Annales scientifiques de l'É.N.S.

Louis Raffy

Recherches algébriques sur les intégrales abéliennes

Annales scientifiques de l'É.N.S. 2e série, tome 12 (1883), p. 105-190

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1883_2_12__105_0>

RECHERCHES ALGÉBRIQUES

SUR

LES INTÉGRALES ABÉLIENNES,

PAR M. L. RAFFY,

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

INTRODUCTION.

Les équations algébriques jouent dans l'Analyse un rôle considérable. On peut dire que toute la théorie des transcendantes elliptiques et abéliennes repose sur l'étude des fonctions algébriques. Il faut résoudre des équations algébriques pour intégrer les fractions rationnelles, pour ramener une intégrale elliptique ou abélienne aux intégrales canoniques, pour obtenir les intégrales de première espèce, pour reconnaître si la fonction inverse d'une intégrale abélienne est uniforme ou si elle a plus d'une valeur en chaque point.

On sait, depuis Abel, qu'il est en général impossible de résoudre algébriquement les équations d'un degré supérieur au quatrième. Cette impossibilité n'empêche pas l'Analyse d'avancer, mais elle rend singulièrement difficiles certaines de ses applications. De là l'intérêt tout particulier des problèmes qui semblent dépendre de la résolution des équations, et qu'on peut traiter sans effectuer cette résolution. Notre objet est de traiter quelques problèmes de cette catégorie qu'on rencontre dans la théorie des intégrales abéliennes, soit qu'on étudie certains cas de réduction de ces intégrales, soit qu'on ait à déterminer le genre d'une courbe algébrique donnée.

Dans un premier Chapitre, j'établis des principes dont je fais usage dans tout le cours de ce travail. J'en déduis, comme conséquence immédiate, une méthode pour reconnaître, sans résoudre aucune équation, si une intégrale abélienne donnée est ou non de première espèce.

Au second Chapitre, je considère les fonctions liées à leur dérivée par une équation algébrique, et qui n'ont en chaque point qu'un nombre limité de valeurs. Le théorème fondamental concernant ces fonctions a été donné par MM. Briot et Bouquet dans leurs importantes *Recherches sur la théorie des fonctions;* il s'énonce ainsi :

Si l'intégrale d'une équation différentielle algébrique $F\left(u, \frac{du}{dz}\right) = 0$ *n'a en chaque point qu'un nombre limité de valeurs, cette intégrale est racine d'une équation algébrique ayant pour coefficients des fonctions entières, soit de la variable* z, *soit de l'exponentielle* $e^{\rho z}$, *soit de la fonction doublement périodique* $\operatorname{sn}(\rho z)$.

Je me suis proposé de reconnaître à laquelle de ces trois classes appartient l'intégrale, en supposant qu'elle n'ait en chaque point qu'un nombre limité de valeurs, ou, comme je le dis plus brièvement, qu'elle soit *bien déterminée* (¹). Je déduis du critérium trouvé des caractères auxquels on reconnaît que l'intégrale ne peut pas être bien déterminée. Je passe ensuite au cas où l'intégrale, supposée bien déterminée, serait algébrique, et je donne une détermination nouvelle du degré de l'équation intégrale par rapport à la fonction qu'elle définit. Enfin je traite le cas où l'équation à intégrer représente une courbe unicursale. Les méthodes suivies dans ces applications n'exigent la résolution d'aucune équation irréductible.

Le *genre* est un des nombres qui caractérisent le mieux le mode d'existence des fonctions algébriques. On sait quelle place la considération du genre tient dans l'Analyse et dans la Géométrie : il paraît nécessaire d'avoir une méthode qui permette de trouver le genre d'une

(¹) Je reprends une dénomination employée jadis par Liouville. Dans le sens que lui attribuait Liouville, elle a été remplacée par le mot *uniforme;* il n'y a donc aucun inconvénient à en faire usage pour désigner des fonctions qui, sans être *uniformes*, n'ont en chaque point qu'un nombre limité de valeurs.

courbe algébrique, quelles que soient les singularités qu'elle présente. La méthode que j'expose au début du Chapitre III est générale et ne comporte d'autres opérations que des divisions et des éliminations.

Je m'occupe ensuite du problème important que MM. Briot et Bouquet ont traité à la fin de leur troisième Mémoire, et qui consiste à reconnaître si une équation différentielle algébrique $F\left(u, \frac{du}{dz}\right) = 0$ admet une intégrale uniforme. Les difficultés que présente ce problème sont de même nature que celles qu'on rencontre dans la détermination du genre des courbes algébriques. J'indique d'abord les moyens d'appliquer les conditions énoncées par MM. Briot et Bouquet, quelle que soit l'équation différentielle proposée; puis je termine par une solution nouvelle du problème, fondée sur une proposition remarquable, qui est due à M. Hermite.

CHAPITRE PREMIER.

I. — Théorèmes préliminaires.

1. Dans ce premier Chapitre, nous allons établir des propositions dont nous ferons usage dans toute la suite de nos recherches. Comme première application, nous en déduirons une méthode pour reconnaître si une intégrale abélienne donnée est de première espèce.

Nous adopterons les notations employées par MM. Briot et Bouquet dans leur troisième Mémoire sur la théorie des fonctions (¹) et dans le Livre V de leur *Théorie des fonctions elliptiques* : z et u seront deux variables imaginaires liées par une équation différentielle $F\left(u, \frac{du}{dz}\right) = 0$, algébrique par rapport à u et $\frac{du}{dz}$, et irréductible. Cette équation sera

(¹) *Recherches sur la théorie des fonctions*, trois Mémoires publiés dans le XXXVIe Cahier du *Journal de l'École Polytechnique*.

toujours supposée mise sous forme rationnelle et entière. Nous désignerons par U la dérivée $\frac{du}{dz}$. Quand la variable u deviendra infinie, nous poserons $v = \frac{1}{u}$ et nous désignerons par V la dérivée $\frac{dv}{dz}$.

Enfin, nous introduirons deux séries de paramètres : les paramètres c seront les valeurs finies ou infinies que donne l'équation $F(u, U) = 0$ pour le rapport $\frac{u}{U}$ quand l'un des termes de ce rapport ou tous les deux deviennent infinis; en langage géométrique, ce sont les coefficients angulaires des directions asymptotiques de la courbe $F = 0$. La lettre c' désignera la dérivée $\frac{du}{dU}$ et les paramètres c'_0 seront les valeurs que cette dérivée prend quand U est nul.

Pour abréger nos premiers énoncés, nous dirons que le point $u = b$ (b étant fini) est un point singulier logarithmique *simple* de la fonction z, si pour $u = b$ la fonction z est infinie, et si sa dérivée $\frac{dz}{du}$ est de l'ordre de $\frac{1}{u-b}$; le point $v = \frac{1}{u} = 0$ sera un point singulier logarithmique *simple*, si pour $v = 0$ la fonction z est infinie et si sa dérivée $\frac{dz}{dv}$ est de l'ordre de $\frac{1}{v}$ (1). Dans ces énoncés, nous supposerons implicitement que, quand l'intégrale z devient infinie, elle le devient autrement que par l'addition de multiples infiniment grands de ses périodes.

2. Théorème I. — *Étant donnée une équation algébrique irréductible* $F(u, U) = 0$, *si l'intégrale* $z = \int^u \frac{du}{U}$ *reste finie sur toute la sphère, les paramètres* c *et* c'_0 *sont tous nuls.*

Théorème II. — *Si l'intégrale* z *devient infinie, mais n'admet aucun point singulier logarithmique simple, un au moins des paramètres* c *et* c'_0 *est infini, et aucun d'eux n'est fini et différent de zéro.*

Théorème III. — *Si l'intégrale* z *devient infinie, mais n'admet d'autres*

(1) Pour les points singuliers logarithmiques en général, *voir* Briot et Bouquet, *Théorie des fonctions elliptiques*, p. 175 à 178.

infinis que des points singuliers logarithmiques simples, les paramètres c et c'_0 sont tous finis, et deux au moins d'entre eux sont différents de zéro.

THÉORÈME IV. — *Les réciproques des trois théorèmes précédents sont vraies.*

3. *Démonstration du théorème I.* — L'intégrale $z = \int^u \frac{du}{U}$ ne peut devenir infinie que dans deux cas : 1° u restant fini et U devenant nul; 2° u devenant infini.

1^er^ CAS : *u est fini, U est nul.* — On a alors pour le développement d'un des systèmes circulaires formés par les valeurs infinies de $\frac{1}{U}$

$$\frac{dz}{du} = \frac{1}{U} = h(u-b)^{-\frac{q}{p}} + \ldots.$$

Mais, l'intégrale z restant finie, il faut que q soit inférieur à p. On conclut de là

$$c'_0 = \left(\frac{du}{dU}\right)_{U=0} = \lim \frac{u-b}{U} = \lim \left[h(u-b)^{1-\frac{q}{p}} + \ldots\right] = 0.$$

D'ailleurs, quand U est nul, on ne peut pas supposer u infini : car alors l'élément différentiel et la limite supérieure de l'intégrale z devenant infinis, cette intégrale serait infinie. Ainsi tous les c'_0 sont nuls.

2^e^ CAS : *u est infini.* — Nous poserons $u = \frac{1}{v}$, et nous prendrons v comme nouvelle variable. Faisons aussi $V = -Uv^2$: l'intégrale proposée prend la forme $z = \int^v \frac{dv}{V}$. Si V n'est pas nul avec v, l'intégrale z reste finie, et le rapport $\frac{v}{V} = -\frac{u}{U}$ tend évidemment vers zéro. Si V est nul avec v, on est ramené au cas précédent. Il faut que le rapport $\frac{v}{V} = -\frac{u}{U}$ tende vers zéro quand u devient infini. Ainsi le paramètre $c = \frac{u}{U}$ est nul quand u est infini. D'ailleurs, si U devient infini, u restant fini, c est encore nul. Donc les paramètres c sont tous nuls.

4. *Démonstration du théorème II.* — On a à examiner les deux mêmes cas que plus haut.

1er cas : *u est fini, U est nul.* — On a, comme précédemment,

$$\frac{dz}{du} = \frac{1}{U} = h(u-b)^{-\frac{q}{p}} + \ldots.$$

Si q est inférieur à p, l'intégrale z reste finie; le rapport $\frac{u-b}{U}$ tend vers zéro, c'est-à-dire que $c'_0 = \frac{du}{dU}$ est nul.

Pour que l'intégrale devienne infinie et que l'ordre de $\frac{dz}{du}$ soit supérieur à l'unité, il faut et il suffit que q soit supérieur à p. Par suite, le rapport $\frac{u-b}{U}$ croît sans limite, c'est-à-dire que $c'_0 = \frac{du}{dU}$ est infini. D'ailleurs, si, U étant nul, u est infini, c'_0 est infini.

Aucun des paramètres c'_0 ne peut être fini et différent de zéro : car, pour qu'il en fût ainsi, il faudrait que q fût égal à p, cas exclu par l'énoncé, parce qu'alors $\frac{dz}{du}$ serait de l'ordre de $\frac{1}{u-b}$.

2e cas : *u est infini.* — Posons $u = \frac{1}{v}$; il vient $z = \int^{v} \frac{dv}{V}$.

Si V n'est pas nul avec v, l'intégrale z reste finie; le rapport $\frac{v}{V} = -\frac{u}{U}$ tend vers zéro : c est nul.

Si V est nul avec v, on a

$$\frac{dz}{dv} = \frac{1}{V} = hv^{-\frac{q}{p}} + \ldots.$$

Si q est inférieur à p, l'intégrale z reste finie, et le rapport $c = -\frac{v}{V}$ est nul. Le cas de $q = p$ est exclu par l'énoncé. Si q est supérieur à p, l'intégrale z devient infinie, et le rapport $c = -\frac{v}{V}$, étant de l'ordre de $v^{1-\frac{q}{p}}$, croît sans limite avec u : c est infini. D'ailleurs, si U est infini, u restant fini, c est nul.

Aucun des paramètres c ne peut être fini et différent de zéro : car il faudrait que q fût égal à p; c'est le cas exclu.

5. *Démonstration du théorème III.* — On a encore à examiner les deux mêmes cas que précédemment.

1^er^ CAS : *u est fini,* U *est nul.* — On aura

$$\frac{dz}{du} = \frac{1}{U} = h(u-b)^{-\frac{q}{p}} + \ldots.$$

Si q est inférieur à p, l'intégrale z reste finie; le rapport $\frac{u-b}{U}$ tend vers zéro : c'_0 est nul.

Si z devient infini, l'ordre de $\frac{dz}{du}$ devant être égal à l'unité, q est égal à p; par suite, le rapport $\frac{u-b}{U}$ tend vers une limite h finie et différente de zéro : c'_0 est fini et différent de zéro. Ainsi, quand U est nul, u restant fini, c'_0 n'est pas infini; et l'on verra, au cas suivant, que, quand U est nul, u ne peut pas être infini.

2^e^ CAS : *u est infini.* — Posons $u = \frac{1}{v}$; il vient $z = \int^{v} \frac{dv}{V}$.

Si V n'est pas nul avec v, l'intégrale z reste finie; le rapport $\frac{v}{V} = -\frac{u}{U}$ tend vers zéro : c est nul.

Si V est nul avec v, on a

$$\frac{dz}{dv} = \frac{1}{V} = hv^{-\frac{q}{p}} + \ldots.$$

Si q est inférieur à p, l'intégrale z reste finie, et le rapport $c = -\frac{v}{V}$ est nul.

Si z devient infini, l'ordre de $\frac{dz}{dv}$ devant être égal à l'unité, q est égal à p; par suite $\frac{v}{V} = -\frac{u}{U}$ tend vers une limite h finie et différente de zéro : c est fini et différent de zéro.

Puisque le rapport $\frac{u}{U}$ ne peut être que fini ou nul quand u est infini, U doit nécessairement être infini avec u, ce qui justifie la proposition avancée plus haut.

Enfin, si U devient infini, u étant fini, c est nul.

En résumé, aucun des paramètres c et c'_0 n'est infini, et un au moins de ces paramètres est différent de zéro : nous prouverons au n° **13** qu'il y en a *deux* au moins qui ne sont pas nuls.

6. *Démonstration du théorème IV.* — Les réciproques des trois théorèmes précédents s'établissent par le raisonnement des cas exclusifs.

Remarque. — Il peut arriver que les paramètres c et c'_0 relatifs à une équation $F(u, U) = 0$ soient tous nuls; c'est le cas du théorème I.

Il peut arriver que les paramètres c et c'_0 soient tous infinis : l'équation

$$U^3 + U - u^2 = 0$$

le montre immédiatement : les termes du plus haut degré se réduisant à U^3, les coefficients angulaires c des directions asymptotiques sont tous infinis. L'axe $U = 0$ rencontre la courbe en deux points à distance finie, car il lui est tangent à l'origine des coordonnées : en ce point $\frac{du}{dU}$ est infini. L'axe $U = 0$ rencontre aussi la courbe en un point à l'infini : en ce point, u étant infini et U fini, $\frac{du}{dU}$ est infini.

Il peut arriver enfin que les paramètres c et c'_0 soient tous finis et différents de zéro, comme cela a lieu pour l'équation $U - u = 0$.

II. — Signification des paramètres c et c'_0 : périodes polaires.

7. Étant donnée une équation algébrique $F(u, U) = 0$, les périodes polaires de l'intégrale $z = \int^u \frac{du}{U}$ correspondent aux deux cas suivants : 1° $\frac{dz}{du}$ infini pour une valeur finie de u; 2° $\frac{dz}{dv}$ infini pour $v = 0$, v désignant toujours $\frac{1}{u}$ (*voir* Briot et Bouquet, *Fonctions elliptiques*, p. 170 et suiv.).

1er cas. — On aura

$$\frac{dz}{du} = \frac{1}{U} = h(u - b)^{-\frac{q}{p}} + \ldots.$$

Si q est inférieur à p, l'intégrale z reste finie; il n'y a pas de période polaire.

Si q est supérieur à p, la série précédente contient généralement un terme en $(u-b)^{-1}$

$$\frac{dz}{du} = \frac{1}{U} = h(u-b)^{-\frac{q}{p}} + h_1(u-b)^{\frac{1-q}{p}} + h_2(u-b)^{\frac{2-q}{p}} + \ldots + h_{q-p}(u-b)^{-1} + \ldots.$$

Quand la variable u fait p tours autour du point b, l'intégrale z reprend sa valeur primitive augmentée de la période polaire $2pi\pi h_{q-p}$. Dans le cas présent, on voit que le rapport $\frac{u-b}{U}$ croît sans limite : c'_0 est infini.

Mais, si $q=p$, l'intégrale z admet la période polaire $2pi\pi h$, et le rapport $\frac{u-b}{U}$ ayant précisément pour limite h, la période polaire est égale à $2pi\pi c'_0$.

2^e^ cas. — On aura

$$\frac{dz}{dv} = \frac{1}{V} = hv^{-\frac{q}{p}} + \ldots.$$

Si q est inférieur à p, il n'y a pas de période polaire. Si q est supérieur à p, z admet la période polaire $2pi\pi h_{q-p}$, et c est infini. Mais, si $q=p$, z admet la période polaire $2pi\pi h = 2pi\pi c$. Il n'y a, pour s'en assurer, qu'à répéter le raisonnement fait au cas précédent.

Nous arrivons ainsi à ce théorème :

Théorème V. — *Les valeurs finies des paramètres c et c'_0 représentent, à un facteur $2pi\pi$ près, celles des périodes polaires de l'intégrale z qui correspondent à des points singuliers logarithmiques simples.*

III. — Les trois formes de l'équation $F(u, U) = 0$.

8. A chacun des trois cas définis par les théorèmes précédents correspond une forme particulière de l'équation $F(u, U) = 0$. Nous allons fixer ces trois formes.

Cas du théorème I. — Les paramètres c et c'_0 sont tous nuls.

Les paramètres c sont les coefficients angulaires $\frac{u}{U}$ des directions asymptotiques de la courbe représentée par l'équation $F(u, U) = 0$. Puisqu'ils sont tous nuls, U *est nécessairement infini quand u est infini* (¹), et l'ensemble des termes du plus haut degré de l'équation $F(u, U) = 0$ se réduit à une puissance de u, affectée d'un coefficient indépendant de U.

D'après cela, l'équation $F(u, U) = 0$ sera de la forme

$$U^m f_0(u) + U^{m-1} f_1(u) + \ldots + U^2 f_{m-2}(u) + U f_{m-1}(u) + f_m(u) = 0,$$

les lettres f désignant des polynômes entiers en u; soient $\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_{m-1}, \delta_m$ les degrés de ces polynômes. Ils satisfont aux inégalités

$$\delta_m > m - k + \delta_k \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, m-1),$$

car ces inégalités expriment que l'ensemble des termes du plus haut degré de l'équation se réduit à un terme en u^{δ_m} à coefficient constant. Réciproquement, si elles sont vérifiées, tous les paramètres c sont nuls.

Nous allons exprimer maintenant que tous les paramètres c'_0 sont nuls, c'est-à-dire que, quand U est nul, $\frac{du}{dU}$ est nul aussi. En vertu de la remarque faite quelques lignes plus haut, quand U est fini, u ne peut pas être infini. Toutes les valeurs de u qui répondent à $U = 0$ sont donc fournies par l'équation $f_m(u) = 0$.

Soit $u = b$ une racine de cette équation. Transportons l'origine des coordonnées au point $U = 0$, $u = b$. Il suffit de poser $u = b + u'$. L'équation devient

$$U^m f_0(b+u') + \ldots + U^2 f_{m-2}(b+u') + U f_{m-1}(b+u') + f_m(b+u') = 0.$$

Au point qui est maintenant l'origine, la dérivée $\frac{du'}{dU}$ n'a d'autre valeur que zéro. Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que l'ensemble des termes du moindre degré de l'équation se réduise à une puissance de u' affectée d'un coefficient constant. Supposons que b soit

(¹) C'est la généralisation de cette proposition bien connue : *La fonction u, inverse d'une intégrale elliptique de première espèce z, ne peut être infinie sans que sa dérivée* $U = \frac{du}{dz}$ *soit aussi infinie*.

racine d'ordre β de multiplicité de l'équation $f_m(u) = 0$. Le terme de moindre degré en u' du polynôme $f_m(b + u')$ est u'^β : l'équation ne doit contenir aucun terme de degré inférieur à β ni aucun autre terme de degré égal à β. Ainsi, *toute racine b d'ordre β de l'équation $f_m(u) = 0$ est racine d'ordre β au moins de l'équation $f_{m-1}(u) = 0$; elle est racine d'ordre $\beta - 1$ au moins de l'équation $f_{m-2}(u) = 0$, et ainsi de suite : elle est racine d'ordre $\beta - k + 1$ au moins de l'équation $f_{m-k}(u) = 0$.*

Réciproquement, s'il en est ainsi, tous les paramètres c'_0 sont nuls.

De là résulte une généralisation d'une propriété des fonctions elliptiques [1] :

THÉORÈME VI. — *Si l'intégrale $z = \int^u \frac{du}{U}$, définie par l'équation algébrique $F(u, U) = 0$, reste finie sur toute la sphère, l'équation $F(u, U) = 0$ ne contient pas U à la première puissance.*

En effet, le polynôme $f_{m-1}(u)$, qui est de degré moindre que le polynôme $f_m(u)$, doit admettre toutes les racines de $f_m(u)$ et chacune d'elles le même nombre de fois au moins que $f_m(u)$. Donc $f_{m-1}(u)$ est identiquement nul.

9. *Remarque.* — On reconnaît, à la seule inspection des termes de l'équation $F = 0$, si cette équation vérifie les conditions nécessaires et suffisantes pour que les paramètres c soient tous nuls.

Pour vérifier si les paramètres c'_0 sont tous nuls, on n'a besoin de résoudre aucune équation. La méthode dite *des racines égales*, qu'on doit à Lagrange, permet de remplacer l'équation $f_m(u) = 0$ par un certain nombre d'autres équations

$$\varphi_1(u) = 0, \quad \varphi_2(u) = 0, \quad \ldots, \quad \varphi_\beta(u) = 0, \quad \ldots, \quad \varphi_p(u) = 0,$$

qui n'ont chacune que des racines simples; la première a pour racines les racines simples de l'équation $f_m(u) = 0$; la seconde, ses racines doubles; ...; la dernière, ses racines d'ordre p.

Pour vérifier les conditions relatives aux racines multiples d'ordre β, on divisera $f_{m-2}(u)$ par $[\varphi_\beta(u)]^{\beta-1}$; puis $f_{m-3}(u)$ par $[\varphi_\beta(u)]^{\beta-2}$; ..., et

---

(1) BRIOT et BOUQUET, *Fonctions elliptiques*, p. 278.

en général $f_{m-k}(u)$ par $[\varphi_\beta(u)]^{\beta-k+1}$. Toutes ces divisions devront se faire exactement. Si une seule de ces opérations est impossible, on sera assuré que l'intégrale z ne reste pas finie sur toute la sphère.

D'ailleurs, on pourrait aussi former par différentiation et élimination l'équation qui lie U et $c' = \frac{du}{dU}$, et l'on aurait à vérifier que pour $U = 0$ cette équation n'admet d'autre solution que $c' = 0$: on ordonnerait les termes de cette équation suivant les puissances de c', et l'on devrait constater que le terme indépendant de c' et les coefficients de toutes les puissances de c', sauf celui de la plus élevée, s'annulent en même temps que U.

