Annales scientifiques de l'É.N.S.

CH. MÉRAY

Solution du problème général de l'analyse indéterminée du premier degré

Annales scientifiques de l'É.N.S. 2e série, tome 12 (1883), p. 89-104

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1883_2_12__89_0>

SOLUTION DU PROBLÈME GÉNÉRAL

DE

L'ANALYSE INDÉTERMINÉE

DU PREMIER DEGRÉ,

PAR M. CH. MÉRAY,

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE DIJON.

1. L'Analyse indéterminée du premier degré est le fondement de l'Arithmétique supérieure, au même titre que la théorie des équations linéaires sert de base à l'Algèbre et à toute l'Analyse, celle de la ligne droite et du plan à la Géométrie. Cependant, si les cas les plus simples sont traités depuis longtemps, il n'en est pas de même du cas général; du moins, ayant eu besoin de sa solution pour un autre objet, je l'ai cherchée vainement dans plusieurs Ouvrages et Recueils. J'ai été amené ainsi à m'en occuper et j'ai obtenu les résultats très nets et très généraux que j'expose ci-dessous.

2. Soit

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l} a_1\, x + b_1 y\ + c_1 z\ + \ldots + g_1 s\ + h_1 t\ + \ldots + i_1 u\ + j_1 v\ + k_1\ = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_m x + b_m y + c_m z + \ldots + g_m s + h_m t + \ldots + i_m u + j_m v + k_m = 0 \end{array}\right.$$

le système proposé à n inconnues, où tous les coefficients $a_1, \ldots, k_1$, $a_2, \ldots, \ldots, k_m$ sont des nombres entiers positifs, nuls ou négatifs, et dont il s'agit de trouver tous les systèmes de solutions en nombres entiers. Nous admettrons :

1° Qu'il est *réduit*, c'est-à-dire que $m \leqq n + 1$, et que les déterminants d'ordre m, formés par toutes les combinaisons possibles de m colonnes de coefficients, ne s'évanouissent pas tous. Effectivement, s'il n'était pas réduit, on pourrait, par des procédés algébriques, former un système réduit à coefficients entiers qui lui serait équivalent algébriquement et, par suite, arithmétiquement parlant;

2° Qu'il est possible, algébriquement parlant; car, s'il n'avait pas de solutions, *a fortiori*, n'en aurait-il pas d'entières;

3° Qu'il est indéterminé, algébriquement parlant; car, s'il est déterminé, on obtient, par les formules de Cramer, son unique système de solutions, qui, si elles sont toutes entières, résolvent les équations proposées, ou sinon, révèlent son impossibilité arithmétique.

Ces trois hypothèses entraînent en particulier $m < n$, ce que, désormais, nous supposerons avoir lieu.

3. Étant donné un système de m *formes* linéaires à $n (\geqq m)$ indéterminées $x, y, z, \ldots, s, t, \ldots, u, v$, écrites de cette manière

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{l} \varphi_1 = a_1 x + b_1 y + c_1 z + \ldots + g_1 s + h_1 t + \ldots + i_1 u + j_1 v, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \varphi_m = a_m x + b_m y + c_m z + \ldots + g_m s + h_m t + \ldots + i_m u + j_m v, \end{array}\right.$$

nous appellerons *déterminant* de ce système par rapport à m de ces indéterminées, désignées arbitrairement, le déterminant proprement dit d'ordre m, formé par l'association, dans le même ordre, des m colonnes du tableau

$$(3)\quad \left\{\begin{array}{l} a_1,\ b_1,\ c_1,\ \ldots,\ g_1,\ h_1,\ \ldots,\ i_1,\ j_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_m,\ b_m,\ c_m,\ \ldots,\ g_m,\ h_m,\ \ldots,\ i_m,\ j_m, \end{array}\right.$$

dont les éléments servent de coefficients à ces m indéterminées dans les formes dont il s'agit.

Les déterminants distincts du système (2) sont en nombre égal à celui des combinaisons de n objets m à m. Si $m = 1$, ils se réduisent tous aux divers coefficients de la forme unique qui constitue le système (2).

