $\varpi(x, y)$ doivent s'annuler pour $x = \infty$, car autrement le point ∞ serait un point *singulier essentiel* pour une des branches de l'intégrale z, ce qui n'est pas. Soit alors

$$\varpi(x, y_i) = \frac{h_i}{x} + \frac{h_{i1}}{x^2} + \frac{h_{i2}}{x^3} + \ldots \qquad (i = 1, 2, \ldots, m) \tag{17}$$

une des branches de $\varpi(x,y)$ dans le voisinage de $x=\infty$; on a

$$z = e^{\int \varpi(x,y_i)\,dx} = x^{h_i} e^{-\frac{h_{i1}}{x} - \frac{1}{2}\frac{h_{i2}}{x^2} + \dots};$$

et, comme z est infini du premier ordre ou fini, on a

$$h_i = 1 \quad \text{ou bien} \quad h_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

Désignons par N le nombre des quantités h_i qui sont égales à 1 :

$$0 \leqq N \leqq m.$$

7. Pour que l'équation (15) ait une intégrale de la forme (16), il faut et il suffit que

$$\varpi^2(x,y) + \frac{d\varpi(x,y)}{dx} = f(x,y). \tag{18}$$

Soit $x=a$, $y=b$ un pôle de $\varpi(x,y)$ distinct d'un point critique; on a, dans le voisinage de ce point analytique,

$$\varpi(x,y) = \frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_{\alpha-1}}{(x-a)^{\alpha-1}} + \dots + \frac{A_1}{x-a} + P_0 + P_1(x-a) + \dots.$$

On voit, comme précédemment, que si $\alpha > 1$, $f(x,y)$ admet le même infini $x=a$, $y=b$ au degré 2α, et, si l'on fait,

$$f(x,y) = \frac{k_{2\alpha}}{(x-a)^{2\alpha}} + \frac{k_{2\alpha-1}}{(x-a)^{2\alpha-1}} + \dots + \frac{k_{\alpha+1}}{(x-a)^{\alpha+1}} + \dots,$$

$A_1, A_2, \dots, A_\alpha$ sont fournis par les équations (10), qui donnent deux systèmes de valeurs

$$A'_1,\ A'_2,\ \dots,\ A'_\alpha,$$
$$A''_1,\ A''_2,\ \dots,\ A''_\alpha.$$

Si $\alpha = 1$ et si A_1 est différent de 1, $f(x,y)$ admet l'infini a au second degré, et, en supposant

$$f(x,y) = \frac{k_2}{(x-a)^2} + \frac{k_1}{x-a} + \dots,$$

on a

$$A_1^2 - A_1 = k_2,$$

équation qui donne deux valeurs A'_1 et A''_1 pour A_1. Appelons n le nombre des infinis de l'espèce précédente dans $f(x,y)$, c'est-à-dire le nombre des infinis d'ordre pair qui ne coïncident pas avec un point critique. Ce nombre n est connu, puisque $f(x,y)$ est donné.

Mais, si l'on suppose $\alpha = 1$, $A_1 = 1$, $x = a$ n'est plus un infini que du premier ordre de $f(x,y)$, et si, en outre, $P_0 = 0$, $f(x,y)$ n'admet plus l'infini a. Appelons n' le nombre des infinis du premier ordre de $f(x,y)$ ne coïncidant avec aucun point critique; ces infinis proviennent d'infinis du premier ordre de $\varpi(x,y)$ à résidu 1. Le nombre n' est connu. Enfin appelons n'' le nombre des infinis du premier ordre de $\varpi(x,y)$ ayant pour résidu 1, ne coïncidant avec aucun point critique et n'appartenant pas à $f(x,y)$. Ce nombre n'' n'est pas connu actuellement.

8. Cherchons maintenant comment $\dfrac{d\varpi}{dx} + \varpi^2$ devient infini dans le voisinage d'un point critique $x = x_1$, $y = y_1$; nous dirons qu'une fonction devient infinie d'ordre λ au point $(x = x_1, y = y_1)$ si le produit de cette fonction par $(x - x_1)^\lambda$ tend vers une limite différente de zéro quand le point analytique (x,y) tend vers (x_1, y_1).

Supposons que, au point $(x = x_1, y = y_1)$, $\varpi(x,y)$ devienne infini d'ordre $\frac{\alpha}{2}$, α entier.

$$\varpi(x,y) = \frac{C_\alpha}{(x-x_1)^{\frac{\alpha}{2}}} + \frac{C_{\alpha-1}}{(x-x_1)^{\frac{\alpha-1}{2}}} + \ldots + \frac{C_1}{(x-x_1)^{\frac{1}{2}}} + Q_0 + Q_1(x-x_1)^{\frac{1}{2}} + \ldots;$$

on a

$$\begin{aligned}\frac{d\varpi}{dx} + \varpi^2 = {} & \frac{C_\alpha^2}{(x-x_1)^\alpha} + \frac{2C_\alpha C_{\alpha-1}}{(x-x_1)^{\frac{2\alpha-1}{2}}} + \frac{C_{\alpha-1}^2 + 2C_\alpha C_{\alpha-2}}{(x-x_1)^{\alpha-1}} + \ldots \\ & + \frac{2(C_\alpha C_2 + C_{\alpha-1}C_3 + \ldots) - \frac{\alpha}{2}C_\alpha}{(x-x_1)^{\frac{\alpha}{2}+1}} \\ & + \frac{2(C_\alpha C_1 + C_{\alpha-1}C_2 + \ldots) - \frac{\alpha - 1}{2}C_{\alpha-1}}{(x-x_1)^{\frac{\alpha+1}{2}}} + \ldots.\end{aligned}$$

Soit d'abord $\alpha > 2$; alors le terme $\dfrac{C_\alpha^2}{(x-x_1)^\alpha}$ ne peut se réduire avec aucun autre; donc déjà, si $f(x,y)$ devient infini en un point critique d'ordre plus grand que 2, cet ordre est nécessairement un entier α; et, si l'on suppose

$$f(x,y) = \frac{k_{2\alpha}}{(x-x_1)^\alpha} + \frac{k_{2\alpha-1}}{(x-x_1)^{\frac{2\alpha-1}{2}}} + \ldots + \frac{k_{\alpha+1}}{(x-x_1)^{\frac{\alpha+1}{2}}} + \ldots,$$

on a

$$(19)\quad \begin{cases} C_\alpha^2 = k_{2\alpha}, \\ 2\,C_\alpha C_{\alpha-1} = k_{2\alpha-1}, \\ C_{\alpha-1}^2 + 2\,C_\alpha C_{\alpha-2} = k_{2\alpha-2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ 2\,(C_\alpha C_2 + C_{\alpha-1} C_3 + \ldots) - \frac{\alpha}{2}\,C_\alpha = k_{\alpha+2}, \\ 2\,(C_\alpha C_1 + C_{\alpha-1} C_2 + \ldots) - \frac{\alpha-1}{2}\,C_{\alpha-1} = k_{\alpha+1}, \end{cases}$$

ce qui donne α équations déterminant les coefficients $C_1, C_2, \ldots, C_\alpha$. Comme C_α a deux déterminations $\pm\sqrt{k_{2\alpha}}$ et que les relations (19) donnent tous les autres coefficients $C_{\alpha-1}, C_{\alpha-2}, \ldots, C_1$ par des équations du premier degré, on obtient pour $C_1, C_2, \ldots, C_\alpha$ deux systèmes de valeurs :

$$\begin{gathered} C'_1,\ C'_2,\ \ldots,\ C'_\alpha, \\ C''_1,\ C''_2,\ \ldots,\ C''_\alpha. \end{gathered}$$

On fera cette détermination pour tous les infinis de $f(x,y)$ d'ordre supérieur à 2 coïncidant avec des points critiques.

