ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

BRUNEL

Étude sur les relations algébriques entre les fonctions hyperelliptiques de genre 3

Annales scientifiques de l'É.N.S. 2e série, tome 12 (1883), p. 199-260
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1883_2_12__199_0>

ÉTUDE

SUR

LES RELATIONS ALGÉBRIQUES

ENTRE

LES FONCTIONS HYPERELLIPTIQUES DE GENRE 3,

PAR M. BRUNEL,

PROFESSEUR A L'ÉCOLE SUPÉRIEURE D'ALGER.

INTRODUCTION.

1. Les relations algébriques qui existent entre les fonctions hyperelliptiques de genre 2 ont été étudiées tout d'abord par Göpel, dans son Mémoire : *Theoriæ transcendentium Abelianarum primi ordinis adumbratio levis* (*Journal de Crelle*, t. 35, 1847, p. 277-312). Choisissant d'une façon convenable quatre des fonctions Θ à deux variables, il exprime les carrés des douze autres en fonctions linéaires des carrés des quatre premières. Il a ainsi des relations linéaires entre cinq carrés. Il a trouvé de plus une relation homogène de degré 4 qui relie les quatre fonctions choisies d'abord. On sait quelle est l'importance de cette relation, tant en Analyse qu'en Géométrie. M. Hermite a montré son rôle dans la théorie de la transformation des fonctions abéliennes du premier ordre (*Comptes rendus*, t. XL, 1855, p. 249, 303, 365, 427, 485, 536, 704, 784). MM. Cayley, Borchardt, Weber, Klein, Rohn, Darboux, Brioschi, etc., dans des recherches approfondies sur la surface de Kummer, ont montré comment cette surface du quatrième ordre à seize points doubles trouvait sa représentation la plus simple et la plus féconde dans l'emploi de la relation biquadratique de Göpel.

Rosenhain, dans son *Mémoire sur les fonctions de deux variables et à quatre périodes qui sont les inverses des intégrales ultra-elliptiques de la première classe*, avait montré que les relations linéaires entre les carrés de fonctions Θ trouvées par Göpel n'étaient pas les plus simples. Il arrivait à prouver l'existence de seize groupes de six fonctions, tels qu'en prenant arbitrairement dans un groupe trois fonctions, les carrés de chacune des trois autres s'exprimaient linéairement au moyen des carrés des trois premières.

En 1856, M. Weierstrass publiait un Mémoire : *Theorie der Abelschen Functionen* (*Journal de Crelle*, t. 52, p. 285-380), où est signalée (p. 318 et suiv.) toute une série remarquable de relations algébriques entre les fonctions hyperelliptiques et leurs dérivées dans le cas général.

Plus récemment enfin, M. Cayley revenait sur cette même question :

On the double Θ fonctions in connexion with a 16 nodal quartic surface (*Journal de Crelle*, t. 83, 1877, p. 210-219) ;

Further investigations on the double Θ fonctions (*Journal de Crelle*, t. 83, 1877, p. 220-234);

A Memoir on the double Θ fonctions (*Journal de Crelle*, t. 85, 1878, p. 214) ;

On the triple Θ fonctions (*Journal de Crelle*, t. 87, p. 134-138).

Les trois premiers Mémoires sont relatifs aux recherches de Göpel et Rosenhain et à la théorie de la surface de Kummer. Dans le dernier, M. Cayley donne quelques indications rapides, fournit quelques probabilités qui nous ont été plus d'une fois utiles dans notre travail.

2. Nous nous sommes proposé ici d'étudier d'une façon spéciale le cas des fonctions hyperelliptiques du genre 3. Voici quel a été notre point de départ.

Pour étudier les relations algébriques qui existent entre les fonctions Θ, nous partons, non pas de ces fonctions elles-mêmes, mais des quotients obtenus comme il suit :

Posons avec Schottky [1] (*Abriss einer Theorie der Abelschen Func-*

---

[1] Nos notations diffèrent un peu de celles de Schottky; les modifications apportées sont cependant peu importantes; nous avons cru devoir les faire pour éviter d'employer une même lettre avec des sens différents, et aussi pour la commodité de l'écriture.

tionen von drei Variabeln. Leipzig, Teubner, 1880). — *Voir* NACHTRAG, *Ueber die hyperelliptischen Functionen dreier Variabeln :*

$$
(1)\quad \left\{
\begin{aligned}
\frac{L_k^4}{L_0^4} &= \frac{-1}{(a_l-a_k)(a_m-a_k)(a_n-a_k)(a_p-a_k)(a_q-a_k)(a_r-a_k)},\\
\frac{L_{kl}^4}{L_0^4} &= \frac{-1}{\left\{\begin{aligned}&(a_m-a_k)(a_n-a_k)(a_p-a_k)(a_q-a_k)(a_r-a_k)\\ &\times(a_m-a_l)(a_n-a_l)(a_p-a_l)(a_q-a_l)(a_r-a_l)\end{aligned}\right.},\\
\frac{L_{klm}^4}{L_0^4} &= \frac{-1}{\left\{\begin{aligned}&(a_n-a_k)(a_p-a_k)(a_q-a_k)(a_r-a_k)(a_n-a_l)(a_p-a_l)\\ &\times(a_q-a_l)(a_r-a_l)(a_n-a_m)(a_p-a_m)(a_q-a_m)(a_r-a_m)\end{aligned}\right.}.
\end{aligned}
\right.
$$

Nous considérerons les fonctions P définies par les équations

$$
(2)\quad \left\{
\begin{aligned}
\frac{L_0}{L_0}P_0 &= \frac{\Theta_0}{\Theta_0},\\
\frac{L_k}{L_0}P_k &= \frac{\Theta_k}{\Theta_0},\\
\frac{L_{kl}}{L_0}P_{kl} &= \frac{\Theta_{kl}}{\Theta_0},\\
\frac{L_{klm}}{L_0}P_{klm} &= \frac{\Theta_{klm}}{\Theta_0};
\end{aligned}
\right.
$$

et il résulte des travaux de Weierstrass et de Schottky que, en posant

$$
(3)\quad \left\{
\begin{aligned}
R(x) &= (a_k-x)(a_l-x)(a_m-x)(a_n-x)(a_p-x)(a_q-x)(a_r-x),\\
\varphi(x) &= (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3),
\end{aligned}
\right.
$$

on a

$$
(4)\quad \left\{
\begin{aligned}
P_0 &= 1 && && \text{1 fonction } P_0,\\
P_k &= \sqrt{(a_k-x_1)(a_k-x_2)(a_k-x_3)} && && \text{7 fonctions } P_k,\\
P_{kl} &= P_kP_l\sum_{i=1}^{3}\frac{\sqrt{R(x_i)}}{(a_k-x_i)(a_l-x_i)\varphi'(x_i)} && (k\neq l) && \text{21 fonctions } P_{kl},\\
P_{klm} &= P_kP_lP_m\sum_{i=1}^{3}\frac{\sqrt{R(x_i)}}{(a_k-x_i)(a_l-x_i)(a_m-x_i)\varphi'(x_i)} && (k\neq l\neq m) && \text{35 fonctions } P_{klm}.
\end{aligned}
\right.
$$

Nous prenons ces équations comme définitives et nous cherchons à déterminer directement les relations algébriques qui existent entre ces fonctions P. Nous parvenons facilement à démontrer l'existence de

64 groupes de 8 fonctions P, tels qu'entre les carrés de 5 fonctions appartenant à un même groupe existe une relation linéaire.

Nous montrons ensuite comment on peut directement, et sans l'emploi des formules que nous venons de signaler, trouver des relations linéaires entre les carrés de fonctions en nombre supérieur à 5.

On sait qu'il existe aussi des relations linéaires entre les produits deux à deux des fonctions P. Notre méthode de calcul nous les fournit sans difficulté aucune et nous en trouvons plusieurs qui n'étaient pas connues.

Les 64 groupes de relations linéaires trouvées précédemment permettent, en choisissant convenablement 8 fonctions P, d'exprimer en fonction linéaire de leurs carrés les carrés des 56 autres fonctions.

Entre les 8 fonctions ainsi choisies comme base existent des relations algébriques de degré supérieur qui nous sont fournies presque immédiatement par les relations entre les produits que nous avons déterminées auparavant.

Ce que nous disons ici des fonctions P a lieu évidemment pour les fonctions Θ. Leur dépendance algébrique se trouve donc précisée, sinon d'une façon définitive, du moins d'une manière plus complète que cela n'avait été fait jusqu'ici, à notre connaissance.

Formules préliminaires et notations.

3. Nous allons donner tout d'abord un tableau de formules qui seront dans la suite employées d'une façon continue.

Posons

$$(5)\qquad \begin{cases} x_1+x_2+x_3 = \alpha, \\ x_2x_3+x_3x_1+x_1x_2 = \beta, \\ x_1x_2x_3 = \gamma \end{cases}$$

et, de plus,

$$(6)\qquad (x_2-x_3)(x_3-x_1)(x_1-x_2) = \theta.$$

Toute fonction de x_1, x_2, x_3 de la forme

$$(x_2-x_3)f(x_1,\overline{x_2},\overline{x_3})+(x_3-x_1)f(x_2,\overline{x_3},\overline{x_1})+(x_1-x_2)f(x_3,\overline{x_1},\overline{x_2}),$$

où $f(u,\overline{v},\overline{w})$ indique une fonction symétrique relativement à v et w, est divisible par θ, et le quotient est une fonction symétrique de x_1, x_2 et x_3. En effet, cette fonction s'annule si l'on fait $x_2 = x_3$, elle est divisible par $x_2 - x_3$ et de même par $x_3 - x_1$ et $x_1 - x_2$, par suite par θ. De plus, elle change de signes si l'on change x_2 en x_3 : donc son quotient par θ est une fonction symétrique de x_2 et x_3. On voit également que ce quotient est fonction symétrique de x_3 et de x_1 ; c'est donc bien une fonction symétrique de x_1, x_2 et x_3, qui pourra, par suite, être exprimée en fonction rationnelle de α, β et γ.

C'est ainsi que l'on a

$$
(7)\quad \left\{\begin{array}{ll}
\Sigma x_1^2(x_2 - x_3) & = -\theta, \\
\Sigma(x_2^2 + x_3^2)(x_2 - x_3) & = +\theta, \\
\Sigma x_2 x_3(x_2 - x_3) & = -\theta, \\
\Sigma x_1(x_2 + x_3)(x_2 - x_3) & = +\theta, \\
\Sigma x_1^3(x_2 - x_3) & = -\theta\alpha, \\
\Sigma x_1^2(x_2 + x_3)(x_2 - x_3) & = \quad 0, \\
\Sigma x_1(x_2^2 + x_3^2)(x_2 - x_3) & = \quad \theta\alpha, \\
\Sigma(x_2^3 + x_3^3)(x_2 - x_3) & = \quad \theta\alpha, \\
\Sigma x_2 x_3(x_2 + x_3)(x_2 - x_3) & = -\theta\alpha, \\
\Sigma x_1^4(x_2 - x_3) & = -\theta(\alpha^2 - \beta), \\
\Sigma x_1^3(x_2 + x_3)(x_2 - x_3) & = -\theta\beta, \\
\Sigma x_1^2(x_2^2 + x_3^2)(x_2 - x_3) & = \quad \theta\beta, \\
\Sigma x_1(x_2^3 + x_3^3)(x_2 - x_3) & = \quad \theta(\alpha^2 - \beta), \\
\Sigma x_2 x_3(x_2^2 + x_3^2)(x_2 - x_3) & = -\theta(\alpha^2 - 2\beta), \\
\Sigma x_2^2 x_3^2(x_2 - x_3) & = -\theta\beta, \\
\Sigma x_1^5(x_2 - x_3) & = -\theta(\alpha^3 - 2\alpha\beta + \gamma), \\
\Sigma x_2^2 x_3^2(x_2 + x_3)(x_2 - x_3) & = -\theta(\alpha\beta - \gamma), \\
\Sigma x_1^3(x_2^2 + x_3^2)(x_2 - x_3) & = \quad \theta\gamma, \\
\Sigma x_2^3 x_3^3(x_2 - x_3) & = -\theta(\beta^2 - \alpha\gamma), \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &
\end{array}\right.
$$

Nous avons cru préférable de rassembler ici ces formules, au lieu de les parsemer çà et là dans la suite. Nous ne donnons que celles qui nous seront utiles.

4. Pour simplifier l'écriture, nous conviendrons de représenter par le symbole

$$| y_1 \quad y_2 \quad \ldots \quad y_n |$$

le déterminant

$$\begin{vmatrix} y_1^{n-1} & y_2^{n-1} & \dots & y_n^{n-1} \\ y_1^{n-2} & y_2^{n-2} & \dots & y_n^{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

ou, comme on sait, le produit

$$\begin{aligned} &(y_1-y_2)(y_1-y_3)\dots(y_1-y_n) \\ &\qquad(y_2-y_3)\dots(y_2-y_n) \\ &\qquad\qquad\dots\dots\dots\dots \\ &\qquad\qquad(y_{n-1}-y_n). \end{aligned}$$

Ainsi on a, par exemple,

$$0=-(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_2-x_3)=-|x_1x_2x_3|.$$

Les fonctions P peuvent alors être écrites sous la forme suivante :

$$(8)\quad \left\{ \begin{aligned} P_0 &= 1, \\ P_k &= \sqrt{|a_kx_1|\,|a_kx_2|\,|a_kx_3|}, \\ P_{kl} &= \frac{1}{|x_1x_2x_3|}\left[|x_2x_3|\sqrt{R(x_1)\frac{|a_kx_2|\,|a_kx_3|\,|a_lx_2|\,|a_lx_3|}{|a_kx_1|\,|a_lx_1|}} \right. \\ &\qquad \left. +|x_3x_1|\sqrt{}+|x_1x_2|\sqrt{}\right], \\ P_{klm} &= \frac{1}{|x_1x_2x_3|}\left[|x_2x_3|\sqrt{R(x_1)\frac{|a_kx_2|\,|a_kx_3|\,|a_lx_2|\,|a_lx_3|\,|a_mx_2|\,|a_mx_3|}{|a_kx_1|\,|a_lx_1|\,|a_mx_1|}} \right. \\ &\qquad \left. +|x_3x_1|\sqrt{}+|x_1x_2|\sqrt{}\right]. \end{aligned} \right.$$

Les quantités placées sous le radical n'ont que l'apparence fractionnaire, les facteurs du dénominateur étant également facteurs de $R(x_1)$, $R(x_2)$ et $R(x_3)$; mais il est préférable, pour ce qui suit, de leur laisser la forme présente. Les réductions, quand elles seront nécessaires, viendront à leur lieu et place.

Relations linéaires entre les carrés des fonctions P.

5. Considérons tout d'abord le cas des fonctions les plus simples, les fonctions P à un seul indice.

On a

$$P_k^2 = |a_k x_1||a_k x_2||a_k x_3|$$

ou bien, avec les notations indiquées au n° **3**,

$$P_k^2 = a_k^3 - \alpha a_k^2 + \beta a_k - \gamma. \tag{9}$$

Il est possible d'éliminer α, β, γ entre quatre relations de cette sorte, et le résultat de l'élimination est

$$\begin{vmatrix} P_k^2 - a_k^3 & P_l^2 - a_l^3 & P_m^2 - a_m^3 & P_n^2 - a_n^3 \\ a_k^2 & a_l^2 & a_m^2 & a_n^2 \\ a_k & a_l & a_m & a_n \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

ou bien, avec les notations admises,

$$P_k^2|a_l a_m a_n| - P_l^2|a_m a_n a_k| + P_m^2|a_n a_k a_l| - P_n^2|a_k a_l a_m| = |a_k a_l a_m a_n| P_0^2. \tag{10}$$

Si, au lieu de considérer quatre relations telles que (9), on en prend cinq, en éliminant entre les cinq équations ainsi obtenues les quantités 1, α, β, γ, on obtient comme résultat une relation linéaire entre les carrés de cinq fonctions P à un seul indice, que l'on peut écrire

$$\left\{\begin{aligned} &P_k^2|a_l a_m a_n a_p| + P_l^2|a_m a_n a_p a_k| + P_m^2|a_n a_p a_k a_l| \\ &\qquad + P_n^2|a_p a_k a_l a_m| + P_p^2|a_k a_l a_m a_n| = 0. \end{aligned}\right. \tag{11}$$

On aurait pu évidemment déduire cette relation de l'équation (10). On déduit, en effet, de cette dernière une nouvelle relation en effectuant sur les lettres k, l, m, n, p, q, r la substitution

$$\begin{vmatrix} k & l & m & n & p \\ l & m & n & p & k \end{vmatrix}$$

Éliminant alors P_0^2 entre l'équation (10) et celle que l'on en déduit par l'opération précédente, on obtient l'équation (11). Ce procédé, inutile dans le cas précédent, sera bien des fois employé dans la suite.

Il résulte de ce qui précède que les fonctions P, dont les indices sont

$$(12) \qquad 0, \quad k, \quad l, \quad m, \quad n, \quad p, \quad q, \quad r,$$

constituent un groupe de huit fonctions, telles que, quatre d'entre elles étant choisies, les carrés des quatre autres s'expriment linéairement en fonction des carrés des quatre premières, les relations ayant l'une des formes (10) ou (11). Nous appellerons ce groupe le *groupe* 0. Cette dénomination trouvera plus tard sa raison d'être.

On voit aussi que toute expression linéaire de la forme

$$A + B\alpha + C\beta + D\gamma,$$

où A, B, C, D sont indépendants de x_1, x_2, x_3, peut être exprimée, soit en fonction linéaire non homogène des carrés de trois fonctions P_k, soit en fonction linéaire homogène des carrés de quatre de ces fonctions. On peut comprendre les deux propositions sous une seule : l'expression considérée peut être représentée par une fonction linéaire homogène de quatre quelconques des carrés des fonctions appartenant au groupe 0.

6. Arrivons maintenant aux relations linéaires qui contiennent des fonctions P à deux indices et à un seul indice. On a

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} P_{kl}^2 = \frac{1}{|x_1 x_2 x_3|^2} \Bigg[& |x_2 x_3|^2 R(x_1) \frac{|a_k x_2|\,|a_k x_3|\,|a_l x_2|\,|a_l x_3|}{|a_k x_1|\,|a_l x_1|} + \ldots \\ & + 2|x_2 x_3|\,|x_3 x_1| \sqrt{R(x_1)\,R(x_2)}\,|a_k x_3|\,|a_l x_3| \Bigg]. \end{aligned} \right.$$

Prenant quatre carrés semblables à celui-ci, on peut former avec eux une relation linéaire telle que le coefficient de $\sqrt{R(x_1)R(x_2)}$ soit égal à 0. Il est évident, d'ailleurs, qu'il en sera de même pour les coefficients de $\sqrt{R(x_2)R(x_3)}$ et $\sqrt{R(x_3)R(x_1)}$, c'est-à-dire que l'expression linéaire considérée aura une expression rationnelle. Mais si, au lieu de considérer des fonctions P_{kl} tout à fait indépendantes, nous en choisissons pour lesquelles l'un des indices soit en commun : P_{kl}, P_{km},

$P_{kn}, \ldots, P_{kr}$, nous pouvons arriver à un résultat analogue en prenant simplement une combinaison linéaire de trois de ces fonctions. Il suffit de déterminer A, B, C en écrivant que l'on a identiquement

$$A|a_l x_3| + B|a_m x_3| + C|a_n x_3| = 0, \tag{14}$$

ce qui donne, par exemple,

$$A = |a_m a_n|, \quad B = |a_n a_l|, \quad C = |a_l a_m|. \tag{15}$$

On a donc alors à considérer l'expression

$$\begin{aligned}
&|a_m a_n| P_{kl}^2 + |a_n a_l| P_{km}^2 + |a_l a_m| P_{kn}^2 \\
&= \frac{1}{|x_1 x_2 x_3|^2} \Big\{ |a_m a_n| \Big[|x_2 x_3|^2 R(x_1) \frac{|a_k x_2||a_k x_3||a_l x_2||a_l x_3|}{|a_k x_1||a_l x_1|} + |x_3 x_1|^2 R(x_2) \ldots + |x_1 x_2|^2 R(x_3) \ldots \\
&\qquad + |a_n a_l| \Big[|x_2 x_3|^2 R(x_1) \frac{|a_k x_2||a_k x_3||a_m x_2||a_m x_3|}{|a_k x_1||a_m x_1|} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\qquad + |a_l a_m| \Big[|x_2 x_3|^2 R(x_1) \frac{|a_k x_2||a_k x_3||a_n x_2||a_n x_3|}{|a_k x_1||a_n x_1|} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

En tenant compte de (14) et (15), on peut donner au second membre une forme d'apparence plus compliquée, mais qui se réduit facilement et rapidement. On peut en effet l'écrire

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|x_1 x_2 x_3|^2} \Big\{ & |a_m a_n| |x_2 x_3| |a_p x_1| |a_q x_1| |a_r x_1| |a_m x_1| |a_n x_1| |a_k x_2| |a_k x_3| \\
& \times [|x_2 x_3| |a_l x_2| |a_l x_3| + |x_3 x_1| |a_l x_3| |a_l x_1| + |x_1 x_2| |a_l x_1| |a_l x_2|] + \ldots \\
& + |a_n a_l| |x_2 x_3| |a_p x_1| |a_q x_1| |a_r x_1| |a_n x_1| |a_l x_1| |a_k x_2| |a_k x_3| \\
& \times [|x_2 x_3| |a_m x_2| |a_m x_3| + |x_3 x_1| |a_m x_3| |a_m x_1| + |x_1 x_2| |a_m x_1| |a_m x_2| + \ldots \\
& + |a_l a_m| |x_2 x_3| |a_p x_1| |a_q x_1| |a_r x_1| |a_l x_1| |a_m x_1| |a_k x_2| |a_k x_3| \\
& \times [|x_2 x_3| |a_n x_2| |a_n x_3| + |x_3 x_1| |a_n x_3| |a_n x_1| + |x_1 x_2| |a_n x_1| |a_n x_2|] \Big\}.
\end{aligned}$$

Mais on a

$$\begin{aligned}
&|x_2 x_3| |a_l x_2| |a_l x_3| + \ldots = |x_1 x_2 x_3|, \\
&|a_m a_n| |a_m x_1| |a_n x_1| + |a_n a_l| \ldots = |a_l a_m a_n|,
\end{aligned}$$

en sorte que l'expression considérée devient

$$\begin{aligned}
\frac{|a_l a_m a_n|}{|x_1 x_2 x_3|} \Big[& |x_2 x_3| |a_p x_1| |a_q x_1| |a_r x_1| |a_k x_2| |a_k x_3| \\
& + |x_3 x_1| |a_p x_2| |a_q x_2| |a_r x_2| |a_k x_3| |a_k x_1| \\
& + |x_1 x_2| |a_p x_3| |a_q x_3| |a_r x_3| |a_k x_1| |a_k x_2|.
\end{aligned}$$

L'expression entre parenthèses est encore, nous le savons, divisible par $|x_1 x_2 x_3|$, et son quotient qui est une fonction symétrique de x_1, x_2 et x_3 pourra, par suite, être exprimé au moyen des fonctions P à un seul indice.