4. Nous appellerons *multiplication* du système (2) par le tableau

de m colonnes contenant chacune m multiplicateurs

$$(4)\qquad \left\{\begin{array}{l} \lambda_1,\quad \mu_1,\quad \nu_1,\quad \ldots,\quad \varpi_1,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ \lambda_m,\quad \mu_m,\quad \nu_m,\quad \ldots,\quad \varpi_m, \end{array}\right.$$

l'opération consistant à substituer à ce système le suivant, comprenant aussi m formes linéaires :

$$(5)\qquad \left\{\begin{array}{l} \psi_1 = \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 + \ldots + \lambda_m\varphi_m,\\ \psi_2 = \mu_1\varphi_1 + \mu_2\varphi_2 + \ldots + \mu_m\varphi_m,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ \psi_m = \varpi_1\varphi_1 + \varpi_2\varphi_2 + \ldots + \varpi_m\varphi_m. \end{array}\right.$$

Si l'on multiplie le nouveau système (5) par un autre tableau de m^2 multiplicateurs, on trouve facilement que ces deux opérations successives équivalent à la multiplication du système proposé (2) par un seul tableau de multiplicateurs, ayant précisément pour éléments ceux du déterminant-produit des déterminants des deux tableaux employés. *Le déterminant de ce troisième tableau, équivalent à l'ensemble des deux proposés, est donc égal au produit des déterminants de ceux-ci.*

On peut de même *composer* en une seule un nombre quelconque de multiplications successives du système de formes (2); le tableau de cette multiplication composée a évidemment pour éléments des fonctions entières à coefficients entiers de ceux des tableaux des multiplications élémentaires, et, d'après ce qui vient d'être dit, *son déterminant est égal au produit de ceux de tous ces tableaux.*

5. Quand le déterminant Δ du tableau (4) n'est pas nul, on peut, avec les mineurs complémentaires $'\lambda_1 \ldots$ de ses éléments $\lambda_1, \ldots$, former le tableau

$$\begin{array}{cccc} \dfrac{'\lambda_1}{\Delta}, & \dfrac{'\lambda_2}{\Delta}, & \ldots, & \dfrac{'\lambda_m}{\Delta},\\ \dfrac{'\mu_1}{\Delta}, & \dfrac{'\mu_2}{\Delta}, & \ldots, & \dfrac{'\mu_m}{\Delta},\\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots,\\ \dfrac{'\varpi_1}{\Delta}, & \dfrac{'\varpi_2}{\Delta}, & \ldots, & \dfrac{'\varpi_m}{\Delta}, \end{array}$$

par lequel la multiplication du système de formes (5) régénère évidemment le système proposé (2).

6. *Un déterminant du système* (5) *par rapport à m quelconques des indéterminées est égal au produit du même déterminant du système* (2) *multiplié par le déterminant du tableau* (4).

Ce point résulte immédiatement de la manière dont les coefficients des formes (5) s'expriment au moyen des éléments des tableaux (3) et (4), combinée avec la règle de multiplication des déterminants.

7. L'opération consistant à remplacer certaines fonctions des indéterminées $x, y, \ldots, u, v$, les formes (2) par exemple, par les nouvelles fonctions aux indéterminées $x', y', \ldots, u', v'$, obtenues en substituant à $x, y, \ldots, u, v$ les seconds membres des formules

$$(6)\qquad \left\{\begin{array}{l} x = \alpha'_1 x' + \beta'_1 y' + \varkappa'_1 z' + \ldots + \gamma'_1 s' + \eta'_1 t' + \ldots + \iota_1 u' + \upsilon'_1 v', \\ y = \alpha'_2 x' + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ v = \alpha'_n x' + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \upsilon'_n v', \end{array}\right.$$

se nomme la *transformation* de ces fonctions au moyen de la *substitution* linéaire (6).

Si maintenant on transforme ces nouvelles fonctions au moyen d'une seconde substitution linéaire, faisant passer des indéterminées $x', y', \ldots, u', v'$ à d'autres indéterminées $x'', y'', \ldots, u'', v''$, il est évidemment possible de remplacer l'ensemble de ces deux substitutions consécutives par une seule substitution aussi linéaire, permettant de passer directement de $x, y, \ldots, u, v$ à $x'', y'', \ldots, u'', v''$, et que l'on peut appeler la *résultante* des deux substitutions consécutives dont il s'agit.

Cela posé, on a ce théorème évident :

Les coefficients de la résultante de deux substitutions données sont les éléments du déterminant-produit des déterminants des coefficients de ces deux substitutions. Par suite, leur déterminant est égal au produit de ceux des coefficients de ces deux substitutions.

Si l'on *compose* ainsi deux substitutions linéaires, puis leur résultante avec une troisième, puis cette nouvelle résultante avec une quatrième, etc., on aura la substitution résultant de la *composition* de toutes les substitutions données. Les coefficients de cette *résultante* sont des fonctions entières à coefficients entiers de ceux des substitutions que l'on a composées.