Soit maintenant $\alpha = 2$; alors

$$\varpi(x,y) = \frac{C_2}{x-x_1} + \frac{C_1}{(x-x_1)^{\frac{1}{2}}} + Q_0 + Q_1(x-x)^{\frac{1}{2}} + \ldots,$$

$$(20)\quad \begin{cases} \varpi^2 + \dfrac{d\varpi}{dx} = \dfrac{C_2^2 - C_2}{(x-x_1)^2} + \dfrac{2\,C_1 C_2 - \frac{1}{2} C_1}{(x-x_1)^{\frac{3}{2}}} \\ \qquad + \dfrac{2\,Q_0 C_2 + C_1^2}{x-x_1} + \dfrac{2\,Q_1 C_2 + 2\,Q_0 C_1 + \frac{1}{2} Q_1}{(x-x_1)^{\frac{1}{2}}} + \ldots. \end{cases}$$

Si C_2 est différent de 1, $f(x,y) = \varpi^2 + \dfrac{d\varpi}{dx}$ admet l'infini x_1 au second ordre; et, en supposant

$$f(x,y) = \frac{k_4}{(x-x_1)^2} + \frac{k_3}{(x-x_1)^{\frac{3}{2}}} + \ldots,$$

on a

$$C_2^2 - C_2 = k_4,$$
$$2\,C_1 C_2 - \tfrac{1}{2} C_1 = k_3,$$

relations qui donnent, pour C_1 et C_2, deux couples de valeurs C'_1, C'_2 et C''_1, C''_2.

Supposons maintenant $C_2 = 1$, $C_1 \gtrless 0$; alors $f(x,y)$ est infini d'ordre $\frac{3}{2}$. Mais, si l'on a $C_2 = 0$, $C_1 \gtrless 0$, $f(x,y)$ est encore infini d'ordre $\frac{3}{2}$. Donc, si

$$f(x,y) = \frac{k_3}{(x-x_1)^{\frac{3}{2}}} + \frac{k_2}{x-x_1} + \ldots,$$

on a

$$\varpi(x,y) = \frac{C_2}{x-x_1} + \frac{C_1}{(x-x_1)^{\frac{1}{2}}} + \ldots$$

et

$$C_2^2 - C_2 = 0, \quad 2\,C_1 C_2 - \tfrac{1}{2} C_1 = k_3;$$

d'où deux systèmes de valeurs, pour C_1 et C_2,

$$C'_1 = -2k_3, \quad C'_2 = 0$$

et

$$C''_1 = \tfrac{2}{3} k_3, \quad C''_2 = 1.$$

Appelons q le nombre des infinis de $f(x,y)$ coïncidant avec des points critiques et d'ordre supérieur ou égal à $\frac{3}{2}$; ce nombre q est connu. A chacun de ces points correspondent deux systèmes de valeurs pour les constantes $C_1, C_2, \ldots, C_\alpha$; ce qui fait en tout 2^q groupes de valeurs pour l'ensemble de ces constantes.

Il peut arriver que le développement (20) de $\varpi^2 + \dfrac{d\varpi}{dx}$ soit infini du premier ordre; cela aura lieu si

$$C_2 = 1, \quad C_1 = 0, \quad Q_0 \gtrless 0,$$

et alors seulement. Donc, si $f(x,y)$ devient infini du premier ordre en un point critique $x = x_1$, on a, dans le voisinage de ce point,

$$(21) \qquad \varpi(x, y) = \frac{1}{x - x_1} + Q_0 + Q_1(x - x_1)^{\frac{1}{2}} + \ldots.$$

Désignons par q' le nombre des infinis du premier ordre de $f(x, y)$ coïncidant avec des points critiques; ce nombre q' est connu.

Il peut encore arriver que $\varpi^2 + \frac{d\varpi}{dx}$ soit infini d'ordre $\frac{1}{2}$; et cela peut arriver de deux façons : ou bien en faisant

$$C_2 = 1, \quad C_1 = 0, \quad Q_0 = 0,$$

ou bien

$$C_2 = 0, \quad C_1 = 0.$$

Dans le premier cas, $\varpi(x, y)$ admet l'infini x_1 du premier ordre avec le résidu 1 :

$$(22) \qquad \varpi(x, y) = \frac{1}{x - x_1} + Q_1(x - x_1)^{\frac{1}{2}} + \ldots;$$

dans le second cas, $\varpi(x, y)$ n'admet pas l'infini $x = x_1$. Appelons q'' le nombre des points critiques où $f(x, y)$ devient infini d'ordre $\frac{1}{2}$; q'' est connu. Ces q'' infinis de $f(x, y)$ proviennent de q''_1 points où $\varpi(x, y)$ devient infini de la façon indiquée équation (22) et de q''_2 points où $\varpi(x, y)$ reste fini :

$$(23) \qquad q''_1 + q''_2 = q''.$$

Ces deux nombres q''_1 et q''_2 ne sont pas connus.

Enfin, il peut arriver que $f(x, y) = \varpi^2 + \frac{d\varpi}{dx}$ n'admette plus l'infini $x = x_1$ de $\varpi(x, y)$; cette circonstance se présente lorsque

$$C_2 = 1, \quad C_1 = 0, \quad Q_0 = 0, \quad Q_1 = 0,$$

$$(24) \qquad \varpi(x, y) = \frac{1}{x - x_1} + Q_2(x - x_1) + Q_3(x - x_1)^{\frac{3}{2}} + \ldots.$$

Appelons q''' le nombre des infinis du premier ordre de $\varpi(x, y)$ coïncidant avec des points singuliers et n'appartenant pas à $\varpi^2 + \frac{d\varpi}{dx}$; ce nombre q''' est, pour le moment, inconnu.

9. Si l'équation (15) admet une intégrale de la forme $e^{\int \varpi dx}$, il y a, entre les quantités A et C précédemment déterminées et les nombres entiers positifs ou nuls N, n', n'', q', q''_1, q''', la relation

$$(25)\qquad -N + \Sigma A_1 + 2\Sigma C_2 + n' + n'' + 2q' + 2q''_1 + 2q''' = 0,$$

avec

$$0 \leqq N \leqq m, \quad 0 \leqq q''_1 \leqq q''.$$

De cette relation (25), que nous démontrerons plus loin, on tire

$$(25')\qquad \Sigma A_1 + 2\Sigma C_2 + n' + 2q' - m = -(m - N) - n'' - 2q''_1 - 2q''',$$

et l'on voit que le second membre de cette relation (25′) est égal à un *nombre entier négatif ou nul*.

Nous avons trouvé, pour ΣA_1, 2^n déterminations et, pour ΣC_2, 2^q déterminations; donc la somme

$$(26)\qquad \Sigma A_1 + 2\Sigma C_2 + n' + 2q' - m$$

a 2^{n+q} déterminations. D'après (25′), il faudra écarter celles pour lesquelles la somme (26) n'est pas un entier négatif ou nul. Il peut arriver que, de cette façon, il faille écarter les 2^{n+q} déterminations; alors l'équation différentielle n'admet pas d'intégrale de la forme supposée.

