ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

DÉSIRÉ ANDRÉ

Troisième mémoire sur la sommation des séries

Annales scientifiques de l'É.N.S. 2e série, tome 12 (1883), p. 191-198
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1883_2_12__191_0>

TROISIÈME MÉMOIRE

SUR

LA SOMMATION DES SÉRIES,

PAR M. DÉSIRÉ ANDRÉ,

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

INTRODUCTION.

1. Le présent Mémoire a pour objet, comme les deux précédents, de faire connaître la somme de toutes les séries convergentes dont le terme général affecte une forme donnée.

Nous ne rappellerons point la forme examinée par nous dans le premier de nos Mémoires ([1]), ni celle que nous avons considérée dans le second ([2]); nous dirons seulement que, dans le Mémoire actuel, la forme attribuée par nous au terme général U_n est celle que définit l'égalité

$$U_n = \frac{p(p+1)(p+2)\dots(p+n-1)}{1.2.3\dots n} u_n x^n,$$

dans laquelle nous désignons par n un entier quelconque, non négatif; par p un nombre quelconque, positif ou négatif, mais non pas entier; et par u_n le terme général d'une série récurrente proprement dite quelconque.

2. Ce Mémoire se compose de quatre Parties.

Dans la première, nous considérons l'expression de u_n et nous la modifions notablement, afin de l'amener à une forme mieux appropriée à notre objet.

([1]) *Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, juillet 1879.

([2]) *Ibid.*, juin 1880.

Dans la seconde, de la forme obtenue pour u_n nous déduisons l'expression générale de la somme des séries considérées, c'est-à-dire une formule résolvant complètement le problème que nous nous sommes proposé.

Dans la troisième, nous faisons remarquer que cette formule non seulement permet de sommer toutes les séries considérées, mais encore fournit indirectement la somme de plusieurs autres espèces de séries.

Dans la quatrième enfin, nous appliquons notre formule générale à la sommation d'une série particulière donnée.

3. La formule générale que nous avons obtenue nous semble nouvelle. Nous l'avons résumée dans une courte Note que notre illustre maître, M. Hermite, a bien voulu présenter à l'Académie des Sciences [1]. Cette formule nous montre immédiatement que la somme des séries considérées s'exprime toujours, sous forme finie, à l'aide de fonctions algébriques rationnelles et d'irrationnelles de la forme $(1 - ax)^p$.

I. Modification de la forme de u_n.

4. Soient a, b, c, ... les racines de l'équation génératrice de la série récurrente proprement dite dont u_n est le terme général, et α, β, γ, ... leurs degrés respectifs de multiplicité. D'après les travaux de Moivre, d'Euler et de Lagrange, on a

$$u_n = \sum \xi_a(n)\, a^n,$$

le signe Σ s'étendant à toutes les racines de l'équation génératrice et $\xi_a(n)$ représentant un polynôme entier en n du degré $\alpha - 1$.

C'est cette expression de u_n que nous allons modifier, afin de lui donner une forme mieux appropriée à l'objet que nous avons en vue.

5. Pour y parvenir, nous posons

$$\xi_a(n) = A_0 + A_1 n + A_2 n^2 + \ldots + A_{\alpha-1} n^{\alpha-1},$$

(1) Dans la séance du 7 avril 1879.

et nous nous rappelons l'identité suivante :

$$n^t = \frac{\Delta^1 0^t}{1!} n + \frac{\Delta^2 0^t}{2!} n(n-1) + \frac{\Delta^3 0^t}{3!} n(n-1)(n-2) + \ldots + \frac{\Delta^t 0^t}{t!} n(n-1)\ldots(n-t+1),$$

qui a été publiée par J.-F.-W. Herschel (¹) et probablement découverte par lui.

Donnant, dans cette identité, à l'exposant t, les valeurs $1, 2, 3, \ldots, \alpha - 1$, nous trouvons pour $n, n^2, n^3, \ldots, n^{\alpha-1}$, des expressions nouvelles; et, portant ces expressions dans l'égalité qui donne $\xi_a(n)$, nous la transformons en celle-ci :

$$\xi_a(n) = P_{a,0} + P_{a,1} n + P_{a,2} n(n-1) + P_{a,3} n(n-1)(n-2) + \ldots + P_{a,\alpha-1} n(n-1)\ldots(n-\alpha+2),$$

dont les coefficients sont donnés par la formule

$$r!\,P_{a,r} = A_r \Delta^r 0^r + A_{r+1} \Delta^r 0^{r+1} + A_{r+2} \Delta^r 0^{r+2} + \ldots + A_{\alpha-1} \Delta^r 0^{\alpha-1},$$

laquelle est générale et s'étend même au coefficient $P_{a,0}$, si l'on convient de regarder $\Delta^0 0^s$ comme égal à l'unité lorsque s est nul, et comme nul lorsque s est un entier quelconque supérieur à zéro.