Posons

$$\begin{aligned} a_p + a_q + a_r &= \lambda, \\ a_p a_q + a_q a_r + a_r a_p &= \mu, \\ a_p a_q a_r &= \nu. \end{aligned}$$

L'expression entre parenthèses devient

$$\begin{aligned} &\Sigma|x_2 x_1|\,|a_p x_1|\,|a_q x_1|\,|a_r x_1|\,|a_k x_2|\,|a_k x_3| \\ &\quad = \Sigma|x_2 x_3|(\nu - \mu x_1 + \lambda x_1^2 - x_1^3)\,[a_k^2 - a_k(x_2 + x_3) + x_2 x_3] \\ &\quad = \nu a_k^2 \Sigma|x_2 x_3| - \mu a_k^2 \Sigma x_1 |x_2 x_3| + \lambda a_k^2 \Sigma x_1^2 |x_2 x_3| - a_k^2 \Sigma x_1^3 |x_2 x_3| \\ &\qquad - \nu a_k \Sigma(x_2 + x_3)|x_2 x_3| + \mu a_k \Sigma x_1 (x_2 + x_3)|x_2 x_3| \\ &\qquad - \lambda a_k \Sigma x_1^2 (x_2 + x_3)|x_2 x_3| + a_k \Sigma x_1^3 (x_2 + x_3)|x_2 x_3| + \nu\,\Sigma x_2 x_3 |x_2 x_3| \\ &\qquad - \mu x_1 x_2 x_3 \Sigma|x_2 x_3| + \lambda x_1 x_2 x_3 \Sigma x_1 |x_2 x_3| - x_1 x_2 x_3 \Sigma x_1^2 |x_2 x_3| \end{aligned}$$

ou bien, en appliquant les formules (7) et remarquant que

$$\begin{aligned} 0 &= -|x_1 x_2 x_3| \\ &= |x_1 x_2 x_3|(a_k^3 - a_k^2\alpha + a_k\beta - \gamma - a_k^3 + a_k^2\lambda - a_k\mu + \nu) \end{aligned}$$

ou bien enfin

$$= |x_1 x_2 x_3|(\mathrm{P}_k^2 - |a_k a_p|\,|a_k a_q|\,|a_k a_r|).$$

Nous arrivons donc ainsi à la formule

$$(16)\quad |a_m a_n|\mathrm{P}_{kl}^2 + |a_n a_l|\mathrm{P}_{km}^2 + |a_l a_m|\mathrm{P}_{kn}^2 = |a_l a_m a_n|(\mathrm{P}_k^2 - |a_k a_p|\,|a_k a_q|\,|a_k a_r|\mathrm{P}_0^2).$$

La substitution

$$(17)\qquad \begin{vmatrix} l & m & n & p & q & r \\ m & n & p & q & r & l \end{vmatrix}$$

donne la formule

$$(18)\quad |a_n a_p|\mathrm{P}_{km}^2 + |a_p a_m|\mathrm{P}_{kn}^2 + |a_m a_n|\mathrm{P}_{kp}^2 = |a_m a_n a_p|(\mathrm{P}_k^2 - |a_k a_q|\,|a_k a_r|\,|a_k a_l|\mathrm{P}_0^2).$$

Éliminons P_0^2 entre (16) et (18); pour cela, ajoutons-les membre à membre, après avoir multiplié les deux termes de la première par

$|a_m a_p||a_n a_p||a_k a_l|$ et ceux de la seconde par $-|a_l a_m||a_l a_n||a_k a_p|$, il vient

$$\begin{aligned}
&\mathrm{P}_{kl}^2\;|a_m a_n a_p||a_k a_l|\\
&+\mathrm{P}_{km}^2(|a_n a_l||a_m a_p||a_n a_p||a_k a_l|-|a_n a_p||a_l a_m||a_l a_n||a_k a_p|)\\
&+\mathrm{P}_{kn}^2(|a_l a_m||a_m a_p||a_n a_p||a_k a_l|-|a_p a_m||a_l a_m||a_l a_n||a_k a_p|)\\
&-\mathrm{P}_{kp}^2\;|a_m a_n||a_l a_m||a_l a_n||a_k a_p|\\
=\;&\mathrm{P}_k^2\;(|a_l a_m a_n||a_m a_p||a_n a_p||a_k a_l|-|a_m a_n a_p||a_l a_m||a_l a_n||a_k a_p|)
\end{aligned}$$

ou simplement

$$(19)\qquad\left\{\begin{aligned}
&\mathrm{P}_{kl}^2|a_m a_n a_p||a_k a_l|-\mathrm{P}_{km}^2|a_n a_p a_l||a_k a_m|\\
&+\mathrm{P}_{kn}^2|a_p a_l a_m||a_k a_l|-\mathrm{P}_{kp}^2|a_m a_n a_p||a_k a_p|\\
&=-\mathrm{P}_k^2\;|a_l a_m a_n a_p|.
\end{aligned}\right.$$

En appliquant à nouveau la substitution (17) à cette dernière relation, on a

$$(20)\qquad\left\{\begin{aligned}
&\mathrm{P}_{km}^2|a_n a_p a_q||a_k a_m|-\mathrm{P}_{kn}^2|a_p a_q a_m||a_k a_n|\\
&+\mathrm{P}_{kp}^2|a_q a_m a_n||a_k a_p|-\mathrm{P}_{kq}^2|a_m a_n a_p||a_k a_q|\\
&=-\mathrm{P}_k^2\;|a_m a_n a_p a_q|.
\end{aligned}\right.$$

On en déduit, en éliminant P_k^2 entre (19) et (20),

$$(21)\qquad\left\{\begin{aligned}
&\mathrm{P}_{kl}^2\;|a_m a_n a_p a_q||a_k a_l|\\
&-\mathrm{P}_{km}^2|a_n a_p a_q a_l||a_k a_m|+\mathrm{P}_{kn}^2|a_p a_q a_l a_m||a_k a_n|\\
&-\mathrm{P}_{kp}^2\;|a_q a_l a_m a_n||a_k a_p|+\mathrm{P}_{kq}^2|a_l a_m a_n a_p||a_k a_q|=0.
\end{aligned}\right.$$

Si, entre les équations (17) et (18), on élimine P_k^2 au lieu d'éliminer P_0^2, on arrivera à une relation d'une forme nouvelle

$$(22)\quad\left\{\begin{aligned}
&\mathrm{P}_{kl}^2|a_m a_n a_p|-\mathrm{P}_{km}^2|a_n a_p a_l|+\mathrm{P}_{kn}^2|a_p a_l a_m|\\
&\qquad-\mathrm{P}_{kp}^2\;|a_l a_m a_n|+\mathrm{P}_0^2\;|a_l a_m a_n a_p||a_k a_q||a_k a_r|=0.
\end{aligned}\right.$$

On peut aussi évidemment tirer la relation (21) de deux relations semblables à (22).

En résumé, les huit fonctions

$$\mathrm{P}_0,\quad \mathrm{P}_k,\quad \mathrm{P}_{kl},\quad \mathrm{P}_{km},\quad \mathrm{P}_{kn},\quad \mathrm{P}_{kp},\quad \mathrm{P}_{kq},\quad \mathrm{P}_{kr}$$

forment un groupe tel que, quatre quelconques d'entre elles étant données, les carrés des quatre autres s'expriment linéairement en fonction des carrés de celles qui ont été choisies. Les relations ont, suivant le choix qui a été fait, l'une des formes (16), (19), (21) ou (22).

Nous arrivons donc ici à reconnaître l'existence de sept groupes analogues formés avec les fonctions P. Les indices des fonctions appartenant à un même groupe sont figurés sur une même ligne horizontale dans le tableau suivant :

$$(23)\qquad \left\{\begin{array}{cccccccc}
0 & k & kl & km & kn & kp & kq & kr \\
0 & l & lk & lm & ln & lp & lq & lr \\
0 & m & mk & ml & mn & mp & mq & mr \\
0 & n & nk & nl & nm & np & nq & nr \\
0 & p & pk & pl & pm & pn & pq & pr \\
0 & q & qk & ql & qm & qn & qp & qr \\
0 & r & rk & rl & rm & rn & rp & rq
\end{array}\right.$$

Un quelconque de ces groupes est défini par la fonction P à un seul indice qu'il contient, ou bien, plus simplement, par cet indice. Nous pourrons donc parler sans ambiguïté du *groupe* k, par exemple. Le groupe défini précédemment, auquel nous avons donné le nom de *groupe* o, contenait l'indice o d'une façon particulière, tandis que rien n'y distinguait k de l, de m, ...

En fait, les relations que nous avons démontrées jusqu'ici étaient déjà connues ([1]). Nous avons cru cependant utile de les rappeler, d'en donner une démonstration simple et purement arithmétique, et cela d'autant plus que la méthode employée jusqu'ici va nous fournir, sans grande modification, une quantité considérable de relations nouvelles.

7. Partons maintenant des fonctions à trois indices.

On a

$$(24)\quad \left\{\begin{aligned} P^2_{klm} = \frac{1}{|x_1 x_2 x_3|^2}\Bigg[& |x_2 x_3|^2 R(x_1) \frac{|a_k x_2||a_k x_3||a_l x_2||a_l x_3||a_m x_2||a_m x_3|}{|a_k x_1|\,|a_l x_1|\,|a_m x_1|} + \ldots \\ & + 2|x_2 x_3||x_3 x_1|\sqrt{R(x_1)\,R(x_2)}\,|a_k x_3||a_l x_3||a_m x_3| + \ldots \Bigg]. \end{aligned}\right.$$

([1]) WEIERSTRASS, *Theorie der abelschen Functionen* (*Algebraische Relationen unter den abelschen Functionen.....*). (*Journal de Crelle*, t. 57, p. 318, § 5, théorèmes I et II.)

Prenant au hasard cinq fonctions de cette nature, nous pourrions former une combinaison linéaire de leurs carrés telle que, dans la somme, le coefficient de $\sqrt{R(x_1)R(x_2)}$ soit nul. Il est évident d'ailleurs qu'il en sera de même pour les coefficients de $\sqrt{R(x_2)R(x_3)}$ et $\sqrt{R(x_3)R(x_1)}$, c'est-à-dire que cette combinaison linéaire aura une expression rationnelle. Mais si, au lieu de prendre des fonctions à indices entièrement indépendants, nous considérons celles qui ont un indice commun, quatre fonctions seront suffisantes pour former une combinaison linéaire. Si enfin nous assujettissons deux indices à être communs aux fonctions employées, trois de ces fonctions nous seront suffisantes; de plus, nous pourrons prendre comme une des trois fonctions la fonction P à deux indices dont les indices sont précisément ceux dont il vient d'être parlé. Ainsi on pourra prendre

$$P_{klm},\quad P_{kln}\quad \text{et}\quad P_{kl}.$$

Écrivant que le coefficient de $\sqrt{R(x_1)R(x_2)}$ est identiquement nul dans la combinaison

$$AP^2_{klm} + BP^2_{kln} + CP^2_{kl},$$

on a

$$A|a_m x_3| + B|a_n x_3| + C = 0, \tag{25}$$

ce qui donne, en posant $A = |a_l a_k|$,

$$\left\{\begin{aligned} B &= -|a_l a_k|, \\ C &= -|a_l a_k|\,|a_m a_n|. \end{aligned}\right. \tag{26}$$

Dès lors, on a

$$\begin{aligned}
&|a_l a_k|[P^2_{klm} - P^2_{kln} - |a_m a_n|P^2_{kl}] \\
&= \frac{1}{|x_1 x_2 x_3|^2}\left\{\begin{aligned}
&|a_l a_k|\left[|x_2 x_3|^2 R(x_1)\frac{|a_k x_2||a_k x_3||a_l x_2||a_l x_3||a_m x_2||a_m x_3|}{|a_k x_1||a_l x_1||a_m x_1|} + \ldots\right] \\
&-|a_l a_k|\left[|x_2 x_3|^2 R(x_1)\frac{|a_k x_2||a_k x_3||a_l x_2||a_l x_3||a_n x_2||a_n x_3|}{|a_k x_1||a_l x_1||a_n x_1|} + \ldots\right] \\
&-|a_l a_k||a_m a_n|\left[|x_2 x_3|^2 R(x_1)\frac{|a_k x_2||a_k x_3||a_l x_2||a_l x_3|}{|a_k x_1||a_l x_1|} + \ldots\right]
\end{aligned}\right\}.
\end{aligned}$$

En tenant compte de (25) et (26), on peut écrire le second membre sous la forme

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{|x_1x_2x_3|^2}\Big[& |a_la_k||x_2x_3||a_px_1||a_qx_1||a_rx_1||a_nx_1||a_kx_2||a_kx_3||a_lx_2||a_lx_3| \\
& \quad \times (|x_2x_3||a_mx_2||a_mx_3| + |x_3x_1||a_mx_3||a_mx_1| + |x_1x_2||a_mx_1||a_mx_2|) + \ldots \\
& - |a_la_k||x_2x_3||a_px_1||a_qx_1||a_rx_1||a_mx_1||a_kx_2||a_kx_3||a_lx_2||a_lx_3| \\
& \quad \times (|x_2x_3||a_nx_2||a_nx_3| + |x_3x_1||a_nx_3||a_nx_1| + |x_1x_2||a_nx_1||a_nx_2|) + \ldots \\
& - |a_la_k||a_ma_n||a_px_1||a_qx_1||a_rx_1||a_mx_1||a_nx_1||a_kx_2||a_kx_3||a_lx_2||a_lx_3| \\
& \qquad\qquad \times (|x_2x_3| + |x_3x_1| + |x_1x_2|) + \ldots\Big].
\end{aligned}
$$

Mais on a

$$|x_2x_3||a_mx_2|a_mx_3| + \ldots = |x_1x_2x_3|, \quad |x_2x_3| + \ldots = 0,$$

en sorte que l'expression se réduit simplement à

$$\frac{1}{|x_1x_2x_3|}|a_la_k|\Sigma|x_2x_3||a_px_1||a_qx_1||a_rx_1||a_kx_2||a_kx_3||a_lx_2||a_lx_3|(|a_nx_1| - |a_mx_1|),$$

c'est-à-dire à

$$\frac{1}{|x_1x_2x_3|}|a_ka_l||a_ma_n|\Sigma|x_2x_3||a_px_1||a_qx_1||a_rx_1||a_kx_2||a_kx_3||a_lx_2||a_lx_3|.$$

La quantité entre parenthèses est divisible par $|x_1x_2x_3|$ et le quotient est une fonction symétrique des trois variables x_1, x_2 et x_3 exprimable rationnellement en fonction de α, β, γ, par suite, des fonctions P à un seul indice.

On a, en conservant à λ, μ, ν les significations qui leur ont été données précédemment,

$$
\begin{aligned}
& \Sigma|x_2x_3||a_px_1||a_qx_1||a_rx_1||a_kx_2||a_kx_3||a_lx_2||a_lx_3| \\
& = \Sigma|x_2x_3|(\nu - \mu x_1 + \lambda x_1^2 - x_1^3)[a_k^2a_l^2 - a_ka_l(a_k+a_l)(x_2+x_3) + (a_k^2+a_l^2)x_2x_3 \\
& \qquad + a_ka_l(x_2+x_3)^2 - (a_k+a_l)x_2x_3(x_2+x_3) + x_2^2x_3^2] \\
& = \nu[a_k^2a_l^2\Sigma|x_2x_3| - a_ka_l(a_k+a_l)\Sigma(x_2+x_3)|x_2x_3| + (a_k^2+a_l^2)\Sigma x_2x_3|x_2x_3| \\
& \qquad + a_ka_l\Sigma(x_2+x_3)^2|x_2x_3| - (a_k+a_l)\Sigma x_2x_3(x_2+x_3)|x_2x_3| + \Sigma x_2^2x_3^2|x_2x_3|] \\
& \quad - \mu[a_k^2a_l^2\Sigma x_1|x_2x_3| - a_ka_l(a_k+a_l)\Sigma x_1(x_2+x_3)|x_2x_3| + (a_k^2-a_l^2)\Sigma x_1x_2x_3|x_2x_3| \\
& \qquad + a_ka_l\Sigma x_1(x_2+x_3)^2|x_2x_3| - (a_k+a_l)\Sigma x_1x_2x_3(x_2+x_3)|x_2x_3| + \Sigma x_1x_2^2x_3^2|x_2x_3|] \\
& \quad + \lambda[a_k^2a_l^2\Sigma x_1^2|x_2x_3| - a_ka_l(a_k+a_l)\Sigma x_1^2(x_2+x_3)|x_2x_3| + (a_k^2+a_l^2)\Sigma x_1^2x_2x_3|x_2x_3| \\
& \qquad + a_ka_l\Sigma x_1^2(x_2+x_3)^2|x_2x_3| - (a_k+a_l)\Sigma x_1^2x_2x_3(x_2+x_3)|x_2x_3| + \Sigma x_1^2x_2^2x_3^2|x_2x_3|] \\
& \quad - [a_k^2a_l^2\Sigma x_1^3|x_2x_3| - a_ka_l(a_k+a_l)\Sigma x_1^3(x_2+x_3)|x_2x_3| + (a_k^2+a_l^2)\Sigma x_1^3x_2x_3|x_2x_3| \\
& \qquad + a_ka_l\Sigma x_1^3(x_2+x_3)^2|x_2x_3| - (a_k+a_l)\Sigma x_1^3x_2x_3(x_2+x_3)|x_2x_3| + \Sigma x_1^3x_2^2x_3^2|x_2x_3|];
\end{aligned}
$$

en appliquant les formules (7), on trouve alors

$$
\begin{aligned}
&|a_k a_l|\,\Sigma\,|x_2 x_3|\,|a_p x_1|\,|a_q x_1|\,|a_r x_1|\,|a_k x_2|\,|a_k x_3|\,|a_l x_2|\,|a_l x_3| \\
&\quad = |x_1 x_2 x_3|\,[\;\;\;\nu\;\;\;(a_k^3 - \alpha a_k^2 + \beta a_k - \gamma) \\
&\qquad\qquad\qquad - \nu\;\;\;(a_l^3 - \alpha a_l^2 + \beta a_l - \gamma) \\
&\qquad\qquad\qquad - \mu a_l\,(a_k^3 - \alpha a_k^2 + \underline{\beta a_k} - \gamma) \\
&\qquad\qquad\qquad + \mu a_k\,(a_l^3 - \alpha a_l^2 + \underline{\beta a_l} - \gamma) \\
&\qquad\qquad\qquad + \lambda a_l^2\,(a_k^3 - \underline{\alpha a_k^2} + \beta a_k - \gamma) \\
&\qquad\qquad\qquad - \lambda a_k^2\,(a_l^3 - \underline{\alpha a_l^2} + \beta a_l - \gamma) \\
&\qquad\qquad\qquad - \;\;a_p^3\,(\underline{a_k^3} - \alpha a_k^2 + \beta a_k - \gamma) \\
&\qquad\qquad\qquad + \;\;a_k^3\,(\underline{a_l^3} - \alpha a_l^2 + \beta a_l - \gamma)].
\end{aligned}
$$

Dans la réduction, les termes soulignés ne se présentent pas, mais il est permis de les ajouter, puisqu'ils se détruisent deux à deux.

Dès lors, on a, dans l'expression précédente, pour coefficient de $|x_1 x_2 x_3|$,

$$
\begin{aligned}
&(\nu - \mu a_l + \lambda a_l^2 - a_l^3)\,(a_k^3 - \alpha a_k^2 + \beta a_k - \gamma) \\
&- (\nu - \mu a_k + \lambda a_k^2 - a_k^3)\,(a_l^3 - \alpha a_l^2 + \beta a_l - \gamma),
\end{aligned}
$$

c'est-à-dire

$$|a_p a_l|\,|a_q a_l|\,|a_r a_l|\,\mathrm{P}_k^2 - |a_p a_k|\,|a_q a_k|\,|a_r a_k|\,\mathrm{P}_l^2.$$

Nous arrivons donc ainsi à la formule

$$
\tag{27}
\left\{
\begin{aligned}
&|a_l a_k|(\mathrm{P}_{klm}^2 - \mathrm{P}_{kln}^2) \\
&\quad = |a_l a_k|\,|a_m a_n|\,\mathrm{P}_{kl}^2 + |a_m a_n|(|a_p a_l|\,|a_q a_l|\,|a_r a_l|\,\mathrm{P}_k^2 - |a_p a_k|\,|a_q a_k|\,|a_r a_k|\,\mathrm{P}_l^2).
\end{aligned}
\right.
$$

La substitution

$$
\begin{vmatrix}
m & n & p & q & r \\
n & p & q & r & m
\end{vmatrix}
$$

donne la formule

$$
\tag{28}
\left\{
\begin{aligned}
&|a_l a_k|(\mathrm{P}_{kln}^2 - \mathrm{P}_{klp}^2) \\
&\quad = |a_l a_k|\,|a_n a_p|\,\mathrm{P}_{kl}^2 + |a_n a_p|[|a_q a_l|\,|a_r a_l|\,|a_m a_l|\,\mathrm{P}_k^2 - |a_q a_k|\,|a_r a_k|\,|a_m a_k|\,\mathrm{P}_l^2].
\end{aligned}
\right.
$$

Multipliant les deux termes de l'égalité (27) par $|a_n a_p|$, ceux de (28) par $|a_n a_m|$ et ajoutant, on a

$$
\tag{29}
\left\{
\begin{aligned}
&|a_l a_k|(|a_n a_p|\,\mathrm{P}_{klm}^2 + |a_p a_m|\,\mathrm{P}_{kln}^2 + |a_m a_n|\,\mathrm{P}_{klp}^2) \\
&\quad = |a_m a_n a_p|(|a_q a_k|\,|a_r a_k|\,\mathrm{P}_l^2 - |a_q a_l|\,|a_r a_l|\,\mathrm{P}_k^2).
\end{aligned}
\right.
$$

En éliminant P_l^2 entre les deux mêmes équations, on trouve

$$(30)\quad \left\{\begin{aligned} &|a_m a_k|\,|a_n a_p|P_{klm}^2 + |a_n a_k|\,|a_p a_m|P_{kln}^2 + |a_p a_k|\,|a_m a_n|P_{klp}^2 \\ &\quad = |a_m a_n a_p|P_{kl}^2 - |a_m a_n a_p|\,|a_q a_l|\,|a_r a_l|P_k^2. \end{aligned}\right.$$

Si l'on continue à appliquer le même procédé, on arrive à des formules de type différent.

Ainsi, de (30) on obtient, par une substitution,

$$(31)\quad \left\{\begin{aligned} &|a_n a_k|\,|a_p a_q|P_{kln}^2 + |a_p a_k|\,|a_q a_n|P_{klp}^2 + |a_q a_k|\,|a_n a_p|P_{klq}^2 \\ &\quad = |a_n a_p a_q|P_{kl}^2 - |a_n a_p a_q|\,|a_r a_l|\,|a_m a_l|P_k^2. \end{aligned}\right.$$

Les formules (30) et (31) fournissent, en éliminant P_{kl}^2,

$$(32)\quad \left\{\begin{aligned} &|a_m a_k|\,|a_n a_p a_q|P_{klm}^2 - |a_n a_k|\,|a_p a_q a_m|P_{kln}^2 \\ &+ |a_p a_k|\,|a_q a_m a_n|P_{klp}^2 - |a_q a_k|\,|a_m a_n a_p|P_{klq}^2 \\ &\quad = |a_r a_l|\,|a_m a_n a_p a_q|P_k^2, \end{aligned}\right.$$

ou bien, si l'on élimine P_k^2,

$$(33)\quad \left\{\begin{aligned} &|a_m a_k|\,|a_m a_l|\,|a_n a_p a_q|P_{klm}^2 - |a_n a_k|\,|a_n a_l|\,|a_p a_p a_m|P_{kln}^2 \\ &+ |a_p a_k|\,|a_p a_l|\,|a_q a_m a_n|P_{klp}^2 - |a_q a_k|\,|a_q a_l|\,|a_m a_n a_p|P_{klq}^2 \\ &\quad = P_{kl}^2|a_m a_n a_p a_q|. \end{aligned}\right.$$

Une nouvelle substitution fournit maintenant

$$(34)\quad \left\{\begin{aligned} &|a_n a_k|\,|a_n a_l|\,|a_p a_q a_r|P_{kln}^2 - |a_p a_k|\,|a_p a_l|\,|a_q a_r a_n|P_{klp}^2 \\ &+ |a_q a_k|\,|a_q a_l|\,|a_r a_n a_p|P_{klq}^2 - |a_r a_k|\,|a_r a_l|\,|a_n a_p a_q|P_{klr}^2 \\ &\quad = P_{kl}^2|a_n a_p a_q a_r|; \end{aligned}\right.$$

et, en éliminant P_{kl}^2,

$$(35)\quad \left\{\begin{aligned} &|a_m a_k|\,|a_m a_l|\,|a_n a_p a_q a_r|P_{klm}^2 \\ &+ |a_n a_k|\,|a_n a_l|\,|a_p a_q a_r a_m|P_{kln}^2 \\ &+ |a_p a_k|\,|a_p a_l|\,|a_q a_r a_m a_n|P_{klp}^2 \\ &+ |a_q a_k|\,|a_q a_l|\,|a_r a_m a_n a_p|P_{klq}^2 \\ &+ |a_r a_k|\,|a_r a_l|\,|a_m a_n a_p a_q|P_{klr}^2 = 0. \end{aligned}\right.$$

En résumé, les huit fonctions

$$P_k,\quad P_{ql},\quad P_{kl},\quad P_{klm},\quad P_{kln},\quad P_{klp},\quad P_{klq},\quad P_{klr}$$

forment un groupe tel que, quatre d'entre elles étant choisies *a* *priori*, les carrés des quatre autres s'expriment linéairement en fonction des carrés de celles qui ont été choisies. Les relations sont, suivant le choix qui a été fait, de l'une des formes (27), (29), (30), (32), (33) ou (35).