On trouvera plus loin des exemples du cas actuel.

10. *Cas du théorème II.* — Les paramètres c et c'_0 n'ont d'autres valeurs que zéro ou l'infini, et ne sont pas tous nuls.

L'ensemble des termes du plus haut degré de l'équation $F(u, U) = 0$ se réduit à un seul terme de la forme $AU^\alpha u^\beta$, A étant une constante, α, β deux entiers dont un peut être nul. Réciproquement, s'il en est ainsi, les paramètres c n'ont d'autres valeurs que zéro ou l'infini.

Passons aux paramètres c'_0. De l'équation $F(u, U) = 0$ on déduit

$$\frac{du}{dU} = c' = -\frac{F'_U}{F'_u}.$$

Éliminant u entre les deux équations $F = 0$ et $c'F'_u + F'_U = 0$, on obtient une équation entre U et c'. Si l'on ordonne les termes de cette équation suivant les puissances de c', le coefficient de la plus haute puissance de c' est, ou une constante, ou une puissance de U; si l'on ordonne suivant les puissances de U, le terme indépendant de U est, ou une constante ou une puissance de c'. Il faut et il suffit évidemment qu'il en soit ainsi pour qu'aucun des paramètres c'_0 ne soit fini et différent de zéro.

Remarque. — Dans le cas actuel, il peut arriver que l'équation $F(u, U) = 0$ contienne U à la première puissance. Soit, par exemple, l'équation

$$u^2U + (U^2 + 4uU - u^2) - 4u = 0.$$

Elle ne contient d'autre terme du troisième degré que u^2U : deux des paramètres c sont nuls et un est infini. Quand on fait $U = o$, une valeur de u devient infinie, une valeur de c'_0 est infinie; en même temps u prend les valeurs finies zéro et -4; la tangente à l'origine est la droite $u = o$: c'_0 est nul.

Faisons $u = u' - 4$. L'équation devient

$$u'(u' - 4)(U - 1) + U^2 = o.$$

La tangente au point $U = o$, $u' = o$, est la droite $u' = o$: c'_0 est nul. Ainsi l'équation proposée vérifie les conditions du théorème II et contient U à la première puissance. D'ailleurs elle s'intègre facilement : on trouve

$$u = \frac{z^2}{z + 1},$$

ce qui permet de reconnaître que la fonction z devient infinie, mais n'a pas de point singulier logarithmique, ni simple, ni autre.

Cet exemple montre aussi qu'il n'est pas toujours nécessaire de former l'équation entre U et c'.

11. *Cas du théorème III.* — Les paramètres c et c'_0 sont tous finis et ne sont pas tous nuls.

L'ensemble des termes du plus haut degré de l'équation $F(u, U) = o$ ne contient pas U en facteur, mais peut contenir en facteur une puissance de u. Ordonnons les termes de l'équation suivant les puissances décroissantes de U

$$U^m f_0(u) + U^{m-1} f_1(u) + \ldots + U^2 f_{m-2}(u) + U f_{m-1}(u) + f_m(u) = o.$$

Les lettres f désignent des polynômes entiers en u : soient $\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_m$ leurs degrés. Celui des polynômes f dont le degré est le plus élevé est le dernier, $f_m(u)$: car, si le terme du plus haut degré en u était multiplié par une puissance de U, il y aurait un des coefficients angulaires c qui serait infini; ce qui est contre l'hypothèse. Ainsi δ_m est supérieur à tous les autres δ. Si une puissance de u est en facteur dans les termes du plus haut degré de l'équation $F = o$, l'ordre de cette courbe sera égal au plus haut exposant de u, c'est-à-dire à δ_m. Si les termes du plus haut degré ne contiennent pas en facteur une puissance de u, comme ils ne contiennent pas non plus en facteur une puissance de U, leur degré est égal au plus haut exposant de u, c'est-à-dire à δ_m. On voit que δ_m est dans tous les cas égal à l'ordre de la courbe $F = 0$. D'après cela, les degrés des polynômes f satisfont aux relations

$$\delta_m \geq m - k + \delta_k \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, m-1)$$

qui expriment que l'ordre de la courbe $F = 0$ est égal à δ_m. Réciproquement, si ces relations ont lieu, on voit aisément que tous les paramètres c sont finis.

Faisons maintenant l'hypothèse $U = 0$. Quand U est nul, u ne peut pas être infini, sans quoi le rapport $\frac{u}{U}$ serait infini; il en serait de même si, u devenant infini, U restait fini. Ainsi *u ne peut pas être infini sans que U le soit aussi*. On voit que toutes les valeurs de u qui répondent à l'hypothèse $U = 0$ sont fournies par l'équation $f_m(u) = 0$.

Soit $u = b$ une racine de cette équation. Transportons l'origine des coordonnées au point $U = 0$, $u = b$, en posant $u = b + u'$. Au point qui est maintenant l'origine, toutes les valeurs de la dérivée $\frac{du'}{dU}$ doivent être nulles ou finies et différentes de zéro. Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que l'ensemble des termes du moindre degré ne contienne pas U en facteur. Si b est racine d'ordre β de multiplicité, il faut et il suffit que les termes du moindre degré soient du degré β : s'ils étaient de degré moindre, ces termes ne pourraient provenir que des groupes qui précèdent $f_m(b + u')$; ils contiendraient en facteur une puissance de U. Exprimons que l'équation $F(b + u', U) = 0$ ne contient pas de terme de degré inférieur à β; nous avons cet énoncé :

Toute racine b d'ordre β de l'équation $f_m(u) = 0$ est racine d'ordre $\beta - 1$ au moins de l'équation $f_{m-1}(u) = 0$, et ainsi de suite : elle est racine d'ordre $\beta - k$ au moins de l'équation $f_{m-k}(u) = 0$.

Réciproquement, s'il en est ainsi, tous les paramètres c'_0 sont finis.

12. *Remarque I.* — Ici, comme précédemment, on n'a pas besoin de résoudre l'équation $f_m(u) = 0$ pour vérifier qu'aucun des c'_0 n'est infini. On n'a qu'à suivre la marche indiquée au n° 9.

Remarque II. — L'équation $F(u, U) = 0$ peut contenir U à la première puissance. En voici un exemple bien simple : il est fourni par l'équation $u = \mathrm{U}$ dont l'intégrale est $z = \mathrm{L}u$. Il y a ici un terme en U. Les paramètres c et c'_0 sont égaux à 1.

Autre exemple. — Soit l'équation

$$(a_1\mathrm{U} - u)(a_2\mathrm{U} - u)\ldots(a_{2n-1}\mathrm{U} - u) + u^{2n} = 0,$$

où nous supposerons $\Sigma a \lesseqgtr 0$. L'équation contient un terme en U. Les termes du plus haut degré se réduisent à u^{2n} : tous les c sont nuls. Les $2n$ valeurs de u qui répondent à $\mathrm{U} = 0$ sont les racines de l'équation

$$u^{2n-1}(u - 1) = 0.$$

A l'origine, les paramètres c'_0 sont précisément les nombres $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Transportant l'origine au point $\mathrm{U} = 0$, $u = 1$, on voit immédiatement qu'en ce point c'_0 est égal à $-(a_1 + a_2 + \ldots + a_{2n-1})$.

D'après cela, $\Sigma c'_0$ est nul. Mais on a aussi $\Sigma c = 0$. Rapprochant cet exemple du précédent, on est conduit à penser que la relation $\Sigma c = \Sigma c'_0$ est générale. C'est ce qui a lieu.

13. Théorème VII. — *Étant donnée une équation* $\mathrm{F}(u, \mathrm{U}) = 0$ *algébrique et irréductible, si les paramètres* c *et* c'_0 *sont tous finis, la somme algébrique des paramètres* c *est égale à la somme algébrique des paramètres* c'_0.

Autre énoncé :

Si une courbe algébrique $\mathrm{F}(y, x) = 0$ *n'a aucune direction asymptotique parallèle à l'axe des* y, *ni aucune tangente parallèle à cet axe aux points réels ou imaginaires où elle le rencontre, la somme algébrique des coefficients angulaires* $c = \frac{y}{x}$ *de ses directions asymptotiques est égale à la somme algébrique des coefficients angulaires* $c' = \frac{dy}{dx}$ *des tangentes aux points où elle rencontre l'axe des* y.

Mis sous cette forme, le théorème devient presque évident. Effectuons une transformation usitée dans la théorie des asymptotes et qui consiste à poser

$$x = \frac{1}{x'}, \quad y = \frac{y'}{x'}.$$

(On voit que x représente U et y représente u.) L'équation $F(y, x) = 0$ se change en $f(y', x') = 0$.

Les paramètres c, désignant les diverses valeurs que prend le rapport $\frac{y}{x}$ quand l'un de ses termes ou tous les deux deviennent infinis, représentent maintenant les ordonnées y' des points de rencontre de la courbe $f = 0$ avec l'axe des y'.

Cherchons la signification des paramètres c'_0. On a

$$c'_0 = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0} = \left(y' - x'\frac{dy'}{dx'}\right)_{x'=\infty},$$

c'est-à-dire que les paramètres c'_0 sont les ordonnées à l'origine des asymptotes de la courbe $f = 0$. Or on sait que dans l'équation d'une courbe algébrique d'ordre n et dans l'équation du système de ses asymptotes les termes de degré n et de degré $n - 1$ sont les mêmes : on a donc $\Sigma c = \Sigma c'_0$, ce qui prouve le théorème.

Conséquence. — Il résulte de là que, quand les paramètres c et c'_0 sont tous finis et ne sont pas tous nuls, il y en a deux au moins qui sont différents de zéro.

Cette remarque complète la démonstration du théorème III.

IV. — Conséquences relatives aux intégrales abéliennes.

14. Toute intégrale abélienne est une somme d'intégrales de première, de deuxième et de troisième espèce, plus une partie algébrique et logarithmique [1]. Mais certains de ces éléments peuvent manquer; l'intégrale peut se trouver exprimée par des intégrales de deux ou d'une des trois espèces seulement, ou même se réduire aux termes algébriques et logarithmiques.

Notre premier théorème caractérise évidemment les intégrales qui s'expriment par une somme d'intégrales de première espèce.

---

[1] Pour les principes de la théorie des intégrales abéliennes et la définition des intégrales des trois espèces, *voir* BRIOT et BOUQUET, *Fonctions elliptiques*, Livre IX, Chap. I.

Les intégrales abéliennes qui vérifient les conditions du second théorème peuvent contenir dans leur expression analytique des intégrales de première espèce, mais ne peuvent pas s'exprimer au moyen de ces intégrales seulement.

Les intégrales qui vérifient les conditions du troisième théorème ne contiennent dans leur expression analytique aucune intégrale de seconde espèce. Elles peuvent dépendre des intégrales de première espèce; mais elles dépendent nécessairement des intégrales de troisième espèce.

A raison de l'importance spéciale des intégrales de première espèce, nous indiquerons une règle pour reconnaître si une intégrale donnée s'exprime au moyen de ces intégrales seulement.

Soit $f(x,y)=0$ l'équation algébrique qui sert à définir l'intégrale proposée

$$z=\int \varphi(x,y)\,dx.$$

Nous poserons

$$\varphi(x,y)=\frac{1}{U},$$

afin d'avoir

$$z=\int\frac{dx}{U},$$

puis nous éliminerons y entre les deux équations $f(x,y)=0$ et $\varphi(x,y)=\frac{1}{U}$.

Soit $F(x,U)=0$ l'équation résultante : la lettre x représente la variable précédemment désignée par u. Pour que l'intégrale z dépende seulement des intégrales de première espèce, il faut et il suffit que les paramètres c et c'_0 relatifs à l'équation $F(x,U)=0$ soient tous nuls. Nous avons expliqué plus haut comment on reconnaît s'il en est ainsi.

15. Exemple. — *Étant donnée l'équation*

$$f(x,y)=2y^5-5y^2-x(ax^2+2bx+c)^2=0,$$

on suppose que le trinôme $ax^2+2bx+c$ n'a ni racine nulle, ni racines *égales : on demande si l'intégrale*

$$z = 10\int \frac{\lambda(ax^2+2bx+c)+2Bxy+Cy^2+2Ey}{f'_y}\,dx$$
$$= \int \frac{\lambda(ax^2+2bx+c)+2Bxy+Cy^2+2Ey}{y^4-y}\,dx$$

est de première espèce, quelles que soient les indéterminées λ, B, C, E.

Cette intégrale, ayant la forme canonique, reste finie pour $x=\infty$.

Nous poserons, pour abréger,

$$Q = Bx+E, \quad \xi = ax^2+2bx+c.$$

Il vient

$$z = \int \frac{Cy^2+2Qy+\lambda\xi}{y^4-y}\,dx.$$

Nous avons à éliminer y entre les deux équations

$$\frac{Cy^2+2Qy+\lambda\xi}{y^4-y} = \frac{1}{U}, \quad 2y^5-5y^2-x\xi^2 = 0.$$

L'équation résultante est la suivante :

$$\begin{vmatrix} 2CU & 4QU-3 & 2\lambda\xi U & -x\xi^2 \\ 4QU-3 & 2C^2U^2+2\lambda\xi U & 2CU(2QU+1)-x\xi^2 & 2C\lambda\xi U^2 \\ 2C^2U^2+2\lambda\xi U & CU(8QU-1)-x\xi^2 & 2C\lambda\xi U^2+(4QU-3)(2QU+1) & \lambda\xi U(4QU-3) \\ 2CU(2QU+1)-x\xi^2 & 2C\lambda\xi U^2+(4QU-3)(2QU+1) & \lambda\xi U(8QU-1)+CUx\xi^2 & 2\lambda^2\xi^2U^2 \end{vmatrix}$$

Faisant $U = 0$ dans le premier membre de cette équation, on obtient le terme indépendant de U : ce terme est

$$x\xi^2(x^3\xi^6+3^3) = (ax^2+2bx+c)^2x[x^3(ax^2+2bx+c)^6+27].$$

Les seules racines multiples de ce polynôme sont les racines du trinôme $\xi = ax^2+2bx+c$. Pour que l'intégrale proposée soit de première espèce, il faut et il suffit que le coefficient du terme en U soit nul, ce qui a lieu, et que de plus le coefficient du terme en U^2 soit divisible par ξ (n^{os} 8 et 9). En calculant ce coefficient, on reconnaît que c'est un polynôme entier en ξ sans terme indépendant.

Donc l'intégrale proposée est de première espèce, quelles que soient les indéterminées λ, B, C, E.

16. Exemple. — *Étant donnée l'équation*

$$\begin{aligned}U^6 &+ x(x^{11}+7x^5+9)U^5 + x^2(x^{10}+8x^7-4)U^4\\ &+ x^4(x^8+7x^7-5x^6+4x^4-6x^3+3x^2-2)U^3\\ &+ x^4(x^{10}+2x^9+x^8-x^7-7x^6-10x^5-3x^4+6x^3+9x^3+3x-1)U^2\\ &- x^5(x^{13}+3x^{12}+3x^{11}+x^{10}-10x^9-28x^8-24x^7-4x^6\\ &\qquad\qquad + 27x^5+65x^4+46x^3-2x^2-7x+1) = 0,\end{aligned}$$

on demande si l'intégrale $z = \int \frac{dx}{U}$ *est de première espèce.*

On voit que le terme du degré le plus élevé dans cette équation est le terme x^{18}; en conséquence tous les c sont nuls.

Pour savoir si les c'_0 sont nuls, appliquons la méthode des racines égales au polynôme qui multiplie x^5 dans le terme indépendant de U : on trouve que ce polynôme est égal à $(x+1)^3(x^5-5x+1)^2$. Par suite, le terme indépendant de U est égal à

$$-x^5(x+1)^3(x^5-5x+1)^2.$$

Le coefficient de U^2 est divisible par x^4; celui de U^3 par x^3, celui de U^4 par x^2, et celui de U^5 par x : les conditions relatives à la racine $x=0$ sont vérifiées.

Pour que l'intégrale soit de première espèce, il faut encore que le coefficient de U^2 soit divisible par $(x+1)^2(x^5-5x+1)$, et que le coefficient de U^3 soit nul pour $x=-1$: on voit immédiatement que cette dernière condition est vérifiée.

Il reste donc à étudier le coefficient de U^2 : en appliquant la méthode des racines égales à ce polynôme, on trouve qu'il est égal à

$$(x+1)^2(x^8-x^5-5x^4+x^3+5x-1).$$

Ainsi la condition relative à la racine de l'équation $x+1=0$ est vérifiée. Divisons $x^8-x^5-5x^4+x^3+5x-1$ par x^5-5x+1 : la division se fait exactement et le quotient est x^3-1.

D'après cela, l'intégrale proposée est de première espèce.

CHAPITRE II.

SUR UN CAS DE RÉDUCTION DES INTÉGRALES ABÉLIENNES.

I. — Nature de l'intégrale u.

17. Nous allons maintenant nous occuper du cas où l'intégrale u d'une équation différentielle algébrique $F(u, U) = 0$ est *bien déterminée,* c'est-à-dire n'a en chaque point z qu'un nombre limité de valeurs. On sait que, quand il en est ainsi, la fonction u est racine d'une équation algébrique ayant pour coefficients des fonctions entières, soit de la variable z, soit de l'exponentielle $e^{\rho z}$, soit de la fonction doublement périodique $\operatorname{sn}(\rho z)$. Ce théorème est dû à MM. Briot et Bouquet ([1]).

Nous nous proposons de résoudre le problème suivant :

Supposant que l'intégrale u est bien déterminée, reconnaître si elle est algébrique, simplement périodique, ou doublement périodique.

La solution de ce problème est donnée par un théorème que je vais établir.

18. Théorème. — *Si l'intégrale est doublement périodique, les paramètres c et c'_0 sont tous nuls.*

Si l'intégrale est algébrique, un au moins des paramètres c et c'_0 est infini, et aucun d'eux n'est fini et différent de zéro.

Si l'intégrale est simplement périodique, les paramètres c et c'_0 sont tous finis, mais non pas tous nuls, et ceux qui ne sont pas nuls forment une suite de nombres tous commensurables entre eux.

([1]) *Recherches sur la théorie des fonctions* (*Journal de l'École Polyt.*, XXXVI^{e} Cahier, troisième Mémoire : *Intégration des équations différentielles au moyen des fonctions elliptiques*).

Ce théorème résulte des trois théorèmes démontrés au début du Chapitre I.

Supposons d'abord que l'intégrale u soit racine d'une équation algébrique ayant pour coefficients des fonctions entières de $\operatorname{sn}(\rho z)$. Posons pour un instant $x = \operatorname{sn}(\rho z)$. L'équation intégrale sera $f(u, x) = 0$, f étant un polynôme entier en u et x.

A chaque valeur de u répondront un certain nombre de valeurs de x; et l'on sait qu'à chaque valeur de x correspondent deux valeurs de z, si l'on fait abstraction des sommes de multiples de périodes. Ces valeurs de z sont toujours finies, que x soit fini ou infini; elles ne deviennent infinies que par l'addition de multiples infiniment grands des deux périodes. Nous sommes donc dans le cas du théorème I; les paramètres c et c'_0 sont tous nuls.

Supposons maintenant que l'intégrale u soit une fonction algébrique de z : z est une fonction algébrique de u. Comme telle, elle devient nécessairement infinie pour une valeur au moins de u, et elle n'admet de point singulier logarithmique d'aucune sorte. Nous sommes donc dans le cas du théorème II ; un au moins des paramètres c et c'_0 est infini, et aucun d'eux n'est fini et différent de zéro.

Supposons enfin que l'intégrale u soit racine d'une équation algébrique ayant pour coefficients des fonctions entières d'une exponentielle $e^{\rho z}$. Posons $x = e^{\rho z}$. L'équation intégrale sera $f(u, x) = 0$, f étant un polynôme entier en u et x. Son degré par rapport à x est égal au degré μ de l'équation $F(u, U) = 0$ par rapport à U. A chaque valeur de u correspondent μ valeurs de x. A chaque valeur de x répond une valeur de z, $z = \frac{1}{\rho} L x$, en faisant abstraction des multiples de la période polaire $\frac{2 i \pi}{\rho}$. Tant que x n'est ni nul ni infini, z reste fini; mais, quand x devient infini, z devient infini aussi.

Supposons d'abord que x soit infini pour une valeur finie de u, $u = b$. On aura

$$\frac{1}{x} = h(u - b)^{\frac{q}{p}} + \cdots,$$

d'où, en prenant les dérivées logarithmiques des deux membres et en réduisant le second à son terme principal,

$$\frac{dz}{du} = -\frac{q}{p}\frac{1}{\rho}\frac{1}{u-b}+\ldots.$$

Ainsi le point $u=b$ est ce que nous avons appelé un point singulier logarithmique simple; à ce point correspond la période polaire $2p\frac{i\pi}{\rho}\frac{q}{p} = 2\frac{i\pi}{\rho}q$; et nous avons montré qu'on a $c'_0 = \frac{q}{p}\frac{1}{\rho}$: q et p étant des entiers, tous les paramètres c'_0 sont commensurables avec $\frac{1}{\rho}$.

Si x devient infini pour une valeur infiniment grande de u, on posera $u=\frac{1}{v}$ et l'on aura

$$\frac{1}{x} = h\,v^{\frac{q}{p}}+\ldots,$$

d'où résulte

$$\frac{dz}{dv} = -\frac{q}{p}\frac{1}{\rho}\frac{1}{v}+\ldots.$$

Le point $v=0$ est un point singulier logarithmique simple pour la fonction z; il donne la période polaire $2p\frac{i\pi}{\rho}\frac{q}{p}$ et l'on a $c=\frac{q}{p}\frac{1}{\rho}$. Nous sommes dans le cas du théorème III : les paramètres c et c'_0 sont tous finis (mais non pas tous nuls) et nous venons de voir qu'ils forment une suite de nombres commensurables avec $\frac{1}{\rho}$, c'est-à-dire tous commensurables entre eux. De plus ils vérifient la relation $\Sigma c = \Sigma c'_0$, établie au n° **13**.

19. *Autre énoncé.* — On peut donner du théorème précédent un autre énoncé, qui rappelle une proposition due à MM. Briot et Bouquet [1].

THÉORÈME. — *Si l'intégrale u d'une équation différentielle algébrique* $F(u, U)=0$ *est bien déterminée et doublement périodique, les racines nulles que l'équation* $F(u, U)=0$ *admet pour des valeurs finies de u et celles que la transformée admet pour* $v=0$ *sont toutes d'un degré inférieur à l'unité.*

---

[1] *Fonctions elliptiques*, p. 387.

Si l'intégrale est algébrique, les racines nulles que l'équation $F(u, U) = 0$ *admet pour des valeurs finies de u et celles que la transformée admet pour* $v = 0$ *sont toutes d'un degré différent de l'unité : une au moins est d'un degré supérieur à l'unité.*

Si l'intégrale est bien déterminée et simplement périodique, les racines nulles que l'équation $F(u, U) = 0$ *admet pour des valeurs finies de u, et celles que la transformée admet pour* $v = 0$ *sont toutes d'un degré inférieur ou égal à l'unité : deux au moins sont d'un degré égal à l'unité.*

Ce théorème résulte immédiatement des trois premiers théorèmes du Chapitre précédent et de la relation $\Sigma c = \Sigma c'_0$.