D'après ce qui a été dit tout à l'heure, *le déterminant de ces coefficients est égal au produit de tous les déterminants des substitutions simples.*

8. Quand le déterminant Δ' de la substitution (6) (c'est-à-dire celui de ses coefficients) ne s'évanouit pas, on peut assigner une substitution dont la composition, avec la première, donne la substitution identique

$$(7)\qquad \left\{\begin{array}{l} x = x, \\ y = y, \\ \dots\dots, \\ u = u, \\ v = v. \end{array}\right.$$

Il suffit évidemment, pour cela, de résoudre les formules (6) par rapport à $x', y', \dots, u', v'$. On trouve ainsi, en appelant $'\alpha_1, \dots,$ les mineurs complémentaires des éléments $\alpha_1, \dots,$ de Δ'

$$(8)\qquad \left\{\begin{array}{l} x' = \dfrac{'\alpha_1}{\Delta'}\,x + \dfrac{'\alpha_2}{\Delta'}\,y + \dots, \\ y' = \dfrac{'\beta_1}{\Delta'}\,x + \dfrac{'\beta_2}{\Delta'}\,y + \dots, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right.$$

Cette substitution se nomme l'*inverse* de la substitution (6) et son déterminant est égal à $\frac{1}{\Delta'}$, inverse arithmétique de Δ', puisque le produit de ces deux déterminants est égal à 1, déterminant de la substitution identique (7) résultante des deux substitutions inverses dont il s'agit.

9. *Si les coefficients des formes* (2) *et de la substitution* (6) *sont tous des entiers (positifs, nuls ou négatifs), cas auquel les déterminants de ce système de formes sont aussi des entiers, tout diviseur commun de ces*

déterminants divise aussi tous les déterminants du système à coefficients entiers

$$(9)\quad \begin{cases} \varphi'_1 = a'_1\, x' + b'_1\, y' + \ldots + i'_1\, u' + j'_1\, v', \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \varphi'_m = a'_m\, x' + b'_m y' + \ldots + i'_m\, u' + j'_m\, v', \end{cases}$$

dans lequel la substitution en question transforme le système (2).

En effet, d'après un point bien connu de la théorie générale des déterminants, un déterminant quelconque du système (9) peut se mettre sous la forme d'une somme de produits des déterminants du système (2) par certains mineurs, naturellement entiers aussi, du déterminant Δ' de la substitution (6).

10. Il résulte immédiatement de cette proposition que, *si* Δ' *se réduit à* ± 1, *le plus grand commun diviseur des déterminants du système* (2) *et celui des déterminants du système* (9) *sont égaux* (*pris positivement*).

Effectivement, d'après les formules (8) combinées avec l'hypothèse $\Delta' = \pm 1$, la substitution inverse de (6) a aussi ses coefficients entiers, et, d'après le théorème n° 9, le plus grand commun diviseur des déterminants des formes (9), qui est déjà un multiple de celui des déterminants des formes (2), doit aussi le diviser.

11. *Le résultat de la transformation du système* (2), *par tant de multiplications et de substitutions linéaires que l'on voudra* (n^{os} 4, 7), *peut être obtenu par la multiplication et la substitution uniques résultant respectivement de la composition de ces deux suites d'opérations simples, cette multiplication et cette substitution composées pouvant d'ailleurs être exécutées dans un ordre arbitraire.*

Ce point résulte de l'indépendance mutuelle évidente d'une seule multiplication et d'une seule substitution consécutives.

12. *Étant donné un système de m formes linéaires à coefficients entiers, tel que* (2), *dont les déterminants ne s'évanouissent pas tous et ont pour plus grand commun diviseur le nombre d, on peut assigner, pour les multiplicateurs* (4), *un tableau à éléments commensurables de détermi-*

nant $= \frac{1}{d}$ *et, pour la substitution* (6), *des coefficients entiers de déterminant* $= 1$, *tels que la multiplication et la transformation de ce système, exécutées avec ces multiplicateurs et cette substitution, engendrent un système de formes dans lesquelles m indéterminées distinctes ont respectivement des coefficients égaux à* ± 1 *et où tous les autres coefficients s'évanouissent.*

I. Soit d'abord la forme unique à n indéterminées

$$\varphi = ax + by + cz + \ldots + iu + jv, \tag{10}$$

dont les coefficients, non tous nuls, ont d pour plus grand commun diviseur, et j, pour fixer les idées, le plus petit, numériquement, de ceux qui ne s'évanouissent pas. En appelant a', b', c', ..., i', o les résidus numériquement minima, des divisions de $a, b, c, \ldots, i, j$ par j, et $A', B', C', \ldots, I'$, 1 les quotients de ces divisions, on aura

$$a = jA' + a',\quad b = jB' + b',\quad \ldots,\quad i = jI' + i',\quad j = j.1 + 0, \tag{11}$$

et, numériquement,

$$a' < a,\quad b' < b,\quad \ldots,\quad i' < i,\quad j = j, \tag{12}$$

relations où il faut toutefois substituer $=$ à $<$ pour ceux des coefficients a, b, ... qui seraient nuls.