Nous arrivons donc ici à reconnaître l'existence de 21 groupes analogues formés avec les fonctions P. Les indices des fonctions appartenant à un même groupe sont représentés sur une même ligne horizontale dans le tableau suivant :

$$(36)\qquad \left\{\begin{array}{cccccccc}
k & l & kl & klm & kln & klp & klq & klr \\
k & m & km & kml & kmn & kmp & kmq & kmr \\
k & n & kn & knl & knm & knp & knq & knr \\
k & p & kp & kpl & kpm & kpn & kpq & kpr \\
k & q & kq & kql & kqm & kqn & kqp & kqr \\
k & r & kr & krl & krm & krn & krp & krq \\
l & m & lm & lmk & lmn & lmp & lmq & lmr \\
l & n & ln & lnk & lnm & lnp & lnq & lnr \\
l & p & lp & lpk & lpm & lpn & lpq & lpr \\
l & q & lq & lqk & lqm & lqn & lqp & lqr \\
l & r & lr & lrk & lrm & lrn & lrp & lrq \\
m & n & mn & mnk & mnl & mnp & mnq & mnr \\
m & p & mp & mpk & mpl & mpn & mpq & mpr \\
m & q & mq & mqk & mql & mqn & mqp & mqr \\
m & r & mr & mrk & mrl & mrn & mrp & mrq \\
n & p & np & npk & npl & npm & npq & npr \\
n & q & nq & nqk & nql & nqm & nqp & nqr \\
n & r & nr & nrk & nrl & nrm & nrp & nrq \\
p & q & pq & pqk & pql & pqm & pqn & pqr \\
p & r & pr & prk & prl & prm & prn & prq \\
q & r & qr & qrk & qrl & qrm & qrn & qrp
\end{array}\right.$$

Un quelconque de ces groupes est défini par la fonction P à deux indices qu'il renferme ou simplement par l'ensemble de ces deux indices. Nous pourrons donc parler sans ambiguïté du groupe kl par exemple, aussi bien, d'après ce qui a été dit précédemment, que des groupes k et o.

8. Les indices situés sur une même ligne horizontale de l'un quelconque des tableaux (12), (23) ou (36) sont tels que, cinq d'entre eux étant choisis à l'avance, une substitution effectuée sur les lettres k, l, m, n, p, q, r, qui laisse fixe l'ensemble de quatre d'entre eux, ou bien ne change pas le cinquième, ou bien, si elle le change, le transforme en un des trois autres indices de la ligne considérée.

La même propriété subsiste pour l'ensemble des huit indices :

$$(37) \qquad klm,\quad npq,\quad pqr,\quad qrn,\quad rnp,\quad k,\quad l,\quad m;$$

ou encore pour

$$(38) \qquad klm,\quad npq,\quad pqr,\quad qrn,\quad rnp,\quad kl,\quad lm,\quad mk.$$

Il est impossible que la ligne (37) représente les indices d'un groupe de fonctions P, analogues à ceux trouvés jusqu'ici. On aurait en effet une relation de la forme

$$(38) \qquad \mathrm{AP}^2_{klm} + \mathrm{BP}^2_{npq} + \mathrm{CP}^2_k + \mathrm{DP}^2_l + \mathrm{EP}^2_m = 0,$$

qui est impossible, car on ne peut, avec P^2_{klm} et P^2_{npq}, former une combinaison rationnelle.

Nous allons considérer maintenant des fonctions dont les indices sont figurés dans la ligne (38).

9. Partons, par exemple, des fonctions

$$\mathrm{P}_{klm},\ \mathrm{P}_{npq},\ \mathrm{P}_{lm},\ \mathrm{P}_{mk},\ \mathrm{P}_{kl}.$$

Nous pouvons avec elles former une combinaison rationnelle

$$\mathrm{AP}^2_{klm} + \mathrm{BP}^2_{npq} + \mathrm{CP}^2_{lm} + \mathrm{DP}^2_{mk} + \mathrm{EP}^2_{kl},$$

en déterminant A, B, C, D, E par la condition que les radicaux disparaissent, ce qui donne

$$(39) \quad \left\{ \begin{aligned} &\mathrm{A}|a_k x_3||a_l x_3||a_m x_3| + \mathrm{B}|a_n x_3||a_p x_3||a_q x_3| \\ &\quad + \mathrm{C}|a_l x_3||a_m x_3| + \mathrm{D}|a_m x_3||a_k x_3| + \mathrm{E}|a_k x_3||a_l x_3| = 0. \end{aligned} \right.$$

Ce qui revient à définir A, B, C, D, E par les conditions

$$\begin{array}{lllll}
A + B & & & & = 0,\\
A\lambda + B\lambda_1 + C & & + D & + E & = 0,\\
A\mu + B\mu_1 + C(a_l + a_m) & & + D(a_m + a_k) & + E(a_k + a_l) & = 0,\\
A\nu + B\nu_1 + C a_l a_m & & + D a_m a_k & + E a_k a_l & = 0,
\end{array}$$

où nous posons

$$\begin{aligned}
\lambda &= a_k + a_l + a_m, & \lambda_1 &= a_n + a_p + a_q,\\
\mu &= a_l a_m + a_m a_k + a_k a_l, & \mu_1 &= a_p a_q + a_q a_n + a_n a_p,\\
\nu &= a_k a_l a_m; & \nu_1 &= a_n a_p a_q.
\end{aligned}$$

Or, en prenant

$$A = |a_k a_l a_m|,$$

on trouve

$$\begin{aligned}
B &= -|a_k a_l a_m|,\\
C &= -\begin{vmatrix} \lambda - \lambda_1 & 1 & 1\\ \mu - \mu_1 & a_m + a_k & a_k + a_l\\ \nu - \nu_1 & a_m a_k & a_k a_l \end{vmatrix}\\
&= -(\lambda a_k^2 - \mu a_k + \nu - \lambda_1 a_k^2 + \mu_1 a_k - \nu_1)|a_l a_m|\\
&= -|a_l a_m|(a_k^3 - \lambda_1 a_k^2 + \mu_1 a_k - \nu_1).
\end{aligned}$$

De même

$$(40)\qquad \left\{\begin{aligned}
C &= -|a_l a_m||a_k a_n||a_k a_p||a_k a_q|,\\
D &= -|a_m a_k||a_l a_n||a_l a_p||a_l a_q|,\\
E &= -|a_k a_l||a_m a_n||a_m a_p||a_m a_q|.
\end{aligned}\right.$$

On a donc

$$\begin{aligned}
&AP_{klm}^2 + BP_{npq}^2 + CP_{lm}^2 + DP_{mk}^2 + EP_{kl}^2\\
&= \frac{1}{|x_1 x_2 x_3|^2}\Big[\;|a_k a_l a_m|(|x_2 x_3|^2 |a_r x_1||a_n x_1||a_p x_1||a_q x_1||a_k x_2||a_k x_3||a_l x_2||a_l x_3||a_m x_2||a_m x_3| + \ldots)\\
&\qquad - |a_k a_l a_m|(|x_2 x_3|^2 |a_r x_1||a_k x_1||a_l x_1||a_m x_1||a_n x_2||a_n x_3||a_p x_2||a_p x_3||a_q x_2||a_q x_3| + \ldots)\\
&\qquad - |a_l a_m||a_k a_n||a_k a_p||a_k a_q|\\
&\qquad\qquad \times (|x_2 x_3|^2 |a_r x_1||a_n x_1||a_p x_1||a_q x_1||a_k x_1||a_l x_2||a_l x_3||a_m x_2||a_m x_3| + \ldots)\\
&\qquad - |a_m a_k||a_l a_n||a_l a_p||a_l a_q|(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots)\\
&\qquad - |a_k a_l||a_m a_n||a_m a_p||a_m a_q|(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots)\Big].
\end{aligned}$$

Employant encore ici la méthode qui nous a réussi précédemment, on peut écrire, en tenant compte des équations (39) et (40), le second membre sous la forme

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{|x_1 x_2 x_3|^2}\Big[\;& |a_k a_l a_m||x_2 x_3||a_r x_1||a_k x_1||a_p x_1||a_q x_1| \\
&\quad \times (\;\; |x_2 x_3||a_k x_2||a_k x_3||a_l x_2||a_l x_3||a_m x_2||a_m x_3| \\
&\qquad + |x_3 x_1||a_k x_3||a_k x_1||a_l x_3||a_l x_1||a_m x_3||a_m x_1| \\
&\qquad + |x_1 x_2||a_k x_1||a_k x_2||a_l x_1||a_l x_2||a_m x_1||a_m x_2|) + \ldots \\
& - |a_k a_l a_m||x_1 x_2||a_r x_1||a_k x_1||a_l x_1||a_m x_1| \\
&\quad \times (\;\; |x_2 x_3||a_n x_2||a_n x_3||a_p x_2||a_p x_3||a_q x_2||a_q x_3| \\
&\qquad + |x_3 x_1||a_n x_3||a_n x_1||a_p x_3||a_p x_1||a_q x_3||a_q x_1| \\
&\qquad + |x_1 x_2||a_n x_1||a_n x_2||a_p x_1||a_p x_2||a_q x_1||a_q x_2|) + \ldots \\
& - |a_l a_m||a_k a_n||a_k a_p||a_k a_q||x_2 x_3||a_r x_1||a_n x_1||a_p x_1||a_q x_1||a_k x_1| \\
&\quad (\;\; |x_2 x_3||a_l x_2||a_l x_3||a_m x_2||a_m x_3| \\
&\quad + |x_3 x_1||a_l x_3||a_l x_1||a_m x_3||a_m x_1| \\
&\quad + |x_1 x_2||a_l x_1||a_l x_2||a_m x_1||a_m x_2|) \\
& - |a_m a_k||a_l a_n||a_l a_p||a_l a_q| \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& - |a_k a_l||a_m a_n||a_m a_p||a_m a_q| \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \Big].
\end{aligned}
$$

Les termes non écrits se déduisent de ceux écrits par une permutation circulaire effectuée sur x_1, x_2, x_3, en ce qui concerne les deux premières lignes. Les deux dernières lignes se déduiront de la précédente par une permutation circulaire effectuée sur les quantités a_k, a_l, a_m.

On peut donc écrire cette expression

$$
\begin{aligned}
\frac{\ }{{}_3|^2}\Big(\;& |a_k a_l a_m| \Sigma |x_2 x_3||a_r x_1||a_n x_1||a_p x_1||a_q x_1| \Sigma |x_2 x_3||a_k x_2||a_k x_3||a_l x_2||a_l x_3||a_m x_2||a_m x_3| \\
& - |a_k a_l a_m| \Sigma |x_2 x_3||a_r x_1||a_k x_1||a_l x_1||a_m x_1| \Sigma |x_2 x_3||a_n x_2||a_n x_3||a_p x_2||a_p x_3||a_q x_2||a_q x_3| \\
& - |a_l a_m||a_k a_m||a_k a_p||a_k a_q| \Sigma |x_2 x_3||a_r x_1||a_n x_1||a_p x_1||a_q x_1||a_k x_1| \\
& \times \Sigma |x_2 x_3||a_l x_2||a_l x_3||a_m x_2||a_m x_3| \\
& - |a_m a_n| \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& - |a_k a_l| \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \Big).
\end{aligned}
$$

Avec les notations introduites, on a

$$
\begin{aligned}
& \Sigma |x_2 x_3||a_r x_1||a_n x_1||a_p x_1||a_q x_1| \\
&\quad = \Sigma x_1^4 |x_2 x_3| - (a_r + \lambda_1) \Sigma x_1^3 |x_2 x_3| + (a_r \lambda_1 + \mu_1) \Sigma x_1^2 |x_2 x_3| \\
&\qquad - (a_r \mu_1 + \nu_1) \Sigma x_1 |x_2 x_3| + a_r \nu_1 \Sigma |x_2 x_3|,
\end{aligned}
$$

c'est-à-dire, en ayant égard aux relations (7),

$$= [\alpha^2 - \beta - (a_r + \lambda_1)\alpha + (a_r\lambda_1 + \mu_1)]\,|x_1 x_2 x_3|.$$

On a évidemment de même

$$\Sigma|x_2x_3|\,|a_r x_1|\,|a_k x_1|\,|a_l x_1|\,|a_m x_1| = [\alpha^2 - \beta - (a_r + \lambda)\alpha + (a_r\lambda + \mu)]|x_1 x_2 x_3|.$$

Le même procédé nous donne

$$\begin{aligned}
&\Sigma|x_2x_3|\,|a_r x_1|\,|a_k x_1|\,|a_n x_1|\,|a_p x_1|\,|a_q x_1|\\
&\quad = -\Sigma x_1^5|x_2x_3| + (a_r + a_k + \lambda_1)\,\Sigma x_1^4|x_2x_3| - [a_r a_k + (a_r + a_k)\lambda_1 + \mu_1]\,\Sigma x_1^3|x_2x_3|\\
&\qquad + [a_r a_k\lambda_1 + (a_r + a_k)\mu_1 + \nu_1]\,\Sigma x_1^2|x_2x_3| - [a_r a_k\mu_1 + (a_r + a_k)\nu_1]\,\Sigma x_1|x_2x_3|\\
&\qquad + a_r a_m\nu_1\,\Sigma|x_2x_3|\\
&\quad = [-(\alpha^3 - 2\alpha\beta + \gamma) + (a_r + a_k + \lambda_1)(\alpha^2 - \beta) - [a_r a_k + (a_r + a_k)\lambda_1 + \mu_1]\alpha\\
&\qquad\qquad + [a_r a_k\lambda_1 + (a_r + a_k)\mu_1 + \nu_1]|x_1 x_2 x_3|.
\end{aligned}$$

Passons maintenant aux seconds facteurs.

$$\begin{aligned}
&\Sigma|x_2x_3|\,|a_k x_2|\,|a_k x_3|\,|a_l x_2|\,|a_l x_3|\,|a_m x_2|\,|a_m x_3|\\
&= \Sigma x_2^3 x_3^3|x_2x_3| - \lambda\,\Sigma x_2^2 x_3^2(x_2 + x_3)|x_2x_3| + \lambda^2\,\Sigma x_2^2 x_3^2|x_2x_3|\\
&+ \mu\,\Sigma x_2 x_3(x_2^2 + x_3^2)|x_2x_3| - (\lambda\mu - 3\nu)\,\Sigma x_2x_3(x_2 + x_3)|x_2x_3| - \nu\,\Sigma(x_2 + x_3)^3|x_2x_3|\\
&+ (\mu^2 - 2\lambda\nu)\,\Sigma x_2x_3|x_2x_3| + \lambda\nu\,\Sigma(x_2 + x_3)^2|x_2x_3| - \mu\nu\,\Sigma(x_2x_3)|x_2x_3|\\
&+ \nu^2\,\Sigma|x_2x_3|\\
&\quad = [\beta^2 - \alpha\gamma - \lambda(\alpha\beta - \gamma) + \mu(\alpha^2 - 2\beta) + \lambda^2\beta - (\lambda\mu - \nu)\alpha + \mu^2 - \lambda\nu]|x_1x_2x_3|.
\end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned}
&\Sigma|x_2x_3|\,|a_n x_2|\,|a_n x_3|\,|a_p x_2|\,|a_p x_3|\,|a_q x_2|\,|a_q x_3|\\
&\quad = [\beta^2 - \alpha\gamma - \lambda_1(\alpha\beta - \gamma) + \mu_1(\alpha^2 - 2\beta) + \lambda_1^2\beta - (\lambda_1\mu_1 - \nu_1)\alpha + \mu_1^2 - \lambda_1\nu_1].
\end{aligned}$$

Enfin nous trouvons

$$\begin{aligned}
&\Sigma|x_2x_3|\,|a_l x_2|\,|a_l x_3|\,|a_m x_2|\,|a_m x_3|\\
&\quad = \Sigma x_2^2 x_3^2|x_2x_3| - (a_l + a_m)\,\Sigma x_2x_3(x_2 + x_3)|x_2x_3| + (a_l^2 + a_m^2)\,\Sigma x_2x_3|x_2x_3|\\
&\qquad + a_l a_m\,\Sigma(x_2 + x_3)^2|x_2x_3| - a_l a_m(a_l + a_m)\,\Sigma(x_2 + x_3)|x_2x_3| + a_l^2 a_m^2\,\Sigma|x_2x_3|\\
&\quad = [\beta - (a_l + a_m)\alpha + a_l^2 + a_l a_m + a_m^2]|x_1x_2x_3.
\end{aligned}$$

L'expression considérée prend donc la forme entière et peut être écrite

$$
(41)\left\{\begin{array}{l}
\mathrm{A}[\alpha^2-\beta-(a_r+\lambda_1)\alpha+(a_r\lambda_1+\mu_1)][\beta^2-\alpha\gamma-\lambda(\alpha\beta-\gamma)+\mu(\alpha^2-2\beta)+\lambda^2\beta-(\lambda\mu-\nu)\alpha+\mu^2-\lambda\nu] \\
+\mathrm{B}[\alpha^2-\beta-(a_r+\lambda)\alpha+(a_r\lambda+\mu)][\beta^2-\alpha\gamma-\lambda_1(\alpha\beta-\gamma)+\mu_1(\alpha^2-2\beta)+\lambda_1^2\beta-(\lambda_1\mu_1-\nu_1)\alpha+\mu_1^2-\lambda_1\nu_1] \\
+\mathrm{C}\left\{-(\alpha^3-2\alpha\beta+\gamma)+(a_r+a_k+\lambda_1)(\alpha^2-\beta)-[a_ra_k+(a_r+a_k)\lambda_1+\mu_1]\alpha+a_ra_k\lambda_1+(a_r+a_k)\mu_1+\nu_1\right\} \\
\qquad\times[\beta-(a_l+a_m)\alpha+a_l^2+a_la_m+a_m^2] \\
+\mathrm{D}[\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots][\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots] \\
+\mathrm{E}[\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots][\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots].
\end{array}\right.
$$

10. Nous posons immédiatement $\mathrm{B}=-\mathrm{A}$. Le développement des deux premiers termes donne alors, si l'on omet le facteur A,

$$
\begin{array}{ll}
\gamma\beta\alpha & (1-1) \\
+\gamma\beta & (-\lambda+\lambda_1) \\
+\gamma\alpha^2 & (-1+1) \\
+\gamma\alpha^2 & [(a_r+\lambda_1)-(a_r+\lambda)+\lambda-\lambda_1] \\
+\gamma\alpha & [-(a_r\lambda_1+\mu_1)+(a_r\lambda+\mu)-\lambda(a_r+\lambda_1)+\lambda_1(a_r+\lambda)] \\
+\gamma & [\lambda(a_r\lambda_1+\mu_1)-\lambda_1(a_r\lambda+\mu)] \\
+\beta^3 & (-1+1) \\
+\beta^2\alpha^2 & (1-1) \\
+\beta^2\alpha & [-(a_r+\lambda_1)+(a_r+\lambda)+\lambda-\lambda_1] \\
+\beta^2 & [(a_r\lambda_1+\mu_1)-(a_r\lambda+\mu)-(\lambda^2-2\mu)+(\lambda_1^2-2\mu_1)] \\
+\beta\alpha^3 & (-\lambda+\lambda_1) \\
+\beta\alpha^2 & [-(2\mu-\lambda^2)+(2\mu_1-\lambda_1^2)+\lambda(a_r+\lambda_1)-\lambda_1(a_r+\lambda)-\mu+\mu_1] \\
+\beta\alpha & [(a_r+\lambda_1)(2\mu-\lambda^2)-(a_r+\lambda)(2\mu_1-\lambda_1^2)-\lambda(a_r\lambda_1+\mu_1)+\lambda_1(a_r\lambda+\mu)+(\lambda\mu-\nu)-(\lambda_1\mu_1-\nu_1)] \\
+\beta & [(a_r\lambda_1+\mu_1)(2\mu-\lambda^2)+(a_r\lambda+\mu)(2\mu_1-\lambda_1^2)-(\mu^2-\lambda\nu)+(\mu_1^2-\lambda_1\nu_1)] \\
+\alpha^4 & (\mu-\mu_1) \\
+\alpha^3 & [-(\lambda\mu-\nu)+(\lambda_1\mu_1-\nu_1)-\mu(a_r+\lambda_1)+\mu_1(a_r+\lambda)] \\
+\alpha^2 & [(\mu^2-\lambda\nu)-(\mu_1^2-\lambda_1\nu_1)+(a_r+\lambda_1)(\lambda\mu-\nu)-(a_r+\lambda)(\lambda_1\mu_1-\nu_1)+\mu(a_r\lambda_1+\mu_1)-\mu_1(a_r\lambda+\mu)] \\
+\alpha & [-(a_r+\lambda_1)(\mu^2-\lambda\nu)+(a_r+\lambda)(\mu_1^2-\lambda_1\nu_1)-(a_r\lambda_1+\mu_1)(\lambda\mu-\nu)+(a_r\lambda+\mu)(\lambda_1\mu_1-\nu_1)] \\
+ & [(a_r\lambda_1+\mu_1)(\mu^2-\lambda\nu)-(a_r\lambda+\mu)(\mu_1^2-\lambda_1\nu_1)].
\end{array}
$$

La somme des trois autres termes est le produit de A par une fonction symétrique de $a_ka_la_m$. Nous allons effectuer le développement et exprimer en fonction de λ, μ, ν cette fonction symétrique. On a tout d'abord, pour la somme de ces trois termes, l'expression suivante :

$$\begin{array}{ll}
-\gamma\beta & \Sigma C \\
+\gamma\alpha & \Sigma C(a_l+a_m) \\
-\gamma & \Sigma C(a_l^2+a_la_m+a_m^2) \\
+2\beta^2\alpha & \Sigma C \\
-\beta^2 & \Sigma C(a_r+a_k+\lambda_1) \\
-\beta\alpha^3 & \Sigma C \\
+\beta\alpha^2 & [\Sigma C(a_r+a_k+\lambda_1)-2\Sigma C(a_l+a_m)] \\
+\beta\alpha & \{-\Sigma C[a_ra_k+(a_r+a_k)\lambda_1+\mu_1]+\Sigma C(a_l+a_m)(a_r+a_k+\lambda_1)+2\Sigma C(a_l^2+a_la_m+a_m^2)\} \\
+\beta & \{\Sigma C[a_ra_k\lambda_1+(a_r+a_k)\mu_1+\nu_1]-\Sigma C(a_l^2+a_la_m+a_m^2)(a_r+a_k+\lambda_1)\} \\
+\alpha^4 & \Sigma C(a_l+a_m) \\
+\alpha^3 & [-\Sigma C(a_l+a_m)(a_r+a_k+\lambda_1)-\Sigma C(a_l^2+a_la_m+a_m^2)] \\
+\alpha^2 & \{\Sigma C(a_l+a_m)[a_ra_k+(a_r+a_k)\lambda_1+\mu_1]+\Sigma C(a_l^2+a_la_m+a_m^2)(a_r+a_k+\lambda_1)]\} \\
+\alpha & \{-\Sigma C(a_l+a_m)[a_ra_k\lambda_1+(a_r+a_k)\mu_1+\nu_1)-\Sigma C(a_l^2+a_la_m+a_m^2)[a_ra_k+(a_r+a_k)\lambda_1+\mu_1]\} \\
+ & \Sigma C(a_l^2+a_la_m+a_m^2)[a_ra_k\lambda_1+(a_r+a_k)\mu_1+\nu_1],
\end{array}$$

où les différents signes Σ se rapportent aux indices k, l, m.

