ELLIOT

Propriétés et applications de certaines fonctions analogues à la fonction Θ

Annales scientifiques de l'É.N.S. 2e série, tome 11 (1882), p. 79-118
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1882_2_11__79_0>

PROPRIÉTÉS

ET

APPLICATIONS DE CERTAINES FONCTIONS

ANALOGUES A LA FONCTION Θ,

PAR M. ELLIOT,

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE BESANÇON.

MM. Clebsch et Gordan ont résolu les premiers un système d'équations aux dérivées partielles analogue à celui qui définit les fonctions abéliennes, mais où entrent q intégrales normales de troisième espèce, au moyen d'une fonction qu'ils tirent de développements en série et qu'ils désignent par $\Theta^{(q)}$ (1). Ils indiquent seulement en quelques mots une méthode, qui n'est pas exempte de difficultés, pour passer par continuité du point double et de l'intégrale de troisième espèce infinie aux deux branches de ce point double au point de rebroussement et à l'intégrale de seconde espèce correspondante.

Je me suis proposé de résoudre la même question par une autre voie, en étudiant directement les fonctions $\Theta^{(q)}$ et en faisant entrer dans leur composition des constantes telles, qu'on puisse leur appliquer les deux théorèmes fondamentaux découverts par Riemann pour la fonction $\Theta[u^{(i)}(x) - G_i]$. Les intégrales normales de troisième espèce que je considère sont supposées avoir pour points logarithmiques deux points quelconques de la courbe fondamentale $F(x, y) = 0$ dont les lacets entrent d'une façon quelconque dans les différents circuits. J'admets

(1) *Theorie der Abelschen Functionen*, p. 287.

seulement que ces points sont différents des points critiques et que la droite qui les unit ne contient aucun de ces derniers.

Quand, dans le système des équations aux dérivées partielles, un certain nombre r d'entre elles sont relatives à des intégrales normales de seconde espèce, la forme analytique des fonctions que j'appelle $\Theta_{(r)}^{(q)}$ change considérablement. Leur développement explicite est compliqué; mais les fonctions successives qui se rapportent aux valeurs 1, 2, 3, ... de r se déduisent les unes des autres par une loi fort simple, analogue à celle qui donne la formation des polaires de différents ordres d'une courbe.

M. Briot a résolu d'une façon générale, et quelle que soit la nature des points critiques, le problème de l'inversion. Je suis exactement la même marche et renvoie, pour les notations et les calculs que je lui emprunte, à sa *Théorie des Fonctions abéliennes*.

Lemmes préliminaires.

1. Soient $u^{(1)}, u^{(2)}, \ldots, u^{(p)}$ les p intégrales normales de première espèce relatives à une équation algébrique irréductible $F(x, y) = 0$ du degré m, $v^{(1)}, v^{(2)}, \ldots, v^{(q)}$ q intégrales normales de troisième espèce et $w^{(1)}, w^{(2)}, \ldots, w^{(r)}$ r intégrales normales de seconde espèce. On sait que l'intégrale $v^{(k)}$ devient infinie en deux points analytiques $(\xi^{(k)}, \xi_1^{(k)})$, $(\eta^{(k)}, \eta_1^{(k)})$ et peut être représentée, aux environs de ces points, par les développements suivants :

$$-\log(x-\xi^{(k)}) + b_k + b'_k(x-\xi^{(k)}) + \ldots,$$
$$+\log(x-\eta^{(k)}) + c_k + c'_k(x-\eta^{(k)}) + \ldots;$$

$b_k, b'_k, \ldots, c_k, c'_k, \ldots$ désignant des constantes..

Une intégrale de seconde espèce $w^{(h)}$ ne devient infinie qu'en un seul point analytique, qui est un pôle $(\zeta^{(h)}, \zeta_1^{(h)})$, et se développe aux environs de ce point en une série de la forme

$$-\frac{1}{x-\zeta^{(h)}} + e_h + e'_h(x-\zeta^{(h)}) + \ldots,$$

$e_h, e'_h, \ldots$ étant des constantes.

2. Les périodes normales d'indice impair d'une intégrale $u^{(i)}$ sont nulles, à l'exception d'une seule qui est égale à $2\pi\sqrt{-1}$. Nous représenterons les périodes normales d'indice pair par $2\alpha_{ij}$.