Remarque. — Le théorème précédent fait connaître des conditions *nécessaires* pour que l'intégrale u, supposée bien déterminée, soit de telle ou telle nature. Il est à peine besoin de dire que ces conditions *ne suffisent pas* en général pour que cette fonction soit bien déterminée. Nous signalerons dans la suite (n^os 34 et 57) deux cas où ces conditions suffisent pour qu'il en soit ainsi.

Marche à suivre pour reconnaître la nature de l'intégrale u.

20. Les caractères que notre théorème assigne aux trois classes d'intégrales sont *exclusifs*, ce qui va nous permettre de reconnaître la nature de l'intégrale u, en supposant cette intégrale bien déterminée.

A la seule inspection des termes de l'équation $F(u, U) = 0$, on voit si les paramètres c ont des valeurs nulles ou infinies. En posant $\frac{u}{U} = c$, on déduira des termes du plus haut degré de cette équation l'équation qui a pour racines les valeurs finies de c : c'est l'équation aux coefficients angulaires des directions asymptotiques de la courbe $F = 0$.

En éliminant u entre les deux équations

$$F(u, U) = 0, \quad c' = -\frac{F_U}{F'_u},$$

on obtient une équation entre c' et U : pour $U = 0$, cette équation fournit les diverses valeurs finies ou infinies des paramètres c'_0.

Si les paramètres c et c'_0 sont tous finis, mais non pas tous nuls, on a à rechercher s'ils sont tous commensurables entre eux, d'où ce problème :

Problème. — *Étant donnée une équation algébrique entière $f(x)=0$ dont les coefficients sont commensurables ou incommensurables, ou imaginaires, reconnaître si toutes les racines de cette équation sont commensurables entre elles.*

L'équation proposée peut toujours, après suppression des racines nulles, si elle en a, se mettre sous la forme

$$x^m - S_1 x^{m-1} + S_2 x^{m-2} + \ldots + (-1)^m S_m = 0.$$

Soient $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m$ ses racines; et soient $\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_m$ les rapports, tous commensurables, de $x_2, x_3, \ldots, x_m$ à x_1. Supposons d'abord S_1 différent de zéro. On posera

$$y = \frac{x}{S_1},$$

et il est visible que la racine $y_1 = \frac{x_1}{S_1} = \frac{1}{1+\lambda_2+\lambda_3+\ldots+\lambda_m}$ sera commensurable; par suite, toutes les racines de l'équation en y seront commensurables.

Supposons maintenant $S_1 = 0$. La somme des carrés des racines de l'équation proposée ne peut pas être nulle, car on a $\Sigma x_i^2 = x_1^2 \Sigma \lambda_i^2$ et tous les λ sont réels : la somme de leurs carrés n'est pas nulle.

Par conséquent, si l'on forme l'équation transformée en

$$y = x^2,$$

la somme de ses racines ne sera pas nulle. On est donc ramené au cas précédent. On vérifiera alors sans difficulté que l'équation en y a toutes ses racines commensurables entre elles, en même temps qu'on les obtiendra toutes. Il faudra alors extraire les racines carrées des valeurs trouvées et constater que les rapports de $m-1$ d'entre elles à la $m^{\text{ième}}$ sont commensurables; car il est clair qu'on peut faire abstraction du double signe. Par ce dernier procédé, on aura toutes les racines de l'équation proposée $f(x)=0$, et les quantités égales et de signes contraires. Il sera facile d'écarter celles de ces valeurs qui ne sont pas racines de $f(x)=0$.

On pourra encore se contenter d'obtenir une des racines de l'équation aux carrés : soit a cette racine. On posera

$$z = x\sqrt{a},$$

$\sqrt{a}$ désignant l'une quelconque des deux racines carrées de a, choisie arbitrairement. On n'aura plus alors qu'à vérifier que l'équation en z a toutes ses racines commensurables, et du même coup on obtiendra *toutes les racines* de l'équation $f(x) = 0$.

En résumé, on peut toujours reconnaître si toutes les racines d'une équation algébrique sont commensurables entre elles, et, s'il en est ainsi, les *obtenir toutes explicitement*.

Je ne m'arrête pas à donner d'exemple de cette méthode, les opérations qu'elle comporte étant tout à fait élémentaires.

Quand on aura reconnu que tous les c sont commensurables entre eux et que tous les c'_0 sont commensurables entre eux, il restera à vérifier si l'un des c arbitrairement choisi est commensurable avec un des c'_0 choisi de même. On pourra, d'ailleurs, se dispenser de cette vérification si les deux sommes Σc et $\Sigma c'_0$ sont différentes de zéro; car leur égalité exige que les c et les c'_0 soient tous commensurables entre eux, si les c et les c'_0 le sont séparément entre eux.

21. Exemples. — Nous avons donné au Chapitre I des exemples des trois formes d'équations qui correspondent aux trois cas du théorème précédent. Nous en rencontrerons d'autres; en voici deux que j'emprunte aux travaux d'Abel et aux recherches de M. Tchebichef.

Exemple I. — Soit l'équation

$$\frac{1}{U} = \frac{u + A}{\sqrt{u^4 + \alpha u^3 + \beta u^2 + \gamma u + \delta}};$$

le polynôme sous le radical est supposé n'avoir que des racines simples.

Les valeurs de c sont évidemment $c = \pm 1$. Quant aux valeurs de c'_0, en multipliant les deux membres de l'équation proposée par le binôme $u - b$, où b désigne une des racines du radical, on voit que tous les paramètres c'_0 sont nuls. Donc, si l'intégrale u est bien déterminée, elle est simplement périodique.

Abel a, en effet, montré que si la différentielle $\frac{(u+A)\,du}{\sqrt{u^4+\alpha u^3+\beta u^2+\gamma u+\delta}}$ s'intègre en termes finis, son intégrale est nécessairement de la forme $z = L(P+Q\sqrt{u^4+\alpha u^3+\beta u^2+\gamma u+\delta})$, P et Q représentant deux polynômes entiers en u. Il a de plus donné le moyen de former tous les polynômes $u^4+\alpha u^3+\beta u^2+\gamma u+\delta$ tels que, pour une valeur convenable de A, la différentielle $\frac{(u+A)\,du}{\sqrt{u^4+\alpha u^3+\beta u^2+\gamma u+\delta}}$ s'intègre par un seul logarithme, et il a indiqué comment on calculera A dans chaque cas particulier (¹). La question inverse : *Étant donnée la différentielle* $\frac{(u+A)\,du}{\sqrt{u^4+\alpha u^3+\beta u^2+\gamma u+\delta}}$ *dont les coefficients sont connus, reconnaître si son intégrale est de la forme* $L(P+Q\sqrt{u^4+\ldots})$, présente de grandes difficultés. Elle a été résolue par M. Tchebichef (²) dans le cas où les coefficients α, β, γ et δ sont commensurables : la méthode de M. Tchebichef a été exposée par M. Zolotareff, qui est parvenu ensuite (³) à résoudre le même problème en supposant que α, β, γ et δ soient des entiers complexes; les deux méthodes exigent qu'on sache trouver les racines du radical.

22. *Exemple II.* — On donne l'équation

$$\frac{1}{U} = \frac{6u^2+5u+7}{(2u^2-1)\sqrt{u^4+4u^3+2u^2+1}}.$$

On voit que, pour les valeurs infiniment grandes de u, le rapport $\frac{u}{U}$ tend vers zéro; les paramètres c sont tous nuls. Pour étudier les para-

---

(¹) *Œuvres complètes* (édit. Sylow et Lie), t. I, p. 104 : *Sur l'intégration de la formule différentielle* $\frac{\rho\,dx}{\sqrt{R}}\cdots$, et t. II, p. 139 : *Théorie des transcendantes elliptiques*, probl. III.

Abel s'occupe aussi, en ces deux endroits, de la question inverse.

(²) *Journal de Liouville*, 1864. L'exposé de M. Zolotareff est dans le *Journal de Liouville*, 1874.

(³) Dans un Ouvrage en russe, analysé au *Bulletin des Sc. mathém.*, p. 475-478; 1879.

mètres c'_0, il est commode de former l'équation entre c' et u; puis on donne à u les valeurs qui annulent le radical et $2u^2-1$.

Résolvant par rapport à U l'équation proposée et différentiant, on trouve

$$\frac{dU}{du}=\frac{1}{c'}=\frac{4u(6u^2+5u+7)-(2u^2-1)(12u+5)}{(6u^2+5u+7)^2}\sqrt{u^4+4u^3+2u^2+1}$$
$$+\frac{2u^2-1}{6u^2+5u+7}\,\frac{2u^3+6u^2+2u}{\sqrt{u^4+4u^3+2u^2+1}}.$$

Les valeurs de u qui annulent le radical rendent $\frac{1}{c'}$ infini; par suite, c'_0 est nul.

Pour les valeurs de u qui satisfont à l'équation $2u^2-1=0$ ou $u^2=\frac{1}{2}$, on a

$$\frac{1}{c'_0}=\frac{4u\sqrt{u^4+4u^3+2u^2+1}}{6u^2+5u+7}$$

ou bien, en remplaçant u^2 par $\frac{1}{2}$,

$$\frac{1}{c'_0}=\frac{4u\sqrt{\frac{1}{4}+2u+2}}{10+5u}.$$

Élevons au carré et chassons les dénominateurs

$$25(4+4u+u^2)=16c_0'^2u^2\,\frac{9+8u}{4}.$$

Remplaçons encore u^2 par $\frac{1}{2}$, il vient

$$25(9+8u)=4c_0'^2(9+8u),$$

d'où l'on tire

$$c'_0=\pm\tfrac{5}{2}.$$

Ces deux valeurs étant commensurables entre elles, l'intégrale u, si elle est bien déterminée, est simplement périodique. En effet, dans son remarquable Mémoire *Sur l'intégration des différentielles qui contiennent une racine carrée d'un polynôme du troisième ou du quatrième degré* (1),

(1) *Journal de Liouville*, 1857.

M. Tchebichef a donné ce curieux exemple :

$$\int \frac{2x^6+4x^5+7x^4-3x^3-x^2-8x-8}{(2x^2-1)^2\sqrt{x^4+4x^3+2x^2+1}}\,dx$$

$$= \frac{x+\frac{1}{2}}{2x^2-1}\sqrt{x^4+4x^3+2x^2+1}$$

$$+\frac{1}{4}\,\mathrm{L}\left\{\left[\frac{(1-3x)\sqrt{x+1}+\sqrt{x^3+3x^2-x+1}}{(1-3x)\sqrt{x+1}-\sqrt{x^3+3x^2-x+1}}\right]^{10}\right.$$

$$\left.\times\frac{2x^5+x^3+3x^2-x+1-(2x^2-x+1)\sqrt{x^4+4x^3+2x^2+1}}{2x^5+x^3+3x^2-x+1+(2x^2-x+1)\sqrt{x^4+4x^3+2x^2+1}}\right\}.$$

De cette formule on déduit facilement que l'intégrale

$$\int \frac{6x^2+5x+7}{(2x^2-1)\sqrt{x^4+4x^3+2x^2+1}}\,dx$$

est égale au terme logarithmique qui figure au second membre.

Cas où l'intégrale u n'est pas bien déterminée.

23. Nous avons donné au Chapitre I les trois types d'équation $F(u, U) = 0$ qui répondent aux trois théorèmes du n° **2** : le premier comprend toutes les équations dont l'intégrale est bien déterminée et a deux périodes; le second, toutes les équations dont l'intégrale est algébrique; le troisième, toutes les équations dont l'intégrale est bien déterminée et n'a qu'une période. Si donc on a à intégrer une équation qui ne rentre dans aucun de ces trois types, on sera certain d'avance que son intégrale n'est pas *bien déterminée*. Mais le théorème précédent ajoute aux conditions qui définissent le dernier type une condition de plus : il fait connaître un nouveau cas d'exclusion. Nous allons indiquer tous les cas d'exclusion qui résultent de ce théorème, en énumérant les divers cas qui peuvent se présenter dans son application. Il est aisé de voir que ces cas sont au nombre de sept.

1^er^ CAS. — *Les paramètres c et c'_0 sont tous nuls.*

2^e^ CAS. — *Tous infinis.*

Dans ces deux cas l'intégrale peut être bien déterminée.

3^e^ CAS. — *Les paramètres c et c'_0 sont tous finis et différents de zéro.*

S'ils ne forment pas une suite de nombres tous commensurables entre eux, l'intégrale ne peut pas être bien déterminée : c'est un premier cas d'exclusion.

4^e^ CAS. — *Certains des paramètres c et c'_0 sont nuls, d'autres sont infinis.*

Ce n'est pas un cas d'exclusion.

5^e^ CAS. — *Certains des paramètres c et c'_0 sont nuls, les autres sont finis et différents de zéro.*

Si ceux qui ne sont pas nuls ne forment pas une suite de nombres tous commensurables entre eux, c'est un deuxième cas d'exclusion.

6^e^ CAS. — *Certains des paramètres c et c'_0 sont infinis, les autres sont finis et différents de zéro.*

L'intégrale ne peut pas être bien déterminée : c'est un troisième cas d'exclusion.

7^e^ CAS. — *Les paramètres c et c'_0 sont les uns nuls, les autres infinis, les autres finis et différents de zéro.*

L'intégrale ne peut pas être bien déterminée : c'est un quatrième cas d'exclusion.

Nous allons donner quelques exemples de ces règles d'exclusion.

Exemples des règles d'exclusion.

24. *Exemple I.* — Soit l'équation

$$U^2(U^2+1)-u^2(u-1)^2=0.$$

Les paramètres c'_0 sont tous finis et différents de zéro. Les paramètres c sont les racines de l'équation binôme $c^4-1=0$. Mais une équation binôme ne peut jamais avoir ses racines commensurables entre elles, à moins qu'elle ne soit du second degré. Donc les c ne sont pas tous commensurables entre eux. C'est le premier cas d'exclusion.

Exemple II. — Soit l'équation

$$U^2+U-u=0.$$

Les paramètres c sont tous infinis; l'un des paramètres c'_0 est égal à 1. C'est le troisième cas d'exclusion.

Exemple III. — Soit l'équation

$$Uu + U + u - 1 = 0.$$

L'un des c est nul, l'autre est infini; l'un des c'_0 est égal à $-\frac{1}{2}$. C'est le quatrième cas d'exclusion.

Exemple IV. — Soit l'équation

$$U(u-a) - (u-b)(u-c) = 0.$$

L'un des c est nul; l'autre est égal à 1.

Les deux valeurs de c'_0 sont $\frac{b-a}{b-c}$ et $\frac{c-a}{c-b}$. Si ces deux rapports ne sont pas commensurables, nous sommes dans le deuxième cas d'exclusion.

Exemple V. — Soit l'équation

$$(u-a)(u-b)(u-c) - U = 0.$$

Tous les c sont nuls. Les trois valeurs de c'_0 sont

$$\frac{1}{(a-b)(a-c)}, \quad \frac{1}{(b-a)(b-c)}, \quad \frac{1}{(c-a)(c-b)}.$$

La somme de ces trois quantités est nulle. Mais, si le rapport $\frac{a-c}{b-c}$ est incommensurable, nous sommes dans le deuxième cas d'exclusion.

Nous avons emprunté les trois derniers exemples au second Mémoire de MM. Briot et Bouquet sur la théorie des fonctions (*Journal de l'École Polytechnique*, XXXVI^e Cahier).

25. *Exemple VI.* — Legendre s'est occupé de l'intégrale remarquable $z = \int \frac{u\,du}{(u^3+8)\sqrt{u^3-1}}$. Clausen [1] l'a exprimée en termes finis. M. Günther [2] a retrouvé par une autre méthode le résultat de Clausen.

---

(1) *Astronom. Nachrichten*, n° 442. — *Archiv der Math. und Physik*, II^e Part., p. 335.

(2) *Bulletin de la Soc. math. de France*, t. X, p. 88 (3 mars 1882).

Considérons l'équation

$$\frac{1}{U} = \frac{u}{(u^3+8)\sqrt{u^3-1}}$$

ou bien

$$(u^3+8)^2(u^3-1) - U^2u^2 = 0.$$

Tous les paramètres c sont nuls. A l'hypothèse $U = 0$ répondent les valeurs de u fournies par l'équation $(u^3-1)(u^3+8)^2 = 0$. Aux trois points $U = 0$, $u = \sqrt[3]{1}$, le paramètre c'_0 est nul. Cherchons ce qu'il devient quand u^3 est égal à -8.

On a

$$U = \frac{(u^3+8)\sqrt{u^3-1}}{u},$$

d'où

$$\frac{1}{c'} = \frac{dU}{du} = \frac{u.3u^2-(u^3+8)}{u^2}\sqrt{u^3-1} + \frac{3}{2}\frac{(u^3+8)u^2}{u\sqrt{u^3-1}}.$$

Chassons les dénominateurs et les irrationnelles : il vient

$$4u^4(u^3-1) = [4(u^3-4)(u^3-1)+3u^3(u^3+8)]^2c'^2.$$

Élevons les deux membres au cube pour n'avoir plus dans l'équation que des puissances de u^3. Nous obtenons

$$4^3(u^3)^4(u^3-1)^3 = [4(u^3-4)(u^3-1)+3u^3(u^3+8)]^6c'^6.$$

Faisons $u^3 = -8$: les six valeurs cherchées de c'_0 seront les racines de l'équation

$$(4.12.9)^6c'^6 + 4^3.8^4.9^3 = 0.$$

On voit que dans cet exemple, comme dans ceux des précédents où les c et c'_0 sont tous finis, l'égalité $\Sigma c = \Sigma c'_0$ a lieu. Ici nous avons une équation binôme. Ses racines ne sont pas commensurables entre elles. C'est le deuxième cas d'exclusion : l'intégrale u n'est pas bien déterminée.

L'artifice employé par M. Günther consiste à décomposer l'intégrale en trois autres, en écrivant

$$6z = \int\frac{3}{2}\frac{u^2\,du}{(u^3+8)\sqrt{u^3-1}} + \int -\frac{1}{2}\frac{u^2-2u-2}{u^2-2u+4}\frac{du}{\sqrt{u^3-1}} + \int\frac{1}{2}\frac{u-1}{u+2}\frac{du}{\sqrt{u^3-1}}.$$

Si l'on considère séparément les trois équations

$$\frac{1}{U} = \frac{3}{2}\frac{u^2}{(u^3+8)\sqrt{u^3-1}}, \quad \frac{1}{U} = -\frac{1}{2}\frac{u^2-2u-2}{(u^2-2u+4)\sqrt{u^3-1}}, \quad \frac{1}{U} = \frac{1}{2}\frac{u-1}{(u+2)\sqrt{u^3-1}},$$

on reconnaît sans peine que chacune d'elles vérifie les conditions propres au cas où l'intégrale u est bien déterminée et n'a qu'une période.

II. — Intégrales algébriques de différentielles algébriques.

26. Abel a montré le premier que, *si l'intégrale* $z = \int \frac{du}{U}$, U *étant lié à* u *par une équation algébrique* $F(u, U) = 0$, *est une fonction algébrique de* u, *cette intégrale s'exprime rationnellement au moyen de* u *et de* U. Ce théorème peut s'établir très simplement.

Je dis que, si u est une fonction algébrique de z, u s'exprime rationnellement au moyen de z et de $\frac{du}{dz} = U$. Soit $f(u, z) = 0$ l'équation algébrique, supposée irréductible, qui lie u et z. On en déduit

$$U f'_u(u, z) + f'_z(u, z) = 0.$$

Donnons à z une valeur déterminée z_0, arbitrairement choisie. Pour une valeur convenable U_0 attribuée à U, les deux équations

$$f(u, z_0) = 0, \quad U_0 f'_u(u, z_0) + f'_z(u, z_0) = 0$$

sont vérifiées par une même valeur u_0 de u, et elles n'ont qu'une seule racine commune, en vertu de l'irréductibilité de l'équation $f(u, z) = 0$. Il n'y a d'exception que pour certains couples, en nombre limité, de valeurs z_0 et U_0. Donc, d'après la théorie de l'élimination, u_0 est une fonction rationnelle de z_0 et U_0; et cette théorie fournit le moyen d'obtenir l'expression rationnelle de u en fonction de z et de U.

De ce théorème d'Abel résultent des conséquences importantes. Nous en signalerons seulement une, qui est bien connue :

Si l'intégrale u *de l'équation différentielle* $F(u, U) = 0$ *est algébrique, la courbe représentée par l'équation intégrale* $f(u, z) = 0$ *est du même genre que la courbe représentée par l'équation différentielle* $F(u, U) = 0$.

En effet, les coordonnées u et z des points de la courbe f s'expriment rationnellement, d'après ce qui précède, en fonction des coordonnées u et U des points de la courbe F.

Réciproquement les coordonnées u et U des points de la courbe F s'expriment rationnellement en fonction des coordonnées u et z des points de la courbe f; en effet, on a

$$u = u, \quad U = -\frac{f'_z}{f'_u}.$$

Cela étant, il résulte d'une proposition connue (¹) que les deux courbes f et F sont du même genre.

27. Passons à la détermination des intégrales algébriques.

Étant donnée une équation $F(u, U) = 0$, on reconnaît qu'un au moins des paramètres c et c'_0 est infini, et qu'aucun d'eux n'est fini et différent de zéro. Si l'intégrale est bien déterminée, elle ne peut être qu'algébrique. Est-elle algébrique? Telle est la question qu'il s'agit de résoudre.

Pour que l'intégrale soit algébrique, il faut et il suffit que la fonction inverse $z = \int \frac{du}{U}$ n'ait aucune période. Mais ce critérium ne paraît applicable qu'à des équations particulièrement simples.

On est donc réduit à supposer qu'il existe une relation algébrique à coefficients indéterminés entre u et z, et l'on cherche à déterminer ces coefficients de manière à vérifier l'équation différentielle. Liouville a publié sur ce sujet deux Mémoires, qui ont paru dans le *Recueil des Savants étrangers*, t. V (1838) et dans le *Journal de l'École Polytechnique* (XXIIᵉ Cahier). Puis, dans une Note insérée aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (août 1837) et reproduite au Tome III de son Journal, il a ramené la question à la résolution d'un système d'équations linéaires.

On peut, en supposant l'intégrale algébrique, trouver directement soit l'ordre de la courbe intégrale $f(u, z) = 0$, soit les exposants des plus hautes puissances de z et de u qui figurent dans cette équation. M. Zeuthen (²) a indiqué le moyen de déterminer l'ordre de la courbe

(¹) Clebsch, *Leçons sur la Géométrie*, édit. française, t. II, p. 170.

(²) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 1880, t. XC, p. 1114.

intégrale; sa méthode exige que l'on sache distribuer en systèmes circulaires toutes les valeurs de U qui deviennent nulles pour des valeurs finies de u.

MM. Briot et Bouquet (*Fonctions elliptiques*, p. 218 et suivantes) donnent un moyen d'évaluer l'exposant de la plus haute puissance de u qui figure dans l'équation intégrale. (Quant au plus haut exposant de z, il est égal au plus haut exposant de U dans l'équation à intégrer.) Mais leur méthode exige que l'on sache distribuer en systèmes circulaires les valeurs de U qui deviennent nulles pour des valeurs finies de u et les valeurs de $V = \frac{dv}{dz}$ qui deviennent nulles pour $v = \frac{1}{u} = 0$.