Mais on a, d'après les formules qui relient A, B, C, D, E,

$$\Sigma C = -A(\lambda-\lambda_1),$$
$$\Sigma C(a_l+a_m) = -A(\mu-\mu_1).$$

On en déduit

$$\Sigma Ca_k = \Sigma C\lambda - \Sigma C(a_l+a_m) = -A\lambda(\lambda-\lambda_1)+A(\mu-\mu_1).$$

Nous appliquons encore maintenant les formules (7), et nous trouvons

$$\begin{aligned}
&\Sigma C(a_l^2+a_la_m+a_m^2) &&= -A(\lambda_1\mu-\lambda\mu_1),\\
&\Sigma Ca_k(a_l+a_m) &&= -A\mu(\lambda-\lambda_1)+A(\nu-\nu_1),\\
&\Sigma Ca_k(a_l^2+a_la_m+a_m^2) &&= -A\mu(\mu-\mu_1)+A\lambda(\nu+\nu_1);
\end{aligned}$$

et il est facile d'en déduire rapidement les formules suivantes :

$$\begin{aligned}
&\Sigma C(a_r+a_k+\lambda_1)\\
&\quad = A[-a_r(\lambda-\lambda_1)-(\lambda^2-\lambda_1^2)+\mu-\mu_1],\\
&\Sigma C[a_r\lambda_1+\mu_1+a_k(a_r+\lambda_1)]\\
&\quad = A\{a_r(\lambda_1^2-\lambda^2+\mu-\mu_1)-[\lambda\mu_1-\lambda_1\mu+\lambda\lambda_1(\lambda-\lambda_1)]\},
\end{aligned}$$

$$\Sigma C[a_r\mu_1+\nu_1+a_k(a_r\lambda_1+\mu_1)]$$
$$=A\{a_r[\lambda_1\mu-\lambda\mu_1-\lambda\lambda_1(\lambda-\lambda_1)]-[\nu_1(\lambda-\lambda_1)-\mu_1(\mu-\mu_1)-\mu_1\lambda(\lambda-\lambda_1)]\},$$
$$\Sigma C(a_l+a_m)(a_r+a_k+\lambda_1)$$
$$=A[-a_r(\mu-\mu_1)+(\lambda_1\mu_1-\nu_1)-(\lambda\mu-\nu)],$$
$$\Sigma C\{(a_l+a_m)[a_r\lambda+\mu_1+a_k(a_r+\lambda_1)]\}$$
$$=A\{a_r[(\lambda_1\mu_1-\nu_1)-(\lambda\mu-\nu)]-[\mu_1(\mu-\mu_1)+\lambda_1\mu(\lambda-\lambda_1)-\lambda_1(\nu-\nu_1)]\},$$
$$\Sigma C(a_l+a_m)[a_r\mu_1+\nu_1+a_k(a_r\lambda_1+\mu_1)]$$
$$=A\{-a_r[\mu_1(\mu-\mu_1)+\lambda_1\mu(\lambda-\lambda_1)-\lambda_1(\nu-\nu_1)]+\mu(\lambda_1\mu_1-\nu_1)-\mu_1(\lambda\mu-\nu)\},$$
$$\Sigma C(a_l^2+a_la_m+a_m^2)(a_r+a_k+\lambda_1)$$
$$=A\{-a_r(\lambda_1\mu-\lambda\mu_1)-[\lambda_1(\lambda_1\mu-\lambda\mu_1)+\mu(\mu-\mu_1)-\lambda(\nu-\nu_1)]\},$$
$$\Sigma C(a_l^2+a_la_m+a_m^2)[a_r\lambda_1+\mu_1+a_k(a_r+\lambda_1)]$$
$$=A\{-a_r[\lambda_1(\lambda_1\mu-\lambda\mu_1)]+\mu(\mu-\mu_1)-\lambda(\nu-\nu_1)+\lambda\mu_1^2-\lambda_1\mu^2+\lambda\lambda_1(\nu-\nu_1)\},$$
$$\Sigma C(a_l^2+a_la_m+a_m^2)[a_r\mu_1+\nu_1+a_k(a_r\lambda_1+\mu_1)]$$
$$=A\{a_r[\lambda\mu_1^2-\lambda_1\mu^2+\lambda\lambda_1(\nu-\nu_1)]+\mu_1(\lambda\nu-\mu^2)-\mu(\lambda_1\nu_1-\mu_1^2)\}.$$

Le développement des trois derniers termes de l'expression prend alors la forme suivante, où nous omettons le facteur A :

$$\begin{aligned}
&\gamma\beta\ (\lambda-\lambda_1)\\
+\ &\gamma\alpha\ (-\mu+\mu_1)\\
+\ &\gamma\ (\lambda_1\mu-\lambda\mu_1)\\
+\ &\beta^2\alpha[2(\lambda-\lambda_1)]\\
+\ &\beta^2\ [a_r(\lambda-\lambda_1)+(\lambda^2-\mu)-(\lambda_1^2-\mu_1)]\\
+\ &\beta\alpha^3\ (\lambda-\lambda_1)\\
+\ &\beta\alpha^2\ [-a_r(\lambda-\lambda_1)-(\lambda^2-\mu)+\lambda_1^2-\mu_1+2(\mu-\mu_1)]\\
+\ &\beta\alpha\ \{-a_r(\lambda_1^2-\lambda^2+\mu-\mu_1)+[\lambda\mu_1-\lambda_1\mu+\lambda\lambda_1(\lambda-\lambda_1)\\
&\qquad -a_r(\mu-\mu_1)+(\lambda_1\mu_1-\nu)-(\lambda\mu-\nu_1)-2(\lambda_1\mu-\lambda\mu_1)]\}\\
+\ &\beta\ \{a_r[2\lambda_1\mu-2\lambda\mu_1-\lambda\lambda_1(\lambda-\lambda_1)]+(\lambda_1\nu_1-\mu_1^2)-(\lambda\nu-\mu^2)+\lambda_1^2\mu-\lambda^2\mu_1\}\\
+\ &\alpha^4\ (\mu_1-\mu)\\
+\ &\alpha^3\ [a_r(\mu_1-\mu)-(\lambda_1\mu_1-\lambda\mu-\lambda_1\mu+\lambda\mu_1+\nu-\nu_1)]\\
+\ &\alpha^2\ \{a_r(\lambda_1\mu_1-\nu_1-\lambda\mu+\nu-\lambda_1\mu+\lambda\mu_1)\\
&\qquad +[-(\mu^2-\lambda\nu)+(\mu_1^2-\lambda_1\nu_1)-\lambda_1(\lambda\mu-\nu)+\lambda(\lambda_1\mu_1-\nu_1)]\}\\
+\ &\alpha\ \{a_r[(\mu^2-\lambda\nu)-(\mu_1^2-\lambda_1\nu_1)+\lambda_1(\lambda\mu-\nu)-\lambda(\lambda_1\mu_1-\nu_1)]\\
&\qquad +\lambda_1(\mu^2-\lambda\nu)-\lambda(\mu_1^2-\lambda_1\nu_1)+\mu_1(\lambda\mu-\nu)-\mu(\lambda_1\mu_1-\nu_1)\}\\
+\ &\quad a_r[(\lambda\mu_1^2-\lambda_1\mu^2)+\lambda\lambda_1(\nu-\nu_1)]+\mu_1(\lambda\nu-\mu^2)-\mu(\lambda_1\nu_1-\mu_1^2).
\end{aligned}$$

11. Il résulte alors immédiatement de la forme donnée aux coefficients et de leur comparaison que l'expression rationnelle que nous nous sommes proposé de calculer est identiquement nulle. Nous arrivons donc à la formule suivante :

$$(42)\quad \left\{\begin{aligned} &|a_k a_l a_m|\,[\mathrm{P}^2_{klm} - \mathrm{P}^2_{npq}] - |a_l a_m|\,|a_k a_n|\,|a_k a_p|\,|a_k a_q|\,\mathrm{P}^2_{lm}\\ &\qquad\qquad - |a_m a_k|\,|a_l a_n|\,|a_l a_p|\,|a_l a_q|\,\mathrm{P}^2_{mk}\\ &\qquad\qquad - |a_k a_l|\,|a_m a_n|\,|a_m a_p|\,|a_m a_q|\,\mathrm{P}^2_{kl} = 0. \end{aligned}\right.$$

De cette formule nous pouvons en déduire d'autres par des substitutions effectuées sur les indices k, l, m, n, p, q, r. Nous allons établir successivement les formules de types différents qui découlent de la précédente.

On a

$$(43)\quad \left\{\begin{aligned} &|a_k a_l a_m|\,[\mathrm{P}^2_{klm} - \mathrm{P}^2_{pqr}] - |a_l a_m|\,|a_k a_p|\,|a_k a_q|\,|a_k a_r|\,\mathrm{P}^2_{lm}\\ &\qquad\qquad - |a_m a_k|\,|a_l a_p|\,|a_l a_q|\,|a_l a_r|\,\mathrm{P}^2_{mk}\\ &\qquad\qquad - |a_k a_l|\,|a_m a_p|\,|a_m a_q|\,|a_m a_r|\,\mathrm{P}^2_{kl} = 0. \end{aligned}\right.$$

Retranchant membre à membre les deux équations (42) et (43), on obtient

$$(44)\quad \left\{\begin{aligned} &|a_k a_l a_m|\,|\mathrm{P}^2_{npq} - \mathrm{P}^2_{pqr}|\\ &\quad - |a_k a_r|(|a_l a_m|\,|a_k a_p|\,|a_k a_q|\,\mathrm{P}^2_{lm} + |a_m a_k|\,|a_l a_p|\,|a_l a_q|\,\mathrm{P}^2_{mk}\\ &\qquad\qquad + |a_k a_l|\,|a_m a_p|\,|a_m a_q|\,\mathrm{P}^2_{kl}) = 0. \end{aligned}\right.$$

Si, au lieu d'éliminer P^2_{klm}, nous éliminons par exemple P^2_{lm}, il vient

$$(45)\quad \left\{\begin{aligned} &|a_k a_l a_m|\,[|a_n a_r|\,\mathrm{P}^2_{klm} + |a_r a_k|\,\mathrm{P}^2_{npq} + |a_k a_n|\,\mathrm{P}^2_{pqr}]\\ &\quad - |a_m a_k|\,|a_l a_k|\,|a_n a_r|\,[|a_l a_p|\,|a_l a_q|\,\mathrm{P}^2_{mk} - |a_m a_p|\,|a_m a_q|\,\mathrm{P}^2_{kl}] = 0. \end{aligned}\right.$$

De même

$$(46)\quad \left\{\begin{aligned} &|a_k a_l a_m|\,[|a_p a_n|\,\mathrm{P}^2_{klm} + |a_n a_k|\,\mathrm{P}^2_{pqr} + |a_k a_p|\,\mathrm{P}^2_{qrn}]\\ &\quad - |a_m a_k|\,|a_l a_k|\,|a_p a_n|\,[|a_l a_q|\,|a_l a_r|\,\mathrm{P}^2_{mk} - |a_m a_q|\,|a_m a_r|\,\mathrm{P}^2_{kl}] = 0; \end{aligned}\right.$$

(45) et (46) nous fournissent, en éliminant P^2_{klm},

$$(47)\quad \left\{\begin{aligned} &|a_k a_l a_m|\,[|a_k a_r|\,|a_n a_p|\,\mathrm{P}^2_{npq} + |a_k a_n|\,|a_p a_r|\,\mathrm{P}^2_{pqr} + |a_k a_p|\,|a_r a_n|\,\mathrm{P}^2_{qrn}]\\ &\quad - |a_m a_k|\,|a_l a_k|\,|a_n a_p a_r|\,[|a_l a_q|\,\mathrm{P}^2_{mk} - |a_m a_q|\,\mathrm{P}^2_{kl}] = 0, \end{aligned}\right.$$

ou bien, en éliminant P^2_{mk} et supprimant le facteur $|a_k a_l a_m|$ qui se met en évidence,

$$(48)\quad \left\{ \begin{aligned} |a_n a_p a_r|\,P^2_{klm} = {} & |a_r a_k|\,|a_r a_l|\,|a_n a_p|\,P^2_{npq} + |a_n a_k|\,|a_n a_l|\,|a_p a_r|\,P^2_{pqr} \\ & + |a_p a_k|\,|a_p a_l|\,|a_r a_n|\,P^2_{qrn} + |a_n a_p a_r|\,|a_m a_q|\,P^2_{kl}. \end{aligned} \right.$$

Enfin nous tirons de cette dernière par une substitution

$$(49)\quad \left\{ \begin{aligned} |a_p a_q a_n|\,|P^2_{klm} = {} & |a_n a_k|\,|a_n a_l|\,|a_p a_q|\,P^2_{pqr} + |a_p a_k|\,|a_p a_l|\,|a_q a_n|\,P^2_{qrn} \\ & + |a_q a_k|\,|a_q a_l|\,|a_n a_p|\,P^2_{rnp} + |a_p a_q a_n|\,|a_m a_r|\,P^2_{kl}. \end{aligned} \right.$$

Éliminant P^2_{klm} entre (48) et (49), nous avons

$$(50)\quad \left\{ \begin{aligned} & |a_n a_p a_q|\,|a_r a_k|\,|a_r a_l|\,P^2_{npq} - |a_p a_q a_r|\,|a_n a_k|\,|a_n a_l|\,P^2_{pqr} \\ & + |a_q a_r a_n|\,|a_p a_k|\,|a_p a_l|\,P^2_{nqr} - |a_r a_n a_p|\,|a_q a_k|\,|a_q a_l|\,P^2_{rnp} - P^2_{kl}\,|a_n a_p a_q a_r| = 0. \end{aligned} \right.$$

Si, d'autre part, nous éliminons P^2_{kl}, nous trouvons

$$(51)\quad \left\{ \begin{aligned} |a_n a_p a_q a_r|\,P^2_{klm} & + |a_r a_k|\,|a_r a_l|\,|a_r a_m|\,|a_n a_p a_q|\,P^2_{npq} \\ & - |a_n a_k|\,|a_n a_l|\,|a_n a_m|\,|a_p a_q a_r|\,P^2_{pqr} \\ & + |a_p a_k|\,|a_p a_l|\,|a_p a_m|\,|a_q a_r a_n|\,P^2_{qrn} \\ & - |a_q a_k|\,|a_q a_l|\,|a_q a_m|\,|a_r a_n a_p|\,P^2_{rnp} = 0. \end{aligned} \right.$$

Nous arrivons en somme à une conclusion analogue à celles trouvées précédemment. Les huit fonctions

$$P_{klm},\ P_{npq},\ P_{pqr},\ P_{qrn},\ P_{rnp},\ P_{lm},\ P_{mk},\ P_{kl}$$

forment un groupe tel que, quatre d'entre elles étant choisies *a priori*, les carrés des quatre autres s'expriment linéairement en fonction des carrés de celles qui ont été choisies. Les relations ont, suivant le choix qui a été fait, l'une des formes (42), (44), (45), (47), (48), (50) et (51).

Ainsi se trouve mise en évidence l'existence de 35 groupes analogues formés avec les fonctions P. Les indices des fonctions appartenant à un même groupe sont représentés sur une même ligne horizontale dans le tableau suivant.

(2)

klm	npq	pqr	qrn	rnp	lm	mk	kl
kln	mpq	pqr	qrm	rmp	ln	nk	kl
klp	mnq	nqr	qrm	rmn	lp	pk	kl
klq	mnp	npr	prm	rmn	lq	qk	kl
klr	mnp	npq	pqm	qmn	lr	rk	kl
kmn	lpq	pqr	qrl	rlp	mn	nk	km
kmp	lnq	nqr	qrl	rln	mp	pk	km
kmq	lnp	npr	prl	rln	mq	qk	km
kmr	lnp	npq	pql	qln	mr	rk	km
knp	lmq	mqr	qrl	rlm	np	pk	kn
knq	lmp	mpr	prl	rlm	nq	qk	kn
knr	lmp	mpq	pql	qlm	nr	rk	kn
kpq	lmn	mnr	nrl	rlm	pq	qk	kp
kpr	lmn	mnq	nql	qlm	pr	rk	kp
kqr	lmn	mnp	npl	plm	qr	rk	kq
lmn	kpq	pqr	qrk	rkp	mn	nl	lm
lmp	knq	nqr	qrk	rkn	mp	pl	lm
lmq	knp	npr	prk	rkn	mq	ql	lm
lmr	knp	npq	pqk	qkn	mr	rl	lm
lnp	kmq	mqr	qrk	rkm	np	pl	ln
lnq	kmp	mpr	prk	rkm	nq	ql	ln
lnr	kmp	mpq	pqk	qkm	nr	rl	ln
lpq	kmn	mnr	nrk	rkm	pq	ql	lp
lpr	kmn	mnq	nqk	qkm	pr	rl	lp
lqr	kmn	mnp	npk	pkm	qr	rl	lq
mnp	klq	lqr	qrk	rkl	np	pm	mn
mnq	klp	lqr	prk	rkl	nq	qm	mn
mnr	klp	lpq	pqk	qkl	nr	rm	mn
mpq	kln	lnr	nrk	rkl	pq	qm	mp
mpr	kln	lnq	nqk	qkl	pr	rm	mn
mqr	kln	lnp	npk	pkl	qr	rm	mq
npq	klm	lmr	mrk	rkl	pq	qn	np
npr	klm	lmq	mqk	qkl	pr	rn	np
nqr	klm	lmp	mpk	pkl	qr	rn	nq
pqr	klm	lmr	mnk	nkl	qr	rp	pq

Un quelconque de ces groupes est défini par les trois fonctions P à deux indices qu'il contient ou par la fonction P à trois indices qui détermine les précédentes, ou plus simplement encore par l'ensemble de ces trois indices. Nous pourrons donc, sans ambiguïté aucune, parler par exemple du *groupe klm*.

Nous avons obtenu en tout 64 groupes : 1 groupe o, 7 groupes k, 21 groupes kl et 35 groupes klm. Dans le cas des fonctions hyperelliptiques de genre 2, on a de même 16 groupes : 1 groupe o, 5 groupes k et 10 groupes kl.

Détermination des combinaisons linéaires auxquelles appartiennent les carrés de fonctions P données.

12. Nous prendrons le cas de fonctions P à trois indices, les indices des fonctions considérées ne jouissant d'aucune propriété particulière. Le carré de la fonction P_{klm} se compose de deux parties, Q_{klm} et Q'_{klm}, l'une rationnelle, l'autre irrationnelle.

Considérant cinq fonctions de même espèce, on a

$$\sum_1^5 A_i P^2_{k_i l_i m_i} = \Sigma A_i Q_{k_i l_i m_i} + \Sigma A_i Q'_{k_i l_i m_i}. \tag{53}$$

La combinaison précédente sera rationnelle si l'on détermine les coefficients A_i par la condition que la seconde partie du second membre disparaisse, c'est-à-dire en égalant identiquement à zéro l'expression

$$\Sigma A_i |a_{k_i} x|\,|a_{l_i} x|\,|a_{m_i} x| = 0,$$

c'est-à-dire, si l'on pose

$$|a_k x|\,|a_l x|\,|a_m x| = \mathrm{c} - \mathrm{b}x + \mathrm{a}x^2 - x^3, \tag{54}$$

en prenant pour ces coefficients les valeurs fournies par les équations

$$\left\{\begin{aligned} \Sigma A &= 0,\\ \Sigma A\,\mathrm{a} &= 0,\\ \Sigma A\,\mathrm{b} &= 0,\\ \Sigma A\,\mathrm{c} &= 0. \end{aligned}\right. \tag{55}$$

Alors (53) devient simplement

$$\Sigma AP_{klm}^2 = \Sigma AQ_{klm}$$

ou

$$(56)\quad \left\{ \begin{aligned} \Sigma AP_{klm}^2 = \frac{1}{|x_1 x_2 x_3|^2} \Sigma A(&|x_2 x_3|^2 |a_n x_1| |a_p x_1| |a_q x_1| |a_r x_1| \\ &\times |a_k x_2| |a_k x_3| |a_l x_2| |a_l x_3| |a_m x_2| |a_m x_3| + \ldots). \end{aligned} \right.$$

Posons, de plus,

$$(57)\quad |a_n x| |a_p x| |a_q x| |a_r x| = d' - c'x + b'x^2 - a'x^3 + x^4,$$

$$(58)\quad \left\{ \begin{aligned} &|a_k x| |a_l x| |a_m x| |a_n x| |a_p x| |a_q x| |a_r x| \\ &\quad = g'' - f''x + e''x^2 - d''x^3 + c''x^4 - b''x^5 + a''x^6 - x^7; \end{aligned} \right.$$

a, b, c, a′, b′, c′, d′ changent quand on change de fonction P, tandis que a″, b″, c″, d″, e″, f″, g″ ne varient pas. On a de plus, entre ces quantités, les relations suivantes, qui sont dans la suite de la plus haute importance :

$$(59)\quad \left\{ \begin{array}{lll} (1) & a + a' & = a'', \\ (2) & b + a'a + b' & = b'', \\ (3) & c + a'b + b'a + c' & = c'', \\ (4) & a'c + b'b + c'a + d' & = d'', \\ (5) & b'c + c'b + d'a & = e'', \\ (6) & c'c + d'b & = f'', \\ (7) & d'c & = g''. \end{array} \right.$$

Ceci posé, développons le second membre de (56) suivant les puissances croissantes des variables x :

$$
(60)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\Sigma A P_{klm}^{2} \\
&= \Sigma A . \Sigma d'c^2 |x_2 x_3|^2 \\
&- \Sigma A . \Sigma [d'cb(x_2 + x_3) + c'c^2 x_1] |x_2 x_3|^2 \\
&+ \Sigma A . \Sigma [d'ca(x_2^2 + x_3^2) + d'b^2 x_2 x_3 \\
&\qquad\qquad + c'cb x_1 (x_2 + x_3) + b'c^2 x_1^2] |x_2 x_3|^2 \\
&- \Sigma A . \Sigma [d'c(x_2^3 + x_3^3) + d'ba x_2 x_3 (x_2 + x_3) + c'ca x_1 (x_2^2 + x_3^2) \\
&\qquad\qquad + c'b^2 x_1 x_2 x_3 + b'cb x_1^2 (x_2 + x_3) + a'c^2 x_1^3] |x_2 x_3|^2 \\
&+ \Sigma A . \Sigma [d'b x_2 x_3 (x_2^2 + x_3^2) + d'a^2 x_2^2 x_3^2 + c'c x_1 (x_2^3 + x_3^3) \\
&\qquad\qquad + c'ba x_1 x_2 x_3 (x_2 + x_3) + b'ca x_1^2 (x_2^2 + x_3^2) \\
&\qquad\qquad + b'b^2 x_1^2 x_2 x_3 + a'cb x_1^3 (x_2 + x_3) + c^2 x_1^4] |x_2 x_3|^2 \\
&- \Sigma A . \Sigma [d'a x_2^2 x_3^2 (x_2 + x_3) + c'b x_1 x_2 x_3 (x_2^2 + x_3^2) \\
&\qquad\qquad + c'a^2 x_1 x_2^2 x_3^2 + b'c x_1^2 (x_2^3 + x_3^3) \\
&\qquad\qquad + b'ba x_1^2 x_2 x_3 (x_2 + x_3) \\
&\qquad\qquad + d'ca x_1^3 (x_2^2 + x_3^2) + a'b^2 x_1^3 x_2 x_3 + cb x_1^4 (x_2 + x_3)] |x_2 x_3|^2 \\
&+ \Sigma A . \Sigma [d' x_2^3 x_3^3 + c'a x_1 x_2^2 x_3^2 (x_2 + x_3) + b'b x_1^2 x_2 x_3 (x_2^2 + x_3^2) \\
&\qquad\qquad + b'a^2 x_1^2 x_2^2 x_3^2 + a'c x_1^3 (x_2^3 + x_3^3) \\
&\qquad\qquad + a'ba x_1^3 x_2 x_3 (x_2 + x_3) \\
&\qquad\qquad + ca x_1^4 (x_2^2 + x_3^2) + b^2 x_1^4 x_2 x_3] |x_2 x_3|^2 \\
&- \Sigma A . \Sigma [c' x_1 x_2^3 x_3^3 + b'a x_1^2 x_2^2 x_3^2 (x_2 + x_3) \\
&\qquad\qquad + a'b x_1^3 x_2 x_3 (x_2^2 + x_3^2) + a'a^2 x_1^3 x_2^2 x_3^2 \\
&\qquad\qquad + c x_1^4 (x_2^3 + x_3^3) + ba x_1^4 x_2 x_3 (x_2 + x_3)] |x_2 x_3|^2 \\
&+ \Sigma A . \Sigma [b' x_1^2 x_2^3 x_3^3 + a'a x_1^3 x_2^2 x_3^2 (x_2 + x_3) \\
&\qquad\qquad + b x_1^4 x_2 x_3 (x_2 + x_3) + a^2 x_1^4 x_2^2 x_3^2] |x_2 x_3|^2 \\
&- \Sigma A . \Sigma [a' x_1^3 x_2^3 x_3^3 + a x_1^3 x_2^2 x_3^2 (x_2 + x_3)] |x_2 x_3|^2 \\
&+ \Sigma A . \Sigma x_1^4 x_2^3 x_3^3 |x_2 x_3|^2.
\end{aligned}
\right.
$$

13. Nous nous appuierons, pour la réduction de cette expression, sur les formules (55) et (59). Nous emploierons, de plus, dans le calcul des fonctions symétriques qui se présentent ici, les notations et les tableaux de Hirsch. Nous empruntons à M. Cayley, *A Memoir on the symmetric Functions of the Roots of an Equation* (*Philosophical Transac-*

tions, vol. CXLVII, 1857, p. 489), les formules qui nous sont nécessaires dans le cas présent.