Une intégrale normale $v^{(k)}$ a toutes ses périodes normales d'indice impair nulles. Les périodes normales d'indice pair sont données par l'équation

$$(1) \qquad 2A_{ki} = u^{(i)}(\eta^{(k)}) - u^{(i)}(\xi^{(k)}).$$

L'intégrale $u^{(i)}(\xi^{(k)})$ est prise le long du chemin formé des lacets fondamentaux de seconde espèce conduisant de la racine initiale y_0 à la racine y_{α_k} avec laquelle commence le circuit unique qui contient le lacet du point $(\xi^{(k)}, \xi_1^{(k)})$, chemin suivi des lacets relatifs aux points critiques algébriques qui entrent dans ce circuit jusqu'à la droite $O\xi^{(k)}$, décrite une seule fois de O vers $\xi^{(k)}$. Le lacet du point $(\eta^{(k)}, \eta_1^{(k)})$ entre dans un circuit qui est ou non le même que le précédent, et l'intégrale $u^i(\eta^{(k)})$ a une signification analogue. L'intégrale $v^{(k)}$ admet en outre la période polaire $2\pi\sqrt{-1}$.

Une intégrale $w^{(h)}$ a toutes ses périodes normales d'indice impair nulles, et les périodes normales d'indice pair a_{hi} sont données par l'équation

$$(2) \qquad a_{hi} = \left(\frac{du^{(i)}}{dx}\right)_{\zeta^{(h)}}.$$

Ces périodes sont algébriques; on les obtient en remplaçant x et y par les coordonnées $\zeta^{(h)}$, $\zeta_1^{(h)}$ du pôle dans les coefficients différentiels des p intégrales normales de première espèce.

3. Nous regarderons comme connus les théorèmes traduits par les équations suivantes :

$$(3) \qquad v^{(k)}(\eta^{(k')}) - v^{(k)}(\xi^{(k')}) = v^{(k')}(\eta^{(k)}) - v^{(k')}(\xi^{(k)}),$$

$$(4) \qquad \left(\frac{dw^{(h)}}{dx}\right)_{\zeta^{(h')}} = \left(\frac{dw^{(h')}}{dx}\right)_{\zeta^{(h)}},$$

$$(5) \qquad w^{(h)}(\eta^{(k)}) - w^{(h)}(\xi^{(k)}) = \left(\frac{dv^{(k)}}{dx}\right)_{\zeta^{(h)}}.$$

La démonstration des formules (1), (2), (4), (5) résulte, par une marche uniforme, de la considération de l'intégrale

$$\sum_{l=0}^{l=m-1} \int \mathrm{P}_l d\mathrm{Q}_l$$

le long du contour simple formé d'une droite Ol de longueur très grande, d'une circonférence de rayon Ol, de la suite des lacets relatifs tant aux points critiques algébriques qu'aux infinis des intégrales de troisième espèce et aux pôles des intégrales de seconde espèce, tous ces lacets étant parcourus dans le sens négatif, et enfin du rayon Ol. Les lettres P et Q désignent, la première une intégrale de première ou de seconde espèce, la seconde une intégrale d'une quelconque des trois espèces. L'indice l signifie que les intégrales ont été prises le long de la suite des lacets fondamentaux qui conduisent de la racine initiale y_0 à une racine quelconque y_l, puis le long d'un chemin qui ne sort plus de la partie du plan enveloppée par le contour précédent. Quant à la relation (3), le genre de démonstration indiqué ne s'y applique pas sans difficulté, à cause des lacets logarithmiques. Mais on peut la vérifier en exprimant, comme l'a fait M. Emmanuel [1], l'intégrale de troisième espèce au moyen des fonctions Θ par la formule

$$(6) \qquad v^{(k)}(x) = \log \mathrm{K} + \log \frac{\Theta[u^{(i)}(x) - u^{(i)}(\eta^{(k)}) + t_i]}{\Theta[u^{(i)}(x) - u^{(i)}(\xi^{(k)}) + t_i]}.$$