On peut obtenir, par des opérations purement arithmétiques, le degré de l'équation intégrale par rapport à u.

28. Théorème. — *Si l'intégrale u d'une équation différentielle algébrique* $F(u, U) = 0$ *est elle-même algébrique, le degré de l'équation intégrale par rapport à u est égal au nombre des valeurs finies ou infinies de u qui satisfont à la fois aux deux équations* $\frac{u}{U} = \infty$ *et* $\frac{du}{dU} = \infty$.

Étant donnée une équation algébrique entre u et z, le degré de cette équation par rapport à u est égal au nombre des valeurs de u, tant infinies que finies, qui répondent à une valeur quelconque de z. Pour cette valeur nous choisirons $z = \infty$. Nous continuerons à désigner par c' la dérivée $\frac{du}{dU}$, et nous conviendrons de représenter par c le rapport $\frac{u}{U}$, quelles que soient les valeurs de u et U.

Soit donc z infini. Supposons d'abord u fini : puisque l'intégrale $z = \int^u \frac{du}{U}$ est infinie, U est nul. Les p racines d'un des systèmes circulaires formés par les valeurs de u qui correspondent à $z = \infty$ sont représentées par un développement tel que celui-ci :

$$u - b = hz^{-\frac{q}{p}} + \ldots;$$

d'où

$$U = -\frac{q}{p} hz^{-\frac{q}{p}-1} + \ldots.$$

D'après cela, le rapport $\frac{u-b}{\mathrm{U}}$ est infini avec z : ainsi l'on a $c'_0 = \infty$. Si b n'est pas nul, il est clair que le rapport $c = \frac{b}{\mathrm{U}}$ est infini; si b est nul, c étant égal à $\frac{u-b}{\mathrm{U}}$ est encore infini.

Réciproquement, si les deux rapports $\frac{u}{\mathrm{U}}$ et $\frac{du}{d\mathrm{U}}$ sont infinis pour une valeur finie de u, z est infini. En effet, il résulte de nos hypothèses que U est nul. Si z était fini, on aurait

$$u - b = h(z-a)^\mu + \ldots, \quad (\mu > 0),$$
$$\mathrm{U} = \mu h(z-a)^{\mu-1} + \ldots, \quad (\mu > 1);$$

le rapport $\frac{u-b}{\mathrm{U}}$, au lieu de devenir infini pour $z = a$, tendrait vers zéro.

On montrera de même que, quand z est infini, si u est infini, les deux paramètres c et c' sont infinis; et réciproquement, que si ces deux paramètres sont infinis en même temps que u, z est infini aussi. Donc, pour que z soit infini, il faut et il suffit qu'on ait à la fois

$$c = \infty, \quad c' = \infty.$$

Revenons aux formules écrites plus haut. Si b n'est pas nul, on en tire

$$u - b = h' c'^{-\frac{q}{p}} + \ldots = h'' c^{-\frac{q}{q+p}} + \ldots.$$

Pour $c' = \infty$, p valeurs de u deviennent égales à b; pour $c = \infty$, $p+q$ valeurs de u deviennent égales à b : au système circulaire considéré correspondent donc p valeurs de u égales à b et qui vérifient à la fois les deux équations $c = \infty$, $c' = \infty$. Si b est nul, on trouve

$$u = h' c'^{-\frac{q}{p}} + \ldots = h'' c^{-\frac{q}{p}} + \ldots,$$

d'où la même conclusion. Les mêmes raisonnements s'appliquant au cas où u est infini, le théorème est démontré.

Règle. — On formera les deux équations entre c et u et entre c' et u. On fera $c = \infty$, $c' = \infty$. Le nombre des solutions communes, finies ou infinies, des deux équations ainsi obtenues est égal au degré cherché.

29. *Corollaire.* — Le degré par rapport à u de l'équation intégrale

est au plus égal au degré par rapport à u de l'équation entre c et u. Or cette équation est $F\left(u, \frac{u}{c}\right) = 0$. Son degré par rapport à u est au plus égal à l'ordre de la courbe $F(u, U) = 0$. Ainsi *le degré cherché est au plus égal à l'ordre de la courbe représentée par l'équation à intégrer.*

Remarque. — Avant de donner des exemples, nous signalerons un cas où l'on connaît sans calcul l'ordre de la courbe intégrale : c'est celui où tous les paramètres c'_0 sont nuls.

Dans ce cas, u ne peut pas être fini pour des valeurs infinies de z; car, en vertu de la démonstration qui vient d'être faite, c'_0 serait infini. On ne peut pas supposer non plus que, u et z étant infinis, $\frac{du}{dz} = U$ soit nul : car, si u est infini et U nul, le rapport $\left(\frac{du}{dU}\right)_{U=0} = c'_0$ est nécessairement infini.

En conséquence, aucun des coefficients angulaires des directions asymptotiques de la courbe intégrale n'est nul. Dans l'équation intégrale $f(u, z) = 0$, le terme du plus haut degré en z a pour coefficient une constante : sans quoi un au moins des coefficients angulaires des directions asymptotiques serait nul. De plus l'ordre de la courbe intégrale est égal au degré μ de son équation par rapport à z : car, si cet ordre était supérieur à μ, les termes du degré le plus élevé de l'équation contiendraient nécessairement en facteur une puissance de u, et un au moins des coefficients angulaires des directions asymptotiques serait nul.

Ainsi, dans ce cas, l'ordre de la courbe intégrale est égal au plus haut exposant μ de la variable U dans l'équation à intégrer.

Exemples de la détermination du degré de l'équation intégrale par rapport à u.

30. *Exemple I.* — Soit l'équation différentielle

$$(4 - u^3)U^2 + 4(2u^3 + 1)U + u^3(2u^3 + 1) = 0.$$

Le terme de degré le plus élevé étant le terme $2u^6$, les paramètres c sont tous nuls pour les points de la courbe situés à l'infini.

Comme nous connaissons les valeurs de u qui répondent à la valeur $U = 0$, nous pouvons, pour étudier les paramètres c'_0, former l'équation entre c' et u, au lieu de former celle entre c' et U. De l'équation proposée on déduit

$$\mathrm{U} = \frac{-2(2u^3+1)+(u^3+2)\sqrt{2u^3+1}}{4-u^3},$$

d'où

$$\gamma' = \frac{1}{c'} = \frac{d\mathrm{U}}{du} = \frac{-54u^2}{(4-u^3)^2} + \frac{3u^2}{(4-u^3)^2}\,\frac{14(1+u^3)-u^6}{\sqrt{2u^3+1}}.$$

Pour $\mathrm{U} = 0$, on a, soit $u = 0$, soit $2u^3+1 = 0$. Pour $u = 0$, il est visible que γ' est nul : c'_0 est infini. Pour les trois racines de l'équation $2u^3+1 = 0$, γ' est infini : c'_0 est nul.

Donc, si l'intégrale est bien déterminée, elle ne peut être qu'algébrique.

Cherchons le degré par rapport à u de l'équation intégrale.

Faisons dans l'équation proposée $u = c\mathrm{U}$, ou bien $u = \frac{\mathrm{U}}{\gamma}$, d'où $\mathrm{U} = \gamma u$: il vient, après suppression du facteur commun u,

$$(4-u^3)\gamma^2 u + 4(2u^3+1)\gamma + u^2(2u^3+1) = 0.$$

Pour $\gamma = 0$, cette équation se réduit à

$$u^2(2u^3+1) = 0. \tag{1}$$

Quant à l'équation entre γ' et u, si l'on y fait $\gamma' = 0$, puis qu'on chasse le radical, on obtient

$$(54u^2)^2(2u^3+1) - (3u^2)^2[14(1+u^3)-u^6]^2 = 0. \tag{2}$$

On voit immédiatement que les équations (1) et (2) n'ont d'autres racines communes que deux fois la racine $u = 0$. Donc, si l'intégrale u est algébrique, l'équation intégrale est du second degré par rapport à u.

En effet, l'intégrale u est donnée par l'équation $u^2z^2 - 2(z+u) = 0$.

31. *Exemple II.* — Soit l'équation

$$\mathrm{U}^3 - \mathrm{U}^2 + 4u^3 - 27u^6 = 0.$$

Faisons $\mathrm{U} = \gamma u$. Cette équation devient

$$\gamma^3u^3 - \gamma^2u^2 + 4u^3 - 27u^6 = 0$$

ou bien

$$\gamma^3 u - \gamma^2 + 4u - 27u^4 = 0.$$

Pour $y = 0$, ses quatre racines sont les racines de l'équation

$$u(4 - 27u^3) = 0. \tag{1}$$

Différentions l'équation proposée, et faisons $y' = \dfrac{dU}{du}$: il vient

$$(3U^2 - 2U)y' + 6u^2(2 - 27u^3) = 0.$$

Éliminons U entre cette équation et la proposée : nous trouvons

$$u^3(2 - 27u^3)^2[6^3u^3(2 - 27u^3) + 6^2y'u - y'^3(4 - 27u^3)] = 0$$

ou bien

$$6^3u^3(2 - 27u^3) + 6^2y'u - y'^3(4 - 27u^3) = 0.$$

Pour $y' = 0$, les six racines de cette équation sont celles de l'équation

$$u^3(2 - 27u^3) = 0. \tag{2}$$

Les équations (1) et (2) n'ont qu'une seule racine commune, savoir $u = 0$. Donc, si l'intégrale est algébrique, elle est rationnelle. Effectivement l'équation intégrale est

$$u = \frac{z}{z^3 + 1}.$$

Cet exemple est emprunté au troisième Mémoire de MM. Briot et Bouquet sur la théorie des fonctions (*Journal de l'École Polytechnique*, XXXVI^e Cahier).

Exemple III. — Soit l'équation

$$2uU^3 - 3u^2 + 1 = 0.$$

Faisons $U = yu$. Cette équation devient

$$2y^3u^4 - 3y^2u^2 + 1 = 0.$$

Pour $y = 0$, elle admet quatre racines infinies.

L'équation entre $y' = \dfrac{dU}{du}$ et $v = \dfrac{1}{u}$ est la suivante :

$$v^2\{[18y'^2 - (9y' + 1)v^2]^2 - 9y'^2(6y' - 5v^2)(6y' - 1)\} = 0$$

ou bien

$$[18y'^2 - (9y' + 1)v^2]^2 - 9y'^2(6y' - 5v^2)(6y' - 1) = 0.$$

Pour $y' = 0$, cette équation admet quatre fois la racine $v = 0$. Ainsi les équations $y = 0$, $y' = 0$ ont en commun quatre racines infinies. Donc, si l'équation intégrale est algébrique, elle est du quatrième degré par rapport à u. Effectivement, cette équation est

$$64z^3 + 144z^2 - 27z(8u^2 - 3) + 27u^2(u^2 - 1) = 0.$$

Cet exemple est cité par MM. Briot et Bouquet (*Fonctions elliptiques*, p. 220).

32. *Application.* — Nous allons appliquer les principes précédents à l'étude de la fonction inverse de l'intégrale elliptique de seconde espèce. Désignons cette fonction par u : elle satisfait à l'équation différentielle

$$\frac{1}{U^2} = \frac{u^4}{(1 - u^2)(1 - k^2 u^2)}$$

ou bien

$$u^4 U^2 - (1 - u^2)(1 - k^2 u^2) = 0.$$

On voit que les directions asymptotiques de la courbe représentée par cette équation sont parallèles aux axes coordonnés. Les paramètres c sont nuls ou infinis. En conséquence, l'intégrale u, si elle n'a en chaque point qu'un nombre limité de valeurs, est une fonction algébrique. L'équation qui lie u et z est du second degré par rapport à z. Cherchons son degré par rapport à u.

Posons $U = yu$: il vient

$$y^2 u^6 - (1 - u^2)(1 - k^2 u^2) = 0.$$

Cette équation, du sixième degré par rapport à u, donne pour $y = 0$ quatre valeurs finies et deux valeurs infinies de u.

Formons l'équation entre u et $y' = \frac{dU}{du}$. L'équation à intégrer peut s'écrire

$$U = \frac{\sqrt{(1 - u^2)(1 - k^2 u^2)}}{u^2},$$

d'où résulte

$$y' = \frac{dU}{du} = \frac{(1 + k^2)u^2 - 2}{u^3\sqrt{(1 - u^2)(1 - k^2 u^2)}}.$$

Mettons cette équation sous forme entière,

$$u^6(1-u^2)(1-k^2u^2)\gamma'^2-[(1+k^2)u^2-2]^2=0.$$

Elle est du dixième degré par rapport à u. Pour $\gamma'=0$ elle donne quatre valeurs finies et six valeurs infinies de U. On voit immédiatement qu'aucune des valeurs finies de u qui rendent γ nul ne peut annuler γ', à moins que k^2 ne soit égal à 1. Ce cas étant exclu, les équations $\gamma=0$, $\gamma'=0$ n'ont en commun que deux solutions, savoir deux valeurs infinies de u.

Le degré de l'équation intégrale par rapport à u est donc 2. Cette équation peut s'écrire

$$Az^2+2Bz+C=0,$$

A, B, C désignant trois polynômes entiers en u, de degré inférieur ou égal à 2. On en tire

$$z=\frac{-B+\sqrt{B^2-AC}}{A}.$$

Prenons la dérivée par rapport à u

$$\frac{1}{U}=\frac{dz}{du}=\frac{BA'-AB'}{A^2}-\frac{2B(BA'-AB')+A(AC'-CA')}{2A^2\sqrt{B^2-AC}}.$$

Pour que le second membre pût être égal à $\dfrac{u^2}{\sqrt{(1+u^2)(1-k^2u^2)}}$, il faudrait d'abord que $BA'-AB'$ fût nul, c'est-à-dire que B fût égal à λA, λ désignant une constante. Il resterait alors

$$\frac{dz}{du}=-\frac{AC'-CA'}{2A\sqrt{A}\sqrt{\lambda^2A-C}}.$$

Or, pour u infini, $\dfrac{u^2}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}$ n'est pas nul, tandis que $\dfrac{AC'-CA'}{A\sqrt{A}\sqrt{\lambda^2A-C}}$ ne peut être que nul.

Ainsi nous retrouvons cette propriété bien connue : la fonction inverse de l'intégrale elliptique de seconde espèce a, en chaque point, une infinité de valeurs.

III. — Intégration des équations du genre zéro.

33. Le cas où l'équation à intégrer est du genre zéro a acquis une importance spéciale, par suite d'une remarque fondamentale que l'on doit à M. Hermite [1].

M. Hermite a montré que : *Si l'intégrale u est uniforme et doublement périodique, la courbe* $F = 0$ *est du premier genre; si l'intégrale est uniforme et rationnelle ou simplement périodique, la courbe* $F = 0$ *est unicursale.*

M. Picard a donné depuis [2] une proposition qui comprend celle-là : *S'il existe une relation algébrique entre deux fonctions uniformes de la variable z, sans autre point singulier essentiel que le point $z = \infty$, cette relation ne peut être que du genre zéro ou du genre* 1.

Mais la démonstration de M. Hermite ne s'applique pas seulement aux fonctions uniformes. Elle prouve aussi que, s'il existe une relation algébrique du genre zéro entre la fonction u et la variable z, ou bien entre u et une exponentielle $e^{\frac{z}{\varphi}}$, l'équation différentielle entre u et U est du genre zéro. La proposition de M. Hermite comporte donc des réciproques de deux types différents : réciproques relatives aux intégrales uniformes, réciproques relatives aux intégrales non uniformes.

Nous traiterons à part, dans le Chapitre suivant, les intégrales uniformes. Nous nous bornerons ici à examiner les équations du genre zéro, nous proposant de reconnaître si l'intégrale est bien déterminée, et de l'obtenir quand elle l'est.

Quand l'équation différentielle $F(u, U) = 0$ est du genre zéro, l'intégrale $z = \int^{u} \frac{du}{U}$ n'a d'autres périodes que des périodes polaires; la fonction inverse u, si elle est bien déterminée, ne peut avoir plus d'une période. D'où deux cas, suivant que l'intégrale est algébrique ou simplement périodique.

Le cas où l'intégrale u est algébrique vient d'être étudié en général.

---

[1] Cours autographié de l'École Polytechnique, 1873. — *Proceedings of the London math. Society*, t. IV, 1873.

[2] *Bulletin des Sciences mathém.*, 1880.

On pourra aussi, après avoir exprimé rationnellement les coordonnées u et U en fonction d'un paramètre t, obtenir, par la méthode de M. Hermite [1], la partie algébrique de l'intégrale $z = \int \frac{du}{U} = \int \frac{\varphi(t)}{f(t)}\,dt$. Pour que l'intégrale u soit algébrique, il faut et il suffit que la différentielle de cette partie algébrique de z soit exactement égale à $\frac{\varphi(t)}{f(t)}\,dt$.

Il reste à traiter le cas où l'équation $F(u, U) = 0$ vérifie les conditions nécessaires pour que l'intégrale puisse être bien déterminée et simplement périodique.

34. Théorème. — *Étant donnée l'équation différentielle* $F(u, U) = 0$, *si cette équation est du genre zéro, et si les paramètres* c *et* c'_0 *sont tous finis et tous commensurables entre eux, l'intégrale* u *est racine d'une équation algébrique dont les coefficients sont des fontions entières d'une exponentielle* $e^{\frac{z}{\rho}}$.

Les nombres c et c'_0 étant tous commensurables entre eux, il existe un nombre ρ tel que les quotients des c et c'_0 par ce nombre soient des entiers positifs ou négatifs sans diviseur commun. Considérons l'intégrale

$$z = \int^{u} \frac{du}{U}.$$

Cette intégrale n'a d'autres périodes que des périodes polaires, puisque l'équation $F(u, U) = 0$ est du genre zéro; et nous avons vu au n° 7 que ces périodes polaires sont égales à des multiples entiers des quantités $2i\pi c$ et $2i\pi c'_0$. D'après la définition de ρ, l'intégrale

$$\frac{z}{\rho} = \frac{1}{\rho}\int^{u} \frac{du}{U}$$

n'admet que des périodes polaires, qui sont des multiples entiers de $2i\pi$; et si μ est le degré par rapport à U de l'équation $F(u, U) = 0$, cette intégrale a en chaque point μ valeurs, augmentées de multiples quelconques de $2i\pi$.

(1) *Cours d'Analyse* (imprimé), p. 265 et suiv.

En conséquence, la fonction $e^{\frac{1}{\rho}\int^{u}\frac{du}{U}}$ n'a en chaque point que μ valeurs distinctes. De plus, cette exponentielle n'est infinie que quand son exposant $\frac{z}{\rho}$ est infini ; mais les paramètres c et c'_0 étant tous finis, les infinis de z sont tous des points singuliers logarithmiques simples (réciproque du théorème II du Chap. I) : en ces points on a donc

$$z = c'_0\,\mathrm{L}\,(u-b)+\ldots,\quad \text{si } u \text{ est fini}$$

ou bien

$$z = c\,\mathrm{L}\,u+\ldots,\qquad \text{si } u \text{ est infini.}$$

Les rapports $\frac{c'_0}{\rho}$ et $\frac{c}{\rho}$ étant des entiers, l'exponentielle $e^{\frac{z}{\rho}}$ est de l'ordre d'une puissance entière de $u-b$ ou de u. Elle n'est donc infinie que quand u est infini : le point $u=\infty$ est, soit un pôle proprement dit de cette fonction, soit un point critique algébrique en même temps qu'un pôle. Quant aux points critiques pour lesquels z est fini, il suffit de développer $e^{\frac{z}{\rho}}$ en série pour reconnaître que ce sont des points critiques algébriques de cette fonction.

De ces trois propriétés de la fonction $e^{\frac{z}{\rho}}$ il résulte que cette fonction est une fonction algébrique de u [1].

Le théorème est ainsi démontré.

35. *Autre démonstration.* — Le théorème qui précède peut aussi s'établir au moyen d'un lemme qui est évident.

Lemme. — *Pour que l'intégrale d'une différentielle rationnelle* $\frac{\varphi(t)}{f(t)}dt$ *ne contienne pas de partie algébrique et s'exprime par un seul logarithme ayant pour argument une fonction algébrique de t, il faut et il suffit :*

1° *Que le polynôme* $\varphi(t)$ *soit d'un degré moindre que le polynôme* $f(t)$;

2° *Que la fraction* $\frac{\varphi}{f}$ *n'ait que des infinis simples;*

3° *Que tous ses résidus soient commensurables entre eux.*

Cela posé, soit n l'ordre de la courbe $\mathrm{F}(u, \mathrm{U}) = 0$, supposée unicur-

---

(1) Briot et Bouquet, *Fonctions elliptiques*, p. 216.

sale. Les coordonnées d'un point de cette courbe s'expriment rationnellement par les formules

$$u = \frac{\psi(t)}{\theta(t)}, \quad U = \frac{\chi(t)}{\theta(t)},$$

ψ, χ et θ étant trois polynômes du degré n en t; ces trois polynômes sont premiers entre eux, mais pas nécessairement premiers deux à deux.

En posant

$$\psi' = \frac{d\psi}{dt}, \quad \theta' = \frac{d\theta}{dt},$$

on trouve, par un calcul facile,

$$dz = \frac{\theta\psi' - \theta'\psi}{\theta\chi}\, dt.$$

Je ne fais qu'indiquer la marche à suivre pour reconnaître que cette différentielle vérifie les conditions du lemme ci-dessus.

1° On voit que le numérateur de $\frac{dz}{dt}$ est du degré $2n-2$ au plus et son dénominateur du degré $2n$.

2° De ce que les paramètres c et c'_0 sont tous finis, on déduit que les polynômes θ et χ sont premiers entre eux et que toute racine multiple d'ordre m de l'un de ces polynômes est racine d'ordre $m-1$ au moins du numérateur $\theta\psi' - \theta'\psi$; en sorte que la fraction $\frac{dz}{dt}$ n'a que des infinis simples.

3° Le résidu A relatif à une racine simple a du polynôme θ est égal à $-\left(\frac{u}{U}\right)_{t=a} = -c$. Si a est racine d'ordre α du polynôme θ, le résidu correspondant est égal à $-\alpha\left(\frac{u}{U}\right)_{t=a} = -\alpha c$. De même le résidu B relatif à la racine b, supposée racine d'ordre β du polynôme χ, est égal à $\beta\left(\frac{du}{dU}\right)_{t=b} = \beta c'_0$. Les nombres α et β étant des entiers et les paramètres c et c'_0 étant tous commensurables entre eux, les résidus A et B sont aussi tous commensurables entre eux.

36. Voici comment on obtiendra l'équation intégrale. A toute racine finie et différente de zéro de l'équation aux paramètres c répond au moins une racine a de l'équation $\theta = 0$, qui est en même temps un infini simple de $\frac{dz}{dt}$. Si cette racine a est racine d'ordre α,

l'équation aux paramètres c admet α fois la racine c, et le résidu correspondant pour $\frac{dz}{dt}$ est $-\alpha c$, tandis que, si a est racine simple, ce résidu est $-c$. D'ailleurs il peut arriver qu'à une autre racine a_1, différente de a, corresponde la même valeur de c. D'après cela, la somme des résidus A est exactement égale à la somme, changée de signe, des racines c multipliées chacune par son ordre de multiplicité, c'est-à-dire à la somme changée de signe des racines de l'équation aux paramètres c.