On désigne Σx_1 par (1), Σx_1^2 par (2), $\Sigma x_1 x_2$ par (1^2), ..., $\Sigma x_1^3 x_2^2$ par (32), ...; les tableaux se lisent alors horizontalement; ainsi, par exemple, le tableau II se lira

$$(2) = -2\beta + 1\alpha^2, \quad (1^2) = 1\beta.$$

I.

	α.
(1)....	1

II.

	β.	α^2.
(2)...	-2	$+1$
(1^2)...	$+1$	

III.

	γ.	$\beta\alpha$.	α^3.
(3)....	3	-3	$+1$
(21)...	-3	$+1$	
(1^3)....	1		

IV.

	$\alpha\gamma$.	β^2.	$\alpha^2\beta$.	α^4.
(4)....	$+4$	$+2$	-4	$+1$
(31)...	-1	-2	$+1$	
(2^2)...	-2	$+1$		
(21^2)...	$+1$			

V.

	$\beta\gamma$.	$\alpha^2\gamma$.	$\alpha\beta^2$.	$\alpha^3\beta$.	α^5.
(5)....	-5	$+5$	$+5$	-5	$+1$
(41)...	$+5$	-1	-3	$+1$	
(32)...	-1	-2	$+1$		
(31^2)...	-2	$+1$			
(2^21)...	$+1$				

VI.

	γ^2.	$\alpha\beta\gamma$.	$\alpha^3\gamma$.	β^3.	$\alpha^2\beta^2$.	$\alpha^4\beta$.	α^6.
(6)....	+ 3	— 12	+ 6	— 2	+ 9	— 6	+ 1
(51)...	— 3	+ 7	— 1	+ 2	— 4	+ 1	
(42)...	— 3	+ 4	— 2	— 2	+ 1		
(3^2)...	+ 3	— 3	+ 0	+ 1			
(41^2)...	+ 3	— 3	+ 1				
(321)...	— 3	+ 1					
(2^3)...	+ 1						

VII.

$$(52) = -7\alpha\gamma^2 + 3\beta^2\gamma + 6\alpha^2\beta\gamma - 2\alpha^4\gamma - 3\alpha\beta^3 + \alpha^3\beta^2,$$
$$(43) = \quad 5\alpha\gamma^2 - \beta^2\gamma - 3\alpha^2\beta\gamma \qquad + \alpha\beta^3$$

VIII.

$$(53) = -7\beta\gamma^2 + 3\alpha^2\gamma^2 + 6\alpha\beta^2\gamma - 3\alpha^3\beta\gamma - 2\beta^4 + \alpha^2\beta^3,$$
$$(4^2) = \quad 4\beta\gamma^2 + 2\alpha^2\gamma^2 - 4\alpha\beta^2\gamma \qquad + \beta^4.$$

14. Ceci posé, nous allons successivement considérer les termes de degrés différents en x_1, x_2, x_3.

1°
$$\Sigma A . \Sigma d'c^2 |x_2 x_3|^2 = \Sigma A d'c^2 . \Sigma |x_2 x_3|^2.$$

Mais, d'après les équations (59), on peut écrire

$$= \Sigma A g''c . \Sigma |x_2 x_3|^2 = \Sigma |x_2 x_3|^2 . g'' \Sigma A c,$$

et, d'après les équations (55) qui définissent la quantité A, $\Sigma A c$ est nul, en sorte que ce terme disparaît.

2°
$$\begin{aligned}&\Sigma A.\Sigma[d'cb(x_2+x_3)+c'c^2x_1]|x_2x_3|^2\\&\quad=\Sigma A d'cb\,\Sigma(x_2+x_3)|x_2x_3|^2+\Sigma A c'c^2\Sigma x_1|x_2x_3|^2\\&\quad=\Sigma A d'cb[2(3)-(21)]+\Sigma A c'c^2[(21)-2(1^3)].\end{aligned}$$

Or, d'après les équations (59), on peut remplacer c'c par F'' — d'b et d'c par g''. L'expression considérée devient alors

$$\begin{aligned}&\Sigma A d'cb[2(3)-(21)]+\Sigma A c(f''-d'b)[(21)-2(1^3)]\\&\quad=\Sigma A bg''[2(3)-2(21)+2(1^3)]+\Sigma A cf''[(21)-2(1^3)]\\&\quad=g''[2(3)-2(21)+2(1^3)]\Sigma A b+f''[(21)-2(1^3)].\Sigma A c,\end{aligned}$$

qui, d'après les équations (55), est encore identiquement nulle.

Remarque. — Dans ce qui suit, nous supprimerons successivement dans le calcul les termes qui, en employant les équations (59), sont, d'après les équations (55), identiquement nuls, et nous ne les écrirons pas. Avec ce procédé, par exemple, le terme

$$\Sigma A c'c^2[(21)-2(1^3)]$$

s'écrira directement tout d'abord

$$\Sigma A(-cd'b)[(21)-2(1^3)]$$

ou simplement o dans le cas présent. Prenons un exemple un peu plus compliqué.

On pourra remplacer

$$\Sigma A c^2a'\varphi(\bar{x}_1,\bar{\bar{x}}_2,\bar{\bar{x}}_3)$$

par

$$-\Sigma A c[bb'+c'a+d'].\varphi(\bar{x}_1,\bar{\bar{x}}_2,\bar{\bar{x}}_3)$$

le terme $+\Sigma A cd''.\varphi(\bar{x}_1,\bar{\bar{x}}_2,\bar{\bar{x}}_3)$ disparaissant d'après les équations (55). Cette remarque est très importante pour la réduction des termes qui suivent, en ce qu'elle permet de supprimer, pendant la marche du calcul, un grand nombre de termes.

3°
$$\Sigma \mathrm{A\,d'ca}\,\Sigma(x_2^2+x_3^2)\,|x_2x_3|^2+\Sigma \mathrm{A\,d'b^2}\,\Sigma x_2x_3\,|x_2x_3|^2$$
$$+\Sigma \mathrm{A\,c'cb}\,\Sigma x_1(x_2+x_3)\,|x_2x_3|^2+\Sigma \mathrm{A\,b'c^2}\,\Sigma x_1^2\,|x_2x_3|^2.$$

D'après la remarque précédente, le premier terme de cette expression disparaît; il reste alors

$$\Sigma \mathrm{A\,d'b^2}[(31)-2(2^2)]+\Sigma \mathrm{A\,c'cb}[(31)-2(21^2)]+\Sigma \mathrm{A\,b'c^2}[3(2^2)-2(21^2)],$$

qui peut alors s'écrire, en tenant compte de (59_5), sous la forme

$$\Sigma \mathrm{A\,d'b^2}[(31)-2(2^2)]+\Sigma \mathrm{A\,c'cb}[(31)-2(2^2)],$$

et, d'après (59_6), cette dernière expression est identiquement nulle.

Jusqu'ici, nous n'avons pas eu besoin d'avoir recours aux tableaux de fonctions symétriques que nous avons reproduits. Ils vont maintenant nous être utiles :

4°
$$\Sigma \mathrm{A\,d'c}\,\Sigma(x_2^3+x_3^3)\,|x_2x_3|^2+\Sigma \mathrm{A\,d'ba}\,\Sigma x_2x_3(x_2+x_3)\,|x_2x_3|^2$$
$$+\Sigma \mathrm{A\,c'ca}\,\Sigma x_1(x_2^2+x_3^2)\,|x_2x_3|^2+\Sigma \mathrm{A\,c'b^2}\,\Sigma x_1x_2x_3\,|x_2x_3|^2$$
$$+\Sigma \mathrm{A\,b'cb}\,\Sigma x_1^2(x_2+x_3)\,|x_2x_3|+\Sigma \mathrm{A a'c^2}\,\Sigma x_1^3\,|x_2x_3|^2$$
$$=\Sigma \mathrm{A\,d'ba}[(41)-(32)]+\Sigma \mathrm{A\,c'ca}[(41)+2(2^21)-4(31^2)]$$
$$+\Sigma \mathrm{A\,c'b^2}[2(31^2)-(2^21)]+\Sigma \mathrm{A\,b'cb}[(32)-2(2^21)]$$
$$+\Sigma \mathrm{A\,a'c^2}[(32)-2(31^2)]$$

	$\beta\gamma$	$\alpha^2\gamma$	$\alpha\beta^2$	$\alpha^3\beta$
$=\Sigma \mathrm{A\,d'ba}$	$+\ 6$	$+1$	-4	$+1$
$+\Sigma \mathrm{A\,c'ca}$	$+15$	-5	-3	$+1$
$+\Sigma \mathrm{A\,c'b^2}$	$-\ 6$	$+2$		
$+\Sigma \mathrm{A\,b'cb}$	$-\ 3$	-2	$+1$	
$+\Sigma \mathrm{A\,a'c^2}$	$+\ 3$	-4	$+1$	

qui se transforme, au moyen de (59_5), en

$\Sigma \mathrm{A\,d'ba}$	$+12$	-1	-4	$+1$
$\Sigma \mathrm{A\,c'ca}$	$+15$	-5	-3	$+1$
$\Sigma \mathrm{A\,b'cb}$	$+\ 3$	-4	$+1$	
$\Sigma \mathrm{A\,ac^2}$	$+\ 3$	-4	$+1$	

ou bien simplement, en tenant compte de (59_4)

$\Sigma A d'ba$..........	$+12$	-1	-4	$+1$
$\Sigma A c'ca$..........	$+12$	-1	-4	$+1$.

Cette expression est identiquement nulle d'après (59_6).

5°
$$\begin{aligned}
&\Sigma A d'b \Sigma x_2 x_3 (x_2^2 + x_3^2) |x_2 x_3|^2 + \Sigma A d'a^2 x_2^2 x_3^2 |x_2 x_3|^2 \\
&+ \Sigma A c'c \Sigma x_1 (x_2^3 + x_3^3) |x_2 x_3|^2 + \Sigma A c'ba \Sigma x_1 x_2 x_3 (x_2 + x_3) |x_2 x_3|^2 \\
&+ \Sigma A b'ca \Sigma x_1^2 (x_2^2 + x_3^2) |x_2 x_3|^2 + \Sigma A b'b^2 \Sigma x_1^2 x_2 x_3 |x_2 x_3|^2 \\
&+ \Sigma A a'cb \Sigma x_1^3 (x_2 + x_3) |x_2 x_3|^2 + \Sigma A c^2 \Sigma x_1^4 |x_2 x_3|^2 \\
&= \Sigma A d'b[(51) + 2(3^2) - 2(42)] + \Sigma A d'a^2[(42) - 2(3^2)] \\
&+ \Sigma A c'c[(51) + (321) - 4(41^2)] + \Sigma A c'ba[2(41^2) - (321)] \\
&+ \Sigma A b'ca[(42) + 6(2^3) - 2(321)] + \Sigma A b'b^2[(321) - 6(2^3)] \\
&+ \Sigma A a'cb[2(3^2) - (321)] + \Sigma A c^2[(42) - 2(41^2)]
\end{aligned}$$

	γ^2	$\alpha\beta\gamma$	$\alpha^3\gamma$	β^3	$\alpha^2\beta^2$	$\alpha_2\beta$
$= \Sigma A d'b$........	$+9$	-7	$+3$	$+8$	-6	$+1$
$+ \Sigma A d'a^2$.......	-9	$+10$	-2	-4	$+1$	
$+ \Sigma A c'c$........	-18	$+20$	-5	$+2$	-4	$+1$
$+ \Sigma A c'ba$......	$+9$	-7	$+2$			
$+ \Sigma A b'ca$......	$+9$	$+2$	-2	-2	$+1$	
$+ \Sigma A b'b^2$.......	-9	$+1$				
$+ \Sigma A a'cb$......	$+9$	-7	$+0$	$+2$		
$+ \Sigma A c^2$.........	-9	$+10$	-4	-2	$+1$	

Éliminant c^2 au moyen de (59_3), puis b^2b' au moyen de (59_4), ensuite a^2d' au moyen de (59_5), et enfin cc' au moyen de (59_6), on trouve simplement

$$[27\gamma^2 - 18\alpha\beta\gamma + 4\alpha^3\gamma + 4\beta^3 - \alpha^2\beta^2] \Sigma A (c'ba + b'ac + a'bc + d'b).$$

On peut évidemment donner au second facteur bien des formes différentes à l'aide des formules (59). Une des plus simples est la suivante :

$$\Sigma A(ac - b^2)b',$$

à laquelle d'ailleurs il aurait été facile d'arriver directement.

6° $$\Sigma A d' a \Sigma x_2^2 x_3^2 (x_2 + x_3) | x_2 x_3 |^2 + \Sigma A c' b \Sigma x_1 x_2 x_3 (x_2^2 + x_3^2) | x_2 x_3 |^2$$
$$+ \Sigma A c' a^2 \Sigma x_1 x_2^2 x_3^2 | x_2 x_3 |^2 + \Sigma A b' c \Sigma x_1^2 (x_2^3 + x_3^3) | x_2 x_3 |^2$$
$$+ \Sigma A b' ba \Sigma x_1^2 x_2 x_3 (x_2 + x_3) | x_2 x_3 |^2 + \Sigma A a' ca \Sigma x_1^3 (x_2^2 + x_3^2) | x_2 x_3 |^2$$
$$+ \Sigma A a' b^2 \Sigma x_1^3 x_2 x_3 | x_2 x_3 |^2 + \Sigma A cb \Sigma x_1^4 (x_2 + x_3) | x_2 x_3 |^2$$

$$= \Sigma A d' a[(52) - (43)] + \Sigma A c' b \gamma [2(4) + 2(2^2) - 2(31)]$$
$$+ \Sigma A c' a^2 \gamma [(31) - 2(2^2)] + \Sigma A b' c[(52) + 2(32^2) - 2(421)]$$
$$+ \Sigma A bb' a \gamma [(31) - 2(21^2)] + \Sigma A a' ca[(43) + 2(32^2) - 4(3^2 1)]$$
$$+ \Sigma A a' b^2 \gamma [2(2^2) - 2(21^2)] + \Sigma A cb[(43) - (421)]$$

	$\alpha\gamma^2$	$\beta^2\gamma$	$\alpha^2\beta\gamma$	$\alpha^4\gamma$	$\alpha\beta^3$	$\alpha\beta^2$
$= \Sigma A d' a$	-12	$+4$	$+9$	-2	-4	$+1$
$+ \Sigma A c' b$	$+6$	$+10$	-10	$+2$		
$+ \Sigma A c' a^2$	$+3$	-4	$+1$			
$+ \Sigma A b' c$	-3	$+7$	$+4$	-2	-3	$+1$
$+ \Sigma A b' ba$	-3	-2	$+1$			
$+ \Sigma A a' ca$	$+15$	-5	-3	$+0$	$+1$	
$+ \Sigma A a' b^2$	-6	$+2$				
$+ \Sigma A cb$	$+6$	$+1$	-1	$+0$	$+1$	

Éliminant $a'b^2$ au moyen de (59_3), puis $c'a^2$ au moyen de (59_4), ensuite $d'a$ au moyen de (59_5), et enfin bc au moyen de (59_2), il nous reste simplement

$$\alpha(27\gamma^2 - 18\alpha\beta\gamma + 4\alpha^3\gamma + 4\beta^3 - \alpha^2\beta^2)\Sigma A bc'.$$

Le second facteur a une forme très simple en employant ce mode de réduction; on pourrait évidemment arriver, par une marche différente, à d'autres formes que l'on peut encore d'ailleurs déduire *a posteriori* des formules (59).

7°

$$\begin{aligned}
&\Sigma \mathrm{A\,d'}\,\Sigma x_2^3 x_3^3 |x_2 x_3|^2 + \Sigma \mathrm{A\,c'a}\,\Sigma x_1 x_2^2 x_3^2 (x_2 + x_3)|x_2 x_3|^2 \\
&+ \Sigma \mathrm{A\,b'b}\,\Sigma x_1^2 x_2 x_3 (x_2^2 + x_3^2)|x_2 x_3|^2 + \Sigma \mathrm{A\,b'a^2}\,\Sigma x_1^2 x_2^2 x_3^2 |x_2 x_3|^2 \\
&+ \Sigma \mathrm{A\,a'c}\,\Sigma x_1^3 (x_2^3 + x_3^3)|x_2 x_3|^2 + \Sigma \mathrm{A\,a'ba}\,\Sigma x_1^3 x_2 x_3 (x_2 + x_3)|x_2 x_3|^2 \\
&+ \Sigma \mathrm{A\,ac}\,\Sigma x_1^4 (x_2^2 + x_3^2)|x_2 x_3|^2 + \Sigma \mathrm{A\,b^2}\,\Sigma x_1^4 x_2 x_3 |x_2 x_3|^2 \\
&= \Sigma \mathrm{A\,d'}[(53) - 2(4^2)] + \Sigma \mathrm{A\,c'a}\,.\,\gamma[(41) - (32)] \\
&+ \Sigma \mathrm{A\,b'b}\,\gamma[(41) + 2(2^2 1) - 4(31^2)] + \Sigma \mathrm{A\,b'a^2}[2(31^2) - 2(2^2 1)] \\
&+ \Sigma \mathrm{A\,a'c}[(53) + 2(3^2 2) - 2(431)] + \Sigma \mathrm{A\,a'ba}\,.\,\gamma\,.\,[(32) - 2(2^2 1)] \\
&+ \Sigma \mathrm{A\,ac}[2(4^2) + 2(42^2) - 2(431)] + \Sigma \mathrm{A\,b^2}\,\gamma[(32) - 2(31^2)]
\end{aligned}$$

	$\beta\gamma^2$	$\alpha^2\gamma^2$	$\alpha\beta^2\gamma$	$\alpha^3\beta\gamma$	$\alpha^5\gamma$	β^4	$\alpha^2\beta^3$
$= \Sigma \mathrm{A\,d'}$......	-15	-1	$+14$	-3	$+0$	-4	$+1$
$+ \Sigma \mathrm{A\,c'a}$.....	$+6$	$+1$	-4	$+1$			
$+ \Sigma \mathrm{A\,b'b}$.....	$+15$	-5	-3	$+1$			
$+ \Sigma \mathrm{A\,b'a^2}$....	-6	$+2$					
$+ \Sigma \mathrm{A\,a'c}$.....	-3	$+7$	$+4$	-3	$+0$	-2	$+1$
$+ \Sigma \mathrm{A\,ac}$......	$+6$	$+10$	-10	$+0$	$+0$	$+2$	
$+ \Sigma \mathrm{A\,a'ba}$....	-3	-2	$+1$				
$+ \Sigma \mathrm{A\,b^2}$......	$+3$	-4	$+1$				

Éliminant $\mathrm{a^2b'}$ au moyen de (59_3), puis $\mathrm{b^2}$ au moyen de (59_2), ensuite $\mathrm{ac'}$ au moyen de (59_4), et enfin ac au moyen de (59_1), il reste

$$-\beta(27\gamma^2 - 18\alpha\beta\gamma + 4\alpha^3\gamma + 4\beta^3 - \alpha^2\beta^2)\,\Sigma \mathrm{A}(\mathrm{a'c} + \mathrm{d'}).$$

Le second facteur peut aussi être écrit, en particulier,

$$-\Sigma \mathrm{A}(\mathrm{b'b} + \mathrm{c'a}).$$

8°

$$\begin{aligned}
&\Sigma \mathrm{A\,c'}\,\Sigma x_1 x_2^3 x_3^3 |x_2 x_3|^2 + \Sigma \mathrm{A\,b'a}\,\Sigma x_1^2 x_2^2 x_3^2 (x_2 + x_3)|x_2 x_3|^2 \\
+\;&\Sigma \mathrm{A\,a'b}\,\Sigma x_1^3 x_2 x_3 (x_2^2 + x_3^2)|x_2 x_3|^2 + \Sigma \mathrm{A\,a'a^2}\,\Sigma x_1^3 x_2^2 x_3^2 |x_2 x_3|^2 \\
+\;&\Sigma \mathrm{A\,c}\,\Sigma x_1^4 (x_2^3 + x_3^3)|x_2 x_3|^2 + \Sigma \mathrm{A\,ba}\,\Sigma x_1^4 x_2 x_3 (x_2 + x_3)|x_2 x_3|^2 \\
= \gamma \{ &\Sigma \mathrm{A\,c'}[(42) - 2(3^2)] + \Sigma \mathrm{A\,b'a}[(2(41^2) - (321)] \\
+\;&\Sigma \mathrm{A\,a'b}[(42) + 6(2^3) - 2(321)] \\
+\;&\Sigma \mathrm{A\,a'a^2}[(321) - 6(2^3)] + \Sigma \mathrm{A\,ba}[2(3^2) - (321)] \}
\end{aligned}$$

	γ^2.	$\alpha\beta\gamma$.	$\alpha^3\gamma$.	β^3.	$\alpha^2\beta^2$.
$= \gamma(\Sigma \mathrm{A\,c'}$............	-9	$+10$	-2	-4	$+1$
$+ \quad \Sigma \mathrm{A\,b'a}$...........	$+9$	-7	$+2$		
$+ \quad \Sigma \mathrm{A\,a'b}$...........	$+9$	$+2$	-2	-2	$+1$
$+ \quad \Sigma \mathrm{A\,a'a^2}$..........	-9	$+1$			
$+ \quad \Sigma \mathrm{A\,ba}$...........	$+9$	-7	$+0$	$+2$	).