Dans cette formule, K est une constante et t_i désigne, pour abréger, l'expression

$$\mathrm{C}_i - \sum_{j=1}^{j=p-1} u^{(i)}(x_j),$$

où entrent les constantes fondamentales C_i du problème de l'inversion, et $p - 1$ points arbitraires (x_j, y_j), ainsi que les chemins d'intégration de $u^{(i)}(x_j)$. Le chemin qui mène de l'origine au point variable (x, y) est aussi arbitraire. Au contraire, les chemins d'intégration de $u^{(i)}(\eta^{(k)})$, $u^{(i)}(\xi^{(k)})$ sont ceux qui ont été indiqués dans le numéro précédent. De plus, on peut prendre à l'origine une détermination quel-

(1) Thèse pour le doctorat.

conque du logarithme; cela revient à choisir convenablement la constante K. Cette détermination ne peut changer que quand on décrit l'un des lacets $(O\,\xi^{(k)})$, $(O\,\eta^{(k)})$. Remplaçons dans la formule précédente x et y par $\eta^{(k')}$, $\eta_1^{(k')}$, puis par $\xi^{(k')}$, $\xi_1^{(k')}$, et retranchons les deux résultats obtenus; nous aurons

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} &v^{(k)}(\eta^{(k')}) - v^{(k)}(\xi^{(k')}) \\ &\quad = \log\frac{\Theta[u^{(i)}(\eta^{(k')}) - u^{(i)}(\eta^{(k)}) + t_i]\,\Theta[u^{(i)}(\xi^{(k')}) - u^{(i)}(\xi^{(k)}) + t_i]}{\Theta[u^{(i)}(\eta^{(k')}) - u^{(i)}(\xi^{(k)}) + t_i]\,\Theta[u^{(i)}(\xi^{(k')}) - u^{(i)}(\eta^{(k)}) + t_i]}, \end{aligned}\right.$$

et de la même façon

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} &v^{(k')}(\eta^{(k)}) - v^{(k')}(\xi^{(k)}) \\ &\quad = \log\frac{\Theta[u^{(i)}(\eta^{(k)}) - u^{(i)}(\eta^{(k')}) + t_i]\,\Theta[u^{(i)}(\xi^{(k)}) - u^{(i)}(\xi^{(k)}) + t_i]}{\Theta[u^{(i)}(\eta^{(k)}) - u^{(i)}(\xi^{(k')}) + t_i]\,\Theta[u^{(i)}(\xi^{(k)}) - u^{(i)}(\eta^{(k')}) + t_i]}. \end{aligned}\right.$$

Supposons que les intégrales $v^{(k)}$ et $v^{(k')}$ soient prises le long du chemin du n° 2, mais en ne décrivant pas les lacets logarithmiques qui se présentent tant dans les circuits que dans les lacets de seconde espèce, quand on les ramène de la sphère sur le plan; les logarithmes qui figurent dans les seconds membres des formules (7) et (8) auront alors une même détermination, savoir le logarithme du module augmenté du produit de l'argument par $2\pi\sqrt{-1}$. Car, pour obtenir la formule (7), par exemple, on a à retrancher deux résultats donnés par la formule (6), et le multiple de $2\pi\sqrt{-1}$ disparaît dans la différence. Il suffit donc, pour prouver l'égalité des premiers membres des équations (7) et (8), de démontrer l'égalité des quantités soumises au logarithme dans les seconds membres. Or, les quotients qui entrent dans ces seconds membres sont indépendants, comme les premiers, des $p-1$ points arbitraires (x_j, y_j). Désignons par (x'_j, y'_j) les $p-1$ points qui forment le résidu d'une courbe du degré $m-3$ satisfaisant aux conditions relatives aux points critiques et passant par les $p-1$ points (x_j, y_j). Le facteur

$$\Theta[u^{(i)}(\eta^{(k)}) - u^{(i)}(\eta^{(k')}) + t_i] = \Theta[u^{(i)}(\eta^{(k')}) - u^{(i)}(\eta^{(k)}) - t_i]$$

est égal, d'après le théorème d'Abel, à

$$\Theta\left[u^{(i)}(\eta^{(k')}) - u^{(i)}(\eta^{(k)}) - \sum_{j=1}^{j=p-1} u^{(i)}(x'_j) + C_i\right].$$

En répétant le même raisonnement pour les deux autres facteurs, le second quotient ne diffère du premier que par la substitution des x'_j aux x_j, ce qui ne change pas sa valeur. Posons, avec la restriction faite au sujet des lacets logarithmiques,

$$v^{(k)}(\eta^{(k')}) - v^{(k)}(\xi^{(k')}) = L_{kk'};$$

on aura

$$L_{kk'} = L_{k'k}.$$

PREMIÈRE PARTIE.