Mais imaginons qu'il y ait certaines déterminations des A et des C pour lesquelles la somme (26) soit un entier négatif ou nul. Prenons l'une d'elles, et soit

$$\Sigma A_1 + 2\Sigma C_2 + n' + 2q' - m = -M;$$

alors, d'après (25′),

$$(27)\qquad (m - N) + n'' + 2q''_1 + 2q''' = M,$$

avec

$$0 \leqq (m - N) \leqq m, \quad 0 \leqq q''_1 \leqq q'', \quad q''_1 + q''_2 = q''.$$

Il y a un nombre limité de systèmes de nombres positifs ou nuls $(m - N)$, n'', q''_1, q''' satisfaisant à ces relations. Prenons un de ces systèmes; il reste alors à former une fonction rationnelle $\varpi(x, y)$ devenant infinie :

1° En n points non critiques *connus*, comme

$$\frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha}+\frac{A_{\alpha-1}}{(x-a)^{\alpha-1}}+\ldots+\frac{A_1}{x-a};$$

2° En n' points non critiques *connus*, comme

$$\frac{1}{x-a};$$

3° En n'' points non critiques *inconnus* $a_1, a_2, \ldots, a_{n''}$, comme

$$\frac{1}{x-a_i};$$

4° En q points critiques *connus*, comme

$$\frac{C_\alpha}{(x-x_1)^{\frac{\alpha}{2}}}+\frac{C_{\alpha-1}}{(x-x_1)^{\frac{\alpha-1}{2}}}+\ldots+\frac{C_1}{(x-x_1)^{\frac{1}{2}}};$$

5° En q' points critiques *connus*, comme

$$\frac{1}{x-x_1};$$

6° En q''_1 points critiques *inconnus* $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_{q''_1}$ *à choisir parmi q'' points critiques connus,* comme

$$\frac{1}{x-\zeta_i};$$

7° Enfin, en q''' points critiques *inconnus* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{q'''}$, comme

$$\frac{1}{x-\xi_i}.$$

Il y a un nombre

$$l=\frac{q''(q''-1)\ldots(q''-q''_1+1)}{1.2\ldots q''_1}$$

de manières différentes de choisir les q''_1 points critiques $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_{q''_1}$ parmi q'' points critiques connus; et, si l'on appelle S le nombre total des points critiques, il y a un nombre

$$l'=\frac{S(S-1)\ldots(S-q'''-1)}{\ldots q'''}$$

de manières différentes de choisir les q''' points critiques $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{q'''}$. Il y a donc en tout ll' manières de choisir les points ζ_i et ξ_i. Prenons l'une d'entre elles. Nous avons alors à former une fonction rationnelle ϖ devenant infinie d'une façon connue en $n + n' + q + q' + q''_1 + q'''$ points déterminés et devenant infinie comme $\frac{1}{x - a_i}$ en n'' points *non critiques inconnus* $a_1, a_2, \ldots, a_{n''}$. Pour que cette fonction rationnelle $\varpi(x, y)$ existe, il faut que les infinis et les numérateurs des termes principaux correspondants vérifient p relations connues (voir *Journal de Crelle*, t. 84, Lettre de M. Lindemann à M. Hermite, au bas de la page 294). Supposons que ces p relations ne soient pas impossibles et que l'on puisse y satisfaire par des systèmes de valeurs de $a_1, a_2, \ldots, a_{n''}$ en nombre fini ou infini. On formera, à l'aide de la formule de Roch, l'expression de la fonction rationnelle devenant infinie de la façon indiquée, les quantités a_i étant liées par les p relations de condition. L'expression générale de $\varpi(x, y)$ contient une constante additive inconnue; mais toutes les déterminations de $\varpi(x, y)$ doivent s'annuler pour $x = \infty$ (n° 6); en écrivant qu'une des déterminations de $\varpi(x, y)$ est nulle pour $x = \infty$, on a la valeur de la constante additive exprimée en $a_1, a_2, \ldots, a_{q''}$; et les équations obtenues en écrivant que les $(m - 1)$ autres déterminations de $\varpi(x, y)$ sont nulles pour $x = \infty$ fourniront $(m - 1)$ équations nouvelles entre $a_1, a_2, \ldots, a_{q'''}$. S'il est possible de satisfaire à la fois à toutes ces équations, il ne reste plus qu'à voir si l'on peut déterminer les quantités encore arbitraires dans $\varpi(x, y)$, de façon que

$$\varpi^2 + \frac{d\varpi}{dx} = f(x, y).$$

Pour cela, il suffit d'écrire que

$$\varpi^2 + \frac{d\varpi}{dx},$$

et $f(x, y)$ deviennent infinis aux mêmes points et de la même manière, car l'une et l'autre de ces deux fonctions s'annulent pour $x = \infty$. Si cela a lieu, l'équation proposée admet l'intégrale $z = e^{\int \varpi\, dx}$; si cela n'a pas lieu, on prendra une autre des ll' combinaisons des points critiques ξ_i et ζ_i, que l'on essayera de la même façon. En essayant toutes les combinaisons de valeurs des constantes A et C, tous les systèmes de valeurs des nombres N, n'', q''_1, q''', et enfin toutes les combinaisons possibles des points critiques ξ_i et ζ_i, on arrivera, au bout d'un nombre limité d'essais, à voir si l'équation admet une intégrale de la forme $e^{\int \varpi dx}$ et à trouver cette intégrale si elle existe.

10. Pour ne pas interrompre la suite des raisonnements, nous avons donné, sans démonstration, la formule (25). Cette formule résulte de l'application à l'intégrale $\int \varpi(x, y) dx$ de ce théorème de Riemann, que la somme des résidus logarithmiques de l'intégrale d'une fonction algébrique est nulle. Voici une démonstration particulière de cette formule.

Si l'équation différentielle proposée (15) admet une intégrale de la forme

$$z = e^{\int \varpi(x, y)\, dx},$$

la fonction z a m déterminations

$$z_i = e^{\int \varpi(x, y_i)\, dx} \quad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

et nous avons vu que, de ces m fonctions z_i, N devenaient infinies du premier ordre avec x et $m - \mathrm{N}$ restaient finies et différentes de zéro quand $x = \infty$ (n° 6). Donc le produit

$$z_1 z_2 \ldots z_m = e^{\int [\varpi(x, y_1) + \varpi(x, y_2) \ldots + \varpi(x, y_m)]\, dx}$$

devient, au point $x = \infty$, infini du même ordre que x^{N}. D'autre part, la somme

$$\sum_{i=1}^{i=m} \varpi(x, y_i)$$

est une fonction rationnelle de x s'annulant pour $x = \infty$; cette fonction, décomposée en fractions simples, prend la forme suivante, ainsi qu'il résulte des suppositions faites sur les infinis de $\varpi(x, y)$

$$\left\{\begin{aligned} \sum_{i=1}^{i=m} \varpi(x, y_i) = {} & \sum_{n} \left[\frac{\mathrm{A}_1}{x - a} + \frac{\mathrm{A}_2}{(x - a)^2} + \ldots + \frac{\mathrm{A}_\alpha}{(x - a)^\alpha} \right] + \sum_{n'} \frac{1}{x - a} + \sum_{n''} \frac{1}{x - a_i} \\ & + 2 \sum_{q} \left[\frac{\mathrm{C}_2}{x - x_1} + \frac{\mathrm{C}_4}{(x - x_1)^2} + \ldots \right] + 2 \sum_{q'} \frac{1}{x - x_1} + 2 \sum_{q''_1} \frac{1}{x - \zeta_i} + 2 \sum_{q'''} \frac{1}{x - \xi_i}, \end{aligned}\right.$$

chacune des sommes du second membre contenant un nombre de termes marqué par l'indice placé en dessous du signe Σ correspondant. Dans cette formule (28), les termes qui proviennent des points critiques ont le coefficient 2, car chacun de ces infinis appartient à deux branches de la fonction $\varpi(x, y)$. Il résulte de cette formule (28) que la fonction $e^{\int \Sigma \varpi(x,y)\,dx}$ devient, au point $x = \infty$, infinie de l'ordre de $x^{\Sigma A_1 + n' + n'' + 2\Sigma C_2 + 2q' + 2q''_1 + 2q'''}$; et, comme cette même fonction devient infinie de l'ordre de x^{N}, on a

$$N = \Sigma A_1 + n' + n'' + 2\Sigma C_2 + 2q' + 2q''_1 + 2q''',$$

relation qui n'est autre que la formule (25).