En remplaçant les coefficients de la forme (10) par les seconds membres des relations (11), il viendra

$$\varphi = a'x + b'y + \ldots + i'u + j(A'x + B'y + \ldots + I'u + v);$$

puis, par la substitution à coefficients entiers,

$$\begin{aligned}
x &= 1.x' + 0.y' + 0.z' + \ldots + 0.u' + 0.v',\\
y &= 0.x' + 1.y' + 0.z' + \ldots + 0.u' + 0.v',\\
z &= 0.x' + 0.y' + 1.z' + \ldots + 0.u' + 0.v',\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
u &= 0.x' + 0.y' + 0.z' + \ldots + 1.u' + 0.v',\\
v &= -A'x' - B'y' - C'z' - \ldots - I'u' + 1.v',
\end{aligned}$$

dont le déterminant est évidemment $= 1$:

$$\varphi = \varphi' = a'x' + b'y' + c'z' + \ldots + i'u' + jv'.$$

Dans cette nouvelle forme φ', tous les coefficients sont entiers : ceux nuls sont en même nombre au moins que dans φ; l'un de ces coefficients, j, ne s'évanouit certainement pas; tous les autres qui peuvent être dans le même cas ont pour plus grand commun diviseur d (n° **10**), et, sauf j, ils sont, en vertu des inégalités (12), numériquement inférieurs aux coefficients de φ représentés par les mêmes lettres sans accent.

En traitant φ' comme φ, puis la forme résultante φ'' comme φ', et ainsi de suite, on obtient, par des substitutions entières de déterminants tous $= 1$, une suite indéfinie de formes à coefficients entiers

$$\varphi,\ \varphi',\ \varphi'',\ \varphi''',\ \ldots,$$

dont chacune jouit de cette propriété d'avoir un coefficient différent de zéro égal au correspondant de la précédente, d'avoir les autres nuls ou numériquement inférieurs aux correspondants de la précédente, et dans toutes lesquelles le plus grand commun diviseur des coefficients reste invariablement égal à d. Donc, comme tout entier qui décroît numériquement sans cesse finit par atteindre la valeur zéro, il arrivera un moment où, dans toutes les formes subséquentes, tous les coefficients s'évanouiront, sauf celui d'une certaine indéterminée, qui restera nécessairement égal à $\pm d$.

En appelant Φ la première de ces formes et (S) la substitution résultante de toutes celles qui auront permis de transformer φ en φ', φ' en φ'', ..., ... en Φ, (S) aura des coefficients entiers de déterminant $= 1$ (n° **7**), et cette substitution unique (S) transformera φ en une forme Φ, dans laquelle le coefficient d'une certaine indéterminée se réduit à $\pm d$ et tous les autres à zéro.

Maintenant la forme $\frac{\Phi}{d}$, résultant de la multiplication de Φ par le multiplicateur $\frac{1}{d}$, n'offrira plus qu'un seul coefficient différent de zéro et égal à ± 1.

II. *Si notre proposition est vraie pour un système de* $M - 1$ *formes, elle l'est aussi pour un système de* $M\,(\leqq n)$ *formes.*

Pour éviter des notations trop compliquées, nous ferons la démonstration dans le cas de $M = 3$, ce qui suffira à montrer comment il faut raisonner dans tout autre cas.

Les déterminants du système proposé de trois formes

$$(13)\qquad \begin{cases} \varphi_1 = a_1 x + b_1 y + \ldots + i_1 u + j_1 v, \\ \varphi_2 = a_2 x + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \varphi_3 = a_3 x + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

peuvent être mis chacun sous forme de fonction linéaire et homogène à coefficients entiers de quelques-uns des déterminants du système de deux formes

$$(14)\qquad \begin{cases} \varphi_1 = a_1 x + b_1 y + \ldots + i_1 u + j_1 v, \\ \varphi_2 = a_2 x + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \end{cases}$$

et comme, par hypothèse, ils ne s'évanouissent pas tous, ceux du système (14) jouissent de la même propriété et ont, pour plus grand commun diviseur, un certain diviseur $d_{1,2}$ du plus grand commun diviseur des déterminants du système (13), que nous appelons toujours d.