Fonction $\Theta^{(q)}$.

4. Représentons par $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_q$, q quantités égales à ± 1. Soit un système de constantes définies par les équations suivantes :

$$\begin{aligned}
4H_1 &= \varepsilon_2 L_{12} + \varepsilon_3 L_{13} + \ldots + \varepsilon_q L_{1q},\\
4H_2 &= \varepsilon_1 L_{21} + \varepsilon_3 L_{23} + \ldots + \varepsilon_q L_{2q},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
4H_q &= \varepsilon_1 L_{q1} + \varepsilon_2 L_{q2} + \ldots + \varepsilon_{q-1} L_{qq-1}.
\end{aligned}$$

Considérons la fonction de la seule variable x,

$$\Theta^{(q)}(u^{(i)}, v^{(k)}) = \sum_{\varepsilon} \Theta\left(u^{(i)} + \sum_{k=1}^{k=q} \varepsilon_k A_{ki}\right) e^{\frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{k=q} \varepsilon_k (v^{(k)} + H_k)}.$$

Chaque terme est le produit d'une fonction Θ ordinaire par une exponentielle. Il y a autant de termes que de groupes distincts de q quantités égales à ± 1, c'est-à-dire 2^q. Chaque terme est caractérisé par le système de valeurs que l'on donne aux ε, et à ce terme répond un système déterminé de q constantes H. Par exemple, si $q = 1$, il y a deux termes seulement; toutes les constantes H sont nulles et l'on a

$$\Theta^{(1)}(u^{(i)}, v^{(1)}) = \Theta(u^{(i)} + A_{1i})\, e^{\frac{1}{2}v^{(1)}} + \Theta(u^{(i)} - A_{1i})\, e^{-\frac{1}{2}v^{(1)}}.$$

Si l'on remplace dans la fonction $\Theta^{(q)}$ les intégrales $u^{(i)}$, $v^{(k)}$ par des variables indépendantes u_i, v_k, elle devient une fonction holomorphe de ces $p+q$ variables indépendantes.

Fonction $\Theta_{(r)}$.

5. Nous définirons d'abord la fonction $\Theta_{(1)}$ par l'égalité

$$\Theta_{(1)} = w^{(1)}\Theta + D_{\zeta^{(1)}}\Theta,$$

le symbole $D_{\zeta^{(1)}}\Theta$ désignant la dérivée de la fonction Θ par rapport à x, où l'on convient de remplacer les variables x et y par $\zeta^{(1)}$, $\zeta_1^{(1)}$ *dans les dérivées des intégrales* $u^{(i)}$ *seulement*. La dérivée par rapport à x de la fonction Θ est

$$\frac{d\Theta}{dx} = \sum_{i=1}^{i=p} \frac{\partial\Theta[u^{(i)}(x)]}{\partial u^{(i)}(x)} \frac{du^{(i)}(x)}{dx}.$$

On aura donc, par définition,

$$D_{\zeta^{(1)}}\Theta = \sum_{i=1}^{i=p} a_{1i} \frac{\partial\Theta[u^{(i)}(x)]}{\partial u^{(i)}(x)}.$$

Nous définirons de même la fonction $\Theta_{(2)}$ qui renferme deux intégrales de seconde espèce $w^{(1)}$ et $w^{(2)}$, par la relation

$$\Theta_{(2)} = w^{(2)}\Theta_{(1)} + D_{\zeta^{(2)}}\Theta_{(1)}, \tag{9}$$

en entendant par $D_{\zeta^{(2)}}\Theta_{(1)}$ la dérivée par rapport à x de la fonction $\Theta_{(1)}$, avec la convention que l'on remplace x et y par $\zeta^{(2)}$, $\zeta_1^{(2)}$ *dans les dérivées des intégrales* $u^{(i)}$ *et de l'intégrale* $w^{(1)}$. On aura, d'après cela,