6. La seconde égalité qui donne $\xi(n)$ peut s'écrire encore

$$\xi_a(n) = n!\left[\frac{P_{a,0}}{n!} + \frac{P_{a,1}}{(n-1)!} + \frac{P_{a,2}}{(n-2)!} + \ldots + \frac{P_{a,\alpha-1}}{(n-\alpha+1)!}\right]$$

ou bien, en abrégé,

$$\xi_a(n) = n!\sum_{h}^{\alpha-1}{}_{0}\,\frac{P_{a,h}}{(n-h)!}.$$

Par suite, nous aurons

$$u_n = n!\sum\sum_{h}^{\alpha-1}{}_{0}\,\frac{P_{a,h}}{(n-h)!}\,a^n,$$

en étendant le Σ dont les limites ne sont pas marquées à toutes les racines de l'équation génératrice.

(¹) *Calculus of finite differences*, Cambridge, 1820.

Telle est la forme de u_n qui nous paraît la mieux appropriée à la sommation que nous nous proposons d'effectuer.

II. — Sommation des séries considérées.

7. Prenons, dans le terme général U_n de la série que nous voulons sommer, la partie qui correspond à la seule racine a de l'équation génératrice. Cette partie, d'après ce qui précède, peut s'écrire

$$p(p+1)(p+2)\ldots(p+n-1)\sum_{0}^{\alpha-1}{}_h \frac{P_{a,h}}{(n-h)!}\, a^n x^n,$$

et, dans cette partie, le terme correspondant à une valeur déterminée de h est donné par l'expression

$$p(p+1)(p+2)\ldots(p+h-1)\,\frac{(p+h)(p+h+1)\ldots(p+n-1)}{1.2\ldots(n-h)}\,P_{a,h}\,a^n x^n.$$

8. Or ce dernier terme peut, à son tour, s'écrire

$$\begin{aligned}&[p(p+1)(p+2)\ldots(p+h-1)\,P_{a,h}\,a^h x^h]\\ &\quad\times\left[\frac{(p+h)(p+h+1)(p+h+2)\ldots(p+n-1)}{1.2.3\ldots(n-h)}\,a^{n-h}x^{n-h}\right],\end{aligned}$$

et, sous cette forme, on voit qu'il est le produit de deux facteurs, dont le premier ne dépend pas de n, mais dont le second en dépend.

On peut remarquer en passant que, pour h égal à zéro, le premier facteur se réduit au coefficient $P_{a,0}$.

Quant au second facteur, quel que soit h, il peut être regardé comme le terme général de la série

$$1+\frac{p+h}{1}\,ax+\frac{(p+h)(p+h+1)}{1.2}\,a^2x^2+\ldots,$$

dont la somme n'est autre chose que l'irrationnelle

$$(1-ax)^{-p-h}.$$

Par suite, dans la série dont le terme général est U_n, les parties correspondant à la fois à la racine a et à une valeur déterminée de h

ont une somme égale à l'expression

$$p(p+1)(p+2)\ldots(p+h-1)\,P_{a,h}a^h x^h(1-ax)^{-p-h},$$

expression que nous abrégerons et mettrons sous la forme

$$Q_{a,h}a^h x^h(1-ax)^{-p-h},$$

en posant

$$p(p+1)(p+2)\ldots(p+h-1)\,P_{a,h}=Q_{a,h}$$

et nous rappelant que

$$Q_{a,0}=P_{a,0}.$$

9. Il suit de là que, dans la même série U_n, les termes correspondant à la racine a ont pour somme l'expression

$$\sum_0^{\alpha-1}{}_h Q_{a,h}a^h x^h(1-ax)^{-p-h}.$$

Donc, si nous appelons S la somme de la série U_n et que, dans l'égalité ci-dessous, nous étendions le premier Σ à gauche à toutes les racines de l'équation génératrice, nous avons identiquement

$$S=\sum\sum_0^{\alpha-1}{}_h Q_{a,h}a^h x^h(1-ax)^{-p-h}.$$

Cette formule est celle que nous cherchions : elle résout complètement le problème que nous nous étions proposé et nous montre de plus immédiatement que les séries considérées sont telles que leur somme s'exprime toujours, sous forme finie, à l'aide de fonctions algébriques rationnelles et d'irrationnelles de la forme $(1-ax)^p$.