Éliminant $a'a^2$ au moyen de (59_2), puis c' au moyen de (59_3), et enfin ab au moyen de (59_1), il vient

$$\gamma(27\gamma^2 - 18\alpha\beta\gamma + 4\alpha^3\gamma + 4\beta^3 - \alpha^2\beta^2)\,\Sigma \mathrm{A\,b'a}.$$

9° $$\Sigma \mathrm{A\,b'}\,\Sigma x_1^2 x_2^3 x_3^3 |x_2 x_3|^2 + \Sigma \mathrm{A\,a'a}\,\Sigma x_1^3 x_2^2 x_3^2 (x_2 + x_3)|x_2 x_3|^2$$
$$+ \quad \Sigma \mathrm{A\,b}\,\Sigma x_1^4 x_2 x_3 (x_2^2 + x_3^2)|x_2 x_3|^2 + \Sigma \mathrm{A\,a^2}\,\Sigma x_1^4 x_2^2 x_3^2 |x_2 x_3|^2$$
$$= \gamma^2 \{\Sigma \mathrm{A\,b'}[(31) - 2(2^2)] + \Sigma \mathrm{A\,a'a}[(31) - 2(21^2)] + \Sigma \mathrm{A\,a^2}[2(2^2) - 2(21^2)]\}.$$

Éliminant d'abord b′, le coefficient de γ^2 devient

$$\Sigma \mathrm{A\,a'a}[2(2^2) - 2(21^2)] + \Sigma \mathrm{A\,a^2}[2(2^2) - 2(21^2)],$$

qui, d'après (59_1) et (55), est identiquement nul.

10° $$\Sigma \mathrm{A\,a'}\,\Sigma x_1^3 x_2^3 x_3^3 |x_2 x_3|^2 + \Sigma \mathrm{A\,a}\,\Sigma x_1^4 x_2^2 x_3^2 |x_2 x_3|^2 = \Sigma \mathrm{A\,a'}\,\Sigma x_1^3 x_2^3 x_3^3 |x_2 x_3|^2.$$

(59_1) nous montre encore que cette expression est nulle.

Enfin

11° $$\Sigma \mathrm{A}\,\Sigma x_1^4 x_2^3 x_3^3 |x_2 x_3|^2 = 0.$$

15. En somme, toutes réductions faites, il ne nous reste que quatre termes qui ont en commun le facteur

$$27\gamma^2 - 18\alpha\beta\gamma + 4\alpha^3\gamma + 4\beta^3 - \alpha^2\beta^2.$$

Mais cette expression représente précisément le discriminant de l'équation

$$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = x^3 - \alpha x^2 + \beta x - \gamma = 0,$$

c'est-à-dire notre dénominateur

$$|x_1 x_2 x_3|^2.$$

On arrive ainsi à la formule

$$\Sigma \mathrm{A P}_{klm}^2 = \Sigma \mathrm{A\,b'(ac - b^2)} - \alpha \Sigma \mathrm{A\,c'b} + \beta \Sigma \mathrm{A(d' + a'c)} - \gamma \Sigma \mathrm{A\,b'a}.$$

Le second membre est une fonction linéaire de α, β, γ, qui pourra être exprimée linéairement en fonction des carrés de quatre fonctions P à un seul indice, prises à volonté.

La même série de constantes qui rend le premier membre rationnel le rend également entier.

Relations linéaires entre les produits deux à deux des fonctions P.

16. On sait, depuis longtemps, que les relations algébriques linéaires entre les carrés des fonctions hyperelliptiques ne sont pas les seules qui existent.

Déjà, dans le cas des fonctions de genre 2, Göpel s'était occupé des relations qui ont lieu entre les produits de deux fonctions. Dans le cas général, Weierstrass, Brioschi, Schottky ont donné à plusieurs de ces relations des formes relativement simples.

C'est cette question qui va nous occuper maintenant.

Si nous ne considérons que des fonctions à un seul indice, les produits deux à deux ne donneraient naissance à des relations algébriques que si l'on considérait leurs carrés. Nous ne prétendons pas par là qu'un tel produit n'entre pas dans une relation linéaire ; nous verrons d'ailleurs bientôt différents cas où se présente une telle circonstance : nous disons simplement qu'il n'y a pas de combinaison linéaire contenant seulement des fonctions P à un seul indice.

17. Arrivons de suite aux produits de fonctions à un seul indice et de fonctions à deux indices.

Nous supposons d'abord que les trois indices qui se présentent dans un tel produit sont tous différents.

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}_k \mathrm{P}_{lm} &= \frac{1}{|x_1 x_2 x_3|}\left[|x_2 x_3| \sqrt{\mathrm{R}(x_1)\frac{|a_l x_2|\,|a_l x_3|\,|a_m x_2|\,|a_m x_3|}{|a_l x_1|\,|a_m x_1|}}\;|a_k x_1|\,|a_k x_2|\,|a_k x_3| \right.\\
&\qquad\qquad \left. + |x_3 x_1|\sqrt{} + |x_1 x_2|\sqrt{}\right]\\
&= \frac{1}{|x_1 x_2 x_3|}\left[|x_2 x_3|\,|a_k x_1| \sqrt{\mathrm{R}(x_1)\frac{|a_k x_2|\,|a_k x_3|\,|a_l x_2|\,|a_l x_3|\,|a_m x_2|\,|a_m x_3|}{|a_k x_1|\,|a_l x_1|\,|a_m x_1|}} \right.\\
&\qquad\qquad \left. + |x_3 x_1|\,|a_k x_2|\sqrt{} + |x_1 x_2|\,|a_k x_3|\sqrt{}\right].
\end{aligned}$$

Mais les radicaux qui se présentent ici sont précisément ceux qui se trouvent dans P_{klm}; la seule différence qui existe consiste dans l'adjonction des facteurs $|a_k x_1|$, $|a_k x_2|$, $|a_k x_3|$ à ces radicaux. Il résulte alors immédiatement de cette remarque que l'on a

$$P_k P_{lm} - P_l P_{mk} = |a_k a_l| P_{klm},$$

que l'on peut considérer comme une relation entre les produits de nos fonctions, en écrivant

$$P_k P_{lm} - P_l P_{mk} = |a_k a_l| P_0 P_{klm}. \tag{61}$$

Effectuant sur les lettres k, l, m une permutation circulaire, on a de même

$$P_l P_{mk} - P_m P_{kl} = |a_l a_m| P_0 P_{klm}. \tag{62}$$

Les équations (61) et (62) nous fournissent, en éliminant $P_0 P_{klm}$, la relation

$$|a_l a_m| P_k P_{lm} + |a_m a_k| P_l P_{mk} + |a_k a_l| P_m P_{kl} = 0. \tag{63}$$

Cette équation pouvait évidemment se déduire immédiatement de l'identité

$$|a_l a_m|\,|a_k x| + |a_m a_k|\,|a_l x| + |a_k a_l|\,|a_m x| = 0.$$

18. Si nous considérons maintenant deux fonctions ayant un indice commun P_l et P_{kl}, on a

$$\begin{aligned} P_l P_{kl} = \frac{1}{|x_1 x_2 x_3|}\Bigg[& |x_2 x_3| \sqrt{R(x_1)\frac{|a_k x_2|\,|a_k x_3|\,|a_l x_2|\,|a_l x_3|\,|a_l x_1|\,|a_l x_2|\,|a_l x_3|}{|a_k x_1|\,|a_l x_1|}} \\ & + |x_3 x_1| \sqrt{} + |x_1 x_2| \sqrt{} \Bigg] \\ = \frac{1}{|x_1 x_2 x_3|}\Bigg[& |x_2 x_3|\,|a_l x_2|\,|a_l x_3| \sqrt{R(x_1)\frac{|a_k x_2|\,|a_k x_3|}{|a_k x_1|}} + \ldots + \ldots \Bigg]. \end{aligned}$$

Sous cette forme, nous voyons que, en ce qui concerne les a, les radicaux ne dépendent particulièrement que de a_k : ils restent donc les mêmes pour un autre produit, tel que $P_m P_{km}$.

Il résulte alors de l'identité déjà plusieurs fois employée,

$$\begin{aligned} & |a_m a_n a_p|\,|a_l x_2|\,|a_l x_3| - |a_n a_p a_l|\,|a_m x_2|\,|a_m x_3| \\ & + |a_m a_l a_p|\,|a_n x_2|\,|a_n x_3| - |a_l a_m a_n|\,|a_p x_2|\,|a_p x_3| = 0, \end{aligned}$$

que l'on a, entre quatre produits de l'espèce considérée, la relation

$$(64)\quad |a_m a_n a_p| P_l P_{kl} - |a_n a_p a_l| P_m P_{km} + |a_p a_l a_m| P_n P_{kn} - |a_l a_m a_n| P_p P_{kp} = 0.$$

19. Considérons maintenant des produits de fonctions à deux indices et prenons d'abord des fonctions ayant un indice commun :

$$P_{kq} P_{kr} = \frac{1}{|x_1 x_2 x_3|^2} \Bigg[|x_2 x_3|^2 R(x_1) \frac{|a_k x_2| |a_k x_3|}{|a_k x_1|} \sqrt{\frac{|a_q x_2| |a_q x_3| |a_r x_2| |a_r x_3|}{|a_q x_1| |a_r x_1|}} + \ldots$$
$$+ |x_2 x_3| |x_3 x_1| \sqrt{R(x_1) R(x_2)} \left(|a_k x_3| \sqrt{\frac{|a_q x_2| |a_q x_3| |a_r x_3| |a_r x_1|}{|a_q x_1| |a_r x_1|}} + |a_k x_3| \sqrt{} \right) + $$

Le premier terme de la seconde ligne ne contient que le facteur $|a_k x_3|$ comme variable lorsque l'on considère un autre produit où q et r subsistent. Il en résulte que tous les termes, sauf les trois premiers, disparaissent dans la somme

$$|a_l a_m| P_{kq} P_{kr} + |a_m a_k| P_{lq} P_{lr} + |a_k a_l| P_{mq} P_{mr};$$

et le développement de cette somme donne

$$\frac{1}{|x_1 x_2 x_3|^2} \Bigg[|x_2 x_3|^2 \frac{R(x_1)}{|a_q x_1| |a_r x_1|} \left(|a_l a_m| \frac{|a_k x_2| |a_k x_3|}{|a_k x_1|} + |a_m a_k| \ldots + \ldots \right)$$
$$+ |x_3 x_1|^2 \ldots + |x_1 x_2|^2 \Bigg] P_q P_r.$$

Mais la première parenthèse devient

$$\frac{|a_k a_l a_m| |x_1 x_2| |x_1 x_3|}{|a_k x_1| |a_l x_1| |a_m x_1|},$$

en sorte que notre expression se simplifie et devient

$$\frac{|a_k a_l a_m|}{|x_1 x_2 x_3|} (|x_2 x_3| |a_n x_1| |a_p x_1| + |x_3 x_1| |a_n x_2| |a_p x_2| + |x_1 x_2| |a_n x_3| |a_p x_3|) P_q P_r,$$

c'est-à-dire enfin

$$|a_k a_l a_m| P_q P_r.$$

Nous arrivons donc à la relation

$$(65)\quad |a_l a_m| P_{kq} P_{kr} + |a_m a_k| P_{lq} P_{lr} + |a_k a_l| P_{mq} P_{mr} = |a_k a_l a_m| P_q P_r.$$

En appliquant la substitution

$$\begin{vmatrix} k & l & m & n \\ l & m & n & k \end{vmatrix},$$

nous en déduisons

$$(66)\quad |a_m a_n| P_{lq} P_{lr} + |a_n a_l| P_{mq} P_{mr} + |a_l a_m| P_{nq} P_{nr} = |a_l a_m a_n| P_q P_r.$$

Les formules (65) et (66) nous fournissent alors une formule de type différent par l'élimination de $P_q P_r$

$$(67)\quad \left\{ \begin{aligned} &|a_l a_m a_n| P_{kq} P_{kr} - |a_m a_n a_k| P_{lq} P_{lr} + |a_n a_k a_l| P_{mq} P_{mr} \\ &\qquad - |a_k a_l a_m| P_{nq} P_{nr} = 0. \end{aligned} \right.$$

20. Si les deux fonctions à deux indices n'ont aucun indice commun, nous avons

$$\begin{aligned} P_{np} P_{qr} = \frac{1}{|x_1 x_2 x_3|^2} \Bigg[& |x_2 x_3|^2 R(x_1) \sqrt{\frac{|a_n x_2||a_n x_3||a_p x_2||a_p x_3||a_q x_2||a_q x_3||a_r x_2||a_r x_3|}{|a_n x_1||a_p x_1||a_q x_1||a_r x_1|}} + \ldots \\ & + |x_2 x_3||x_3 x_1| \sqrt{R(x_1) R(x_2)} \\ & \times \left(\sqrt{\frac{|a_n x_2||a_n x_3||a_p x_2||a_p x_3||a_q x_3||a_q x_1||a_r x_3||a_r x_1|}{|a_n x_1||a_p x_1||a_q x_2||a_r x_2|}} + \ldots \right). \end{aligned}$$

Les termes de la première ligne ne changent pas par une permutation effectuée sur les indices n, p, q et r. Ils disparaissent donc dans la différence de deux produits de même espèce :

$$\begin{aligned} & P_{np} P_{qr} - P_{nq} P_{pr} \\ & = \frac{1}{|x_1 x_2 x_3|^2} P_n P_p P_q P_r \Bigg[|x_2 x_3||x_3 x_1| \sqrt{R(x_1) R(x_2)} \\ & \qquad \times \left(\frac{1}{|a_n x_1||a_p x_1||a_q x_2||a_r x_2|} - \frac{1}{|a_n x_1||a_q x_1||a_p x_2||a_r x_2|} + \ldots \right) + \end{aligned}$$

Mais on a

$$\frac{1}{|a_p x_1||a_q x_2|} - \frac{1}{|a_q x_1||a_p x_2|} = \frac{-|a_p a_q||x_1 x_2|}{|a_p x_1||a_p x_2||a_q x_1||a_q x_2|},$$

$$\frac{1}{|a_n x_1||a_r x_2|} - \frac{1}{|a_r x_1||a_n x_2|} = \frac{|a_r a_n||x_1 x_2|}{|a_n x_1||a_n x_2||a_r x_1||a_r x_2|};$$

en sorte que l'on obtient pour le second membre

$$\frac{1}{|x_1 x_2 x_3|}|a_p a_q||a_r a_n|\mathrm{P}_n\mathrm{P}_p\mathrm{P}_q\mathrm{P}_r\left[|x_1 x_2|\frac{\sqrt{\mathrm{R}(x_1)\mathrm{R}(x_2)}}{|a_n x_1||a_n x_2||a_p x_1||a_p x_2||a_q x_1||a_q x_2||a_r x_1||a_r x_2|}\right]+\ldots$$
$$=|a_p a_q||a_r a_n|\mathrm{P}_{klm}.$$

Ainsi, l'on a

$$\mathrm{P}_{np}\mathrm{P}_{qr}-\mathrm{P}_{nq}\mathrm{P}_{pr}=|a_p a_q||a_r a_n|\mathrm{P}_{klm}\mathrm{P}_0. \tag{68}$$

Une substitution nous donne

$$\mathrm{P}_{np}\mathrm{P}_{qr}-\mathrm{P}_{nr}\mathrm{P}_{pq}=|a_p a_r||a_q a_n|\mathrm{P}_0\mathrm{P}_{klm}; \tag{69}$$

Éliminant $\mathrm{P}_0\mathrm{P}_{klm}$, nous obtenons

$$|a_n a_p||a_q a_r|\mathrm{P}_{np}\mathrm{P}_{qr}+|a_n a_q||a_r a_p|\mathrm{P}_{nq}\mathrm{P}_{rp}+|a_n a_r||a_p a_q|\mathrm{P}_{nr}\mathrm{P}_{pq}=0. \tag{70}$$

21. Considérons maintenant le produit d'une fonction à un seul indice et d'une fonction à trois indices; supposons d'abord tous les indices différents :

$$\mathrm{P}_k\mathrm{P}_{lmn}=\frac{1}{|x_1 x_2 x_3|}\left[|x_2 x_3|\sqrt{\mathrm{R}(x_1)|a_k x_1||a_k x_2||a_k x_3|\frac{|a_l x_2||a_l x_3||a_m x_2||a_m x_3||a_n x_2||a_n x_3|}{|a_l x_1||a_m x_1||a_n x_1|}}+\ldots\right]$$
$$=\frac{1}{|x_1 x_2 x_3|}\left[|x_2 x_3||a_k x_1|\sqrt{\mathrm{R}(x_1)\frac{|a_k x_2||a_k x_3||a_l x_2||a_l x_3||a_m x_2||a_m x_3||a_n x_2||a_n x_3|}{|a_k x_1||a_l x_1||a_m x_1||a_n x_1|}}+\ldots\right].$$

Les radicaux que contient le second membre ne changent pas quand on effectue sur les indices k, l, m, n une substitution quelconque. Le facteur $|a_k x|$ varie seul. On aura donc une relation linéaire homogène entre trois produits de cette espèce; par exemple,

$$|a_l a_m|\mathrm{P}_k\mathrm{P}_{lmn}+|a_m a_k|\mathrm{P}_l\mathrm{P}_{mkn}+|a_k a_l|\mathrm{P}_m\mathrm{P}_{kln}=0. \tag{71}$$

22. Si la fonction P à trois indices a un de ses indices communs avec la fonction à un seul indice,

$$\mathrm{P}_k\mathrm{P}_{kqr}=\frac{1}{|x_1 x_2 x_3|}\left[|x_2 x_3||a_k x_2||a_k x_3|\sqrt{\mathrm{R}(x_1)\frac{|a_q x_2||a_q x_3||a_r x_2||a_r x_3|}{|a_q x_1||a_r x_1|}}+\ldots\right].$$

Les radicaux du second membre sont ceux qui existent dans P_{qr}.

Cette remarque nous conduit à former la combinaison linéaire suivante :

$$(72)\quad |a_l a_m| P_k P_{kqr} + |a_m a_k| P_l P_{lqr} + |a_k a_l| P_m P_{mqr} = |a_k a_l a_m| P_0 P_{qr};$$

d'où l'on déduit, par une substitution effectuée sur les indices,

$$(73)\quad |a_m a_n| P_l P_{lqr} + |a_n a_l| P_m P_{mqr} + |a_l a_m| P_n P_{nqr} = |a_l a_m a_n| P_0 P_{qr}.$$

Éliminant $P_0 P_{qr}$ entre les deux formules (72) et (73), nous obtenons la relation de forme différente

$$(74)\quad \begin{cases} |a_l a_m a_n| P_k P_{kqr} - |a_m a_n a_k| P_l P_{lqr} + |a_n a_k a_l| P_m P_{mqr} \\ \qquad\qquad - |a_k a_l a_m| P_n P_{nqr} = 0. \end{cases}$$

23. Prenons maintenant une fonction à deux indices avec une fonction à trois indices, un des indices leur étant commun :

$$P_{kl} P_{kmn} = \frac{1}{|x_1 x_2 x_3|^2} \left(|x_2 x_3|^2 R(x_1) \frac{|a_k x_2||a_k x_3|}{|a_k x_1|} \sqrt{\frac{|a_l x_2||a_l x_3||a_m x_2||a_m x_3||a_n x_2||a_n x_3|}{|a_l x_1||a_m x_1||a_n x_1|}} + \ldots \right.$$
$$\left. + |x_2 x_3||x_3 x_1| \sqrt{R(x_1) R(x_2)} |a_k x_3| \sqrt{\frac{|a_l x_2||a_l x_3||a_m x_3||a_m x_1||a_n x_3||a_n x_1|}{|a_l x_1||a_m x_2||a_n x_2|}} + \ldots \right)$$

La première ligne du produit ne change pas quand on passe à un autre produit différent du précédent par une simple substitution effectuée sur les lettres l, m et n. Ils disparaîtront donc dans la différence de deux produits de l'espèce considérée.

Remarquons, de plus, qu'on peut écrire le radical qu'on trouve entre parenthèses dans la seconde ligne

$$\frac{P_l P_m P_n}{|a_l x_1||a_m x_2||a_n x_2|};$$

on arrive ainsi à la formule :

$$P_{kl} P_{kmn} - P_{km} P_{knl}$$
$$= \frac{P_l P_m P_n}{|x_1 x_2 x_3|^2} \left[|x_2 x_3||x_3 x_1||a_k x_3| \left(\begin{array}{c} \dfrac{1}{|a_l x_1||a_m x_2||a_n x_2|} - \dfrac{1}{|a_m x_1||a_n x_2||a_l x_2|} \\ + \dfrac{1}{|a_l x_2||a_m x_1||a_n x_1|} - \dfrac{1}{|a_m x_2||a_n x_1||a_l x_1|} \end{array} \right) \sqrt{R(x_1) R(x_2)} + \ldots \right].$$

Or, on a

$$\frac{1}{|a_l x_1||a_m x_2||a_n x_2|} - \frac{1}{|a_m x_1||a_n x_2||a_l x_2|} = \frac{1}{|a_n x_2|} \frac{|a_l a_m||x_2 x_1|}{|a_l x_1||a_l x_2||a_m x_1||a_m x_2|},$$

$$\frac{1}{|a_n x_2|} - \frac{1}{|a_n x_1|} = \frac{|x_2 x_1|}{|a_n x_1||a_n x_2|};$$

en sorte que l'expression devient

$$\mathrm{P}_{kl}\mathrm{P}_{kmn} - \mathrm{P}_{km}\mathrm{P}_{knl} = \frac{1}{|x_1 x_2 x_3|} \mathrm{P}_l \mathrm{P}_m \mathrm{P}_n \left[|x_1 x_2| \frac{|a_k x_3| \sqrt{\mathrm{R}(x_1)\mathrm{R}(x_2)}}{|a_l x_1||a_l x_2||a_m x_1||a_m x_2||a_n x_1||a_n x_2|} + \ldots \right] |a_l a_m|.$$

Entre parenthèses, le facteur de $|x_2 x_1|$ multiplié par $\mathrm{P}_l \mathrm{P}_m \mathrm{P}_n$ devient

$$\sqrt{|a_k x_1||a_k x_2||a_k x_3| \mathrm{R}(x_3) \frac{|a_p x_1||a_p x_2||a_q x_1||a_q x_2||a_r x_1||a_r x_2|}{|a_p x_3||a_q x_3||a_r x_3|}},$$

en sorte qu'on a, en somme,

$$\mathrm{P}_{kl}\mathrm{P}_{kmn} - \mathrm{P}_{kn}\mathrm{P}_{knl} = |a_l a_n| \mathrm{P}_k \mathrm{P}_{pqr}. \tag{75}$$

On en déduit par une permutation

$$\mathrm{P}_{km}\mathrm{P}_{knl} - \mathrm{P}_{kn}\mathrm{P}_{klm} = |a_m a_n| \mathrm{P}_k \mathrm{P}_{pqr}; \tag{76}$$

donc, en éliminant $\mathrm{P}_k \mathrm{P}_{pqr}$,

$$|a_m a_n| \mathrm{P}_{kl}\mathrm{P}_{kmn} + |a_n a_l| \mathrm{P}_{km}\mathrm{P}_{knl} + |a_l a_m| \mathrm{P}_{kn}\mathrm{P}_{klm} = 0. \tag{77}$$

24. La même méthode va nous fournir maintenant une relation entre les produits de fonctions à trois indices, un indice étant commun aux fonctions d'un produit

$$\begin{aligned}\mathrm{P}_{klm}\mathrm{P}_{knp} = \frac{1}{|x_1 x_2 x_3|^2} \Bigg[& |x_2 x_3|^2 \mathrm{R}(x_1) \frac{|a_k x_2||a_k x_3|}{|a_k x_1|} \\ & \times \sqrt{\frac{|a_l x_2||a_l x_3||a_m x_2||a_m x_3||a_n x_2||a_n x_3||a_p x_2||a_p x_3|}{|a_l x_1||a_m x_1||a_n x_1||a_p x_1|}} + \ldots \\ & + |x_2 x_3||x_3 x_1||a_k x_3| \sqrt{\mathrm{R}(x_1)\mathrm{R}(x_2)} \\ & \times \left(\sqrt{\frac{|a_l x_2||a_l x_3||a_m x_2||a_m x_3||a_n x_3||a_n x_1||a_p x_3||a_p x_1|}{|a_l x_1||a_m x_1||a_n x_2||a_p x_2|}} + \ldots \right) + \ldots \Bigg].\end{aligned}$$

La première ligne du produit ne change pas quand on passe à un produit différant du précédent par une simple substitution effectuée sur les lettres l, m, n et p. Ils disparaîtront donc dans la différence de deux produits de l'espèce considérée assujettis à la condition indiquée.