Maintenant, et d'après l'hypothèse, il existe une substitution (S') à coefficients entiers de déterminant 1, et un tableau à éléments commensurables

$$\begin{matrix} \lambda'_1, & \mu'_1, \\ \lambda'_2, & \mu'_2, \end{matrix}$$

de déterminant $\frac{1}{d_{1,2}}$, permettant de transformer le système (14) en un autre de la forme

$$\begin{matrix} \pm 1 . x' + 0 . y' + 0 . z' + \ldots + 0 . u' + 0 . v', \\ 0 . x' \pm 1 . y' + 0 . z' + \ldots + 0 . u' + 0 . v'. \end{matrix}$$

En exécutant la substitution (S') sur le système (13), puis le multipliant par le tableau

$$(15)\qquad \begin{cases} \lambda'_1, & \mu'_1, & 0, \\ \lambda'_2, & \mu'_2, & 0, \\ 0, & 0, & 1, \end{cases}$$

de déterminant $\frac{1}{d_{1,2}}$, on obtiendra le système à coefficients entiers

$$(16)\qquad \begin{cases} \varphi'_1 = \pm 1 . x' + 0 . y' + 0 . z' + \ldots + 0 . u' + 0 . v', \\ \varphi'_2 = \quad 0 . x' \pm 1 . y' + 0 . z' + \ldots + 0 . u' + 0 . v', \\ \varphi'_3 = \quad a' x' + b' y' + c' z' + \ldots + i' u' + j' v', \end{cases}$$

dont les déterminants o, o, ..., o, $\pm c'$, $\pm \ldots$, $\pm i'$, $\pm j'$ ont évidemment (nos 4, 10) pour plus grand commun diviseur le produit par $\frac{1}{d_{1,2}}$, déterminant du tableau (15), du plus grand commun diviseur d des déterminants du système (13), c'est-à-dire l'entier $d_3 = \frac{d}{d_{1,2}}$.

En multipliant ensuite le système (16) par le tableau

$$(17)\qquad \left\{\begin{array}{lll} 1, & 0, & \mp a', \\ 0, & 1, & \mp b', \\ 0, & 0, & 1, \end{array}\right.$$

de déterminant 1, on obtient le système

$$(18)\qquad \left\{\begin{array}{l} \varphi''_1 = \pm\ x' + 0.y' + 0.z' + \ldots + 0.u' + 0.v', \\ \varphi''_2 = 0.x' \pm\ y' + 0.z' + \ldots + 0.u' + 0.v', \\ \varphi''_3 = 0.x' + 0.y' + c'\,z' + \ldots + i'\,u' + j'\,v', \end{array}\right.$$

dont les déterminants o, o, ..., o, $\pm c'$, $\pm \ldots$, $\pm i'$, $\pm j'$ ont toujours d_3 pour plus grand commun diviseur.

Soit enfin (S″) la substitution de déterminant 1, au moyen de laquelle on peut (I) réduire à $\pm d_3$ l'un des coefficients de la forme transformée de φ''_3, celui de z'' par exemple, et tous les autres à zéro. Il est évident que le système (18), transformé par (S″) et multiplié par le tableau

$$(19)\qquad \left\{\begin{array}{lll} 1, & 0, & 0, \\ 0, & 1, & 0, \\ 0, & 0, & \frac{1}{d_3}, \end{array}\right.$$

de déterminant $\frac{1}{d_3}$, prendra la forme voulue

$$\begin{array}{l} \pm\ x'' + 0.y'' + 0.z'' + \ldots + 0.u'' + 0.v'', \\ 0.x'' \pm\ y'' + 0.z'' + \ldots + 0.u'' + 0.v'', \\ 0.x'' + 0.y'' \pm\ z'' + \ldots + 0.u'' + 0.v''. \end{array}$$

Cela posé, en composant, d'une part, les tableaux (15), (17), (19); d'autre part (n° 11), les substitutions (S′), (S″), on obtiendra bien le tableau unique de multiplicateurs de déterminant $\frac{1}{d_{1,2}} . 1 . \frac{1}{d_3} = \frac{1}{d}$ et la substitution unique de déterminant $1.1 = 1$, dont il s'agissait d'établir l'existence.

III. *La proposition est donc générale,* puisqu'elle a été établie pour $m = 1$. Notre raisonnement fournit en même temps le moyen de calculer les multiplicateurs et la substitution définis dans l'énoncé.