On verrait de même que la somme des résidus B est exactement égale à la somme (prise avec son signe) des racines de l'équation aux paramètres c'_0.

Nous avons appelé ρ le plus grand diviseur commun à tous les nombres de la suite formée par l'ensemble des paramètres c et c'_0 : ρ est un nombre entier ou fractionnaire, incommensurable ou même imaginaire, tel que chacun des c soit de la forme $c_i = \delta_i \rho$, et chacun des c'_0 de la forme $(c'_0)_i = \delta'_i \rho$, les δ_i et δ'_i étant des entiers positifs ou négatifs qu'aucun entier ne divise tous à la fois; plusieurs peuvent être égaux entre eux.

Soient $c_1 = \rho p_1$, $c_2 = \rho p_2$, ... les h valeurs de c pour lesquelles δ_i est positif.

Soient $c_{h+1} = -\rho n_1$, $c_{h+2} = -\rho n_2$, ... les k valeurs de c pour lesquelles δ_i est négatif.

Soient $(c'_0)_1 = \rho p'_1$, $(c'_0)_2 = \rho p'_2$, ... les h' valeurs de c'_0 pour lesquelles δ'_i est positif.

Soient $(c'_0)_{h'+1} = -\rho n'_1$, $(c'_0)_{h'+2} = -\rho n'_2$, ... les k' valeurs de c'_0 pour lesquelles δ'_i est négatif.

Tous les nombres p_1, p_2, ..., n_1, n_2, ..., p'_1, p'_2, ..., n'_1, n'_2, ... sont entiers et positifs, et premiers entre eux. Il est clair que l'intégrale z s'exprimera en fonction de t de la manière suivante :

$$\begin{aligned} z = &-\sum_{i=1}^{i=h} \rho p_i \mathrm{L}(t - a_i) + \sum_{i=1}^{i=k} \rho n_i \mathrm{L}(t - a_{h+i}) \\ &+ \sum_{i=1}^{i=h'} \rho p'_i \mathrm{L}(t - b_i) - \sum_{i=1}^{i=k'} \rho n'_i \mathrm{L}(t - b_{h'+i}). \end{aligned}$$

Le même terme peut se répéter plusieurs fois au second membre. On peut encore mettre cette équation sous la forme

$$e^{\frac{z}{\rho}}=\frac{(t-a_{h+1})^{n_1}(t-a_{h+2})^{n_2}\ldots(t-b_1)^{p'_1}(t-b_2)^{p'_2}\ldots}{(t-a_1)^{p_1}(t-a_2)^{p_2}\ldots(t-b_{h'+1})^{n'_1}(t-b_{h'+2})^{n'_2}\ldots}.$$

On voit que le numérateur est un polynôme du degré $\Sigma n_i+\Sigma p'_i$, le dénominateur un polynôme du degré $\Sigma n'_i+\Sigma p_i$. En vertu d'un théorème démontré au n° **13**, on a

$$\Sigma c=\Sigma c'_0,$$

égalité qui résulte aussi de ce que le résidu intégral de la fraction rationnelle $\frac{dz}{dt}$ est nul. Or nous avons ici

$$\Sigma c=\Sigma\rho p_i-\Sigma\rho n_i,\quad \Sigma c'_0=\Sigma\rho p'_i-\Sigma\rho n'_i,$$

d'où résulte la relation

$$\Sigma n_i+\Sigma p'_i=\Sigma n'_i+\Sigma p_i.$$

La fraction rationnelle qui représente $e^{\frac{z}{\rho}}$ a donc ses deux termes du même degré N; et ce degré est connu, puisque tous les nombres p et n sont connus. Mais il peut arriver, comme on le verra bientôt sur un exemple, que cette fraction rationnelle soit une puissance exacte d'une autre fraction rationnelle à termes de degrés moindres. Pour obtenir directement la fraction la plus simple qui puisse représenter l'exponentielle cherchée, nous supposerons qu'on ait exprimé rationnellement les coordonnées u et U de la courbe $F(u, U)=0$.

37. Reprenons les formules

$$u=\frac{\psi(t)}{\theta(t)},\quad \frac{du}{dz}=U=\frac{\chi(t)}{\theta(t)}$$

données plus haut. On en déduit

$$\frac{dz}{dt}=\frac{1}{U}\frac{du}{dt}=\frac{\theta\psi'-\theta'\psi}{\theta\chi}.$$

C'est cette équation qu'il s'agit d'intégrer, sans connaître les racines du dénominateur : car il peut se faire qu'on ne sache pas les obtenir. Rien n'est plus facile que de faire disparaître les facteurs communs au numérateur et au dénominateur (recherche du plus grand commun diviseur). Nous allons donc résoudre la question en supposant que la fraction considérée ait ses deux termes premiers entre eux. Soit $\frac{\varphi}{\theta_1\chi_1}$ cette fraction. Puisque l'on connaît les deux polynômes θ_1, χ_1 qui ne sont autre chose que les polynômes θ et χ après suppression d'un certain nombre de facteurs binômes, on sait mettre la fraction $\frac{\varphi}{\theta_1\chi_1}$ sous la forme $\frac{\theta_0}{\theta_1}+\frac{\chi_0}{\chi_1}$.

Considérons la fraction $\frac{\theta_0}{\theta_1}$. Puisque toutes les racines a de son dénominateur sont distinctes, ses résidus auront pour valeurs les diverses valeurs que prend le rapport $\frac{\theta_0(t)}{\theta'_1(t)}$ quand on substitue à t successivement les diverses racines de l'équation $\theta_1=0$.

Or nous connaissons ces résidus, ou du moins une suite de nombres parmi lesquels figurent tous ces résidus : en effet, les racines simples de l'équation aux paramètres c sont des résidus de cette fraction ; et si c_1 est une racine quintuple, par exemple, de cette équation, certains des nombres c_1, $2c_1$, $3c_1$, $4c_1$, $5c_1$ seront des résidus.

Soit c l'une des racines simples de l'équation aux paramètres c. Posons

$$\frac{\theta_0(t)}{\theta'_1(t)}=-c,$$

et cherchons les racines communes à cette équation et à l'équation $\theta_1(t)=0$: il n'y en a qu'une. Nous séparerons ainsi un à un les divers facteurs binômes de $\theta_1(t)$ auxquels correspondent les racines simples de l'équation en c.

Posons ensuite

$$\frac{\theta_0(t)}{\theta'_1(t)}=-c_1,\quad -2c_1,\quad -3c_1,\quad \ldots,\quad -mc_1,$$

c_1 étant racine d'ordre m de l'équation en c, et cherchons les racines communes à chacune de ces équations et à l'équation $\theta_1(t)=0$. En opérant de même pour chacune des racines distinctes de l'équation en c, nous décomposerons, en appliquant plusieurs fois le procédé de recherche du plus grand commun diviseur, le polynôme $\theta_1(t)$ en un produit de facteurs de la forme

$$\theta_1(t) = \mathfrak{S}_1(t).\mathfrak{S}_2(t).\mathfrak{S}_3(t)\ldots\mathfrak{S}_l(t),$$

les divers facteurs $\mathfrak{S}$ étant tels qu'à toutes les racines de chacun d'eux correspond le même résidu $-\alpha c$. Ces facteurs $\mathfrak{S}$ pourront être encore de degrés trop élevés pour qu'on sache trouver leurs racines; mais nous n'avons pas besoin de les connaître.

On sait mettre la fraction $\frac{\theta_0}{\theta_1}$ sous la forme

$$\frac{\theta_0(t)}{\theta_1(t)} = \frac{\varpi_1(t)}{\mathfrak{S}_1(t)} + \frac{\varpi_2(t)}{\mathfrak{S}_2(t)} + \ldots + \frac{\varpi_l(t)}{\mathfrak{S}_l(t)}.$$

Chacune des fractions qui figurent au second membre jouit de cette propriété que tous ses résidus sont égaux entre eux, et différents des résidus des autres fractions. Il est aisé de prouver que chaque numérateur ϖ est d'un degré inférieur au degré du dénominateur correspondant $\mathfrak{S}$, et n'a aucun facteur binôme commun avec lui. D'après cela, chacun des numérateurs ϖ est, à un facteur constant près, la dérivée du dénominateur correspondant $\mathfrak{S}$. En effet, si l'on a

$$\frac{\varpi(t)}{\mathfrak{S}(t)} = \mathrm{C}\left(\frac{1}{t-a_1} + \frac{1}{t-a_2} + \ldots + \frac{1}{t-a_i}\right),$$

a_1, a_2, ..., a_i étant les racines de l'équation $\mathfrak{S}(t) = 0$ (qui sont toutes différentes), il en résulte nécessairement $\varpi(t) = \mathrm{C}\mathfrak{S}'(t)$.

Ainsi la fraction $\frac{\theta_0(t)}{\theta_1(t)}$ est mise sous une forme qui la rend immédiatement intégrable.

En effectuant au moyen des paramètres c'_0 les mêmes opérations sur la fraction $\frac{\chi_0(t)}{\chi_1(t)}$, on la mettra aussi sous une forme qui la rendra immédiatement intégrable.

Finalement, l'exponentielle e^z sera exprimée en fonction de t, de la manière suivante :

$$e^z = \frac{\mathrm{A}_1^{\alpha_1}\mathrm{A}_2^{\alpha_2}\ldots\mathrm{A}_h^{\alpha_h}}{\mathrm{B}_1^{\beta_1}\mathrm{B}_2^{\beta_2}\ldots\mathrm{B}_k^{\beta_k}},$$

les lettres A et B désignant des polynômes entiers en t, tous connus, et les α, β des multiples positifs du nombre appelé précédemment ρ. Mais il pourra arriver que ρ ne soit plus le plus grand commun diviseur de ces exposants ; soit ρ' ce nouveau plus grand commun diviseur : posons

$$\alpha_i = \rho' \alpha'_i \quad (i = 1, 2, \ldots, h),$$
$$\beta_i = \rho' \beta'_i \quad (i = 1, 2, \ldots, k),$$

il vient

$$e^{\frac{z}{\rho'}} = \frac{A_1^{\alpha'_1} A_2^{\alpha'_2} \ldots A_h^{\alpha'_h}}{B_1^{\beta'_1} B_2^{\beta'_2} \ldots B_k^{\beta'_k}}.$$

Les deux termes de la fraction rationnelle sont du même degré : ce degré est $\frac{N\rho}{\rho'}$, N étant défini comme plus haut. On n'aura plus qu'à éliminer t entre les équations qui donnent u et $e^{\frac{z}{\rho}}$, pour obtenir l'équation intégrale.

38. Exemple. — *Intégrer l'équation*

$$27u(u-U)^3 - (2U - 3u)^3 = 0.$$

L'équation est du genre zéro.

Les quatre valeurs de c sont $c = 0$, $c = 1$, $c = 1$, $c = 1$.

Les quatre valeurs de c'_0 sont $c'_0 = 1$, $c'_0 = \frac{2}{3}$, $c'_0 = \frac{2}{3}$, $c'_0 = \frac{2}{3}$.

Ces nombres sont tous commensurables entre eux ; leur plus grand commun diviseur ρ est égal à $\frac{1}{3}$. Par suite, les résidus de $\frac{dz}{dt}$ ont pour valeurs 3ρ, 2ρ, 2ρ, 2ρ ; -3ρ, -3ρ, -3ρ.

Le nombre appelé plus haut N est ici égal à 9 : l'exponentielle e^{3z} est représentée par une fraction rationnelle ayant ses deux termes du neuvième degré.

Les coordonnées de la courbe $F(u, U) = 0$ sont exprimées par les formules

$$u = -\frac{1}{27}\frac{(3-5t)^3}{(1-2t)^3}, \quad U = \frac{t(3-5t)^3}{27(t-1)(1-2t)^3}.$$

On en déduit

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{U}\frac{du}{dt} = -\frac{3(t-1)}{t(3-5t)(1-2t)}.$$

Le facteur $1-2t$ représente θ_1 ; le produit $t(3-5t)$ représente χ_1.

On a

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{3(t-1)}{(1-2t)\times t(3-5t)} = \frac{6}{1-2t} + \frac{3(5t-1)}{t(5t-3)},$$

ou bien

$$\frac{dz}{dt} = \frac{-3}{t-\frac{1}{2}} + \frac{3(t-\frac{1}{5})}{t(t-\frac{3}{5})}.$$

La première fraction $\frac{\theta_0}{\theta_1}$ est immédiatement intégrable. Les résidus relatifs à la seconde sont, parmi les nombres, $1, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{6}{3}$.

Posons

$$\frac{3t-\frac{3}{5}}{2t-\frac{3}{5}} = 1.$$

Cette équation fournit une seule valeur de t, $t=0$, qui est racine de l'équation $\chi_1 = 0$.

En égalant la fraction $\frac{3t-\frac{3}{5}}{2t-\frac{3}{5}}$ successivement à $\frac{2}{3}$ et à $\frac{4}{3}$, on obtient des valeurs de t qui n'annulent pas χ_1. Posons

$$\frac{3t-\frac{3}{5}}{2t-\frac{3}{5}} = \frac{6}{3} = 2.$$

On trouve $t=\frac{3}{5}$, valeur qui annule χ_1. D'après cela, on a

$$\frac{3(t-\frac{1}{5})}{t(t-\frac{3}{5})} = \frac{1}{t} + \frac{2}{t-\frac{3}{5}}.$$

Il vient

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{3}{t-\frac{1}{2}} + \frac{1}{t} + \frac{2}{t-\frac{3}{5}};$$

d'où, en désignant par C une constante arbitraire,

$$e^z = C\,\frac{t(t-\frac{3}{5})^2}{(t-\frac{1}{2})^3}, \quad u = -\frac{5^3}{6^3}\,\frac{(t-\frac{3}{5})^3}{(t-\frac{1}{2})^3}.$$

La nouvelle fraction rationnelle n'est plus que du troisième degré. L'équation intégrale est $(e^z-u)^3 - u^2 = 0$, en prenant $C = -\frac{25}{54}$.

39. Nous terminerons ce Chapitre par deux indications générales sur les intégrales bien déterminées qui n'ont qu'une période.

Si l'intégrale u de l'équation $F(u, U) = 0$ est bien déterminée et n'a qu'une période, le degré de l'équation intégrale par rapport à l'exponentielle qui y entre est égal au degré μ de l'équation $F(u, U) = 0$ par rapport à U. En effet, on sait que l'intégrale $z = \int \frac{du}{U}$, définie par cette équation, a en chaque point μ valeurs distinctes, abstraction faite des périodes.

Théorème. — *Si l'intégrale u de l'équation différentielle* $F(u, U) = 0$ *est fonction algébrique d'une exponentielle* $x = e^{\frac{z}{\rho}}$, *la courbe représentée par l'équation intégrale* $f(u, x) = 0$ *est du même genre que la courbe représentée par l'équation différentielle* $F(u, U) = 0$.

Quand l'intégrale $z = \int \frac{du}{U}$, où U désigne une fonction algébrique de u, s'exprime au moyen des fonctions algébriques et logarithmiques, elle est de la forme

$$z = Z_0 + A_1 L Z_1 + A_2 L Z_2 + \ldots + A_n L Z_n,$$

les A désignant des constantes qui, prises deux à deux, ne donnent que des rapports irrationnels, et les Z des fonctions rationnelles de u et de U. Cela résulte des travaux d'Abel.

Pour que l'intégrale u soit bien déterminée et simplement périodique, il faut et il suffit que tous les A soient nuls, sauf un, et que Z_0 soit nul identiquement. La relation précédente se réduit à

$$z = \rho L \varphi(u, U);$$

d'où

$$x = e^{\frac{z}{\rho}} = \varphi(u, U).$$

Éliminons U entre les deux équations

$$x = \varphi(u, U), \quad F(u, U) = 0,$$

et soit $f(u, x) = 0$ l'équation résultante. Les deux courbes f et F dépendent l'une de l'autre d'une façon spéciale. On a en effet

$$u = u, \quad x = \varphi(u, U),$$

c'est-à-dire que les coordonnées des points de la courbe f sont des fonctions rationnelles de celles des points de la courbe F. Réciproquement, un procédé fourni par la théorie de l'élimination permet de déduire des deux équations $F(u, U) = 0$, $\varphi(u, U) - x = 0$, l'expression de U en fonction rationnelle de u et de x. On aura

$$u = u, \quad U = \psi(u, x).$$

Les coordonnées des points de la courbe F sont des fonctions rationnelles des coordonnées des points de la courbe f. En vertu d'une proposition rappelée au n° 26, ces deux courbes sont du même genre.

CHAPITRE III.

I. — Détermination du genre d'une courbe algébrique.

40. La notion de *genre* est due à Riemann (1). Elle a été introduite par Clebsch (2) dans la théorie des courbes et n'a pas moins d'importance en Géométrie qu'en Analyse. En Géométrie, la définition précise du genre d'une courbe à singularités supérieures présente des difficultés sérieuses. Elle a donné lieu à d'importants travaux, qui sont résumés dans les *Leçons de Géométrie* de Clebsch (t. II, Chap. I).

En Analyse, le genre de la fonction y définie par une équation algébrique $f(x, y) = 0$, ou le genre de la courbe représentée par cette équation, est le nombre des intégrales abéliennes de première espèce $\int \varphi(x, y)\,dx$ relatives à l'équation $f(x, y) = 0$. Cette définition n'est pas identique à celle adoptée par Riemann, mais elle lui est équivalente (3). De cette définition on déduit très facilement que, *si deux*

(1) *Theorie der Abelschen Functionen* (*Journal de Crelle*, t. 54).
(2) *Journal de Crelle*, t. 63 et 64.
(3) Consulter, sur ces questions, la Thèse de doctorat de M. Simart : *Commentaire sur deux Mémoires de Riemann*..... (1882).

courbes algébriques se correspondent point par point (c'est-à-dire si les coordonnées de tout point de l'une sont des fonctions rationnelles des coordonnées d'un point de l'autre), ces deux courbes sont du même genre. Cette proposition, que nous avons invoquée précédemment (n^{os} 26 et 39), a de nombreuses applications géométriques. En outre, elle permet d'énoncer, sans aucune restriction, le théorème suivant, qui est capital, et que Riemann a découvert :

Théorème [1]. — *Étant donnée une équation algébrique $f(x, y) = 0$, irréductible et de degré m par rapport à y, le genre de la fonction y, définie par cette équation, est égal à la demi-somme des ordres des points de ramification de cette fonction, diminuée de $m - 1$.*

En d'autres termes, *le genre est égal à la moitié du nombre des lacets binaires relatifs aux points critiques de la fonction y, diminuée de $m - 1$.*

Désignons par p le genre, par N le nombre des lacets binaires. Le théorème précédent s'exprime par l'égalité

$$2(p + m - 1) = N,$$

qu'on peut écrire

$$2(p + m - 1) = \Sigma(r - 1),$$

en désignant par r le nombre des racines y qui forment l'un des systèmes circulaires relatifs à un point critique de la fonction y. Cette relation a lieu, quelles que soient les singularités de la courbe $f(x, y) = 0$: la sommation indiquée au second membre s'étend à tous les points critiques de la fonction y, tant à ceux situés à l'infini qu'à ceux situés à distance finie, et à tous les systèmes circulaires formés par les valeurs finies ou infinies que prend y en chacun de ces points critiques.

D'après cela, la détermination du genre d'une courbe algébrique revient à celle du nombre $\Sigma(r - 1)$. Nous allons exposer une méthode qui permet d'obtenir ce nombre $\Sigma(r - 1)$, et par suite le genre p, sans qu'il soit nécessaire de connaître les points critiques de la fonction y, ni les valeurs qu'elle prend en ces points.

---

(1) *Voir* la Thèse de M. Simart (n^{os} 71 à 83) et la démonstration de M. Elliot, reproduite dans la *Théorie des fonctions abéliennes* de M. Briot.

41. Cette méthode consiste à ramener le problème proposé au problème suivant, que nous allons résoudre :

Étant donnée une équation algébrique irréductible $f(x, y) = 0$, on sait que pour $x = a$ plusieurs valeurs finies de y deviennent égales; on ne connaît ni leur nombre ni leur valeur commune : on demande combien de ces valeurs sont des fonctions non uniformes de x aux environs du point $x = a$.

Désignons par b la valeur inconnue des racines y qui deviennent égales au point $x = a$. Les racines y, qui ne sont pas uniformes aux environs de ce point, se distribuent en systèmes circulaires dont chacun est représenté par un développement tel que

$$y = b + h(x-a)^{\frac{q}{p}} + h_1(x-a)^{\frac{q+1}{p}} + h_2(x-a)^{\frac{q+2}{p}} + \ldots;$$

p est le nombre des racines qui composent le système circulaire : c'est un entier au moins égal à 2; q est un entier positif quelconque, qui peut être un multiple de p. Certains des coefficients $h_1, h_2, \ldots$ peuvent être nuls, de sorte que le développement peut commencer par plusieurs termes à exposants entiers; mais il contient nécessairement un terme au moins à exposant fractionnaire irréductible de dénominateur p, et il peut contenir des termes à exposants fractionnaires irréductibles dont les dénominateurs soient des sous-multiples de p. Soit $h'(x-a)^{\frac{q_1}{p_1}}$ celui des termes à exposant fractionnaire irréductible qui a le plus petit exposant, et soit μ_1 le plus petit entier supérieur à $\frac{q_1}{p_1}$. Prenons les dérivées d'ordre μ_1 des deux membres de l'égalité précédente; les termes qui précèdent le terme en $(x-a)^{\frac{q_1}{p_1}}$ forment un polynôme entier de degré au plus égal à $\mu_1 - 1$: la dérivée d'ordre μ_1 de ce polynôme est nulle, et il reste

$$\frac{d^{\mu_1} y}{dx^{\mu_1}} = h''(x-a)^{\frac{q_1}{p_1} - \mu_1} + h''_1(x-a)^{\frac{q_1}{p_1} - \mu_1 + 1} + \ldots;$$

par hypothèse, l'exposant $\frac{q_1}{p_1} - \mu_1$ est négatif : la dérivée $\frac{d^{\mu_1} y}{dx^{\mu_1}}$ est infinie pour $x = a$, ainsi que toutes les dérivées d'ordre supérieur à μ_1; toutes les dérivées d'ordre inférieur à μ_1 restent finies pour $x = a$. Supposons formée l'équation qui lie x et $\frac{d^{\mu_1} y}{dx^{\mu_1}}$: pour $x = a$, cette équation aura p racines infinies, puisque le développement de $\frac{d^{\mu_1} y}{dx^{\mu_1}}$ a, comme celui de y, p valeurs en chaque point.

Supposons qu'il y ait un autre système circulaire de racines nulles pour $x = a$; soient p' le nombre des racines de ce système et μ_2 le plus petit entier supérieur au plus petit exposant fractionnaire qui figure dans son développement : μ_2 sera, par exemple, égal à 3, et μ_1 égal à 2. Si l'on forme l'équation entre x et $\frac{d^2 y}{dx^2}$, cette équation aura p racines infinies pour $x = a$ et pourra n'en avoir que p, tandis qu'il y a au moins $p + p'$ racines y qui ne sont pas uniformes aux environs du point $x = a$. Au contraire, si l'on forme l'équation entre x et $\frac{d^3 y}{dx^3}$, cette équation aura au moins $p + p'$ racines infinies pour $x = a$.