11. J'ai déjà fait remarquer en note (n° 5) que, si le genre p de la courbe $F(x, y) = 0$ est égal à zéro, on ramène immédiatement l'équation différentielle (11) à une équation de la forme (1) à coefficients rationnels; et, si l'équation (11) admet une intégrale de la forme (12), l'équation différentielle à coefficients rationnels qu'on en déduit admettra une intégrale de la forme (2).

Si l'on suppose $p = 1$, l'équation (11) peut être ramenée à une équation du second ordre à coefficients uniformes doublement périodiques. En effet, on a, dans ce cas,

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t),$$

f_1 et f_2 étant uniformes et doublement périodiques; en remplaçant x et y par leurs expressions en t dans l'équation (11), et faisant, en outre,

$$z = u\sqrt{f'_1(t)},$$

cette équation (11) prend la forme

$$\frac{d^2 u}{dt^2} = u\,\Phi(t) \tag{29}$$

où $\Phi(t)$ est une fonction uniforme de t doublement périodique et n'ayant pas de point singulier essentiel à distance finie. De plus, si l'équation (11) admet une intégrale de la forme (12), l'équation (29) admettra une intégrale de la forme

$$u = e^{\int \Pi(t)\,dt}, \tag{30}$$

où $\Pi(t)$ est une fonction uniforme doublement périodique sans points singuliers essentiels à distance finie; et réciproquement. La méthode générale exposée précédemment conduit donc, dans le cas de $p=1$, à l'intégration d'une classe nouvelle d'équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients doublement périodiques qui comprend comme cas particuliers les équations étudiées par M. Fuchs (*Journal de Liouville*, 3e série, t. IV, p. 125; 1878), et les équations de second ordre comprises dans la classe des équations considérées par M. Picard.

Il paraît intéressant d'indiquer pour ce cas particulier de $p=1$ une méthode directe permettant de voir si une équation différentielle de la forme (29) admet une intégrale de la forme (30), et de trouver cette intégrale si elle existe. Cette méthode, que je vais exposer, est analogue à celle que j'ai appliquée à l'équation (1).

12. Pour que l'équation (29) admette pour intégrale la fonction (30), il faut et il suffit que l'on ait

$$\Phi(t)=\Pi^2(t)+\Pi'(t). \tag{31}$$

Or soient $a, b, c, \ldots, l$ les pôles de $\Pi(t)$ dans un parallélogramme des périodes; a étant un infini d'ordre α, b d'ordre β, ..., l d'ordre λ. On a, d'après une formule de M. Hermite,

$$(32)\left\{\begin{aligned}\Pi(t)=\text{const.}+\sum\Bigg[&\frac{(-1)^{\alpha-1}A_\alpha}{1.2\ldots(\alpha-1)}\frac{d^{\alpha-1}Z(t-a)}{dt^{\alpha-1}}+\frac{(-1)^{\alpha-2}A_{\alpha-1}}{1.2\ldots(\alpha-2)}\frac{d^{\alpha-2}Z(t-a)}{dt^{\alpha-2}}+\ldots\\&+\frac{(-1)A_2}{1}\frac{dZ(t-a)}{dt}+A_1Z(t-a)\Bigg]\end{aligned}\right.$$

la sommation étant étendue à tous les pôles, avec la condition

$$\Sigma A_1=0. \tag{33}$$

Alors, dans le voisinage de $t=a$, la fonction $\Pi(t)$ devient infinie comme

$$\frac{A_\alpha}{(t-a)^\alpha}+\frac{A_{\alpha-1}}{(t-a)^{\alpha-1}}+\ldots+\frac{A_2}{(t-a)^2}+\frac{A_1}{t-a},$$

En appliquant textuellement les raisonnements du n° **2**, on trouve qu'en supposant

$$\Phi(t)=K+\sum\left[\frac{(-1)^{\alpha'-1}K_{\alpha'}}{1.2\ldots(\alpha'-1)}\frac{d^{\alpha'-1}Z(t-a)}{dt^{\alpha'-1}}+\ldots+K_1Z(t-a)\right]$$

et $\alpha' > 2$, il faut que α' soit pair,

$$\alpha' = 2\alpha,$$

et alors les coefficients $A_1, A_2, \ldots, A_\alpha$ sont donnés par les relations (10) fournissant pour $A_1, A_2, \ldots, A_\alpha$ deux systèmes de valeurs

$$A'_1,\ A'_2,\ \ldots,\ A'_\alpha,$$
$$A''_1,\ A''_2,\ \ldots,\ A''_\alpha.$$

Si $\alpha' = 2$, le pôle $t = a$ est du premier ordre dans $\Pi(t)$, et l'on a

$$A_1^2 - A_1 = K_2,$$

relation qui donne encore deux valeurs pour A_1, A'_1 et A''_1.

Si $\alpha' = 1$, le pôle $t = a$ est du premier ordre dans $\Pi(t)$, et le résidu correspondant est égal à 1.

Enfin il peut arriver que $\Pi(t)$ admette des pôles du premier ordre de résidu 1 qui n'appartiennent pas à $\Phi(t)$. Désignons, comme dans le n° 3, par n, n', n'' le nombre de pôles de chacune de ces trois catégories. S'il existe une fonction $\Pi(t)$, on aura

$$\Sigma A_1 + n' + n'' = 0,$$
$$\Sigma A_1 + n' = -n''. \tag{34}$$

La somme ΣA_1 possède 2^n déterminations distinctes, puisque chacune des n quantités A_1 a deux valeurs A'_1 et A''_1. A cause de la relation (34), il faut exclure de toutes ces déterminations celles pour lesquelles

$$\Sigma A_1 + n'$$

n'est pas un entier négatif ou nul. S'il y a des déterminations satisfaisant à la condition (34), on formera la fonction $\Pi(t)$ correspondante contenant une constante additive inconnue et n'' termes

$$Z(t - a_1) + Z(t - a_2) + \ldots + Z(t - a_{n''}),$$

les a_i étant inconnus. Il restera à voir si l'on peut déterminer cette constante et les pôles a_i de façon que

$$\Pi^2 + \Pi' = \Phi(t).$$

On arrivera ainsi, après un nombre limité d'essais, à voir si l'équation (29) admet des intégrales de la forme (30), et à trouver ces intégrales si elles existent.

13. Lorsque le genre p de la relation $F(x, y) = 0$ est 0 ou 1, nous avons pu remplacer l'équation différentielle (11) par une autre dont les coefficients sont des fonctions uniformes d'une nouvelle variable t, rationnelles si $p = 0$, doublement périodiques si $p = 1$. Lorsque le genre p surpasse l'unité, on peut déduire de l'équation différentielle (11) un système de p équations simultanées aux dérivées partielles dont les coefficients sont des fonctions uniformes de p variables à $2p$ groupes de périodes conjuguées. (*Voir*, à la fin du Mémoire, une remarque générale sur les équations différentielles linéaires à coefficients rationnels en x et y).