$$D_{\zeta^{(2)}}\Theta_{(1)} = w^{(1)} D_{\zeta^{(2)}}\Theta + D^2_{\zeta^{(1)}\zeta^{(2)}}\Theta + \left(\frac{dw^{(1)}}{dx}\right)_{\zeta^{(2)}}\Theta,$$

et, par suite,

$$\Theta_{(2)} = w^{(1)} w^{(2)}\Theta + w^{(1)} D_{\zeta^{(2)}}\Theta + w^{(2)} D_{\zeta^{(1)}}\Theta + D^2_{\zeta^{(1)}\zeta^{(2)}}\Theta + \left(\frac{dw^{(1)}}{dx}\right)_{\zeta^{(2)}}\Theta,$$

ou bien, en remplaçant les notations D par les termes qu'elles fournissent,

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} \Theta_{(2)} &= \varpi^{(1)}\varpi^{(2)}\Theta + \varpi^{(1)}\sum_{j=1}^{j=p}\mathrm{a}_{2j}\frac{\partial\Theta}{\partial u^{(j)}} + \varpi^{(2)}\sum_{i=1}^{i=p}\mathrm{a}_{1i}\frac{\partial\Theta}{\partial u^{(i)}} \\ &+ \sum_{j=1}^{j=p}\sum_{i=1}^{i=p}\mathrm{a}_{2j}\,\mathrm{a}_{1i}\frac{\partial^2\Theta}{\partial u^{(j)}\,\partial u^{(i)}} + \left(\frac{d\varpi^{(i)}}{dx}\right)_{\zeta^{(2)}}\Theta. \end{aligned}\right.$$

Ce développement nous apprend que la fonction $\Theta_{(2)}$ ne change pas si l'on permute les intégrales $\varpi^{(1)}$, $\varpi^{(2)}$, ainsi que les périodes a_{2j}, a_{1i} qui s'y rapportent. Le dernier terme seul ne se présente pas sous une forme symétrique; mais, d'après la formule (4) du n° 3, il ne change pas par la permutation indiquée.

Posons de même

$$(11)\qquad \Theta_{(3)} = \varpi^{(3)}\Theta_{(2)} + \mathrm{D}_{\zeta^{(3)}}\Theta_{(2)},$$

en ayant soin de remplacer x et y par $\zeta^{(3)}$, $\zeta_1^{(3)}$ dans les dérivées des intégrales $u^{(i)}$, qui deviendront ainsi des périodes de $\varpi^{(3)}$, et dans celles des intégrales $\varpi^{(1)}$, $\varpi^{(2)}$. Observons d'abord que la fonction $\Theta_{(3)}$ est symétrique par rapport aux trois intégrales $\varpi^{(1)}$, $\varpi^{(2)}$, $\varpi^{(3)}$ et aux périodes qui s'y rapportent. Il résulte, en effet, de ce qui précède que l'on peut changer les intégrales $\varpi^{(1)}$, $\varpi^{(2)}$ sans changer $\Theta_{(2)}$ et par suite $\Theta_{(3)}$. Pour montrer que l'on peut permuter l'intégrale $\varpi^{(3)}$ avec l'une des deux autres, $\varpi^{(2)}$ par exemple, il suffit de remarquer que si, dans la formule (11), on remplace $\Theta_{(2)}$ par sa valeur tirée de la formule (9), on arrivera à une expression qui aura en $\Theta_{(1)}$ la même composition que la fonction (10) en Θ, et qui, par suite, sera symétrique par rapport aux intégrales $\varpi^{(2)}$, $\varpi^{(3)}$. En se servant de la relation (10), on forme d'ailleurs sans difficulté l'expression de $\Theta_{(3)}$ par rapport à Θ et aux trois intégrales de seconde espèce. On trouve ainsi