13. *Pour que les équations* (1) *admettent des solutions entières, il est nécessaire et suffisant que les déterminants des formes linéaires*

$$(20)\quad \begin{cases} \varphi_1 = a_1\, x + b_1\, y + c_1\, z + \ldots + g_1\, s + h_1\, t + \ldots + i_1\, u + j_1\, v, \\ \varphi_2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \varphi_m = a_m x + b_m y + c_m z + \ldots + g_m s + h_m t + \ldots + i_m u + j_m v, \end{cases}$$

auxquelles leurs premiers membres se réduisent par la suppression des termes connus k_1, k_2, ..., k_m, aient pour plus grand commun diviseur un nombre d divisant tous les déterminants d'ordre m, dans lesquels se changent ces premiers déterminants, quand on remplace une quelconque de leurs colonnes par la suite k_1, k_2, ..., k_m.

Et, quand ainsi ces équations sont possibles en nombres entiers, leurs systèmes de solutions sont donnés, une seule fois chacun, par des formules telles que

$$(21)\quad \begin{cases} x = \xi + x_1\theta_1 + x_2\theta_2 + \ldots + x_{n-m}\theta_{n-m}, \\ y = \eta + y_1\theta_1 + y_2\theta_2 + \ldots + y_{n-m}\theta_{n-m}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ v = \psi + v_1\theta_1 + v_2\theta_2 + \ldots + v_{n-m}\theta_{n-m}, \end{cases}$$

où toutes les lettres désignent des entiers jouissant des propriétés suivantes :

1° *Les $n - m$ nombres θ_1, θ_2, ..., θ_{n-m} sont absolument indéterminés;*

2° *Les nombres ξ, η, ..., ψ constituent un système particulier de solutions des équations* (1);

3° *Les coefficients d'une même indéterminée θ satisfont aux équations homogènes, auxquelles se réduisent les équations* (1), *par la suppression des termes k_1, k_2, ..., k_m;*

4° *Enfin, en nommant $(xy\ldots s)$ le déterminant d'ordre $n - m$ formé par les $n - m$ lignes de ces coefficients où ne figurent pas les*

m lettres $x, y, \ldots, s$ et $(ab\ldots g)$ le déterminant des coefficients de $x, y, \ldots, s$ dans les équations (1), *les déterminants $(xy\ldots s)$ ont* 1 *pour plus grand commun diviseur et sont liés à leurs homologues ci-dessus définis par des relations de la forme*

$$(xy\ldots s) = \frac{(ab\ldots g)}{d}. \tag{22}$$

La condition posée est nécessaire, car si,

$$\nabla = \begin{vmatrix} k_1 & b_1 & c_1 & \ldots & g_1 \\ k_2 & b_2 & c_2 & \ldots & g_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ k_m & b_m & c_m & \ldots & g_m \end{vmatrix}$$

étant un déterminant d'ordre m formé avec la colonne $k_1, k_2, \ldots, k_m$ et $m-1$ colonnes de coefficients des inconnues, on appelle $'k_1$, $'k_2, \ldots, 'k_m$ les mineurs respectivement complémentaires aux éléments $k_1, k_2, \ldots, k_m$, les équations proposées entraînent l'équation

$$'k_1\varphi_1 + 'k_2\varphi_2 + \ldots + 'k_m\varphi_m = -\nabla. \tag{23}$$

Or le premier membre de cette équation, se réduisant évidemment à la somme des produits des inconnues par quelques déterminants des formes (20), est nécessairement divisible par d; d'où la même nécessité pour ∇ égal au signe près à ce premier membre, en vertu de l'équation (23).

Supposons donc cette condition remplie, et soient

$$\left\{\begin{array}{l} \lambda_1, \ \mu_1, \ \ldots, \ \varpi_1, \\ \lambda_2, \ \mu_2, \ \ldots, \ \varpi_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \lambda_m, \ \mu_m, \ \ldots, \ \varpi_m, \end{array}\right. \tag{24}$$

puis

$$\left\{\begin{array}{l} x = \alpha'_1 x' + \beta'_1 y' + \ldots + \iota'_1 u' + \upsilon'_1 v', \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ v = \alpha'_n x' + \beta'_n y' + \ldots + \iota'_n u' + \upsilon'_n v' \end{array}\right. \tag{25}$$

les multiplicateurs et la substitution, de déterminants $\frac{1}{d}$, 1 respectivement, qui permettent (n° **12**) de transformer les formes (20) en d'autres

$$(26)\quad \begin{cases} \varphi'_1 = \pm\ x' + 0.y' + \ldots + 0.s' + \ldots + 0.v', \\ \varphi'_2 = \ \ 0.x' \pm\ y' + \ldots + 0.s' + \ldots + 0.v', \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \varphi'_m = \ \ 0.x' + 0.y' + \ldots \pm\ s' + \ldots + 0.v', \end{cases}$$