14. Si l'on considère des équations différentielles linéaires binômes de la forme

$$\frac{d^k z}{dx^k} = \psi(x, y) . z, \tag{35}$$

où $\psi(x, y)$ est rationnel en x et y, les deux variables y et x étant liées par une équation algébrique

$$F(x, y) = 0,$$

on peut, par une méthode analogue à la précédente, reconnaître si l'équation (35) admet des intégrales de la forme $z = e^{\int \varphi(x,y)\, dx}$, φ étant rationnel, et trouver ces intégrales si elles existent.

On commencera par ramener l'équation (35) à une autre de même forme dans laquelle le point ∞ est un pôle au plus d'ordre $(k-1)$ pour toutes les branches de l'intégrale, certaines intégrales particulières pouvant être finies en ce point, mais aucune n'y devenant nulle. Pour le montrer, désignons par x_0 un point non critique de la fonction y de x où la fonction $\psi(x, y)$ reste finie. Dans le domaine de ce point, une branche quelconque de l'intégrale z sera de la forme

$$z = A_0 + A_1(x - x_0) + A_2(x - x_0)^2 + \ldots, \tag{36}$$

où A_0, A_1, A_2, ..., A_{k-2} peuvent être nuls, A_{k-1} étant alors nécessairement différent de zéro.

(Si l'on avait à la fois $A_0 = A_1 = A_2 = \ldots = A_{k-2} = A_{k-1} = 0$, la fonction z et toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre $(k-1)$ inclusivement s'annuleraient au point $x = x_0$; et alors, d'après l'équation différentielle, toutes les dérivées d'ordre supérieur s'annuleraient au même point, ce qui est impossible.)

Faisons alors dans l'équation différentielle la substitution

$$x = x_0 + \frac{1}{t},$$

cette équation devient

$$\begin{aligned} & t^{2k}\frac{d^k z}{dt^k} + \frac{k}{1}(k-1)t^{2k-1}\frac{d^{k-1}z}{dt^{k-1}} + \ldots \\ & \quad + \frac{k(k-1)\ldots(k-q+1)}{1.2\ldots q}(k-1)(k-2)\ldots(k-q)\,t^{2k-q}\frac{d^{k-q}z}{dt^{k-q}} + \ldots \\ & \quad + 2.3\ldots k.t^{k+1}\frac{dz}{dt} \\ & = (-1)^k \psi\left(x_0 + \frac{1}{t}, y\right).z; \end{aligned}$$

et, en faisant $\zeta = t^{k-1}z$,

$$\frac{d^k\zeta}{dt^k} = \frac{(-1)^k}{t^{2k}}\psi\left(x_0 + \frac{1}{t}, y\right).\zeta. \tag{37}$$

Cette équation est de la même forme que l'équation (35); de plus, dans le voisinage du point $t = \infty$, $(x = x_0)$, la branche ζ de cette nouvelle fonction intégrale correspondant à la branche (36) de l'intégrale z est de la forme

$$\zeta = t^{k-1}\left(A_0 + A_1\frac{1}{t} + A_2\frac{1}{t^2} + \ldots + A_{k-1}\frac{1}{t^{k-1}} + \ldots\right);$$

le point $t = \infty$ est donc un pôle au plus d'ordre $k-1$; la fonction ζ peut rester finie pour $t = \infty$ si les coefficients $A_0, A_1, \ldots, A_{k-2}$ sont nuls; mais elle ne peut pas s'annuler pour $t = \infty$, car il faudrait pour cela que l'on ait

$$A_0 = A_1 = \ldots = A_{k-2} = A_{k-1} = 0;$$

ce qui est impossible.

Après que l'équation a été ramenée à cette forme (37), on pourra lui appliquer la méthode des n^os 7 et suivants. Il me paraît inutile de répéter ici les raisonnements employés dans ces numéros; je traite plus loin, comme exemple, le cas de $k=3$ en prenant pour $\psi(x,y)$ une fonction rationnelle de la seule variable x, et cherchant les intégrales de la forme $e^{\int\varphi(x)\,dx}$, φ étant rationnel en x.

La méthode employée (nº 12) dans le cas particulier de l'équation (29), où $\Phi(t)$ est doublement périodique en t, s'étend de même à l'équation

$$\frac{d^k z}{dt^k} = z\Phi(t),$$

où $\Phi(t)$ a la même signification, et permet de trouver, lorsqu'elles existent, les intégrales de la forme $e^{\int\Pi(t)\,dt}$, $\Pi(t)$ étant uniforme et doublement périodique.

15. Considérons une équation de troisième ordre de la forme

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = y.\psi(x), \tag{38}$$

$\psi(x)$ étant rationnel. Nous supposerons que, par la transformation indiquée (nº 14), on ait ramené le point $x=\infty$ à être un pôle au plus du second ordre pour l'intégrale générale, certaines intégrales particulières pouvant devenir infinies du premier ordre ou même rester finies en ce point, mais aucune d'entre elles ne pouvant y devenir nulle. Voici comment on pourra trouver les intégrales de la forme

$$y = e^{\int\varphi(x)\,dx}, \tag{39}$$

$\varphi(x)$ étant rationnelle, si ces intégrales existent. Tout d'abord, le point $x=\infty$ n'étant pas un point singulier essentiel pour l'intégrale générale, il faut que $\varphi(x)$ s'annule pour $x=\infty$. Soient $a, b, \ldots, l$ les pôles de la fraction rationnelle $\varphi(x)$; la décomposition en fractions simples donne

$$\begin{aligned}\varphi(x) = {} & \frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_{\alpha-1}}{(x-a)^{\alpha-1}} + \ldots + \frac{A_1}{x-a} \\ & + \frac{B_\beta}{(x-b)^\beta} + \ldots + \frac{B_1}{x-b} + \ldots + \frac{L_\lambda}{(x-l)^\lambda} + \ldots + \frac{L_1}{(x-l)}.\end{aligned}$$

Au point $x = \infty$ la fonction (39) devient infinie comme

$$x^{A_1 + B_1 + \ldots + L_1};$$

donc, d'après ce que nous avons dit sur les intégrales de l'équation (38),

$$A_1 + B_1 + \ldots + L_1 = k, \tag{40}$$

k désignant un entier qui a l'une des trois valeurs 0, 1 ou 2. En d'autres termes, la somme des résidus de la fraction rationnelle $\varphi(x)$ doit être l'un des nombres 0, 1 ou 2.

Pour que l'expression (39) soit une intégrale de l'équation (38), il faut et il suffit que l'on ait

$$\varphi^3(x) + 3\varphi(x).\varphi'(x) + \varphi''(x) = f(x), \tag{41}$$

ainsi qu'il résulte de la substitution de l'expression (39) dans l'équation différentielle.