Nous allons assigner un nombre entier k tel que le nombre des racines infinies que l'équation entre x et $\frac{d^k y}{dx^k}$ admet pour $x = a$ soit exactement égal au nombre des racines y qui ne sont pas uniformes aux environs du point $x = a$.

42. Lemme. — *Soit $f(x, y) = 0$ une équation algébrique irréductible du degré m en y; soit*

$$R(x) = f'_y(x, y_1) f'_y(x, y_2) \ldots f'_y(x, y_m)$$

le discriminant de cette équation; soit $x = a$ une racine d'ordre α de ce discriminant, et soit k le plus petit entier supérieur à $\frac{\alpha}{2}$. On forme l'équation qui lie x et $\frac{d^k y}{dx^k}$. Si, pour $x = a$ cette équation admet n racines infinies, parmi les valeurs finies de y qui deviennent égales au point $x = a$, il y en a n et n seulement qui ne sont pas des fonctions uniformes de x aux environs de ce point. Si cette équation n'admet pour $x = a$ aucune racine infinie, les valeurs finies de y qui deviennent égales au point $x = a$ sont toutes des fonctions uniformes aux environs de ce point.

Considérons les développements en série suivant les puissances de $x - a$ qui représentent les différents systèmes circulaires formés par les racines y qui deviennent égales au point $x = a$, mais ne sont pas uniformes aux environs de ce point : soient $\frac{q_1}{p_1}$, $\frac{q_2}{p_2}$, $\frac{q_3}{p_3}$, ... les plus petits exposants fractionnaires qui figurent dans ces différents développements. Notre lemme sera établi si nous prouvons que k est supérieur à tous les nombres $\frac{q_1}{p_1}$, $\frac{q_2}{p_2}$, ...

Pour le prouver, nous n'avons qu'à nous reporter à l'exposition de la méthode de M. Puiseux qu'on trouve au Livre I, Chapitre II, de la *Théorie des fonctions elliptiques* de MM. Briot et Bouquet.

Supposons d'abord les racines séparées dès la première approximation. L'un des systèmes circulaires est représenté par la formule

$$y = b + (x-a)^{\frac{q}{p}}\left[c_1 + h_1(x-a)^{\frac{1}{p}} + h_2(x-a)^{\frac{2}{p}} + \ldots\right],$$

où q et p sont premiers entre eux : le système se compose de p racines, et l'exposant $\frac{q_1}{p_1}$ n'est autre que $\frac{q}{p}$. Parmi les p valeurs distinctes de $(x-a)^{\frac{1}{p}}$, j'en considère deux dont les arguments diffèrent de $2\frac{l\pi}{p}$, l n'étant pas un multiple de p : il est certain qu'il y a au moins deux valeurs telles de $(x-a)^{\frac{1}{p}}$, puisque p est au moins égal à 2. A ces deux valeurs distinctes de $(x-a)^{\frac{1}{p}}$ correspondent deux racines distinctes y_1 et y_2 appartenant au système circulaire. Les deux différences $(y_1 - y_2)$ et $(y_2 - y_1)$ sont de l'ordre de $(x-a)^{\frac{q}{p}}$; leur produit est de l'ordre de $(x-a)^{2\frac{q}{p}}$. Or on sait que le produit des différences deux à deux des racines y de l'équation $f(x, y) = 0$ est égal, au signe près, au discriminant $R(x)$: ainsi $R(x)$ contient le facteur $(x-a)$ à une puissance entière α certainement supérieure ou égale à $2\frac{q}{p}$; on a donc

$$2\frac{q}{p} \leq \alpha;$$

d'où résulte

$$\frac{q}{p} \leq \frac{\alpha}{2} < k,$$

et, comme $\frac{q_1}{p_1}$ est égal à $\frac{q}{p}$, on a bien $\frac{q_1}{p_1} < k$.

Supposons maintenant que les racines ne soient séparées qu'à la seconde approximation. L'un des systèmes circulaires sera composé de pp' racines et représenté par la formule

$$y = b + (x-a)^{\frac{q}{p}}\left\{v_1 + (x-a)^{\frac{q'}{pp'}}\left[v'_1 + h_1(x-a)^{\frac{1}{pp'}} + h_2(x-a)^{\frac{2}{pp'}} + \ldots\right]\right\}.$$

Ici p et q ne sont plus nécessairement premiers entre eux; p peut être égal à 1 ou bien diviser q. Si $\frac{q}{p}$ n'est pas entier, l'exposant $\frac{q_1}{p_1}$ est égal à $\frac{q}{p}$; sinon, il est égal à $\frac{qp'+q'}{pp'}$, qui n'est certainement pas un entier, puisque p', premier avec q', ne peut pas diviser $qp'+q'$. Parmi les pp' valeurs de $(x-a)^{\frac{1}{pp'}}$, j'en considère deux dont les arguments diffèrent de $2\frac{l\pi}{pp'}$, l étant un multiple de p, mais non un multiple de pp'. A ces deux valeurs distinctes de $(x-a)^{\frac{1}{pp'}}$ correspondent deux racines y_1 et y_2 qui ont les deux mêmes premiers termes $b + v_1(x-a)^{\frac{q}{p}}$; mais le terme $v'_1(x-a)^{\frac{qp'+q'}{pp'}}$ n'a plus la même valeur dans le développement de l'une que dans le développement de l'autre. Le produit des deux différences $(y_1 - y_2)$ et $(y_2 - y_1)$ est de l'ordre de $(x-a)^{2\frac{qp'+q'}{pp'}}$, et il résulte du raisonnement précédent que l'on a

$$\frac{qp'+q'}{pp'} < k.$$

Or $\frac{q_1}{p_1}$ est inférieur ou égal à $\frac{qp'+q'}{pp'}$. On a donc bien encore $\frac{q_1}{p_1} < k$.

Il est clair que les mêmes conclusions subsistent, quel que soit l'ordre de l'approximation qui sépare les racines y. Supposons, par exemple, que ce soit la quatrième. L'un des systèmes circulaires sera représenté par un développement tel que

$$\begin{aligned} y = b &+ v_1(x-a)^{\frac{q}{p}} + v'_1(x-a)^{\frac{q}{p}+\frac{q'}{pp'}} \\ &+ v''_1(x-a)^{\frac{q}{p}+\frac{q'}{pp'}+\frac{q''}{pp'p''}} + v'''_1(x-a)^{\frac{q}{p}+\frac{q'}{pp'}+\frac{q''}{pp'p''}+\frac{q'''}{pp'p''p'''}} + \ldots \end{aligned}$$

et il se composera de $pp'p''p'''$ racines. A deux valeurs de $(x-a)^{\frac{1}{pp'p''p'''}}$

dont les arguments diffèrent de $2\frac{l\pi}{pp'p''p'''}$, l étant un multiple de $pp'p''$, mais non de $pp'p''p'''$, correspondent deux racines y_1 et y_2 dont les développements ont les quatre mêmes premiers termes, mais diffèrent par le terme dont l'exposant est $\frac{q}{p}+\frac{q'}{pp'}+\frac{q''}{pp'p''}+\frac{q'''}{pp'p''p'''}$. Désignant pour abréger par N cet exposant, on a l'inégalité

$$N < k,$$

et comme l'exposant $\frac{q_1}{p_1}$ est égal, soit à N, soit à un des trois exposants précédents, on a encore

$$\frac{q_1}{p_1} < k,$$

ce qui démontre le lemme.

On voit immédiatement que, si l'équation entre x et $\frac{d^k y}{dx^k}$ n'admet aucune racine infinie pour $x = a$, toutes les valeurs finies de y qui deviennent égales au point $x = a$ sont des fonctions uniformes aux environs de ce point; car, s'il y en avait qui ne fussent pas uniformes, le développement d'un des systèmes circulaires qu'elles formeraient contiendrait un terme à exposant fractionnaire $\frac{q_1}{p_1}$ moindre que k, et $\frac{d_k y}{dx^k}$ serait infini pour $x = a$, contrairement à l'hypothèse [1].

43. Marche a suivre. — Nous supposerons, comme on le fait toujours dans la théorie des intégrales abéliennes, que le point $x = \infty$ est un point ordinaire de la courbe $f(x, y) = 0$ dont on cherche le genre. S'il n'en est pas ainsi, on ramènera l'équation proposée à la forme voulue au moyen d'une transformation homographique. En vertu d'un théorème énoncé au n° 40, le genre de la courbe transformée est le même que celui de la courbe proposée.

De plus, nous supposerons (ce qui revient à une simple transformation de coordonnées) qu'en tout point critique $x = a$ la fonction y n'a pas plus d'un groupe de valeurs égales, c'est-à-dire que l'équation $f(a, y) = 0$ n'a qu'une *seule* racine multiple.

---

[1] Cette conséquence de notre lemme nous servira dans l'étude des intégrales uniformes.

En vertu de cette hypothèse, si $x = a$ est une racine de l'équation

$$R(x) = f'_y(x, y_1) f'_y(x, y_2) \ldots f'_y(x, y_m) = 0,$$

l'unique racine multiple b de l'équation $f(a, y) = 0$, étant l'unique racine commune aux deux équations $f(a, y) = 0$ et $f'_y(a, y) = 0$, sera une fonction rationnelle de a, que l'on sait trouver par la théorie de l'élimination. Nous poserons $b = \varphi(a)$.

Ayant formé l'équation $R(x) = 0$, nous pouvons, en appliquant la méthode des racines égales, mettre son premier membre sous la forme bien connue

$$R(x) = X_1 X_2^2 X_3^3 \ldots X_l^l \ldots X_n^n.$$

On sait que les racines de l'équation $X_1 = 0$ ou les racines simples de l'équation $R(x) = 0$ donnent des points critiques spéciaux, où r valeurs de y deviennent égales et forment un seul système circulaire. Il suffit donc de déterminer le nombre r relatif à chacune des racines a de l'équation $X_1 = 0$. Pour cela, remplaçons y par $\varphi(x)$ dans les diverses équations

$$f'_y(x, y) = 0, \quad f''_{y^2}(x, y) = 0, \quad \ldots, \quad f^{(m-1)}_{y^{m-1}}(x, y) = 0,$$

et soient

$$F_1(x) = 0 \qquad F_2(x) = 0, \qquad \ldots, \quad F_{m-1}(x) = 0$$

ce que deviennent ces équations mises sous forme entière. Autant l'équation $X_1 = 0$ a de racines communes avec l'équation $F_1 = 0$ seulement, autant il y a de systèmes circulaires de deux racines; autant l'équation $X_1 = 0$ a de racines communes avec les équations $F_1 = 0$ et $F_2 = 0$, autant il y a de systèmes circulaires de trois racines; ... autant l'équation $X_1 = 0$ a de racines communes avec *toutes* les équations $F_1 = 0$, $F_2 = 0$, ..., $F_{m-1} = 0$, autant il y a de systèmes circulaires de m racines. En appliquant la méthode de recherche du plus grand commun diviseur algébrique, on obtiendra la partie du nombre $\Sigma(r-1)$ qui correspond aux points critiques donnés par l'équation $X_1 = 0$.

Remarque. — Si l'on sait résoudre l'équation $X_1 = 0$, la détermination précédente s'effectue sans recourir à la méthode du plus grand commun diviseur.

44. Voyons maintenant comment il faudra procéder pour compter les systèmes circulaires relatifs aux points critiques donnés par l'équation $X_l = 0$ et les racines dont se compose chacun de ces systèmes.

On traitera l'équation $X_l = 0$ exactement comme nous venons de traiter l'équation $X_1 = 0$. On remplacera ainsi l'équation $X_l = 0$ par plusieurs autres

$$\xi_2 = 0, \quad \xi_3 = 0, \quad \ldots, \quad \xi_i = 0, \quad \ldots, \quad \xi_q = 0,$$

qui seront telles qu'en chacun des n_2 points critiques donnés par les n_2 racines de la première, deux valeurs de y et deux seulement deviennent égales; ... qu'en chacun des n_i points critiques donnés par les n_i racines de l'équation $\xi_i = 0$, i valeurs de y et i seulement deviennent égales, etc.

La somme $r_l = 2n_2 + 3n_3 + \ldots + qn_q = \Sigma i n_i$ sera la partie de la somme Σr qui correspond aux points critiques donnés par l'équation $X_l = 0$.

Il suffit de compter les systèmes circulaires formés par les n_i racines de l'équation $\xi_i = 0$ (qui pourrait n'être autre que l'équation $X_l = 0$ elle-même).

Désignons par k le plus petit entier supérieur à $\frac{l}{2}$: on formera $\frac{d^2 y}{dx^2}$ au moyen de l'équation

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f'_x}{f'_y};$$

remplaçant par sa valeur $\frac{dy}{dx}$ qui figure dans l'expression $\frac{d^2 y}{dx^2}$, on obtiendra $\frac{d^2 y}{dx^2}$ en fonction rationnelle de x et y. On continuera ainsi jusqu'à ce qu'on ait exprimé $\frac{d^k y}{dx^k}$ en fonction rationnelle de x et y :

$$z = \frac{d^k y}{dx^k} = \psi(x, y),$$

puis on éliminera y entre cette équation et l'équation $f(x, y) = 0$. On obtiendra ainsi une équation du degré m par rapport à z et dont les coefficients seront des fonctions entières de x :

$$A_0 z^m + A_1 z^{m-1} + \ldots + A_{m-1} z + A_m = 0.$$

Comme l est l'exposant avec lequel chacun des facteurs binômes de ξ_i

figure dans le polynôme $R(x)$, cette équation est celle que concerne le lemme établi plus haut.

Si aucune racine de l'équation $\xi_i = 0$ n'annule A_0, les in_i racines de y qui correspondent aux n_i racines de cette équation seront toutes des fonctions uniformes aux environs des points critiques où elles deviennent égales : la partie correspondante de la somme $\Sigma(r-1)$ sera nulle.

Si, au contraire, toutes les racines de l'équation $\xi_i = 0$ annulent les coefficients des i premiers termes de l'équation en z, aucune des in_i racines y qui correspondent aux racines considérées n'est fonction uniforme de x aux environs des points critiques où ces racines deviennent égales.

Ce sont là deux cas extrêmes : dans le cas général, on formera par la méthode du plus grand commun diviseur diverses équations

$$\xi'_2 = 0, \quad \xi'_3 = 0, \quad \ldots, \quad \xi'_h = 0, \quad \ldots, \quad \xi'_i = 0,$$

telles qu'en tout point critique donné par l'équation $\xi'_h = 0$, h racines y, et h seulement, soient uniformes.

45. Nous sommes ainsi ramenés à traiter l'équation $\xi'_h = 0$. Il peut arriver qu'on sache trouver ses racines : soit a l'une d'elles ; $b = \varphi(a)$ sera l'ordonnée du point multiple correspondant. Si, ayant transporté l'origine au point $x = a, y = b$, on peut effectuer les résolutions d'équations qu'exige la méthode pour obtenir les systèmes circulaires, on aura la partie de la somme $\Sigma(r-1)$ qui correspond aux racines de l'équation $\xi'_h = 0$. Si l'on ne peut pas effectuer ces résolutions d'équations, on posera $(x-a)^{\frac{1}{2}} = x'$, ou bien $x = a + x'^2$, et l'on cherchera combien de racines y sont fonctions uniformes de x' aux environs du point $x' = 0$, c'est-à-dire combien de racines y sont fonctions uniformes de $(x-a)^{\frac{1}{2}}$. Pour cela, on n'aura qu'à calculer la dérivée $\frac{d^k y}{dx'^k}$ $\left(k \text{ étant le plus petit entier supérieur à } 2\,\frac{l}{2} \text{ ou } l\right)$ définie par l'équation $f(a + x'^2, y) = 0$, et à éliminer y entre l'équation qui fournit cette dérivée et l'équation $f(a + x'^2, y) = 0$. On obtiendra ainsi une équation du degré m qui aura, pour $x' = 0$, un certain nombre $i - n'_2$ de racines infinies : en vertu du lemme établi au n° **42**, n'_2 des i racines y qui deviennent égales pour $x = a$ sont des fonctions uniformes de $(x-a)^{\frac{1}{2}}$; mais dans ce nombre figurent les h racines qui sont des fonctions uniformes de $x-a$; il reste donc $n'_2 - h$ racines y qui ne sont pas des fonctions uniformes de $x-a$, mais sont des fonctions uniformes de $(x-a)^{\frac{1}{2}}$; leur nombre est nécessairement nul ou pair : elles se distribuent en $\frac{n'_2 - h}{2}$ systèmes circulaires formés chacun de deux racines.

Si l'on n'a pas obtenu, par cette opération, toutes les i racines y qui deviennent égales au point $x = a$ (c'est-à-dire si l'on n'a pas $i - n'_2 = 0$), on posera $(x-a)^{\frac{1}{3}} = x'$, et, désignant par k le plus petit entier supérieur à $\frac{3l}{2}$, on formera l'équation entre x' et $\frac{d^k x}{dx'^k}$: par ce moyen on comptera combien de racines y sont des fonctions uniformes de $(x-a)^{\frac{1}{3}}$, ou, ce qui revient au même, combien de racines y se distribuent autour du point $x = a$ en systèmes circulaires formés de trois racines.

En continuant ainsi jusqu'à ce que l'on ait posé $(x-a)^{\frac{1}{i-h}} = x'$ et formé l'équation en $\frac{d^k y}{dx'^k}$ correspondante, on comptera tous les systèmes circulaires formés par les i racines y qui deviennent égales au point $x = a$, et l'on connaîtra la partie de la somme $\Sigma(r-1)$ qui correspond à ce point critique.

46. Passons au cas où l'on ne pourrait pas résoudre l'équation $\xi'_h = 0$. Désignons par a une de ses racines et posons $(x-a)^{\frac{1}{2}} = x'$, puis formons l'équation entre x' et $z = \frac{d^k y}{dx'^k}$, et faisons dans cette équation $x' = 0$. Les coefficients de cette équation seront alors des polynômes en a : en cherchant les racines communes à un, deux, trois, ... de ces polynômes et au polynôme $\xi'_h(a)$, on comptera les systèmes circulaires de deux racines relatifs aux divers points critiques $x = a$. Supposons, en effet, que ξ'_h soit un polynôme du sixième degré : si pour trois des racines a_1, a_2, a_3 de ce polynôme le même nombre $i - n'_{2,3}$ de racines z deviennent infinies et si pour les trois autres a_4, a_5, a_6, un même nombre $i - n''_{2,3}$ de racines z deviennent infinies, on aura $3\,\frac{n'_{2,3} - h}{2}$ systèmes circulaires de deux racines y correspondant aux trois points critiques a_1, a_2, a_3 et $3\frac{n''_{2,3}-h}{2}$ systèmes circulaires de deux racines y correspondant aux trois points critiques a_4, a_5, a_6.

Alors on passera aux systèmes circulaires de trois racines en posant $(x-a)^{\frac{1}{3}}=x'$ et étudiant séparément les racines des deux équations

$$(\xi-a_1)(\xi-a_2)(\xi-a_3)=0, \quad (\xi-a_4)(\xi-a_5)(\xi-a_6)=0.$$

En continuant ainsi jusqu'à ce qu'on ait posé, s'il y a lieu, $(x-a)^{\frac{1}{i-h}}=x'$, on comptera tous les systèmes circulaires formés par les racines y qui deviennent égales aux points critiques donnés par l'équation $\xi'_h=0$.

En réunissant toutes les parties de la somme $\Sigma(r-1)$ relatives aux diverses équations $\xi'_h=0$, on obtiendra la partie de cette somme relative à l'équation $\xi_i=0$. On réunira les parties relatives aux diverses équations $\xi_i=0$, ce qui donnera la partie relative à l'équation $X_t=0$. Réunissant enfin les parties relatives aux diverses équations $X_t=0$ avec la partie relative à l'équation $X_1=0$, on aura la somme cherchée $\Sigma(r-1)$, et le genre sera fourni par la relation posée au début

$$2(p+m-1)=\Sigma(r-1).$$

47. *Remarque*. — La méthode qui vient d'être exposée permet de trouver le genre de toutes les courbes algébriques, quelles que soient leurs singularités. Cette méthode ne comporte qu'un nombre limité d'opérations, qui sont toutes possibles, puisque ce sont de simples divisions et éliminations. Mais elle peut conduire à des calculs très longs. C'est pourquoi, si quelques-unes des opérations partielles que nous avons indiquées peuvent être remplacées par les opérations correspondantes de la méthode connue pour obtenir les systèmes circulaires, on suivra de préférence cette dernière méthode.

Supposons, en particulier, qu'on sache compter les systèmes circulaires de racines y qui répondent aux points à l'infini de la courbe $f(x,y)=0$ et le nombre de racines de chacun de ces systèmes : on pourra, en vertu du n° 40, se dispenser d'effectuer la transformation homographique préliminaire, et l'on appliquera directement la méthode précédente aux points critiques pour lesquels x et y sont tous les deux finis.

Soit, par exemple, l'équation

$$(y - x^2)^2 - x^5 = 0.$$

On voit que x et y sont infinis en même temps. Posons $x = \frac{1}{x'}$, $y = \frac{1}{y'}$. L'équation donnée devient

$$x'(x'^2 - y')^2 - y'^2 = 0.$$

On en déduit

$$y' = x'^{\frac{5}{2}} + \ldots.$$

Ainsi, au point critique $x' = 0$ répondent deux valeurs nulles de y' formant un système circulaire : pour ce système, $r - 1$ est égal à 1.

La fonction y n'admet d'autre point critique à distance finie que le point $x = 0$, et l'on a

$$y = x^2 + x^{\frac{5}{2}},$$

c'est-à-dire que deux valeurs nulles de y forment un système circulaire : pour ce système $r - 1$ est égal à 1.

D'après cela, $\Sigma(r - 1)$ est égal à 2. Donc $p + m - 1$ est égal à 1, et, comme $m = 2$, p est nul. La courbe est unicursale.

Les exemples qui suivent montrent comment on doit appliquer la méthode précédente, et comment on peut y apporter diverses simplifications, que suggèrent les cas à traiter.

48. Exemple. — *Trouver le genre de la courbe*

$$y^4 - x^2(x^2 + x + 1) = 0.$$

Le polynôme $R(x)$ est ici égal à $x^6(x^2 + x + 1)^3$.

On voit sur l'équation même que, pour chacune des racines de l'équation $x^2 + x + 1 = 0$, y acquiert quatre valeurs nulles formant un seul système circulaire. La partie correspondante de la somme $\Sigma(r - 1)$ est donc égale à deux fois $(4 - 1)$, ou 6.

Passons au point critique $x = 0$. L'équation proposée peut s'écrire

$$y = x^{\frac{1}{2}}(x^2 + x + 1)^{\frac{1}{4}}.$$

On déduit de là

$$\frac{dy}{dx} = y' = \tfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}(x^2 + x + 1)^{\frac{1}{4}} + \tfrac{1}{4}x^{\frac{1}{2}}(x^2 + x + 1)^{-\frac{3}{4}}(2x + 1),$$

et l'on voit que les quatre valeurs de y' sont infinies pour $x = 0$. Donc les quatre valeurs de y qui deviennent nulles au point $x = 0$ sont des fonctions non uniformes de x. Elles forment, par conséquent, ou deux systèmes circulaires de deux racines, ou un seul système circulaire de quatre racines.