où les coefficients de m indéterminées se réduisent respectivement à ± 1 et tous les autres coefficients à zéro. Si, après avoir remplacé, dans les équations (1), les inconnues $x, y, \ldots, u, v$ par $x', y', \ldots, u', v'$, au moyen de la substitution (25), on combine ces équations, en les ajoutant multipliées successivement par les éléments de chacune des colonnes du tableau (24), il viendra les équations

$$(27)\quad \begin{cases} \varphi'_1 + k'_1 = 0, \\ \varphi'_2 + k'_2 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \varphi'_m + k'_m = 0, \end{cases}$$

où les nombres $k'_1, k'_2, \ldots, k'_m$ sont nécessairement entiers. Effectivement les premiers membres des équations (1) peuvent être considérés comme des formes linéaires aux $n+1$ indéterminées $x, y, \ldots, u, v, p$, et ceux des équations (27) comme des formes aux indéterminées x', $y', \ldots, u', v', p'$, engendrées par la multiplication des premières par le tableau (24), combinée avec une substitution de déterminant 1, obtenue en ajoutant à tous les seconds membres des formules (25) le terme $0.p'$ et en adjoignant à ces formules cette $(n+1)^{\text{ième}}$

$$p = 0.x' + 0.y' + \ldots + 0.u' + 0.v' + 1.p',$$

opérations après lesquelles on posera $p = p' = 1$.

Cela étant, on trouvera, en appliquant les théorèmes (n$^{\text{os}}$ **10**, **4**), que la transformation des premiers membres, par la substitution dont il s'agit, laisse leurs coefficients entiers et leurs déterminants tous divisibles par d; qu'ensuite leur multiplication par le tableau (24) multiplie leurs déterminants par $\frac{1}{d}$, et partant les laisse entiers, puisqu'ils étaient auparavant divisibles par d. Or, à cause de la nature spéciale des formes à n indéterminées $\varphi'_1, \ldots, \varphi'_m$, les nombres $\pm k'_1, \pm k'_2, \ldots,$ $\pm k'_m$ sont précisément des déterminants des premiers membres des équations (27); donc ils sont entiers.

Maintenant toutes les solutions entières des équations (1) donnent des solutions entières des équations (27), car ces dernières sont entraînées par les premières, et si $x, y, \ldots, v$ sont des nombres entiers, $x', y', \ldots, v'$, liés à eux par la substitution inverse de (25) et à coefficients entiers (n° **10**)

$$(28)\qquad \begin{cases} x' = {}'\alpha_1 x + {}'\alpha_2 y + \ldots + {}'\alpha_n v, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ v' = {}'\upsilon_1 x + {}'\upsilon_2 y + \ldots + {}'\upsilon_n v, \end{cases}$$

sont aussi des entiers.

Réciproquement, toutes les solutions entières des équations (27) donnent par les formules (25) des valeurs entières de $x, y, \ldots, u, v$, satisfaisant aux équations (1); car, par la substitution inverse (28), accompagnée d'une multiplication par le tableau

$$(29)\qquad \begin{cases} {}'\lambda_1 d, & {}'\lambda_2 d, & \ldots, & {}'\lambda_m d, \\ {}'\mu_1 d, & {}'\mu_2 d, & \ldots, & {}'\mu_m d, \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots, \\ {}'\varpi_1 d, & {}'\varpi_2 d, & \ldots, & {}'\varpi_m d, \end{cases}$$

où ${}'\lambda_1, \ldots$ sont les mineurs complémentaires des éléments $\lambda_1, \ldots$ du tableau (24) dans leur déterminant, on retombe évidemment sur les premiers membres des équations (1).

Ainsi les systèmes d'équations (1) et (27) sont absolument équivalents. Or les seules solutions entières du second sont

$$\begin{aligned} x' &= \pm k'_1, \\ y' &= \pm k'_2, \\ &\ldots\ldots\ldots, \\ s' &= \pm k'_m; \end{aligned}$$

les $n - m$ autres inconnues $t', \ldots, u', v'$ à coefficients tous nuls, restant tout à fait indéterminées. Si donc, les représentant par $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{n-m}$, on les porte avec les valeurs ci-dessus trouvées pour $x', y', \ldots, s'$ dans la substitution (25), cette substitution donne, pour la résolution générale des équations (1), des formules identiques à (21), sauf la notation.

Les quantités $\xi, \eta, \zeta, \ldots, \psi$ correspondent aux valeurs

$$\theta_1 = \theta_2 = \ldots = \theta_{n-m} = 0;$$

donc ce sont des solutions des équations proposées.