Soit d'abord $x = a$ un infini de $\varphi(x)$ d'un degré égal ou supérieur à 2. Dans le voisinage de ce point $\varphi(x)$ est de la forme

$$\varphi(x) = \frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_{\alpha-1}}{(x-a)^{\alpha-1}} + \ldots + \frac{A_1}{(x-a)} + P_0 + P_1(x-a) + \ldots;$$

alors, dans le voisinage de ce même point, on a

$$(42)\quad \left\{ \begin{aligned} \varphi^3 + 3\varphi\varphi' + \varphi'' = {} & \frac{A_\alpha^3}{(x-\alpha)^{3\alpha}} + \frac{3A_\alpha^2 A_{\alpha-1}}{(x-a)^{3\alpha-1}} + \frac{3A_\alpha^2 A_{\alpha-2} + 3A_\alpha A_{\alpha-1}^2}{(x-a)^{3\alpha-2}} \\ & + \frac{3A_\alpha^2 A_{\alpha-3} + A_{\alpha-1}^3 + 6A_\alpha A_{\alpha-1} A_{\alpha-2}}{(x-a)^{3\alpha-3}} + \ldots \\ & + \frac{3A_\alpha^2 A_1 + 3A_{\alpha-1}^2 A_3 + \ldots - 3\alpha A_\alpha^2}{(x-a)^{2\alpha+1}} + \ldots. \end{aligned} \right.$$

Les termes suivants du développement contiennent les coefficients P_0, P_1, ... Nous voyons donc que, si $f(x)$ admet des infinis d'ordre α' supérieur ou égal à 6, α' est un multiple de 3,

$$\alpha' = 3\alpha;$$

et si dans le voisinage d'un de ces infinis on a

$$f(x) = \frac{K_{3\alpha}}{(x-a)^{3\alpha}} + \frac{K_{3\alpha-1}}{(x-a)^{3\alpha-1}} + \ldots + \frac{K_{2\alpha+1}}{(x-a)^{2\alpha+1}} + \ldots,$$

on devra avoir, en vertu de l'équation (41) et du développement (42),

$$
(43)\qquad \left\{
\begin{aligned}
& A_\alpha^3 = K_{3\alpha}, \\
& 3A_\alpha^2 A_{\alpha-1} = K_{3\alpha-1}, \\
& 3A_\alpha^2 A_{\alpha-2} + A_\alpha A_{\alpha-1}^2 = K_{3\alpha-2}, \\
& 3A_\alpha^2 A_{\alpha-3} + 3A_{\alpha-1}^3 + 6A_\alpha A_{\alpha-1} A_{\alpha-2} = K_{3\alpha-3}, \\
& \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\
& 3A_\alpha^2 A_1 + 3A_{\alpha-1}^2 A_3 + 6A_\alpha A_{\alpha-1} A_2 + \dots - 3\alpha A_\alpha^2 = K_{2\alpha+1}.
\end{aligned}
\right.
$$

Ces équations donnent, pour $A_1, A_2, \dots, A_\alpha$, trois systèmes de valeurs; car A_α a trois valeurs, et $A_{\alpha-1}, A_{\alpha-2}, \dots, A_1$ sont donnés successivement par des équations du premier degré. Faisons cette détermination pour tous les infinis de $f(x)$ d'ordre égal ou supérieur à 6.

Considérons maintenant un infini du premier ordre de $\varphi(x)$:

$$
(44)\qquad \varphi(x) = \frac{A_1}{x-a} + P_0 + P_1(x-a) + P_2(x-a)^2 + \dots.
$$

Alors

$$
(45)\qquad \left\{
\begin{aligned}
\varphi^3 + 3\varphi\varphi' + \varphi'' = {} & \frac{A_1(A_1-1)(A_1-2)}{(x-a)^3} \\
& + \frac{3A_1P_0(A_1-1)}{(x-a)^2} + \frac{3A_1(P_0^2 + A_1P_1)}{x-a} + \dots.
\end{aligned}
\right.
$$

Supposons d'abord que le résidu A_1 ne soit égal ni à 1 ni à 2; dans ce cas $x = a$ est un infini du troisième degré pour l'expression (45). Donc, si l'on a

$$
f(x) = \frac{K_3}{(x-a)^3} + \frac{K_2}{(x-a)^2} + \frac{K_1}{(x-a)} + \dots,
$$

le pôle $x = a$ est un infini simple pour $\varphi(x)$, et le résidu correspondant A_1 est donné par l'équation

$$
A_1(A_1-1)(A_1-2) = K_3,
$$

qui fournit encore trois valeurs pour A_1.

Appelons n le nombre total des infinis de $f(x)$ d'ordre 3α, $(\alpha = 1, 2, \dots)$. Ce nombre n est connu

Si, dans l'expression (45), nous supposons $A_1 = 2$, le premier terme au moins disparaît; et si nous supposons $A_1 = 1$, les deux premiers termes au moins disparaissent. Si donc $f(x)$ admet un infini du second ordre, $\varphi(x)$ a dans le voisinage de cet infini la forme (44), où $A = 2$. Appelons n' le nombre connu des infinis du second ordre de $f(x)$.

Le développement (45) commence par le terme en $\frac{1}{x-a}$ dans deux cas différents : lorsque $A_1 = 1$, ou bien lorsque $A_1 = 2$ avec $P_0 = 0$. Donc, si $f(x)$ devient infini du premier ordre en un point $x = a$, $\varphi(x)$ a, dans le voisinage de ce point, l'une des deux formes

$$\varphi(x) = \frac{1}{x-a} + P_0 + P_1(x-a) + \ldots, \tag{46}$$

$$\varphi(x) = \frac{2}{x-a} + P_1(x-a) + \ldots. \tag{47}$$

Appelons n'' le nombre connu des infinis du premier ordre de $f(x)$; désignons par n''_1 le nombre de ces infinis dans le voisinage desquels $\varphi(x)$ a la forme (46), et par n''_2 le nombre de ces infinis dans le voisinage desquels $\varphi(x)$ a la forme (47). Ces nombres n''_1 et n''_2 sont pour le moment inconnus, et l'on a

$$n''_1 + n''_2 = n''.$$

Enfin, il peut arriver que le développement (45) ne contienne plus l'infini $x = a$, et cela de deux façons différentes : lorsque $A_1 = 1$, $P_0^2 + P_1 = 0$, ou bien lorsque $A_1 = 2$, $P_0 = 0$, $P_1 = 0$. Dans le voisinage de ces points, $\varphi(x)$ a l'une ou l'autre des deux formes

$$\varphi(x) = \frac{1}{x-a} + P_0 - P_0^2(x-a) + P_2(x-a)^2 + \ldots, \tag{48}$$

$$\varphi(x) = \frac{2}{x-a} + P_2(x-a)^2 + \ldots. \tag{49}$$

Appelons m_1 le nombre inconnu de points inconnus, dans le voisinage desquels φ a la forme (48), et m_2 celui des points également inconnùs, dans le voisinage desquels φ a la forme (49). En appliquant à la fonction $\varphi(x)$ cherchée la formule (40) relative à la somme des résidus de $\varphi(x)$, nous avons la condition

$$\Sigma A_1 + 2n' + n''_1 + 2n''_2 + m_1 + 2m_2 = k \quad (k = 0, \text{ ou } 1, \text{ ou } 2). \tag{50}$$

Comme $n''_1 + n''_2 = n''$, nombre connu, on peut écrire cette relation

$$\Sigma A_1 + 2n' + n'' - 2 = -(2-k) - n''_2 - m_1 - 2m_2; \tag{51}$$

comme les entiers $2-k$, n''_2, m_1, $2m_2$ sont positifs ou nuls, le premier membre de cette dernière relation

$$\Sigma A_1 + 2n' + n'' - 2 \tag{52}$$

doit être un *entier négatif ou nul.*

Puisque chacune des quantités A_1 a trois déterminations distinctes, la somme ΣA_1 a 3^n déterminations. A cause de la relation (51), il faut exclure de toutes ces déterminations celles pour lesquelles la quantité (52) n'est pas un entier négatif ou nul.