III. — Extension des résultats précédents.

10. Beaucoup de séries, dont le terme général n'est pas tout à fait de la forme que nous avons indiquée, se peuvent néanmoins sommer à l'aide de la formule que nous venons d'obtenir. Telles sont toutes les séries dans lesquelles le terme général U_n est donné par l'égalité

$$U_n = \frac{p(p+1)\ldots(p+n-k)}{n\,!} u_n x^n,$$

où p, n et u_n ont leurs significations précédentes, et où k est un entier quelconque, positif ou négatif.

Si l'on pose, en effet,

$$p' = p + 1 - k,$$

cette expression de U_n peut s'écrire

$$U_n = \frac{V_n}{p'(p'+1)\ldots(p'+k-2)},$$

V_n étant donné par l'égalité

$$V_n = \frac{p'(p'+1)(p'+2)\ldots(p'+n-1)}{1.2.3\ldots n} u_n x^n.$$

Or, U_n ne diffère de V_n que par un dénominateur constant, et V_n est absolument de la forme type donnée au commencement de ce Mémoire.

11. Nous ferons observer que l'on obtiendrait encore des séries que l'on pourrait sommer, si l'on remplaçait, dans la forme type, le dénominateur $1.2.3\ldots n$ par ce dénominateur même, multiplié ou divisé par un facteur constant; si l'on remplaçait, par exemple, la factorielle $1.2.3\ldots n$ par le produit $k(k+1)(k+2)\ldots(n-1)n$, dans lequel la lettre k désigne un entier positif, assujetti à la seule condition d'être inférieur ou au plus égal à la plus petite valeur de n.

Nous ferons aussi observer que, si l'on a

$$U_n = \frac{p(p-1)(p-2)\ldots(p-n+1)}{1.2.3\;\ldots\;n} u_n x^n,$$

on se trouvera tout à fait dans le cas où nous nous sommes placé en commençant. Il est visible en effet que, si l'on remplaçait p par $-p$ et qu'on changeât en même temps le signe soit de x, soit de a, on rentrerait immédiatement dans la forme type dont l'étude fait l'objet du présent Mémoire.

12. Enfin nous rappellerons que, à l'aide des racines imaginaires de l'unité, on peut tirer de la formule générale donnée par nous (9) les sommes de toutes les séries qu'on obtient en prenant, dans la série considérée, les termes de deux en deux, de trois en trois, de quatre en quatre, etc.

En ajoutant ces nouvelles séries les unes aux autres, après les avoir respectivement multipliées par des facteurs quelconques, on obtiendrait d'autres séries, plus compliquées, dont l'origine même ferait connaître la somme.

IV. — Application.

13. Vu l'extrême simplicité de la méthode que nous avons suivie et du résultat que nous avons obtenu, nous ne ferons de notre formule générale (9) qu'une application unique, et ne considérerons que la seule série

$$\frac{1}{3}\,1^3x+\frac{1.4}{3.6}\,2^3x^2+\frac{1.4.7}{3.6.9}\,3^3x^3+\frac{1.4.7.10}{3.6.9.12}\,4^3x^4+\ldots.$$

14. Le terme général U_n de cette série est donné par l'égalité

$$U_n=\frac{1(1+3)(1+6)\ldots(1+3n-3)}{3.6.9\ldots3n}\,n^3x^n,$$

laquelle peut s'écrire

$$U_n=\frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}+1)(\frac{1}{3}+2)\ldots(\frac{1}{3}+n-1)}{1.2.3\ \ldots\ n}\,n^3x^n.$$

Cette dernière forme de U_n est bien celle que nous avons considérée, car n^3 est le terme général d'une série récurrente proprement dite, dont l'équation génératrice est

$$(z-1)^4=0.$$

15. Cette équation génératrice n'admettant que l'unité pour racine, la racine a est égale à 1, le degré de multiplicité α est égal à 4, et l'on a

$$S=\sum_0^3{}_h\,Q_{1,h}\,x^h(1-x)^{-\frac{1}{3}-h}.$$

16. Remplaçons les quantités Q par leurs expressions (8) en fonction des quantités P, puis les quantités P par leurs expressions (5) en fonction des coefficients A, dont les valeurs sont données, dans le cas particulier qui nous occupe, par les égalités

$$A_0 = A_1 = A_2 = 0,$$
$$A_3 = 1,$$

nous trouvons, après avoir effectué tous les calculs,

$$S = \frac{x(9 + 18x + x^2)}{27(1 - x^3)\sqrt[3]{1 - x}}.$$

Telle est la somme de la série particulière considérée.