Remarquons de plus qu'on peut écrire le radical qui figure entre parenthèses dans la seconde ligne

$$\frac{P_l P_m P_n P_p}{|a_l x_1||a_m x_1||a_n x_2||a_p x_2|}.$$

Nous arrivons donc tout d'abord à la formule

$$\begin{aligned}
&P_{klm}P_{knp} - P_{kln}P_{kmp} \\
&= \frac{1}{|x_1x_2x_3|^2}\left[|x_2x_1||x_3x_1||a_kx_3|\sqrt{R(x_1)R(x_2)} \right. \\
&\qquad \left. \times \begin{pmatrix} \dfrac{1}{|a_lx_1||a_mx_1||a_nx_2||a_px_2|} - \dfrac{1}{|a_lx_1||a_nx_1||a_mx_2||a_px_2|} \\ \dfrac{1}{|a_lx_2||a_mx_2||a_nx_1||a_px_1|} - \dfrac{1}{|a_lx_2||a_nx_2||a_mx_1||a_px_1|} \end{pmatrix} + \ldots \right] P_l P_m P_n P_p
\end{aligned}$$

qui devient, d'après ce qu'on a déjà vu,

$$\frac{1}{|x_1x_2x_3|}P_lP_mP_nP_p\left(|x_1x_2|\frac{|a_kx_3|\sqrt{R(x_1)R(x_2)}}{|a_lx_1||a_lx_2||a_mx_1||a_mx_2||a_nx_1||a_nx_2||a_px_1||a_px_2|} + \ldots\right)|a_la_p||a_ma_n|,$$

ou bien autrement

$$\frac{1}{|x_1x_2x_3|}\left(|x_1x_2|\sqrt{|a_kx_1||a_kx_2||a_kx_3|R(x_3)|\frac{|a_qx_2||a_qx_3||a_rx_2||a_rx_3|}{|a_qx_1||a_rx_1|}} + \ldots\right)|a_la_p||a_ma_n|.$$

en sorte qu'on a simplement

$$(78) \qquad P_{klm}P_{knp} - P_{kln}P_{kmp} = |a_la_p||a_ma_n|P_kP_{qr}.$$

De même

$$(79) \qquad P_{klm}P_{kpn} - P_{klp}P_{kmn} = |a_la_n||a_ma_p|P_kP_{qr}.$$

Éliminant P_kP_{qr}, on arrive à la relation

$$(80) \qquad \left\{ \begin{aligned} &|a_la_m||a_na_p|P_{klm}P_{knp} + |a_la_n||a_pa_m|P_{kln}P_{kpm} \\ &\qquad + |a_la_p||a_ma_n|P_{klp}P_{kmn} = 0. \end{aligned} \right.$$

25. Supposons enfin que les deux fonctions à trois indices considérés aient deux indices communs,

$$\begin{aligned}\mathrm{P}_{kln}\mathrm{P}_{kmn}=\frac{1}{|x_1x_2x_3|^2}\Bigg[&|x_2x_3|^2\mathrm{R}(x_1)\frac{|a_kx_2||a_kx_3|}{|a_kx_1|}\frac{|a_nx_2||a_nx_3|}{|a_nx_1|}\sqrt{\frac{|a_lx_2||a_lx_3||a_mx_2||a_mx_3|}{|a_lx_1||a_mx_1|}}+\ldots\\ &+|x_2x_3||x_3x_1||a_kx_3||a_nx_3|\sqrt{\mathrm{R}(x_2)\mathrm{R}(x_3)}\left(\sqrt{\frac{|a_lx_2||a_lx_3||a_mx_3||a_mx_1|}{|a_lx_1||a_mx_2|}}+\ldots\right)+\ldots\Bigg].\end{aligned}$$

Si l'on change l'indice n seul, dans la seconde ligne, les facteurs tels que $|a_nx_3|$ sont seuls variables; on peut donc former une combinaison linéaire de trois produits de l'espèce considérée dans laquelle disparaissent les termes de la seconde ligne.

Ou plutôt, considérons en même temps le produit

$$\begin{aligned}\mathrm{P}_{kl}\mathrm{P}_{km}=\frac{1}{|x_1x_2x_3|^2}\Bigg[&|x_2x_3|^2\mathrm{R}(x_1)\frac{|a_kx_2||a_kx_3|}{|a_kx_2|}\sqrt{\frac{|a_lx_2||a_lx_3||a_mx_2||a_mx_3|}{|a_lx_1||a_mx_2|}}+\ldots\\ &+|x_2x_3||x_3x_1|\sqrt{\mathrm{R}(x_1)\mathrm{R}(x_2)}|a_kx_3|\left(\sqrt{\frac{|a_lx_2||a_lx_3||a_mx_3||a_mx_1|}{|a_lx_1||a_mx_2|}}+\ldots\right)+\ldots\Bigg];\end{aligned}$$

on a alors

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}_{kln}\mathrm{P}_{kmn}-\mathrm{P}_{klp}\mathrm{P}_{kmp}-|a_na_p|\mathrm{P}_{kl}\mathrm{P}_{km}\\ &=\frac{1}{|x_1x_2x_3|^2}\left[|x_2x_3|^2\mathrm{R}(x_1)\frac{|a_kx_2||a_kx_3|}{|a_kx_1||a_lx_1||a_mx_1|}\left(\frac{|a_nx_2||a_nx_3|}{|a_nx_1|}-\frac{|a_px_2||a_px_3|}{|a_px_1|}-|a_na_p|\right)+\ldots\right]\mathrm{P}_l\mathrm{P}_m.\end{aligned}$$

Or

$$|a_nx_2||a_nx_3||a_px_1|-|a_px_2||a_px_3||a_nx_1|-|a_na_p||a_nx_1||a_nx_2|=|x_1x_2||x_1x_3||a_pa_n|,$$

en sorte que le second membre devient

$$\begin{aligned}|a_pa_n|\frac{1}{|x_1x_2x_3|^2}(&|x_2x_3||a_kx_2||a_kx_3||a_qx_1||a_rx_1|+|x_3x_1||a_kx_3||a_kx_1||a_qx_2||a_rx_2|\\ &+|x_1x_2||a_kx_1||a_kx_2||a_qx_3||a_rx_3|)\mathrm{P}_l\mathrm{P}_m.\end{aligned}$$

ou bien simplement

$$|a_pa_n||a_ka_q||a_ka_r|\mathrm{P}_l\mathrm{P}_m.$$

De la formule

$$(81)\quad \mathrm{P}_{kln}\mathrm{P}_{kmn}-\mathrm{P}_{klp}\mathrm{P}_{kmp}-|a_na_p|\mathrm{P}_{kl}\mathrm{P}_{km}=|a_pa_n||a_ka_q||a_ka_r|\mathrm{P}_l\mathrm{P}_m,$$

on déduit

$$(82)\quad \mathrm{P}_{klp}\mathrm{P}_{kmp}-\mathrm{P}_{klq}\mathrm{P}_{kmq}-|a_pa_q|\mathrm{P}_{kl}\mathrm{P}_{km}=|a_qa_p||a_ka_r||a_ka_n|\mathrm{P}_l\mathrm{P}_m.$$

Éliminant $P_{kl}P_{km}$, on obtient

$$(83)\quad \begin{cases} |a_p a_q| P_{kln} P_{kmn} + |a_q a_n| P_{klp} P_{kmp} + |a_n a_p| P_{klq} P_{kmq} \\ \qquad\qquad = |a_r a_k| \, |a_n a_p a_q| P_l P_m. \end{cases}$$

Si l'on élimine $P_l P_m$, on trouve

$$(84)\quad \begin{cases} |a_k a_n| \, |a_p a_q| P_{kln} P_{kmn} + |a_k a_p| \, |a_q a_n| P_{klp} P_{kmp} \\ \qquad + |a_q a_k| \, |a_n a_p| P_{klq} P_{kmq} = |a_n a_p a_q| P_{kl} P_{km}. \end{cases}$$

Continuant de même, on a enfin

$$(85)\quad \begin{cases} \quad |a_n a_k| \, |a_p a_q a_r| P_{kln} P_{kmn} - |a_p a_k| \, |a_q a_r a_n| P_{klp} P_{kmp} \\ + |a_q a_k| \, |a_r a_n a_p| P_{kq} P_{kmq} - |a_r a_k| \, |a_n a_p a_q| P_{klr} P_{kmr} = 0. \end{cases}$$

26. Les relations (64) et (63) sont, aux notations près, les mêmes que celles données par Weierstrass pour le cas des fonctions hyperelliptiques d'ordre quelconque (*Theorie der Abelschen Functionen*, p. 320, théorèmes III et IV).

L'existence de la relation (65) a été prouvée par Brioschi (*Annali di Matematica pura ed applicata*, t. I, p. 29).

Enfin, dans le cas qui nous occupe du genre 3, Schottky indique (*Abriss einer Theorie der Abelschen Functionen*, etc., Nachtrag, p. 148 et suiv.) la forme des relations entre les produits de fonctions Θ analogues à celles numérotées ici (61), (63), (68), (71), (77), (85).

Nous résumons dans le Tableau suivant les résultats contenus dans les n^{os} **17** à **25**.

Pour simplifier l'écriture, nous désignerons simplement une fonction par ses indices et nous séparerons par un point les indices des deux facteurs du produit.

	(61), (63)	3		*k.lm*	*l.mk*	*m.kl*	o.*klm*	
	(64)	4	*l.kl*	*m.km*	*n.kn*	*p.kp*	*q.kq*	*r.kr*
	(65), (67)	4	*kq.kr*	*lq.lr*	*mq.mr*	*nq.nr*	*pq.pr*	*q.r*
	(68), (70)	3		*kl.mn*	*km.ml*	*kn.lm*	o.*pqr*	
(26)	(71)	3		*k.lmn*	*l.mnk*	*m.nkl*	*n.klm*	
	(72), (74)	4	*k.kqr*	*l.lqr*	*m.mqr*	*n.nqr*	*p.pqr*	o.*qr*
	(75), (77)	3		*kl.kmn*	*km.knl*	*kn.klm*	*k.pqr*	
	(78), (80)	3		*klm.knp*	*kln.kpm*	*klp.kmn*	*k.qr*	
	(81), (83), (84), (85)	4	*kln.kmn*	*klp.kmp*	*klq.kmq*	*klr.kmr*	*kl.km*	*l.m*

Les chiffres marqués dans la seconde colonne indiquent combien de produits entrent dans une relation linéaire; dans la première, nous indiquons quelles sont ces relations linéaires; tout aussi bien que dans le cas des relations entre les carrés, on peut avoir, comme on le voit, différents types de formules pour un même groupe, suivant le choix que l'on fait parmi les éléments de ce groupe.

Expression linéaire des carrés des fonctions P au moyen des carrés de huit d'entre elles.

27. Nous allons voir maintenant qu'il est facile, en ayant recours aux combinaisons linéaires entre cinq carrés, d'exprimer linéairement les carrés de cinquante-huit des fonctions au moyen des carrés des huit autres. Des calculs comme ceux du n° 15 nous conduiraient à un résultat analogue, mais par une voie bien plus compliquée.

Tout d'abord nous considérons comme données les six fonctions suivantes :

$$(87)\qquad \left\{\begin{matrix} P_{kln} & P_{klp} & P_{klq} \\ P_{kmn} & P_{kmp} & P_{kmq} \end{matrix}\right.$$

L'ensemble de ces fonctions ne change pas si l'on permute l et m, et aussi si l'on effectue sur n, p et q une substitution quelconque.

Les deux groupes kl et km du Tableau (36) nous montrent qu'il existe une relation linéaire entre les carrés des fonctions

$$P_k,\ P_{klm},\ P_{kln},\ P_{klp},\ P_{klq},$$

et une autre entre les carrés des fonctions

$$P_k,\ P_{klm},\ P_{kmn},\ P_{kmp},\ P_{kmq}.$$

Considérant P_k^2 et P_{klm}^2 comme inconnues, la formule (32) montre que le déterminant des inconnues est, à un facteur différent de o près,

$$\begin{vmatrix} |a_m a_k| & |a_r a_l|\,|a_m a_n|\,|a_m a_p|\,|a_m a_q| \\ |a_l a_k| & |a_r a_m|\,|a_l a_n|\,|a_l a_p|\,|a_l a_q| \end{vmatrix}.$$

Ce déterminant n'est pas nul identiquement, car on en tirerait, par exemple, pour a_k une valeur bien déterminée, par suite inacceptable, puisqu'on suppose qu'il n'y a entre les a aucune relation.

On peut donc trouver ainsi les expressions de P_k^2 et P_{klm}^2 en fonction linéaire des carrés des six fonctions choisies.

De plus, le groupe kl nous montre qu'il est ensuite permis de tirer les mêmes conclusions pour les fonctions P_l, P_{kl} et P_{klr}.

Supposant les calculs faits, si l'on y permute l et m, les fonctions d'où l'on est parti ne changent pas; mais on aura sans calcul les relations qui fournissent P_m, P_{km} et P_{kmr}.

Est-il possible de continuer et d'exprimer les carrés des autres fonctions par des combinaisons linéaires des carrés des fonctions (87) ou, ce qui revient maintenant au même, des carrés de l'ensemble des fonctions

$$(88)\qquad \left\{\begin{matrix} P_{kln} & P_{klp} & P_{klq} & & & P_l & P_{kl} & P_{klr} \\ & & & P_k & P_{klm} & & & \\ P_{kmn} & P_{kmp} & P_{kmq} & & & P_m & P_{km} & P_{kmr} \end{matrix}\right.$$

Si nous examinons nos groupes figurés dans les Tableaux (12), (23), (36) et (52), nous voyons qu'aucun groupe ne contient quatre des fonctions (88). Mais, d'autre part, nous avons, par exemple, les groupes o, n et kn, qui nous permettent d'écrire trois relations linéaires contenant les fonctions

$$\begin{matrix} P_0 & P_n & & P_k & P_l & P_m \\ P_0 & & P_{kn} & P_k & P_{kl} & P_{km} \\ & P_n & P_{kn} & P_k & P_{kln} & P_{kmn} \end{matrix}$$

Les équations (20), (26) et (27) nous fournissent, les deux ~~premières~~ directement, la troisième après une substitution, pour le déterminant des inconnues, l'expression

$$\begin{vmatrix} |a_k a_l a_m a_n| & |a_k a_l a_m| & 0 \\ |a_l a_m a_n|\,|a_k a_p|\,|a_k a_q|\,|a_k a_r| & 0 & |a_l a_m| \\ 0 & |a_l a_m|\,|a_k a_p|\,|a_k a_q|\,|a_k a_r| & |a_n a_k|\,|a_l a_m| \end{vmatrix}$$

c'est-à-dire

$$\begin{gathered} |a_k a_l a_m|\,|a_k a_n|\,|a_l a_m|\,|a_l a_m a_n|\,|a_k a_p|\,|a_k a_q|\,|a_k a_r| \\ -\,|a_k a_l a_m a_n|\,|a_l a_m|^2\,|a_k a_p|\,|a_k a_q|\,|a_k a_r| \end{gathered}$$

qui est identiquement nulle. Il est donc impossible d'exprimer P_0, P_n et P_{kn} comme il a été dit.

Nous ajouterons donc à l'ensemble des fonctions (87) une nouvelle fonction, P_r par exemple; nous la choisirons telle que les substitutions que l'on peut effectuer sans altérer l'ensemble des fonctions (87) ne l'altèrent également pas. Nous pourrions évidemment aussi bien prendre P_0 ou P_{kr}.

Ainsi, nous remplaçons maintenant les fonctions (87) par les suivantes :

$$(89)\qquad \left\{\begin{matrix} P_{kln} & P_{klp} & P_{klq} \\ P_{kmn} & P_{kmp} & P_{kmq} \end{matrix}\right. \quad P_r$$

P_r étant considérée comme connue, le groupe o nous permettra d'exprimer P_0^2 en fonction linéaire des carrés des fonctions jusqu'à présent calculées, par suite des fonctions (89). La même chose a lieu pour P_n. Une substitution circulaire effectuée sur n, p et q conduira au même résultat pour P_p et P_q.

Le groupe k contient alors quatre fonctions P_0, P_k, P_{kl}, P_{km}, dont les carrés sont exprimés en fonction linéaire des carrés des fonctions (89). La même conclusion se présente donc pour P_{kn}, et par suite pour P_{kp} et P_{kq}, et aussi pour P_{kr}. Enfin le groupe P_{kn} fournit aussi P_{knp}, par suite P_{kpq} et P_{kpn}, et également P_{knr}, d'où P_{kpr} et P_{kqr}.

Nous pouvons donc, en partant des fonctions (89), ajouter au tableau (88) des fonctions considérées comme connues,

$$P_r;\quad P_0 \quad P_n \quad P_p \quad P_q \quad P_{kn} \quad P_{kp} \quad P_{kq} \quad P_{kr} \quad P_{knp} \quad P_{kpq} \quad P_{kqn} \quad P_{knr} \quad P_{kpr} \quad P_{kqr}.$$

Jusqu'ici se trouvent déterminées les fonctions à un seul indice et parmi les autres celles dont un des indices est k. Il résulte de là et de la considération des Tableaux des différents groupes que, ou bien toutes les fonctions qui figurent dans un groupe sont connues, c'est ce qui a lieu pour les groupes o, k, kl, km, kn, kp, kq et kr, ou bien trois seulement des fonctions qui figurent dans le groupe se trouvent déterminées.

En effet :

1° La proposition est évidente pour le groupe o;

2° Dans le Tableau (23) nous voyons que, abstraction faite de la première ligne, les seules fonctions calculées jusqu'ici ou prises comme base du calcul qui apparaissent dans une ligne sont P_0, la fonction à un seul indice, et la fonction à deux indices dont l'un est k;

3° Dans le Tableau (36) tout groupe différent des six premiers, pour lesquels tous les éléments sont déterminés contient comme connues jusqu'ici les deux fonctions à un seul indice et la fonction à trois indices dont l'un est k, qu'il renferme, et aucune autre;

4° Dans le Tableau (52) se présentent deux cas:

S'il s'agit d'un groupe contenant k parmi les lettres qui le caractérisent, il renferme la fonction P définie par ces trois indices dont l'un est k, qui par suite est connue, puis les fonctions P à deux indices dont l'un est k et l'autre chacune des deux autres lettres servant avec k à définir le groupe. Ces deux fonctions sont également connues d'après ce qui a été dit. Le groupe n'en contient pas d'autre.

Pour un groupe ne contenant pas k parmi les lettres qui le caractérisent, on peut former avec les quatre lettres qui n'entrent pas dans sa définition quatre ensembles de trois indices; trois d'entre eux contiennent k et correspondent à des fonctions connues.

Tous ces résultats sont évidents sur nos Tableaux.

Il est impossible dès lors de déterminer séparément une des fonctions P non calculées jusqu'ici. Voyons si nous pouvons en trouver deux simultanément. Il faut prendre pour cela deux groupes qui contiennent chacun les deux fonctions en question. Considérons par exemple P_{lm} et P_{npq}; on voit facilement qu'ils se trouvent simultanément dans le groupe klm et lmr. Ceci nous permet d'écrire deux relations linéaires contenant

$$\begin{array}{ccccc} P_{lm} & P_{npq} & P_{klm} & P_{kl} & P_{km} \\ P_{lm} & P_{npq} & P_{knp} & P_{knq} & P_{kpq}, \end{array}$$

relations qui nous sont fournies, la première directement par (42), la deuxième en effectuant dans (50) sur les indices la substitution

$$\begin{vmatrix} k & l & m & r \\ l & m & r & k \end{vmatrix}.$$

Ceci fournit comme déterminant de nos inconnues

$$\begin{vmatrix} |a_l a_m|\,|a_k a_n|\,|a_k a_p|\,|a_k a_q| & |a_k a_l a_m| \\ -|a_n a_p a_q a_k| & \cdot\,|a_n a_p a_q|\,|a_k a_l|\,|a_k a_m| \end{vmatrix},$$

qui se réduit immédiatement à o. Il est impossible d'exprimer P_{lm} et P_{npq} comme il a été dit.

Nous allons dès lors ajouter à l'ensemble des fonctions (89) une nouvelle fonction P_{npq}, par exemple, qui reste encore invariable par les substitutions qui n'altèrent pas l'ensemble des fonctions déjà prises comme base. Nous pourrions évidemment tout aussi bien prendre P_{lm}.

Nous arrivons ainsi à prendre comme base définitive les fonctions suivantes :

$$(90)\qquad \begin{cases} P_{klm} & P_{klp} & P_{klq} \\ P_{kmn} & P_{kmp} & P_{kmq}. \end{cases} \quad P_r \quad P_{npq}$$

Nous connaissons maintenant dans le groupe klm quatre fonctions : nous pouvons donc exprimer P^2_{lm} en fonction linéaire des fonctions (90). Nous en tirons aussi la même conclusion pour P_{pqr} et, par des substitutions pour P_{qnr} et P_{npr}, il est visible que P^2_{lm}, P^2_{pqr}, P^2_{qnr} et P^2_{npr} ne contiendront pas P^2_r dans leurs expressions.

D'autre part, le groupe l contient maintenant quatre fonctions calculées P_0, P_l, P_{kl} et P_{lm} : notre raisonnement s'applique donc aux fonctions du même groupe. Le calcul effectué pour P_{ln} fournit P_{lp} et P_{lq} d'une part, P_{mn}, P_{mp} et P_{mq} de l'autre ; enfin on arrivera encore, au moyen de ce groupe, à la même conclusion pour P_{lr} et par conséquent pour P_{mr}.

De même, le groupe n fournit maintenant P_{np}, et par suite P_{pq} et P_{qr}, et en outre P_{nr}, par conséquent P_{pr} et P_{qr}.

Toutes les fonctions à deux indices sont maintenant épuisées.

Le groupe lm, qui contient P_l, P_m, P_{lm}, P_{klm}, nous fournira P_{lmn} : donc P_{lmp} et P_{lmq} et aussi P_{lmr}. P_r n'entre pas dans la constitution de ces fonctions.