Supposons qu'il y ait des déterminations de ΣA_1 pour lesquelles la quantité (52) est un entier négatif ou nul, et choisissons l'une d'elles pour laquelle

$$\Sigma A_1 + 2n' + n'' - 2 = -N.$$

Il restera alors, pour essayer cette détermination, à prendre des nombres entiers positifs k, n''_2, m_1, m_2 vérifiant la relation

$$(2-k) + n''_2 + m_1 + 2m_2 = N, \tag{53}$$

avec

$$0 \leqq k \leqq 2, \quad 0 \leqq n''_2 \leqq n''.$$

Les nombres entiers satisfaisant à ces conditions sont en nombre fini. Ayant pris un de ces systèmes de nombres, on formera une fonction $\varphi(x)$ rationnelle devenant infinie :

En n points connus, comme

$$\frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_{\alpha-1}}{(x-a)^{\alpha-1}} + \dots + \frac{A_1}{x-a};$$

En n' points connus, comme

$$\frac{2}{x-a};$$

En $n''_1 = n'' - n''_2$ points, à choisir parmi n'' points connus, comme la fonction (46);

En n''_2 points déterminés par le choix des n''_1 points précédents, comme la fonction (47);

En m_1 points $a_1, a_2, \dots, a_{m_1}$ inconnus, comme la fonction (48);

Et, enfin, en m_2 points $b_1, b_2, \dots, b_{m_2}$ inconnus, comme la fonction (49).

Cette fonction $\varphi(x)$ étant formée, on essayera de déterminer les points a_i et b_i, de façon à vérifier la relation (41). Après un nombre limité d'essais de cette espèce, on arrivera à déterminer les intégrales de la forme (39) ou à démontrer qu'il n'en existe pas de cette forme.

16. Soit, par exemple, l'équation

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{6}{x^3(x-1)}y. \tag{54}$$

On vérifie d'abord que le point ∞ est un pôle au plus de l'ordre 2; la transformation initiale indiquée dans la théorie générale est donc inutile.

Dans le cas actuel, la fonction $f(x)$ est égale à $\frac{6}{x^3(x-1)}$, et l'on a

$$f(x) = \frac{6}{x-1} - 6\left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}\right).$$

Cette fonction n'a qu'un infini d'ordre 3α; c'est l'infini $x = 0$, pour lequel $\alpha = 1$. Le nombre appelé n dans la théorie générale est donc ici égal à l'unité. La fonction $f(x)$ n'a pas d'infini du second ordre; donc $n' = 0$. Enfin, elle admet un infini du premier ordre $x - 1$; donc $n'' = 1$.

L'infini $x = 0$ est un infini du premier ordre de $\varphi(x)$, et, si l'on suppose

$$\varphi(x) = \frac{A_1}{x-1} + \ldots,$$

A_1 est donné par l'équation du troisième degré

$$A_1(A_1-1)(A_1-2) = -6,$$

qui admet la racine réelle -1 et deux racines imaginaires. La somme désignée par ΣA_1 se réduit au seul terme A_1, et la quantité (52) se réduit à $A_1 - 1$: comme cette quantité doit être un entier négatif ou nul, on voit que la seule valeur de A_1 qui puisse convenir est $A_1 = -1$ Pour cette valeur,

$$A_1 - 1 = -2.$$

Il reste alors à déterminer des entiers positifs

$$k,\ n''_1,\ n''_2,\ m_1,\ m_2$$

par les conditions

$$n''_2 + m_1 + 2m_2 = k,$$
$$n''_1 + n''_2 = 1, \quad 0 \leqq k \leqq 2.$$

On a, pour ces nombres, les six systèmes suivants de valeurs :

(I)	$k=0,$	$n''_1=1,$	$n''_2=0,$	$m_1=0,$	$m_2=0,$
(II)	$k=1,$	$n''_1=0,$	$n''_2=1,$	$m_1=0,$	$m_2=0,$
(III)	$k=1,$	$n''_1=1,$	$n''_2=0,$	$m_1=1,$	$m_2=0,$
(IV)	$k=2,$	$n''_1=0,$	$n''_2=1,$	$m_1=1,$	$m_2=0,$
(V)	$k=2,$	$n''_1=1,$	$n''_2=0,$	$m_1=2,$	$m_2=0,$
(VI)	$k=2,$	$n''_1=1,$	$n''_2=0,$	$m_1=0,$	$m_2=1.$

Appelons $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_6$ les six fonctions φ correspondantes, on aura

$$\varphi_1 = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1},$$
$$\varphi_2 = -\frac{1}{x} + \frac{2}{x-1},$$
$$\varphi_3 = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-a},$$
$$\varphi_4 = -\frac{1}{x} + \frac{2}{x-1} + \frac{1}{x-a},$$
$$\varphi_5 = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b},$$
$$\varphi_6 = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-a}.$$

On voit immédiatement que φ_2 ne peut pas convenir. En effet, le développement de φ_2 dans le voisinage de $x=1$ devrait être de la forme (47), puisque l'infini $x=1$ n'appartient qu'au premier degré à $f(x)$; or cela n'a pas lieu.

De même, le développement de φ_4 dans le voisinage de $x=1$ devrait être de la forme (47). La condition $P_0 = 0$ donne

$$-1 + \frac{1}{1-a} = 0,$$

ce qui donne pour a la valeur zéro, valeur inadmissible; car, pour $a=0$, φ_4 ne contient plus l'infini $x=0$.

Enfin φ_6 doit être exclu également. En effet, comme l'infini $x = a$ n'appartient pas à $f(x)$, il faut que le développement de φ_6 dans le voisinage de $x = a$ soit de la forme (49); en écrivant $P_0 = 0$, on a

$$-\frac{1}{a} + \frac{1}{a - 1} = 0,$$

équation qui ne donne pour a aucune valeur finie.

Il ne reste donc à essayer que φ_1, φ_3, φ_5. Pour essayer φ_1, remarquons que

$$e^{\int \varphi_1 dx} = \frac{x - 1}{x} = 1 - \frac{1}{x}.$$

On trouve immédiatement que cette fonction $1 - \frac{1}{x}$ vérifie l'équation différentielle proposée. Quant aux deux autres

$$e^{\int \varphi_3 dx} = \frac{(x-1)(x-a)}{x}, \quad e^{\int \varphi_5 dx} = \frac{(x-1)(x-a)(x-b)}{x},$$

aucune d'elles ne vérifie cette équation.

17. *Remarque générale sur les équations différentielles linéaires à coefficients algébriques.* — Considérons une équation différentielle linéaire de la forme suivante :

$$(55)\quad \Psi(x,y) \equiv \frac{d^n z}{dx^n} + \varphi_1(x,y)\frac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}} + \varphi_2(x,y)\frac{d^{n-2} z}{dx^{n-2}} + \ldots + \varphi_n(x,y)\, z = 0,$$

les coefficients $\varphi_i(x,y)$ étant des fonctions rationnelles de x et y, et la variable y étant liée à x par une équation algébrique

$$(56)\qquad F(x,y) = 0,$$

que nous supposerons de degré m et de genre p.

Si le genre p est nul, la courbe (56) est unicursale, x et y sont des fonctions rationnelles d'un paramètre t

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t);$$

et, en faisant cette substitution dans l'équation (55), on la transforme en une équation à coefficients rationnels en t.

Si le genre p est égal à l'unité, x et y sont des fonctions elliptiques d'un paramètre θ

$$x = f_1(\theta), \quad y = f_2(\theta);$$

et, en faisant cette substitution dans l'équation (55), on la transforme en une équation dont les coefficients sont des fonctions uniformes doublement périodiques de θ.

Ces résultats peuvent être étendus de la façon suivante, aux cas où p est plus grand que l'unité.