Faisons $x = x'^2$. L'équation devient

$$y^4 - x'^4(x'^4 + x'^2 + 1) = 0.$$

Elle donne pour le rapport $\frac{y}{x'}$, quand y et x' sont nuls, quatre valeurs distinctes : en conséquence, les quatre valeurs de y qui deviennent nulles avec x' sont des fonctions uniformes de x' ou de $x^{\frac{1}{2}}$; donc elles forment deux systèmes circulaires de deux racines. La partie correspondante de la somme $\Sigma(r-1)$ est égale à 2.

Au total, $\Sigma(r-1)$ est égal à 8. Faisons $m = 4$, $\Sigma(r-1) = 8$ dans la formule qui donne le genre. Elle devient

$$2(p+3) = 8.$$

On en tire $p = 1$. Ainsi la courbe proposée est du genre 1.

49. Exemple. — *Trouver le genre de la courbe*

$$y^5 + x^5 - 5x^2y = 0.$$

Le polynôme $R(x)$ est ici égal à $x^{10}(x^{10} - 4^4)$. L'équation binôme $x^{10} = 4^4$ n'a que des racines simples. Or f''_{y^2} se réduit ici à $20y^3$ et n'est nul que si y et par suite x sont nuls. Ainsi, en chacun des dix points critiques donnés par l'équation $x^{10} = 4^4$, deux valeurs seulement de y deviennent égales et forment un seul système circulaire. La partie de la somme $\Sigma(r-1)$ qui provient de ces dix points doubles est donc égale à 10.

Passons au point critique $x = 0$. L'équation proposée donne pour y

cinq valeurs nulles quand x est nul. Calculons y'; on a

$$y' = -\frac{x^4 - 2xy}{y^4 - x^2}.$$

En éliminant y entre cette équation et la proposée, on obtient une équation en y' qui a quatre racines infinies pour $x = 0$. Donc une valeur de y est fonction uniforme de x aux environs du point $x = 0$.

Posons $x = x'^2$. Il vient

$$y^5 + x'^{10} - 5x'^4 y = 0.$$

Si l'on fait $y = vx'$, on trouve

$$v^5 - 5v + x'^5 = 0,$$

ce qui montre que les cinq valeurs du rapport $\frac{y}{x'}$ sont différentes pour $y = x' = 0$. Donc les cinq valeurs de y qui deviennent nulles avec x sont fonctions uniformes de $x^{\frac{1}{2}}$; nous savons qu'une d'entre elles est une fonction uniforme de x : il en reste quatre qui sont fonctions uniformes de $x^{\frac{1}{2}}$ et non de x. Ces quatre racines forment donc deux systèmes circulaires de deux racines chacun. La partie correspondante de la somme $\Sigma(r - 1)$ est égale à 2.

Au total, $\Sigma(r - 1)$ est égal à 12. Faisons $m = 5$, $\Sigma(r - 1) = 12$ dans la formule qui donne le genre. Elle devient

$$2(p + 4) = 12.$$

On en tire $p = 2$. Ainsi la courbe proposée est du genre 2.

50. Exemple. — *Trouver le genre de la courbe représentée par l'équation*

$$f(x, y) = y^5 - 5(x^2 + x + 1)y^3 + 5(x^2 + x + 1)^2 y - 2x(x^2 + x + 1)^2 = 0.$$

Les coefficients angulaires c des directions asymptotiques sont les racines de l'équation

$$c^5 - 5c^3 + 5c - 2 = 0,$$

et il est aisé de voir que cette équation a toutes ses racines distinctes.

Les points singuliers de la courbe proposée sont donc tous à distance finie.

Nous allons chercher à exprimer rationnellement en fonction de x la racine y commune aux deux équations $f(x,y)=0$, $f'_y(x,y)=0$. En supprimant le facteur 5 commun à tous les termes de cette dernière équation, on obtient

$$y^4-3(x^2+x+1)y^2+(x^2+x+1)^2=0.$$

Tirons y^4 de cette équation et substituons dans l'équation $f(x,y)=0$; après suppression du facteur commun x^2+x+1, cette équation devient

$$y^3-2(x^2+x+1)y+x(x^2+x+1)=0.$$

Tirons-en y^3 et substituons dans la précédente; après suppression du facteur commun x^2+x+1, il reste

$$y^2+xy-(x^2+x+1)=0.$$

Tirons encore y^2 de cette équation et substituons dans la précédente; nous trouvons

$$xy^2+(x^2+x+1)y-x(x^2+x+1)=0.$$

Dans cette équation, mettons à la place de y^2 sa valeur tirée de l'équation précédente; il vient

$$x[(x^2+x+1)-xy]+(x^2+x+1)y-x(x^2+x+1)=0$$

ou bien

$$y(x+1)=0.$$

On voit par là que les valeurs critiques de x sont parmi celles qui satisfont aux trois équations

$$x^2+x+1=0,\quad y=0,\quad x+1=0.$$

L'équation $x^2+x+1=0$, jointe à l'équation $f(x,y)=0$, entraîne $y=0$. La valeur $x=-1$ ne donnera de point critique que si elle annule le discriminant de l'équation proposée. Or ce discriminant est, à une puissance près de (x^2+x+1), le premier membre de l'équation qu'on obtient en éliminant y entre les deux équations où il n'entre qu'au second degré; cette équation est

$$(x+1)^2(x^2+x+1)=0.$$

Ainsi $x=-1$ est racine double du discriminant. Le point $x=-1$ est donc un point critique.

Étudions les points critiques donnés par l'équation $x^2+x+1=0$. En ces points y est nul. Comptons combien de valeurs de y deviennent nulles en ces points. On a

$$\tfrac{1}{5}f''_{y^2}=4y^3-6(x^2+x+1)y,\quad \tfrac{1}{5}f'''_{y^3}=12y^2-6(x^2+x+1),\quad \tfrac{1}{5}f^{\text{IV}}_{y^4}=24y.$$

Donc cinq valeurs de y deviennent nulles en chacun des points critiques a, racines de l'équation $x^2+x+1=0$. Au lieu de faire successivement $x-a=x'^2$, $x-a=x'^3$, $x-a=x'^4$, $x-a=x'^5$, faisons directement

$$x=a+x'^5.$$

L'équation proposée devient

$$y^5-5x'^5y^3(x'^5+2a+1)+5x'^{10}y(x'^5+2a+1)^2 \\ -2x'^{10}(x'^5+a)(x'^5+2a+1)^2=0.$$

Les termes de moindre degré sont les suivants :

$$y^5-5(2a+1)x'^5y^3-2a(2a+1)^2x'^{10}.$$

On peut appliquer la méthode connue pour obtenir les systèmes circulaires : elle montre immédiatement que les cinq racines nulles forment un seul système circulaire, dont le développement commence par un terme en x'^2, c'est-à-dire en $(x-a)^{\frac{2}{5}}$, a désignant l'une ou l'autre des deux racines de l'équation $x^2+x+1=0$. D'après cela, la partie de la somme $\Sigma(r-1)$ qui provient des deux points critiques a est égale à deux fois $(5-1)$, ou 8.

Étudions le point critique $x=-1$. Si l'on fait $x=-1$ dans l'équation proposée, elle devient

$$y^5-5y^3+5y+2=(y+2)(y^2-y-1)^2=0.$$

Ainsi deux valeurs de y deviennent égales au point $x=-1$ à l'une des racines b de l'équation $y^2-y-1=0$, deux autres deviennent égales à l'autre racine. Comme $x=-1$ est racine double du discriminant, le nombre que nous appelons k est l'entier immédiatement supérieur à 1; c'est-à-dire que k est égal à 2. En formant l'équation qui lie x et $\frac{d^2y}{dx^2}$, on reconnaîtrait que les quatre valeurs de y sont uniformes aux environs du point critique. Mais il est plus simple de former les trois dérivées

$$f''_{y^2} = 10y[2y^2 - 3(x^2+x+1)],\quad f''_{xy} = -15y^2(2x+1) + 10(x^2+x+1)(2x+1),$$
$$f''_{x^2} = -10y^3 - 8(2x+1)(x^2+x+1) + 6(5y-2x)(2x^2+2x+1).$$

Faisons $x = -1$, et tenons compte de l'équation $y^2 = y + 1$; ces trois dérivées prennent respectivement les valeurs suivantes :

$$f''_{y^2} = 10(y-1),\quad f''_{xy} = 5(3y+1),\quad f''_{x^2} = 10(y+1).$$

Formons la quantité $f''^2_{xy} - f''_{x^2}f''_{y^2}$. Comme elle n'est pas nulle en vertu de l'équation $y^2 - y - 1 = 0$, les quatre racines y sont uniformes, et la partie de la somme $\Sigma(r-1)$ qui provient du point $x = -1$ est nulle.

La somme $\Sigma(r-1)$ est donc égale à 8. Faisons $m = 5$, $\Sigma(r-1) = 8$ dans la formule qui donne le genre : elle devient

$$2(p+4) = 8.$$

On en tire $p = 0$. Ainsi la courbe proposée est unicursale.

II. Intégrales uniformes. — Première méthode.

51. MM. Briot et Bouquet ont fait connaître [1] les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une fonction liée à sa dérivée par une équation algébrique soit une fonction uniforme. Ces conditions sont exprimées par le théorème suivant :

Théorème. — *Pour qu'une équation différentielle algébrique et irréductible, entre u et $\frac{du}{dz}$,*

$$\left(\frac{du}{dz}\right)^m + f_1(u)\left(\frac{du}{dz}\right)^{m-1} + f_2(u)\left(\frac{du}{dz}\right)^{m-2} + \ldots + f_m(u) = 0,$$

ne contenant pas la variable z, admette une intégrale uniforme, il est nécessaire et il suffit :

1° *Que les coefficients $f_1(u), f_2(u), \ldots, f_m(u)$ soient des polynômes*

---

(1) *Recherches sur la théorie des fonctions*, troisième Mémoire, et *Fonct. ellipt.*, p. 381.

entiers et, au plus, le premier du second degré, le second du quatrième degré, ..., le dernier du degré $2m$;

2° *Que chaque racine de l'équation, tant qu'elle ne devient pas nulle, reste holomorphe par rapport à u;*

3° *Que chaque racine nulle et d'un degré plus petit que l'unité soit du degré $1-\frac{1}{p}$, p étant le nombre des racines du système circulaire auquel elle appartient;*

4° *Enfin que l'équation différentielle, que l'on déduit de la proposée en posant $u=\frac{1}{v}$, présente pour $v=0$ les mêmes caractères.*

52. *Première condition.* — Elle se vérifie par la simple inspection des coefficients de l'équation donnée.

Deuxième condition. — Cette condition est plus difficile à vérifier. Si l'équation proposée ne contient pas de terme en U et si elle est telle que pour certaines valeurs finies de u deux valeurs de U et *deux seulement* peuvent devenir égales, sans s'annuler, on n'a qu'à s'assurer que le discriminant de l'équation proposée, abstraction faite des facteurs binômes qui correspondent aux valeurs nulles de U, est un carré parfait. C'est le cas des équations trinômes de l'espèce de celles étudiées par MM. Briot et Bouquet [1].

Mais il peut arriver que, pour des valeurs finies de u, plusieurs valeurs de U deviennent égales, sans s'annuler, et qu'on ne puisse pas obtenir ces valeurs de u ni les valeurs correspondantes de U. Connaissant même la valeur U_0 que prennent plusieurs racines pour une valeur connue $u=b$, il faut pouvoir s'assurer que ces racines sont des fonctions uniformes de u aux environs du point $u=b$.

On y arrive en recourant au lemme que nous avons établi au n° 42, en vue de déterminer le genre des courbes algébriques. Désignons, en effet, par $F(u, U)$ le premier membre de l'équation différentielle proposée et soit

$$R(u)=F'_U(u, U_1)\,F'_U(u, U_2)\ldots F'_U(u, U_m)$$

le discriminant de cette équation. La méthode des racines égales

(1) *Fonctions elliptiques*, p. 393 et suiv.

permet de mettre le polynôme $R(u)$ sous la forme

$$R(u) = R_1(u)[R_2(u)]^2 \ldots [R_\beta(u)]^\beta \ldots [R_n(u)]^n,$$

$R_\beta(u)$ étant le produit des facteurs binômes qui entrent avec l'exposant β dans le discriminant $R(u)$.

Soient $u = b$ une racine de l'équation $R_\beta(u) = 0$, et U_0 une racine multiple, mais non nulle, de l'équation $F(b, U) = 0$. La racine b est racine d'ordre β de l'équation $R(u) = 0$. Soit k le plus petit entier supérieur à $\frac{\beta}{2}$. D'après le lemme du n° 42, pour que les valeurs de U qui deviennent égales à U_0 au point $u = b$ soient toutes des fonctions uniformes de u aux environs de ce point, il faut et il suffit que les dérivées $\frac{d^k U}{du^k}$ de ces diverses racines restent finies pour $u = b$. Mais, s'il en est ainsi, la fonction $\frac{d^k U}{du^k}$ sera représentée par une série procédant suivant les puissances croissantes de $u - b$, et dans laquelle tous les termes auront des exposants entiers et positifs. Si dans cette série on remplace $u - b$ par la série à exposants tous positifs (mais entiers ou fractionnaires) que fournit son développement suivant les puissances croissantes de $U - U_0$, on obtiendra pour $\frac{d^k U}{du^k}$ un développement où ne figureront que des exposants positifs; c'est-à-dire que, pour $U = U_0$, toutes les valeurs de $\frac{d^k U}{du^k}$ resteront finies. Réciproquement, si pour $U = U_0$ toutes les valeurs de $\frac{d^k U}{du^k}$ restent finies, elles resteront finies pour $u = b$, et les diverses valeurs de U qui, pour $u = b$, deviennent égales à U_0, seront aux environs du point $u = b$ des fonctions uniformes de u.

On est ainsi conduit à former l'équation qui lie U et $\frac{d^k U}{du^k}$, k désignant maintenant le plus petit entier supérieur à $\frac{n}{2}$, et n le plus grand des exposants tels que β. On devra vérifier que le coefficient de la plus haute puissance de $\frac{d^k U}{du^k}$ dans cette équation ne s'annule pour aucune des valeurs de U, *différentes de zéro*, qui satisfont à la fois aux deux équations

$$F(u, U) = 0, \quad F'_U(u, U) = 0.$$

Pour s'en assurer, on éliminera u entre ces deux équations; soit $\psi(\mathrm{U}) = 0$ l'équation résultante. On formera par la méthode des racines égales l'équation $\chi(\mathrm{U}) = 0$ qui a pour racines simples les racines distinctes de l'équation $\psi(\mathrm{U}) = 0$, moins la racine zéro; et il restera à vérifier que le coefficient de la plus haute puissance de $\frac{d^k\mathrm{U}}{du^k}$ dans l'équation précédente ne s'annule pour aucune des racines de l'équation $\chi(\mathrm{U}) = 0$.

53. *Troisième condition.* — Pour vérifier cette condition, nous commencerons par mettre le polynôme $f_m(u)$ sous la forme

$$f_m(u) = \varphi_1(u)[\varphi_2(u)]^2[\varphi_3(u)]^3\ldots[\varphi_\beta(u)]^\beta\ldots,$$

employée déjà plusieurs fois. Puis nous chercherons parmi les racines du polynôme $\varphi_\beta(u)$ celles pour lesquelles U acquiert 2 valeurs, 3 valeurs, ..., l valeurs nulles. De cette manière, on mettra le polynôme $\varphi_\beta(u)$ sous forme d'un produit de plusieurs facteurs

$$\varphi_\beta(u) = \varphi_{\beta,2}(u)\varphi_{\beta,3}(u)\ldots\varphi_{\beta,l}(u),$$

le polynôme $\varphi_{\beta,l}(u)$ ayant pour racines celles des racines de l'équation $\varphi_\beta(u) = 0$, auxquelles correspondent l valeurs nulles de U et l seulement. Les polynômes tels que $\varphi_{\beta,l}(u)$ se calculent facilement en cherchant les racines communes à $\varphi_\beta(u)$ d'une part et aux divers polynômes $f_{m-1}(u)$, $f_{m-2}(u)$, ... d'autre part.

Considérons maintenant le polynôme $\varphi_{\beta,l}(u)$. Soit b l'une de ses racines. Concevons que l'on remplace dans l'équation à intégrer u par $b+u'$, et qu'on cherche à séparer les racines U nulles avec u' en groupes de racines du même degré : la méthode de M. Puiseux conduit à construire un certain polygone que nous désignerons par P. En cherchant le plus grand commun diviseur du polynôme $\varphi_{\beta,l}(u)$ et des divers polynômes $f_{m-1}(u)$, $f_{m-2}(u)$, ... on arrivera, comme on le voit facilement, à décomposer le polynôme $\varphi_{\beta,l}(u)$ en un produit de plusieurs autres dont chacun jouira de la propriété que le polygone P soit le même pour toutes ses racines b. En répétant ces opérations sur tous les polynômes tels que $\varphi_{\beta,l}(u)$, on décomposera le polynôme $f_m(u)$ en un produit de facteurs $\theta_1(u)$, $\theta_2(u)$, ..., $\theta_r(u)$, ..., $\theta_s(u)$ jouissant chacun de la propriété indiquée.

Soit P_r le polygone P qui correspond aux racines du polynôme $\theta_r(u)$, et qui est le même pour toutes ces racines. Nous connaissons les coordonnées des sommets de ce polygone. Il faut que ceux des côtés de ce polygone dont les coefficients angulaires sont en valeur absolue moindres que l'unité aient pour coefficients angulaires des fractions de la forme $-\left(1-\frac{1}{p}\right)$, p étant un entier. S'il n'en est pas ainsi, l'intégrale n'est pas uniforme. S'il en est ainsi, il faut encore que toutes les racines U dont le degré est $1-\frac{1}{p}$ forment des systèmes circulaires composés chacun de p racines, et non d'un nombre multiple de p. Désignons par np le nombre de ces racines, qui est connu, et par b la racine inconnue du polynôme $\theta_r(u)$ à laquelle correspondent ces np racines nulles. D'après les principes de la méthode de M. Puiseux, pour que ces np racines forment n systèmes circulaires, il faut et il suffit que le rapport $\rho = \dfrac{U}{(u-b)^{\frac{p-1}{p}}}$ prenne, pour $u=b$, np valeurs différentes. On remplacera dans l'équation à intégrer u par $b+u'^{\frac{p}{p-1}}$, puis on remplacera U par $\rho u'$, et finalement on fera $u'=0$. On obtiendra une équation du degré np entre ρ et b, et l'on constatera que le discriminant $R(b)$ de cette équation n'a aucune racine commune avec le polynôme $\theta_r(b)$. Si n est égal à 1, la dernière opération sera inutile.

54. *Quatrième condition.* — Elle exprime simplement que l'équation transformée, obtenue en posant $u=\frac{1}{\varphi}$ et $V=\frac{d\varphi}{dz}$, vérifie, quand φ est nul, les conditions 2° et 3°. En ce qui concerne la condition 2°, il suffit de faire $\varphi=0$ dans l'équation transformée, pour obtenir l'équation $\psi(V)=0$ dont les racines sont les diverses valeurs de V au point $\varphi=0$. On formera par la méthode des racines égales l'équation $\chi(V)=0$ qui a pour racines simples les racines distinctes de l'équation $\psi(V)=0$, moins la racine zéro. Enfin on formera l'équation entre V et $\frac{d^kV}{d\varphi^k}$, k étant l'entier immédiatement supérieur au demi-exposant de φ

dans le discriminant $R(v)$ de l'équation transformée, et l'on devra reconnaître que le coefficient de la plus haute puissance de $\frac{d^k V}{dv^k}$ dans cette équation ne s'annule pour aucune des racines de l'équation $\chi(V) = 0$.

En ce qui concerne la condition 3°, V étant nul avec v, on construira, sans avoir aucun calcul à faire, le polygone que nous avons appelé P. Toutes les racines d'un degré inférieur à l'unité devront avoir pour degré une fraction telle que $1 - \frac{1}{p}$, p étant un entier : on connaît les diverses valeurs de p, et le nombre np des racines du degré $1 - \frac{1}{p}$. Si n est égal à 1, les p racines forment nécessairement un seul système circulaire. Si n n'est pas égal à 1, on effectuera la dernière opération indiquée à propos de la troisième condition. Ici cette opération se simplifie : on fait $V = \rho v^{\frac{p-1}{p}}$ dans l'équation transformée, et l'on doit constater que les np racines finies et différentes de zéro que cette équation fournit pour $v = 0$ sont différentes les unes des autres. Il convient de faire observer que cette équation en ρ et celle qu'on forme pour vérifier la troisième condition ne contiennent que des puissances de ρ^p : on remplacera ρ^p par λ et l'on devra reconnaître que l'équation en λ a ses n racines distinctes.

Remarque. — Si l'intégrale de l'équation proposée est reconnue uniforme, on appliquera le théorème du n° **18** qui fait connaître la nature de cette intégrale, et l'on saura si elle est rationnelle, simplement périodique ou doublement périodique. Mais il y a lieu d'appliquer avant tout ce théorème, parce qu'il peut, dans certains cas, montrer que l'intégrale n'est pas bien déterminée, et dispenser ainsi de tout calcul ultérieur.

55. *Exemple.* — Voici un exemple emprunté au Mémoire de MM. Briot et Bouquet : soit l'équation

$$F(u, U) = U^5 + (u^2 - 1)U^4 - \frac{4^4}{5^5} u^2 (u^2 - 1)^4 = 0.$$

Ici la dérivée $F'_U(u, U)$ est égale à $U^3[5U + 4(u^2 - 1)]$. Éliminons u entre l'équation $5U + 4(u^2 - 1) = 0$ et l'équation proposée : l'équation résultante est $U^4 = 0$. Ainsi l'équation proposée n'admet d'autres racines multiples que des racines nulles quand u reste fini. Nous avons à étudier les racines nulles qui correspondent aux racines distinctes de l'équation $f_m(u) = 0$, c'est-à-dire aux racines de l'équation $u(u^2 - 1) = 0$.

Remplaçons u par $b + u'$, b étant l'une des racines de l'équation $u^2 = 1$. Il vient

$$U^5 + u'(u' + 2b)U^4 - \frac{4^4}{5^5} u'^4 (u' + 2b)^4 (u'^2 + 2bu' + 1) = 0.$$

On voit que le polygone P relatif aux deux valeurs de b est le même; c'est la droite qui joint le point dont l'abscisse est 5 et l'ordonnée 0, au point dont l'ordonnée est 4 et l'abscisse 0 : ainsi à chacune des deux valeurs de b correspondent cinq racines nulles du degré $\frac{4}{5}$: elles forment nécessairement un seul système circulaire.

La fonction U admet un autre point critique à distance finie : c'est le point $u = 0$. En ce point, quatre racines U deviennent nulles; le polygone P relatif au point $u = 0$ est la droite qui joint le point dont l'abscisse est 4 et l'ordonnée 0, au point dont l'ordonnée est 2 et l'abscisse 0 : ainsi il y a quatre racines du degré $\frac{1}{2}$. Posons $U = \lambda^{\frac{1}{2}} u^{\frac{1}{2}}$, puis faisons $u = 0$ dans l'équation entre λ et u; elle se réduit à $\lambda^2 = -\frac{4^4}{5^5}$. Les deux valeurs qu'elle fournit pour λ étant différentes, les quatre racines nulles et du degré $\frac{1}{2}$ forment bien deux systèmes circulaires. Ainsi les trois premières conditions pour que l'intégrale soit uniforme sont vérifiées.