$$\begin{aligned} \Theta_{(3)} = {} & \varpi^{(1)}\varpi^{(2)}\varpi^{(3)}\Theta \\ & + \varpi^{(1)}\varpi^{(2)}\mathrm{D}_{\zeta^{(3)}}\Theta + \varpi^{(2)}\varpi^{(3)}\mathrm{D}_{\zeta^{(1)}}\Theta + \varpi^{(3)}\varpi^{(1)}\mathrm{D}_{\zeta^{(2)}}\Theta \\ & + \varpi^{(1)}\mathrm{D}^2_{\zeta^{(2)}\zeta^{(3)}}\Theta + \varpi^{(2)}\mathrm{D}^2_{\zeta^{(3)}\zeta^{(1)}}\Theta + \varpi^{(3)}\mathrm{D}^2_{\zeta^{(1)}\zeta^{(2)}}\Theta \\ & + \left(\frac{d\varpi^{(2)}}{dx}\right)_{\zeta^{(3)}}(\varpi^{(1)}\Theta + \mathrm{D}_{\zeta^{(1)}}\Theta) + \left(\frac{d\varpi^{(3)}}{dx}\right)_{\zeta^{(1)}}(\varpi^{(2)}\Theta + \mathrm{D}_{\zeta^{(2)}}\Theta) \\ & + \left(\frac{d\varpi^{(1)}}{dx}\right)_{\zeta^{(2)}}(\varpi^{(3)}\Theta + \mathrm{D}_{\zeta^{(3)}}\Theta). \end{aligned}$$

La symétrie de la fonction $\Theta_{(3)}$ est évidente en se rappelant la propriété exprimée par la formule (4) du n° 3. En continuant de la même façon, on formera une suite de fonctions; et l'une quelconque d'entre elles aura pour expression

$$\Theta_{(r)} = \varpi^{(r)}\Theta_{(r-1)} + D_{\zeta^{(r)}}\Theta_{(r-1)}.$$

On fera voir que $\Theta_{(r)}$ est symétrique par rapport aux différentes intégrales ϖ en remarquant que la propriété est vraie pour $\Theta_{(r)}$ si on l'admet pour $\Theta_{(r-1)}$. Car, d'une part, on pourra permuter entre eux les indices $1, 2, \ldots, r-1$; ensuite on reconnaîtra que l'on peut permuter l'indice r avec l'un des précédents, $r-1$ par exemple, en exprimant $\Theta_{(r)}$ au moyen de la fonction $\Theta_{(r-2)}$. Remarquons que la variable x n'entre dans la fonction $\Theta_{(r)}$ que par les intégrales $u^{(i)}$ servant d'arguments à la fonction Θ et à ses dérivées partielles par rapport aux $u^{(i)}$ et par les intégrales ϖ. Si l'on remplace ces intégrales par des variables indépendantes u_i, ϖ_h, la fonction $\Theta_{(r)}$ devient une fonction holomorphe de ces $p + r$ variables.

Fonction $\Theta_{(r)}^{(q)}$.

6. Nous définirons d'abord la fonction $\Theta_{(1)}^{(q)}$ par la relation

$$\Theta_{(1)}^{(q)} = \varpi^{(1)}\Theta^{(q)} + D_{\zeta^{(1)}}\Theta^{(q)}.$$

$D_{\zeta^{(1)}}\Theta^{(q)}$ indique encore la dérivée de $\Theta^{(q)}$ par rapport à x, où l'on remplace x et y par $\zeta^{(1)}$, $\zeta_1^{(1)}$, mais seulement dans les dérivées des intégrales $u^{(i)}$ et dans celles des intégrales $v^{(k)}$. Ainsi, en particulier, l'expression de $\Theta_{(1)}^{(1)}$ est

$$\left[\Theta(u^{(i)} + A_{1i})e^{\frac{1}{2}v^{(1)}} + \Theta(u^{(i)} - A_{1i})e^{-\frac{1}{2}v^{(1)}}\right]\left[\varpi^{(1)} + \frac{1}{2}\left(\frac{dv^{(1)}}{dx}\right)_{\zeta^{(1)}}\right]$$
$$+ \sum_{i=1}^{i=p} a_{1i}\left[\frac{\partial\Theta(u^{(i)} + A_{1i})}{\partial u^{(i)}}e^{\frac{1}{2}v^{(1)}} + \frac{\partial\Theta(u^{(i)} - A_{1i})}{\partial u^{(i)}}e^{-\frac{1}{2}v^{(1)}}\right].$$