Enfin, pour terminer, le groupe ln fournit d'abord P_{lnp}, d'où l'on conclut P_{lpq} et P_{lqn} ; puis P_{lnr}, d'où se déduisent P_{lpr} et P_{lqr}. Permutant dans ces derniers résultats l et m, on arrive à P_{mnp}, P_{mpq}, P_{mqn}, P_{mnr}, P_{mpr}, P_{mqr}, ce qui complète la série des fonctions P.

Toutes les fonctions P ont donc leurs carrés exprimables linéairement au moyen des carrés de huit d'entre elles.

Nous résumons ce qui précède dans le Tableau suivant, où nous n'écrivons que les indices et non les fonctions. En tête sont indiquées les fonctions de base. Dans la colonne de gauche se trouvent les groupes qui fournissent les fonctions situées sur une même ligne horizontale. Les indices placés entre parenthèses correspondent aux fonctions pour lesquelles aucun calcul n'est utile, les calculs se déduisant de ceux faits précédemment par des substitutions.

$$\left|\begin{array}{ccccc} kln & klp & klq & & \\ & & & r & npq \\ kmn & kmp & kmq & & \end{array}\right|,$$

$$(91)\quad \left\{\begin{array}{l|l} kl \text{ et } km & k \quad klm \quad l \quad (m) \quad klr \quad (kmr) \quad kl \quad km \\ 0 & 0 \quad n \quad (p, q) \\ k & kn \quad (kp, kq) \quad kr \\ kn & knp \quad (kpq, kqn) \quad knr \quad (kpr, kqr) \\ klm & lm \quad npr \quad (pqr, qnr) \\ l & ln \quad (lp, lq) \quad lr \quad (mn, mp, mq, mr) \\ n & np \quad (pq, qn) \quad nr \quad (pr, qr) \\ lm & lmn \quad (lmp, lmq) \quad lmr \\ ln & lnp \quad (lpq, lqn) \quad lnr \quad (lpr, lqr) \quad (mnp, mnq, mqn, mnr, mpr, mqr) \end{array}\right.$$

On n'a en somme que vingt et une formules à établir et non cinquante-six. Les calculs ne présentent plus d'ailleurs aucune difficulté.

On peut évidemment prendre comme base, au lieu des fonctions (90), celles qui s'en déduisent par une substitution faite sur les indices. Le nombre total des substitutions est $7!$. Or, d'après ce qui a été dit, toute substitution faite sur n, p et q laisse (90) fixe, de même si l'on permute l et m. Le nombre de bases différentes, de même nature que celle étudiée précédemment, est donc égal à $\frac{7!}{3!\,2!} = 420$.

28. Les fonctions (90) ou bien celles qui s'en déduisent par des permutations effectuées sur les indices ne sont cependant pas les seules que l'on puisse prendre pour base. Il est visible que nous pourrions

tout aussi bien prendre celles définies par un quelconque des Tableaux suivants :

$$(92)\qquad \begin{vmatrix} kl & kln & klp & \multirow{2}{*}{o} & \multirow{2}{*}{qr} \\ km & kmn & kmp & & \end{vmatrix}$$

$$(93)\qquad \begin{vmatrix} l & kln & klp & & \\ & & & o & qr \\ m & kmn & kmp & & \end{vmatrix}$$

$$(94)\qquad \begin{vmatrix} l & kl & kln & & \\ & & & o & pqr \\ m & km & kmp & & \end{vmatrix}$$

$$(95)\qquad \begin{vmatrix} ln & lp & lq & & \\ & & & r & npq \\ mn & mp & mq & & \end{vmatrix}$$

$$(96)\qquad \begin{vmatrix} l & ln & lp & & \\ & & & o & klm \\ m & mn & mp & & \end{vmatrix}$$

Les trois premiers ont pour point de départ, comme celui qui a été étudié précédemment, les groupes kl et km; les deux autres résultent de la considération des deux groupes l et m. Il est facile pour chacun d'eux de former un Tableau analogue au Tableau (91) et montrant la marche des calculs à effectuer lorsque les fonctions qu'il représente sont prises comme fonctions de base.

Relations algébriques entre les fonctions P prises comme fonctions de base.

29. Entre les huit fonctions (90) des trois variables x_1, x_2 et x_3 existent des relations algébriques que nous nous proposons maintenant de rechercher. Elles nous seront fournies par l'emploi des relations entre les produits des fonctions P que nous avons trouvées, d'une part, et, d'autre part, en ayant recours aux relations déduites comme il a été dit au n° 27.

I. Considérons tout d'abord la relation suivante :

$$P_l P_{km} - P_m P_{kl} = |a_l a_m| P_0 P_{klm},$$

qui devient, en élevant les deux membres au carré,

$$\mathrm{P}_l^2\mathrm{P}_{km}^2+\mathrm{P}_m^2\mathrm{P}_{kl}^2-2\mathrm{P}_l\mathrm{P}_m\mathrm{P}_{kl}\mathrm{P}_{km}=|a_l a_m|^2\mathrm{P}_0^2\mathrm{P}_{klm}^2,$$

ou bien, si nous avons recours aux relations (83) et (84),

$$\begin{aligned}
&|a_n a_p a_q|^2|a_r a_k|(\mathrm{P}_l^2\mathrm{P}_{km}^2+\mathrm{P}_m^2\mathrm{P}_{kl}^2)\\
&\quad-2(|a_k a_n||a_p a_q|\mathrm{P}_{kln}\mathrm{P}_{kmn}+|a_k a_p||a_q a_n|\mathrm{P}_{klp}\mathrm{P}_{kmp}+|a_k a_q||a_n a_p|\mathrm{P}_{klq}\mathrm{P}_{kmq})\\
&\qquad\times(|a_p a_q|\mathrm{P}_{kln}\mathrm{P}_{kmn}+|a_q a_n|\mathrm{P}_{klp}\mathrm{P}_{kmp}+|a_n a_p|\mathrm{P}_{klq}\mathrm{P}_{kmq})\\
&\quad=|a_n a_p a_q|^2|a_r a_k||a_l a_m|^2\mathrm{P}_{klm}^2\mathrm{P}_0^2.
\end{aligned}$$

Or, d'après l'équation (10),

$$|a_k a_l a_m a_r|\mathrm{P}_0^2=|a_l a_m a_r|\mathrm{P}_k^2-|a_m a_r a_k|\mathrm{P}_l^2+|a_r a_k a_l|\mathrm{P}_m^2-|a_k a_l a_m|\mathrm{P}_r^2;$$

en sorte que l'on a

$$\left\{\begin{aligned}
&|a_n a_p a_q|^2|a_r a_k||a_k a_l a_m||a_l a_m|^2\mathrm{P}_{klm}^2\mathrm{P}_r^2\\
&\quad=|a_n a_p a_q|^2|a_r a_k||a_l a_m|^2(|a_l a_m a_r|\mathrm{P}_k^2-|a_m a_r a_k|\mathrm{P}_l^2+|a_r a_k a_l|\mathrm{P}_m^2)\mathrm{P}_{klm}^2\\
&\qquad-|a_k a_l a_m a_r|[|a_n a_p a_q|^2|a_r a_k|(\mathrm{P}_l^2\mathrm{P}_{km}^2+\mathrm{P}_m^2\mathrm{P}_{kl}^2)\\
&\qquad\qquad-2(|a_k a_n||a_p a_q|\mathrm{P}_{kln}^2\mathrm{P}_{kmn}^2+|a_k a_p||a_q a_n|\mathrm{P}_{klp}^2\mathrm{P}_{kmp}^2\\
&\qquad\qquad\qquad+|a_k a_q||a_n a_p|\mathrm{P}_{klq}\mathrm{P}_{kmq})\\
&\qquad\qquad\times(|a_p a_q|\mathrm{P}_{kln}\mathrm{P}_{kmn}+|a_q a_n|\mathrm{P}_{klp}\mathrm{P}_{kmp}+|a_n a_p|\mathrm{P}_{klq}\mathrm{P}_{kmq})].
\end{aligned}\right. \tag*{7)}$$

Nous voyons donc, en tenant compte de ce qui a été dit dans le n° **27**, que P_r^2 se présente comme quotient de deux fonctions rationnelles et entières des fonctions (87), le numérateur étant du quatrième degré et le dénominateur du second.

II. De même, si nous partons de la relation, du même groupe que celle qui vient d'être employée,

$$|a_k a_m|\mathrm{P}_l\mathrm{P}_{km}-|a_k a_l|\mathrm{P}_m\mathrm{P}_{kl}=|a_l a_m|\mathrm{P}_k\mathrm{P}_{lm},$$

nous obtenons tout d'abord

$$|a_k a_m|^2\mathrm{P}_l^2\mathrm{P}_{km}^2+|a_k a_l|^2\mathrm{P}_m^2\mathrm{P}_{kl}^2-2|a_k a_m||a_k a_l|\mathrm{P}_l\mathrm{P}_m\mathrm{P}_{kl}\mathrm{P}_{km}=|a_l a_m|^2\mathrm{P}_k^2\mathrm{P}_{lm}^2.$$

Or l'équation (42) nous donne

$$\begin{aligned}
&|a_l a_m||a_k a_n||a_k a_p||a_k a_q|\mathrm{P}_{lm}^2\\
&\quad=|a_k a_l a_m|(\mathrm{P}_{klm}^2-\mathrm{P}_{npq}^2)-|a_m a_k||a_l a_n||a_l a_p||a_l a_q|\mathrm{P}_{km}^2\\
&\qquad\qquad-|a_k a_l||a_m a_n||a_m a_p||a_m a_q|\mathrm{P}_{kl}^2,
\end{aligned}$$

et, en tenant compte une seconde fois des relations (83) et (84), on trouve

$$(98)\quad \left\{\begin{aligned}
&|a_n a_p a_q|^2 |a_r a_k| |a_l a_m|^2 |a_k a_l a_m| P_k^2 P_{npq}^2 \\
&\quad = |a_n a_p a_q|^2 |a_r a_k| |a_l a_m|^2 (|a_k a_l a_m| P_{klm}^2 - |a_m a_k| |a_l a_n| |a_l a_p| |a_l a_q| P_{km}^2 \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad - |a_k a_l| |a_m a_n| |a_m a_p| |a_m a_q| P_{kl}^2) P_k^2 \\
&\quad - |a_k a_n| |a_k a_p| |a_k a_q| [|a_n a_p a_q|^2 |a_r a_k| (|a_k a_m|^2 P_l^2 P_{km}^2 + |a_k a_l|^2 P_m^2 P_{kl}^2) \\
&\qquad\qquad - 2 |a_k a_m| |a_k a_l| (|a_k a_n| |a_p a_q| P_{kln} P_{kmn} + |a_k a_p| |a_q a_n| P_{klp} P_{kmp} \\
&\qquad\qquad\qquad + |a_k a_q| |a_q a_n| P_{klq} P_{kmq}) \\
&\qquad\qquad \times (|a_p a_q| P_{kln} P_{kmn} + |a_q a_n| P_{klp} P_{kmp} + |a_n a_p| P_{klq} P_{kmq})].
\end{aligned}\right.$$

Nous constatons dès lors que, comme P_r^2, P_{npq}^2 se présente comme quotient de deux fonctions rationnelles et entières des six fonctions (87), le numérateur étant du quatrième degré et le dénominateur du second.

III. La relation (83) nous donne, en élevant les deux membres au carré,

$$(99)\quad \left\{\begin{aligned}
&(|a_p a_q| P_{kln} P_{kmn} + |a_q a_n| P_{klp} P_{kmp} + |a_n a_p| P_{klq} P_{kmq})^2 \\
&\quad = |a_r a_k|^2 |a_n a_p a_q|^2 P_l^2 P_m^2,
\end{aligned}\right.$$

qui, en substituant à P_l^2 et P_m^2 leurs expressions déduites comme il a été dit, nous fournit entre les six fonctions (87) une relation du quatrième degré. Cette relation contient les quatrièmes puissances des six fonctions considérées, les produits de leurs carrés et les produits de la forme

$$(100)\qquad P_{kl\nu} P_{kl\pi} P_{km\nu} P_{km\pi},$$

où ν et π sont deux quelconques des lettres n, p et q.

IV. La relation (84) nous conduit de même à la relation

$$(101)\quad \left\{\begin{aligned}
&(|a_k a_n| |a_p a_q| P_{kln} P_{kmn} + |a_k a_p| |a_q a_n| P_{klp} P_{kmp} + |a_k a_q| |a_n a_p| P_{klq} P_{kmq})^2 \\
&\quad = |a_n a_p a_q|^2 P_{kl}^2 P_{km}^2,
\end{aligned}\right.$$

qui devient également du quatrième degré entre nos six fonctions après la substitution à P_{kl}^2 et P_{km}^2 de leurs expressions. Relativement à ces fonctions, cette dernière relation est composée comme la précédente.

Elle est différente, comme le montre l'examen des produits de la forme (100), par cela même que l'on suppose les quantités a toutes différentes.

On aurait pu tout aussi bien partir de l'équation (85); on est ainsi conduit à une relation du quatrième degré qui est une combinaison linéaire des deux précédentes.

Nous obtiendrons effectivement les équations de degré supérieur qui relient nos fonctions de base en y substituant les expressions suivantes fournies par les équations (29) à (35) :

Posons

$$\delta = |a_r a_l|\,|a_l a_k|\,|a_m a_n|\,|a_m a_p|\,|a_m a_q| - |a_r a_m|\,|a_m a_k|\,|a_l a_n|\,|a_l a_p|\,|a_l a_q|,$$

$$\begin{aligned}\delta|a_n a_p a_q|\mathrm{P}_k^2 = {} & |a_l a_k|(-|a_n a_k|\,|a_p a_q a_m|\mathrm{P}_{kln}^2 + |a_p a_k|\,|a_q a_m a_n|\mathrm{P}_{klp}^2 - |a_q a_k|\,|a_m a_n a_p|\mathrm{P}_{klq}^2) \\ & - |a_m a_k|(-|a_n a_k|\,|a_p a_q a_l|\mathrm{P}_{kmn}^2 + |a_p a_k|\,|a_q a_l a_n|\mathrm{P}_{kmp}^2 - |a_q a_k|\,|a_l a_n a_p|\mathrm{P}_{kmq}^2),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta|a_n a_p a_q|\mathrm{P}_{klm}^2 & \\ = -|a_r a_m|\,|a_l a_n|\,|a_l a_p|\,|a_l a_q| & (-|a_n a_k|\,|a_p a_q a_m|\mathrm{P}_{kln}^2 + |a_p a_k|\,|a_q a_m a_n|\mathrm{P}_{klp}^2 - |a_q a_k|\,|a_m a_n a_p|\mathrm{P}_{klq}^2) \\ + |a_r a_l|\,|a_m a_n|\,|a_m a_p|\,|a_m a_q| & (-|a_n a_k|\,|a_p a_q a_l|\mathrm{P}_{kmn}^2 + |a_p a_k|\,|a_q a_l a_n|\mathrm{P}_{kmp}^2 - |a_q a_k|\,|a_l a_n a_p|\mathrm{P}_{kmq}^2),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta|a_n a_p a_q|\,|a_r a_k|\,|a_m a_k|\mathrm{P}_l^2 = {} & \delta|a_n a_p a_q|\mathrm{P}_k^2 . |a_r a_l|\,|a_m a_l| \\ & + \delta|a_l a_k|(|a_p a_q|\mathrm{P}_{kln}^2 + |a_q a_n|\mathrm{P}_{klp}^2 + |a_n a_p|\mathrm{P}_{klq}^2),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta|a_n a_p a_q|\mathrm{P}_{kl}^2 = {} & \delta|a_n a_p a_q|\mathrm{P}_k^2 . |a_r a_l|\,|a_m a_l| \\ & + \delta(|a_n a_k|\,|a_p a_q|\mathrm{P}_{kln}^2 + |a_p a_k|\,|a_q a_n|\mathrm{P}_{klp}^2 + |a_q a_k|\,|a_n a_p|{}_{klq}^2),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta|a_r a_k|\,|a_n a_p a_q|\mathrm{P}_{klr}^2 = {} & \delta|a_n a_p a_q|\mathrm{P}_k^2 . |a_r a_l|\,|a_r a_n|\,|a_r a_p|\,|a_r a_q| \\ & + \delta(|a_n a_k|\,|a_p a_q a_r|\mathrm{P}_{kln}^2 - |a_p a_k|\,|a_q a_r a_n|\mathrm{P}_{klp}^2 + |a_q a_k|\,|a_r a_n a_p|\mathrm{P}_{klq}^2).\end{aligned}$$

On obtient P_m^2, P_{km}^2 et P_{kmr}^2 en permutant l et m et remarquant qu'alors δ change de signe.

En résumé, nous voyons que, choisissant d'une façon convenable huit fonctions P, les carrés des cinquante-six autres s'expriment linéairement en fonction de leurs carrés. De ces huit fonctions, deux sont telles que leurs carrés s'expriment rationnellement avec les six autres. Entre ces six dernières existent deux relations homogènes du quatrième degré en tout point analogues à la relation de Göpel. Tenant compte, en outre, de ce que $\mathrm{P}_0 = 1$, on a ainsi

$$56 + 2 + 2 + 1 = 64 - 3,$$

relations différentes entre les 64 fonctions de trois variables d'où nous sommes partis.

Si, au lieu de choisir comme nous l'avons fait, les fonctions (92), nous étions partis des fonctions (95) ou (96), il est visible que nous aurions pu, avec la relation (65), et en exprimant de plus P_l^2 et P_m^2 en fonction linéaire des carrés de P_{ln}, P_{lp}, P_{lq}; P_{mn}, P_{mp}, P_{mq}, obtenir entre les six fonctions une relation homogène du quatrième degré. C'est cette relation qu'il est facile de généraliser et d'étendre au cas d'un genre quelconque, que M. Brioschi a donné dans les *Annali di Matematica pura ed applicata,* 1881, dans toute sa généralité. Mais, déjà dans le cas présent, cette relation n'est pas la seule qui existe entre les 6 fonctions de trois variables indiquées; on en obtient une autre en partant de (67).

CONCLUSION.

La dépendance algébrique des 64 fonctions hyperelliptiques, et par suite des 64 fonctions Θ se trouve par ce qui précède suffisamment établie.

La marche que nous avons suivie est-elle applicable dans le cas général? La complication des calculs permet à peine de le supposer. Cependant les conclusions connues pour le genre 2 et maintenant pour le genre 3 permettaient, par analogie, de supposer pour le genre n des propositions qu'il sera peut-être facile de vérifier par une méthode plus simple que celle exposée ici.

Désignons par ρ le genre, et posons

$$R(x) = \prod_{k=k_1}^{k_{2\rho+1}} |a_k x|,$$

$$\varphi(x) = \prod_{i=1}^{\rho} |x x_i|,$$

les quantités a_k étant toutes différentes et en nombre égal à $2\rho + 1$;

nous considérons dès lors les fonctions P définies par les formules suivantes :

$$P_0 = 1,$$

$$P_{k_1} = \sqrt{\prod_{i=1}^{\rho} |a_{k_1} x_i|},$$

$$P_{k_1 k_2 \ldots k_\alpha} = P_{k_1} P_{k_2} \ldots P_{k_\alpha} \sum_{i=1}^{\rho} \frac{\sqrt{R(x_i)}}{\prod^{\alpha} |a_k x_i| \varphi'(x_i)}; \quad \alpha = 2, 3, \ldots, \rho.$$

Les lettres k entrant comme éléments dans l'indice d'une fonction P sont toutes différentes; si l'on prend toutes les combinaisons différentes de ces lettres, on obtient en tout 4^ρ fonctions de ρ variables. Avec les indices des fonctions P, on peut former 4^ρ groupes de $2(\rho + 1)$ indices, dont les propriétés, relativement aux permutations que l'on peut effectuer sur les lettres k, sont absolument identiques à celles des groupes (22), (23), (36) et (52).

Chaque groupe aura comme caractéristique l'indice d'une fonction P et sera constitué comme il suit :

Partons de l'indice $k_1, k_2, \ldots, k_\alpha$; on lui ajoutera l'ensemble des indices formés par les combinaisons $\alpha - 1$ à $\alpha - 1$ des α lettres k, puis l'ensemble des indices formés par des combinaisons $\alpha + 1$ à $\alpha + 1$ de toutes les lettres k, cet indice étant assujetti à contenir toutes les lettres k qui apparaissent dans la caractéristique du groupe. On a ainsi un nombre d'indices égal à

$$1 + \alpha + (2\rho + 1 - \alpha) = 2(\rho + 1).$$

Dans le groupe o n'existent pas d'indices de la première espèce donnés dans la définition. Si la caractéristique est formée d'une seule lettre, on prendra o comme indice de cette même espèce. Enfin, si $\alpha = \rho$, aux combinaisons $\rho + 1$ à $\rho + 1$ ne correspondent pas de fonction P; on remplace alors ces combinaisons $\rho + 1$ à $\rho + 1$ par les combinaisons ρ à ρ formées par les lettres qui ne sont pas contenues dans celles-là. En considérant ainsi comme équivalentes deux combinaisons qui, à elles deux, contiennent toutes les lettres k et chacune une seule fois, on peut partir d'une combinaison quelconque de ces lettres pour former un groupe, que α soit plus petit, égal ou supérieur à ρ.

On sait (Weierstrass, *loc. cit.*) que les groupes o et k sont tels qu'une relation linéaire existe entre les carrés de $\rho + 2$ fonctions P dont les indices appartiennent à un même groupe. Il est très probable que la même propriété s'étend aux autres groupes.

Quelles sont, dans le cas général, les relations entre les produits deux à deux? Quel est le minimum du nombre des fonctions telles qu'avec leurs carrés on puisse exprimer linéairement les carrés de toutes les autres? Quelles sont enfin les relations algébriques qui existent entre les fonctions prises ainsi comme base? Ce sont là des questions sur lesquelles nous nous proposons de revenir, les résultats de ce travail nous servant de guides.

Même en ce qui concerne les fonctions hyperelliptiques de genre 3, nous ne prétendons pas avoir tout dit dans les pages qui précèdent. Bien des questions se présentent que nous n'avons même pas abordées. On sait, par exemple, combien a été utile, dans l'étude des fonctions hyperelliptiques de genre 2, la considération de la surface de Kummer (*voir* Rohn, *Mathematische Annalen*). Dans le cas présent, posons

$$\begin{aligned}&P_{kln} : P_{klp} : P_{klq} : P_{kmn} : P_{kmp} : P_{kmq}\\ &= y_1 : y_2 : y_3 : y_4 : y_5 : y_6 ;\end{aligned}$$

les relations (99) et (101) nous donnent, les calculs une fois effectués, deux relations homogènes entre les quantités y

$$F_1(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6) = 0, \tag{99'}$$
$$F_2(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6) = 0. \tag{101'}$$

Nous pouvons donc dire que, dans l'espace linéaire à cinq dimensions obtenu en faisant varier d'une façon indépendante chacune des variables y de $-\infty$ à $+\infty$, nous avons un espace gauche à trois dimensions, espace qui trouve une représentation simple dans l'emploi des fonctions P, ou bien qui peut définir leur mode de liaison. Bien que l'emploi des espaces supérieurs ne soit pas encore jusqu'ici aussi fréquent que celui des espaces ordinaires, il est permis de supposer qu'il sera en maintes occasions d'un usage fécond, et l'on peut croire *a* *priori* qu'il ne sera pas inutile d'y avoir recours. Aussi nous nous proposons, dans un prochain travail, d'étudier d'une façon spéciale l'espace gauche que nous venons de signaler; il sera intéressant de voir quelles en sont les singularités, d'examiner le mode de définition géométrique de cet espace remarquable, d'essayer de commencer pour lui ce qui a été fait déjà pour la surface de Kummer.

Signalons, en terminant, une autre question bien digne d'intérêt : quel rôle peuvent jouer les relations trouvées ici entre les fonctions Θ dans la transformation des fonctions hyperelliptiques de genre 2?