L'équation transformée

$$V^5 - (1 - v^2)V^4 + \frac{4^4}{5^5}(1 - v^2)^4 = 0$$

se réduit pour $v = 0$ à $V^5 - V^4 + \frac{4^4}{5^5} = 0$; elle admet la racine double $V = \frac{4}{5}$ et trois racines simples. Le polynôme $R(v)$ analogue au polynôme $R(u)$ est ici égal à $v^2(1 - v^2)^{16}$. L'entier k immédiatement supérieur à $\frac{2}{2}$ ou 1 est égal à 2. Donc, pour que les deux valeurs égales de V qui correspondent à $v = 0$ soient des fonctions uniformes aux environs du point $v = 0$, il faut et il suffit que, pour $V = \frac{4}{5}$, l'équation entre V et $\frac{d^2V}{dv^2}$ n'ait pas de racine infinie : c'est ce qui a lieu.

En conséquence, l'équation proposée a pour intégrale une fonction uniforme; et, comme les paramètres c et c'_0 sont tous nuls, l'intégrale est doublement périodique.

III. Intégrales uniformes. — Seconde méthode.

56. La méthode que nous allons exposer est fondée sur l'importante proposition de M. Hermite, que nous avons déjà citée et qui s'énonce ainsi :

Si l'intégrale u d'une équation différentielle algébrique $F(u, U) = 0$ *est uniforme et doublement périodique, la courbe* $F = 0$ *est du premier genre. Si cette intégrale est uniforme et rationnelle ou simplement périodique, la courbe* $F = 0$ *est du genre zéro.*

Les réciproques de cette proposition ne sont évidemment pas vraies; mais il suffit, comme on va le voir, d'introduire quelques conditions de plus dans leurs énoncés pour que ces réciproques, devenues vraies, fournissent une méthode régulière, permettant de reconnaître si l'intégrale est uniforme. La seule difficulté qui se présente dans l'application est la détermination du genre de l'équation à intégrer. Nous avons donné au début de ce Chapitre une méthode absolument générale pour effectuer dans tous les cas cette détermination.

Il ne nous reste donc plus qu'à résoudre le problème suivant :

Problème. — *Étant donnée une équation différentielle algébrique* $F(u, U) = 0$, *de genre* 1 *ou zéro, reconnaître si son intégrale est uniforme.*

57. 1er Cas. — *L'équation à intégrer est du genre* 1.

Il résulte immédiatement de la proposition de M. Hermite que, si l'intégrale est uniforme, elle est doublement périodique. Alors, en se reportant au théorème du n° 18 (*Nature de l'intégrale u*), on voit que les paramètres c et c'_0 doivent être tous nuls. Nous allons montrer que ces conditions suffisent.

Théorème. — *Si l'équation différentielle* $F(u, U) = 0$ *est du genre* 1, *et si les paramètres c et c'_0 sont tous nuls, l'intégrale u est doublement périodique et de plus uniforme.*

En vertu d'une proposition démontrée par Clebsch dans ses profondes recherches sur les courbes du troisième degré (¹), les coordonnées u et U d'une courbe du genre 1 sont des fonctions rationnelles d'une variable t et d'un radical carré portant sur un polynôme entier du quatrième degré en t.

Une transformation du premier degré ramènera ce radical à la forme canonique. On peut donc poser

$$u = \psi\left[t, \sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}\right], \quad \mathrm{U} = \frac{du}{dz} = \chi\left[t, \sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}\right],$$

les symboles ψ et χ désignant deux fonctions rationnelles. De ces formules il résulte que la dérivée $\frac{dz}{dt} = \frac{1}{\mathrm{U}}\frac{du}{dt}$ est aussi une fonction rationnelle de t et du radical $\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}$. Mais les paramètres c et c'_0 étant tous nuls, z est une intégrale de première espèce; puisqu'elle dépend seulement des intégrales elliptiques, c'est une intégrale elliptique de première espèce. On a donc, en désignant par ρ une constante,

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{\rho}\frac{1}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}.$$

De là résulte

$$t = \mathrm{sn}(\rho z)$$

et, par suite,

$$u = \psi\left[\mathrm{sn}(\rho z), \frac{d\,\mathrm{sn}(\rho z)}{dz}\right],$$

ce qui prouve à la fois que l'intégrale u est doublement périodique et qu'elle est uniforme.

Conséquence. — Si l'équation à intégrer est du genre 1 et si l'intégrale u est bien déterminée et a deux périodes, elle est nécessairement uniforme.

Remarque. — Ce théorème est une réciproque de la proposition de

---

(¹) *Journal de Crelle*, t. 64.

M. Hermite; c'est aussi une réciproque du théorème qui fait connaître la nature de l'intégrale u (n° 18).

Il convient de signaler ici une Note dans laquelle M. Fuchs ([1]) étudie l'équation différentielle binôme

$$\left(\frac{du}{dz}\right)^m = \mathrm{F}(u),$$

et retrouve certains résultats de MM. Briot et Bouquet, en exprimant que cette équation est du genre 1.

58. 2e Cas. — *L'équation à intégrer est du genre zéro.*

En appliquant le théorème qui fait connaître la nature de l'intégrale u, supposée bien déterminée, on saura si cette intégrale est rationnelle ou simplement périodique.

Cas de l'intégrale rationnelle. — Si l'intégrale u, supposée bien déterminée, ne peut être qu'algébrique, il faut d'abord, pour qu'elle soit algébrique, que la fonction inverse z n'ait aucune espèce de période. Pour qu'elle soit rationnelle, il faut de plus que la courbe $\mathrm{F}(u, \mathrm{U}) = 0$ soit du genre zéro. Enfin, il faut encore que u n'ait qu'une valeur pour chaque valeur de z. Voici comment nous exprimerons ces diverses conditions.

On vérifiera que la courbe $\mathrm{F} = 0$ est du genre zéro. S'il en est ainsi, l'intégrale z n'a pas d'autres périodes que des périodes polaires. Il faut s'assurer qu'elle n'a pas non plus de périodes polaires. Rappelons que, quand l'intégrale est algébrique, le degré par rapport à u de l'équation intégrale est égal au nombre des valeurs finies ou infinies de u qui satisfont à la fois aux équations $\frac{u}{\mathrm{U}} = \infty$ et $\frac{du}{d\mathrm{U}} = \infty$ (*voir* n° 28). On cherchera ces racines communes et l'on devra reconnaître qu'il n'y en a qu'une : si elle est finie, étant unique, elle s'exprimera rationnellement au moyen des coefficients de l'équation $\mathrm{F} = 0$. Que ce soit $u = \infty$ ou $u = b$, elle sera donc parfaitement connue.

Supposons d'abord que cette solution commune soit finie, $u = b$. Le

---

([1]) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 1881; t. XCIII, p. 1063.

rapport $\frac{b}{\mathrm{U}}$ étant infini, U est nul. On a

$$\mathrm{U} = h(u-b)^{\frac{q}{p}} + h_1(u-b)^{\frac{q+1}{p}} + \ldots,$$

et, comme $\frac{du}{d\mathrm{U}}$ est infini, $\frac{d\mathrm{U}}{du}$ doit être nul pour $u = b$: q doit être supérieur à p. On démontre [1] que q est égal à $p+1$. On a donc

$$\mathrm{U} = h(u-b)^{1+\frac{1}{p}} + h_1(u-b)^{1+\frac{2}{p}} + \ldots,$$

p étant le nombre des racines du système circulaire unique formé par les valeurs de U nulles et d'un degré supérieur à l'unité [2]. On déduit de là

$$\frac{dz}{du} = \frac{1}{\mathrm{U}} = \frac{1}{h}(u-b)^{-1-\frac{1}{p}} - \frac{h_1}{h^2}(u-b)^{-1} + \ldots.$$

Pour qu'il n'y ait pas de période polaire, il faut et il suffit que h_1 soit nul, c'est-à-dire que le développement de U ne contienne pas de terme en $(u-b)^{1+\frac{2}{p}}$.

Si la solution commune aux équations $\frac{u}{\mathrm{U}} = \infty$, $\frac{du}{d\mathrm{U}} = \infty$ est $\frac{1}{u} = v = 0$, l'équation transformée en V admet pour $v = 0$ un certain nombre de racines nulles et d'un degré supérieur à l'unité; il faudra que les p valeurs de V qui sont d'un degré supérieur à l'unité forment un seul système circulaire, et que le développement de V suivant les puissances de v commence par un terme en $v^{1+\frac{1}{p}}$ et ne contienne pas de terme en $v^{1+\frac{2}{p}}$.

Les conditions que nous venons d'énumérer sont nécessaires; elles suffisent pour que u soit une fonction rationnelle. En effet, la courbe $\mathrm{F} = 0$ étant unicursale, l'intégrale z ne peut avoir que des périodes polaires; comme il n'y a qu'une seule valeur finie de u qui rende $\frac{dz}{du}$ infini, et qu'à cette valeur correspond un seul système circulaire de

---

(1) Briot et Bouquet, *Fonctions elliptiques*, p. 384-385.

(2) *Ibid.*, p. 386.

valeurs de U, ou bien, comme à $v = 0$ correspond un seul système circulaire de valeurs nulles de V, z ne peut avoir qu'une période polaire; et nous avons exprimé que cette période disparaît. Donc z est une fonction algébrique de u, et u une fonction algébrique de z. Enfin, comme les équations $\frac{u}{\mathrm{U}} = \infty$, $\frac{du}{d\mathrm{U}} = \infty$ n'ont qu'une seule solution commune, u n'a qu'une valeur pour chaque valeur de z. Donc u est une fonction rationnelle de z.

Si la racine commune aux deux équations considérées est $u = 0$, le degré du numérateur de u sera inférieur au degré de son dénominateur. Si cette racine est finie et différente de zéro, les degrés de ces deux termes seront égaux. Si cette solution commune est $v = 0$, le numérateur sera de degré plus élevé que le dénominateur.

59. *Cas de l'intégrale simplement périodique.* — Nous avons prouvé au n° 34 que, si la courbe $\mathrm{F} = 0$ est unicursale et si les paramètres c et c'_0 sont tous finis et tous commensurables entre eux, l'intégrale u est bien déterminée et n'a qu'une période. Elle s'exprime rationnellement, ainsi que l'exponentielle $e^{\rho z}$, au moyen d'une variable auxiliaire t. Supposons qu'on ait

$$u = \frac{\psi(t)}{\theta(t)}, \quad \mathrm{U} = \frac{\chi(t)}{\theta(t)}, \quad e^{\rho z} = \frac{\Phi(t)}{\mathrm{F}(t)}.$$

Pour que u soit uniforme, c'est-à-dire s'exprime rationnellement en fonction de l'exponentielle, il faut et il suffit que l'équation $e^{\rho z} = \frac{\Phi(t)}{\mathrm{F}(t)}$ ne donne pour chaque valeur de z qu'une seule valeur de t. Donc les deux polynômes $\Phi(t)$ et $\mathrm{F}(t)$ doivent être du premier degré, de sorte qu'il vient

$$e^{\rho z} = \frac{at + b}{\alpha t + \beta}.$$

On déduit de là

$$\frac{dz}{dt} = \frac{a\beta - \alpha b}{\rho} \frac{1}{(at + b)(\alpha t + \beta)}.$$

Ainsi la dérivée $\frac{dz}{dt}$ a deux infinis et deux seulement. Ils sont nécessairement distincts, sans quoi l'intégrale u serait rationnelle. Nous avons reconnu au n° 35 que les valeurs de t qui rendent $\frac{dz}{dt}$ infini annulent $\chi(t)$ ou $\theta(t)$. Or il est aisé de voir qu'à chaque valeur de t qui annule $\chi(t)$ ou $\theta(t)$ correspondent pour la fonction U de u, ou pour la fonction V de v, un certain nombre de valeurs égales formant un seul système circulaire. Ici ces racines sont nulles et de degré égal à l'unité. Nous retrouvons ainsi cette condition connue : *quand l'intégrale est uniforme et simplement périodique, il ne peut y avoir en tout plus de deux systèmes circulaires de valeurs de* U *ou* V *nulles et de degré égal à l'unité* (¹). Aux deux infinis de la fraction $\frac{dz}{dt}$ répondent deux résidus dont la somme est nulle, puisque le numérateur de cette fraction est d'un degré inférieur de deux unités au degré de son dénominateur; ces résidus sont donc commensurables entre eux, comme l'exige le théorème du n° 34.

La condition qui vient d'être trouvée suffit évidemment, si la courbe $F(u, U) = 0$ est unicursale et si aucun des paramètres c et c'_0 n'est infini, pour que l'intégrale u soit uniforme et simplement périodique.

60. La discussion précédente se résume en trois énoncés dans lesquels nous suivrons l'ordre même des opérations que notre méthode conduit à effectuer.

Théorème. — *Pour que l'intégrale d'une équation différentielle algébrique* $F(u, U) = 0$ *soit uniforme et doublement périodique, il faut et il suffit :*

1° *Que les paramètres* c *et* c'_0 *soient tous nuls;*

2° *Que l'équation proposée soit du genre* 1.

Théorème. — *Pour que l'intégrale soit rationnelle, il faut et il suffit que l'équation* $F(u, U) = 0$ *vérifie les conditions suivantes :*

1° *Un au moins des paramètres* c *et* c'_0 *est infini; aucun d'eux n'est fini et différent de zéro.*

2° *Une seule valeur de* u *vérifie à la fois les deux équations* $\frac{u}{U} = \infty$ *et* $\frac{du}{dU} = \infty$.

(¹) Briot et Bouquet, *Fonctions elliptiques*, p. 402.

3° *Si cette solution est $u = b$, les p valeurs de U qui deviennent nulles avec $u - b$ et sont d'un degré supérieur à l'unité forment un seul système circulaire; leur développement commence par un terme en $(u-b)^{1+\frac{1}{p}}$ et ne contient pas de terme en $(u-b)^{1+\frac{2}{p}}$. — Si cette solution est $\frac{1}{u} = v = 0$, les p valeurs de V qui deviennent nulles avec v et sont d'un degré supérieur à l'unité forment un seul système circulaire; leur développement commence par un terme en $v^{1+\frac{1}{p}}$ et ne contient pas de terme en $v^{1+\frac{2}{p}}$.*

4° *L'équation $F(u, U) = 0$ est du genre zéro.*

THÉORÈME. — *Pour que l'intégrale soit uniforme et simplement périodique, il faut et il suffit que l'équation $F(u, U) = 0$ vérifie les conditions suivantes :*

1° *Aucun des paramètres c et c'_0 n'est infini; les valeurs de U qui deviennent nulles pour des valeurs finies de u et sont de degré égal à l'unité, ainsi que celles de V qui deviennent nulles pour $v = 0$ et sont de degré égal à l'unité, forment en tout deux systèmes circulaires;*

2° *L'équation $F(u, U) = 0$ est du genre zéro.*

61. EXEMPLES. — La méthode contenue dans ces trois théorèmes, et qui n'exige, comme on le voit, que des opérations toujours possibles, s'applique très facilement à tous les exemples traités par MM. Briot et Bouquet dans leur troisième Mémoire.

En effet, comme l'a montré M. Hermite, l'équation

$$U^5 + (u^2 - 1)U^4 - \frac{4^4}{5^5}u^2(u^2-1)^4 = 0$$

(qui est l'exemple XI de MM. Briot et Bouquet) représente une courbe du genre 1; on s'en assure en posant

$$U = (u^2 - 1)t.$$

Si l'on fait en même temps

$$T = (t+1)\left(t^3 - \frac{3}{5}t^2 + \frac{8}{5^2}t - \frac{4^2}{5^3}\right),$$

on obtient en effet

$$u = \frac{t^2(t+1)}{t+\frac{4}{5}} \frac{1}{\sqrt{T}}.$$

Les autres exemples rentrent dans le type

$$F(u, U) = U^3 + 3PU^2 + 4Q = 0,$$

où P et Q vérifient la relation

$$P^3 + Q = R^2,$$

les lettres P, Q, R désignant des polynômes entiers en u, de degrés respectivement égaux à 2, 6 et 3.

M. Hermite met l'équation proposée sous la forme

$$(U + 2P)^2(U - P) = -4R^2,$$

et, posant

$$U + 2P = -\frac{2R}{w},$$

il obtient

$$w^3 - 3Pw - 2R = 0.$$

Les coordonnées u, w de cette cubique s'exprimant rationnellement au moyen de t et d'un radical elliptique, U et u s'expriment aussi de la même manière : la courbe $F = 0$ est du genre 1. Dans les six premiers exemples de MM. Briot et Bouquet, la cubique $w^3 - 3Pw - 2R = 0$ a un point double : la courbe $F = 0$ est unicursale.

Ayant ainsi déterminé le genre de la courbe $F = 0$ dans ces divers exemples, on vérifie sans difficulté les autres conditions exprimées dans nos trois théorèmes.

62. Voici un autre exemple très simple. Soit l'équation

$$u^4 - (u - mU)^3 = 0.$$

La courbe est unicursale. Tous les paramètres c sont nuls. Des quatre valeurs de c'_0, trois sont égales à m, la dernière est égale à $-3m$. Les paramètres c étant nuls, les racines V nulles avec $v = \frac{1}{u}$ sont d'un degré inférieur à l'unité. Pour $U = 0$, on a, soit $u = 0$, soit $u = 1$; à $u = 0$ correspond un système circulaire de trois racines nulles et de degré égal à l'unité; à $u = 1$ correspond une seule racine nulle qui est de degré égal à l'unité. Donc l'intégrale est uniforme et simplement périodique. En effet, cette intégrale est

$$u = \frac{e^{\frac{z}{m}}}{\left(m + e^{\frac{z}{3m}}\right)^3}.$$

63. *Exemple.* — Voici, pour terminer, un exemple qui nous donnera l'occasion d'employer plusieurs des méthodes que nous avons exposées au cours de ces recherches; il montrera en même temps comment ces méthodes peuvent se simplifier dans les applications.

On demande si l'équation

$$\alpha^2 U^4 - 4\beta u^2 U^3 - 2\alpha^4 U^2 + 27\beta^2 u^4 + \alpha^6 = 0,$$

où les lettres α et β désignent des constantes, admet une intégrale uniforme.

Le terme du degré le plus élevé de l'équation est le terme en $u^2 U^3$: deux des paramètres c sont nuls et trois sont infinis; le terme indépendant de U n'ayant que des racines simples et le terme en U manquant, les paramètres c'_0 sont tous nuls. Donc, si l'intégrale est bien déterminée, elle est algébrique.

Cherchons le degré par rapport à u de l'équation intégrale. Faisons $U = \gamma u$: il vient

$$\alpha^2 \gamma^4 u^4 - 4\beta \gamma^3 u^5 - 2\alpha^4 \gamma^2 u^2 + 27\beta^2 u^4 + \alpha^6 = 0.$$

Pour $\gamma = 0$, cette équation a une racine infinie et quatre racines finies, celles de l'équation

$$27\beta^2 u^4 + \alpha^6 = 0.$$

On déduit de l'équation proposée

$$\frac{du}{dU} = c' = \frac{U(\alpha^2 U^2 - 3\beta u^2 U - \alpha^4)}{\beta u(2U^3 - 27\beta u^2)}.$$

A chacune des quatre racines de l'équation $27\beta^2 u^4 + \alpha^6 = 0$ répondent quatre valeurs de U : deux sont nulles et donnent $c' = 0$, deux sont différentes de zéro et fournies par l'équation

$$\alpha^2 U^2 - 4\beta u^2 U - 2\alpha^4 = 0.$$

Cette équation n'a pas de racines communes avec l'équation $2U^3 - 27\beta u^2 = 0$. Donc c' reste fini quand on attribue à u l'une des valeurs finies qui satisfont à l'équation $\gamma = 0$ ou $\frac{u}{U} = \infty$. Les deux équations $\frac{u}{U} = \infty$, $c' = \infty$ ne peuvent donc avoir d'autre racine commune que la racine simple $u = \infty$ de l'équation $\frac{u}{U} = \infty$.

D'après cela, si l'intégrale u est bien déterminée, c'est une fonction rationnelle de z.

Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit : 1° que l'équation transformée admette, pour $v = 0$, p racines nulles du degré $1 + \frac{1}{p}$ formant un seul système circulaire; 2° que leur développement ne contienne pas de terme en $v^{1+\frac{2}{p}}$; 3° que l'équation proposée soit du genre zéro.

Faisons $u = \frac{1}{v}$, $U = -\frac{V}{v^2}$ dans l'équation proposée : il vient

$$\alpha^2 V^4 + 4\beta V^3 - 2\alpha^4 v^4 V^2 + v^4(\alpha^6 v^4 + 27\beta^2) = 0.$$

Cette équation admet, pour $v = 0$, trois racines nulles du degré $1 + \frac{1}{3}$ formant un seul système circulaire, et dont le développement ne contient pas de terme en $v^{\frac{5}{3}}$.

Il reste à voir si la courbe proposée est du genre zéro. Nous poserons

$$U = \frac{\alpha}{y}, \quad u = \alpha\sqrt{\frac{\alpha}{3\beta}}\,\frac{x}{y},$$

ce qui change l'équation donnée en la suivante :

$$f(x, y) = 3y(y^2 - 1)^2 + 9yx^4 - 4x^2 = 0.$$

Pour trouver le genre de cette courbe, il nous suffira de déterminer ses points doubles par la méthode élémentaire qui consiste à chercher les solutions communes aux trois équations simultanées

$$f'_x = 0, \quad f'_y = 0, \quad f'_t = 0.$$

Voici ces équations

$$x(9x^2y - 2) = 0, \quad 5y^4 - 6y^2 + 3x^4 + 1 = 0, \quad y^3 - y + x^2 = 0.$$

A la solution $x = 0$ correspondent les solutions de l'équation $y^2 - 1 = 0$.

Il est visible sur l'équation $f(x, y) = 0$ que les points $x = 0$, $y = 1$ et $x = 0$, $y = -1$ sont deux points doubles à tangentes distinctes.

La valeur $x^2 = \frac{2}{9y}$, portée dans la dernière équation, donne

$$9y^4 - 9y^2 + 2 = 0;$$

les racines de cette équation sont $y^2 = \frac{1}{3}$, $y^2 = \frac{2}{3}$.

On vérifie immédiatement que les quatre systèmes de valeurs fournis par les formules

$$y = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad x = \pm\frac{\sqrt{2\sqrt{3}}}{3}; \quad y = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad x = \pm i\frac{\sqrt{2\sqrt{3}}}{3}$$

vérifient les trois équations $f'_x = 0$, $f'_y = 0$, $f'_t = 0$. Ils donnent donc encore quatre points doubles. La courbe, ayant six points doubles et étant du cinquième degré, est unicursale.

Donc l'intégrale u est une fonction rationnelle. En effet, cette intégrale est

$$u = \frac{\beta^2 z^4 - \alpha^2}{4\beta z}.$$

Dans cet exemple, comme dans tous les autres analogues, nous avons fait abstraction de la constante d'intégration, parce qu'elle n'influe pas sur la nature de l'intégrale.