Les nombres $\xi + x_i$, $\eta + y_i$, ..., correspondant aux valeurs o, ..., o, 1, o, ..., o de $\theta_1, \ldots, \theta_{i-1}, \theta_i, \theta_{i+1}, \ldots, \theta_{n-m}$, sont aussi des solutions. Il en résulte, en ayant égard à ce qui précède, que, quel que soit l'indice i, les nombres $x_i, y_i, \ldots, u_i, v_i$ sont des solutions des équations homogènes, auxquelles se réduisent les proposées, quand on y fait $k_1 = k_2 = \ldots = k_m = 0$.

De plus, les formes (26), dont les déterminants ± 1, o, o, ... ont 1 pour plus grand commun diviseur, traitées par la substitution inverse (28), donnent les formes

$$(30) \qquad \begin{cases} \pm({}'\alpha_1 x + {}'\alpha_2 y + \ldots + {}'\alpha_n v), \\ \pm({}'\beta_1 x + {}'\beta_2 y + \ldots + {}'\beta_n v), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \pm({}'\sigma_1 x + {}'\sigma_2 y + \ldots + {}'\sigma_n v), \end{cases}$$

dont le système, multiplié par le tableau (29), de déterminant d, régénère le système (20). Donc un quelconque des déterminants des formes (30), le premier, par exemple, multiplié par d, reproduit le déterminant semblable $(ab\ldots g)$ des formes (20).

Mais chaque déterminant des formes (30) est un mineur d'ordre m du déterminant de la substitution inverse (28), lequel, en vertu de la théorie générale des déterminants, est égal à son complémentaire d'ordre $n-m$ dans le déterminant de la substitution directe (25), multiplié par une certaine puissance de 1, déterminant de cette substitution, c'est-à-dire égal au déterminant même d'ordre $n-m$ dont il s'agit. Or, d'après l'origine des formules (21), ce déterminant complémentaire coïncide avec celui qui a pour lignes les coefficients de $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{n-m}$ dans les $n-m$ dernières de ces formules, ce qui démontre l'exactitude des relations telles que (22), en vertu desquelles les déterminants $(xy\ldots s)$ ont nécessairement 1 pour plus grand commun diviseur, comme quotients des déterminants $(ab\ldots g)$ par leur plus grand commun diviseur d.

Enfin les formules (21) ne peuvent donner qu'une fois chaque système de solutions des équations (1), car les substitutions (25), (28) lient les solutions des équations (1) et (27), de telle sorte qu'à deux systèmes distincts des unes correspondent nécessairement deux systèmes distincts des autres, et deux groupes non identiques de valeurs des indéterminées $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{n-m}$, c'est-à-dire de $t', \ldots, u', v'$, appartiennent à des systèmes évidemment distincts de solutions des équations (27). Ce dernier point s'aperçoit encore facilement *a posteriori*.

14. *De quelque manière qu'on les ait obtenus, si les nombres* $\xi, \eta, \ldots, \psi$ *et* $x_1, \ldots, x_{n-m}, y_1, \ldots, v_{n-m}$ *jouissent seulement des propriétés* 2° *et* 4° *de l'énoncé du numéro précédent, les formules* (21) *donneront toujours, et une seule fois chacun, tous les systèmes de solutions des équations* (1). *Mais un groupe de formules qui aurait été construit dans d'autres conditions ne fournirait pas toutes les solutions de nos équations ou les fournirait plusieurs fois.*

Cette proposition, dont je supprime la démonstration pour abréger, peut, on le conçoit, faciliter, dans certains cas, la résolution générale des équations (1). On peut encore, comme s'il s'agissait d'équations simultanées quelconques, varier cette résolution de bien des manières : par exemple, résoudre généralement l'une des équations proposées, s'il est facile de le faire; porter ses solutions dans les autres, dont on résoudra le système par rapport aux indéterminées θ contenues dans les solutions de la première, etc.

15. On remarquera que le calcul et la composition des substitutions de déterminant 1, à l'aide desquelles on peut transformer la forme φ du n° **12** (I) en la forme Φ ayant un coefficient numériquement égal au plus grand commun diviseur de ceux de φ et tous ses autres nuls, est une généralisation du procédé d'Euler et de celui de Lagrange par les fractions continues, pour résoudre une seule équation à deux inconnues. Enfin cet algorithme donne évidemment une méthode systématique pour résoudre ces deux problèmes, dont le second joue un grand rôle dans la théorie des nombres : *Des entiers quelconques étant donnés, trouver leur plus grand commun diviseur, et assigner d'autres nombres qui, multipliés par eux, donnent des produits ayant précisément pour somme ce plus grand commun diviseur.*

Dijon, avril 1882.