Considérons p points analytiques

$$(x_1, y_1), \quad (x_2, y_2), \quad \ldots, \quad (x_p, y_p)$$

avec

$$F(x_1, y_1) = 0, \quad F(x_2, y_2) = 0, \quad \ldots, \quad F(x_p, y_p) = 0,$$

et formons les p équations différentielles linéaires

$$(57) \qquad \Psi(x_1, y_1) = 0, \quad \Psi(x_2, y_2) = 0, \quad \ldots, \quad \Psi(x_p, y_p) = 0,$$

obtenues en remplaçant, dans l'équation (55), (x, y) successivement par (x_1, y_1), (x_2, y_2), $\ldots$, (x_p, y_p). Nous avons ainsi un système de p équations simultanées, définissant z comme fonction des p variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_p$. L'intégrale générale de ces équations contiendra linéairement n^p constantes arbitraires qui sont, par exemple, les valeurs de la fonction z et des dérivées partielles

$$\frac{\partial^{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_p} z}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_p^{\alpha_p}}, \quad (\alpha_1 < n, \alpha_2 < n, \ldots, \alpha_p < n),$$

pour les valeurs initiales $(x_1^{(0)}, y_1^{(0)})$, $(x_2^{(0)}, y_2^{(0)})$, $\ldots$, $(x_p^{(0)}, y_p^{(0)})$. Si l'on connaît l'intégrale générale de l'équation (1), on en déduit facilement l'intégrale générale du système (57).

En effet, soient

$$f_1(x, y), \quad f_2(x, y), \quad \ldots, \quad f_n(x, y)$$

les éléments d'un système fondamental d'intégrales de l'équation (56); les n^p fonctions de la forme

$$(58) \qquad f_{k_1}(x_1, y_1) \times f_{k_2}(x_2, y_2) \ldots f_{k_p}(x_p, y_p),$$

obtenues en attribuant aux indices $k_1, k_2, \ldots, k_p$ toutes les valeurs entières plus grandes que o et plus petites que $(n+1)$, sont des intégrales particulières du système d'équations (57). Ces intégrales particulières (57) sont au nombre de n^p; et l'intégrale générale du système (56) est une fonction linéaire de ces n^p intégrales particulières avec n^p constantes arbitraires.

Cela posé, considérons les équations abéliennes

$$\sum_{k=1}^{k=p} \frac{Q_i(x_k, y_k)}{F'_y(x_k, y_k)} dx_k = du_i \quad (i=1, 2, \ldots, p), \tag{59}$$

qui définissent les p points analytiques (x_k, y_k) comme fonctions de $u_1, u_2, \ldots, u_p$. On donne les valeurs initiales $(x_k^{(0)}, y_k^{(0)})$ des p fonctions (x_k, y_k) pour les valeurs $u_i^{(0)}$ des variables u_i (*voir* Briot, *Théorie des fonctions abéliennes*, p. 91). Faisons, dans le système d'équations (57), le changement de variables indépendantes qui consiste à prendre pour nouvelles variables indépendantes les variables u_i liées aux (x_k, y_k) par les équations (59). En posant, pour simplifier l'écriture,

$$\frac{Q_i(x, y)}{F'_y(x, y)} = \lambda_i(x, y),$$

on a

$$\frac{\partial z}{\partial x_k} = \frac{\partial z}{\partial u_1}\lambda_1(x_k, y_k) + \frac{\partial z}{\partial u_2}\lambda_2(x_k, y_k) + \ldots + \frac{\partial z}{\partial u_p}\lambda_p(x_k, y_k),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_k^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial u_1^2}\lambda_1^2(x_k, y_k) + \frac{\partial z}{\partial u_1}\frac{d\lambda_1(x_k, y_k)}{dx_k} + \frac{\partial^2 z}{\partial u_1 \partial u_2}\lambda_1(x_k, y_k)\lambda_2(x_k, y) + \ldots,$$

. . . .

$$\frac{\partial^q z}{\partial x_k^q} = \sum_{h=1}^{h=q} \frac{\partial^h z}{\partial u_1^{\alpha_1}\partial u_2^{\alpha_2}\ldots\partial u_p^{\alpha_p}} \varpi_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p}(x_k, y_k), \quad (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_p = h),$$

$\varpi_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p}(x_k, y_k)$ désignant une fonction rationnelle de (x_k, y_k). En substituant ces expressions dans les équations (57), on trouve que le premier membre de l'une quelconque d'entre elles devient

$$\Psi(x_k, y_k) = \sum_{h=0}^{h=n} \frac{\partial^h z}{\partial u_1^{\alpha_1}\partial u_2^{\alpha_2}\ldots\partial u_p^{\alpha_p}} \Pi_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p}(x_k, y_k), \tag{60}$$

où les fonctions $\Pi_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p}(x_k, y_k)$ sont aussi rationnelles en x_h et y_k.

Soient maintenant

$$\theta_1(x, y),\ \theta_2(x, y),\ \ldots,\ \theta_p(x, y)$$

p fonctions rationnelles de x et y, telles que le déterminant

$$\begin{vmatrix} \theta_1(x_1, y_1) & \theta_2(x_1, y_1) & \theta_p(x_1, y_1) \\ \theta_1(x_2, y_2) & \theta_2(x_2, y_2) & \theta_p(x_2, y_2) \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ \theta_1(x_p, y_p) & \theta_2(x_p, y_p) & \theta_p(x_p, y_p) \end{vmatrix}$$

ne soit pas nul identiquement. Considérons les p équations

$$(61)\quad \theta_i(x_1, y_1)\Psi(x_1, y_1) + \theta_i(x_2, y_2)\Psi(x_2, y_2) + \ldots + \theta_i(x_p, y_p)\Psi(x_p, y_p) = 0$$
$$(i = 1, 2, \ldots, p);$$

les équations (61) constituent un système équivalent au système (57). Si dans ces équations (61) on remplace $\Psi(x_k, y_k)$ par l'expression (60) trouvée précédemment, on voit que, dans ces équations, le coefficient d'une dérivée quelconque

$$\frac{\partial^h z}{\partial u_1^{\alpha_1} \partial u_2^{\alpha_2} \ldots \partial u_p^{\alpha_p}},\ (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_p = h)$$

est une fonction rationnelle symétrique des p points (x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_p, y_p); ce coefficient est donc une fonction abélienne des variables u_1, u_2, ..., u_p. Le système (61) devient, de cette façon, un système de p équations linéaires simultanées aux dérivées partielles, dont les coefficients sont des fonctions uniformes de p variables u_1, u_2, ..., u_p à $2p$ groupes de périodes.

On pourra appliquer à ce système d'équations différentielles linéaires simultanées aux dérivées partielles les considérations que nous avons développées, M. Picard et moi, dans une Note présentée à l'Académie des Sciences (voir *Comptes rendus*, t. XCII, p. 692). Si l'on possède une intégrale

$$z = f(u_1, u_2, \ldots, u_p)$$

de ce système, on en déduit immédiatement une intégrale du système (57), en remplaçant, dans $f(u_1, u_2, \ldots, u_p)$, la variable u_i par sa valeur

$$u_i = \sum_{k=1}^{k=p} \int_{(x_k^{(0)}, y_k^{(0)})}^{x_k, y_k} \frac{Q_i(x, y)}{F'_y(x, y)}\, dx, \quad (i = 1, 2, \ldots, p).$$

Si, dans l'intégrale du système (57) ainsi obtenu, l'on considère tous les points analytiques (x_2, y_2), (x_3, y_3), ..., (x_p, y_p) comme fixes, et si l'on remplace (x_1, y_1) par (x, y), on a une intégrale de l'équation (55).