On définira de même la fonction $\Theta_{(2)}^{(q)}$ en posant

$$\Theta_{(2)}^{(q)} = \varpi^{(2)}\Theta_{(1)}^{(q)} + D_{\zeta^{(2)}}\Theta_{(1)}^{(q)},$$

et d'une façon générale

$$\Theta^{(q)}_{(r)} = \varpi^{(r)}\Theta^{(q)}_{(r-1)} + D_{\zeta^{(r)}}\Theta^{(q)}_{(r-1)},$$

$D_{\zeta^{(r)}}\Theta^{(q)}_{(r-1)}$ désigne toujours la dérivée par rapport à x de la fonction $\Theta^{(q)}_{(r-1)}$ avec la convention que l'on fait $x = \zeta^{(r)}$, $y = \zeta^{(r)}_1$ dans les dérivées $\frac{du^{(i)}}{dx}$, $\frac{dv^{(k)}}{dx}$, $\frac{d\varpi^{(h)}}{dx}$.

Si l'on exprime la fonction $\Theta^{(q)}_{(r)}$ par rapport à la fonction $\Theta^{(q)}$ et aux différentes intégrales $\varpi^{(h)}$, on obtient évidemment la même formule qu'en exprimant la fonction $\Theta_{(r)}$ par rapport à la fonction Θ et aux intégrales $\varpi^{(h)}$. Il en résulte que la fonction $\Theta^{(q)}_{(r)}$ est symétrique comme $\Theta_{(r)}$ par rapport aux intégrales $\varpi^{(h)}$ et aux constantes qui s'y rapportent. En regardant $u^{(i)}, v^{(k)}, \varpi^{(h)}$ comme des variables indépendantes, u_i, v_k, ϖ_h, la fonction $\Theta^{(q)}_{(r)}$ devient une fonction holomorphe de ces $p+q+r$ variables.

Étude de la fonction $\Theta^{(q)}_{(r)}[u^{(i)} - G_i, v^{(k)} - g_k, \varpi^{(h)} - \gamma_h]$.

7. La fonction $\Theta^{(q)}_{(r)}$ ne dépend de la variable x que par les intégrales des trois espèces. Supposons que l'on suive les différents chemins qui mènent de l'origine (x_0, y_0) à un point analytique (x, y); ces intégrales prennent les valeurs

$$u^{(i)} + 2m_i\pi\sqrt{-1} + 2\sum_{j=1}^{j=p} n_j\alpha_{ij},$$

$$v^{(k)} + 2\lambda_k\pi\sqrt{-1} + 2\sum_{j=1}^{j=p} n_j A_{hj},$$

$$\varpi^{(h)} + \sum_{j=1}^{j=p} n_j a_{hj}.$$

Le nombre entier λ_k dépend des lacets logarithmiques $(O\xi^{(k)})$, $(O\eta^{(k)})$ qu'embrasse le chemin considéré. Nous allons montrer que la fonction

$$\Theta^{(q)}_{(r)}[u^{(i)} - G_i, v^{(k)} - g_k, \varpi^{(h)} - \gamma_h]$$

où G_i, g_k, γ_h désignent des constantes quelconques à une infinité de valeurs que l'on obtient en multipliant l'une d'entre elles par l'exponentielle $\pm e^{-J}$ en posant

$$J = \sum_{i=1}^{i=p} n_i(u^{(i)} - G_i) + \sum_{i=1}^{i=p}\sum_{j=1}^{j=p} n_i n_j \alpha_{ij}.$$

L'exponentielle est la même que dans le cas de la fonction $\Theta(u^{(i)} - G_i)$ et, sauf le signe qui dépend, comme nous allons le voir, des lacets logarithmiques, ne contient aucune trace des intégrales de seconde et de troisième espèce entrant dans la fonction $\Theta^{(q)}_{(r)}$.

Considérons en premier lieu la fonction

$$\Theta^{(q)}[u^{(i)} - G_i,\ v^{(k)} - g_k].$$

Un terme quelconque de cette fonction est le produit de

$$\Theta\left[u^{(i)} - G_i + \sum_{k=1}^{k=q} \varepsilon_k A_{ki}\right]$$

par l'exponentielle

$$e^{\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{k=q} \varepsilon_k(v^{(k)} - g_k + H_k)},$$

les ε ayant des valeurs déterminées. Par le changement de chemin, la fonction Θ se reproduit multipliée par l'exponentielle

$$e^{-J - \sum_{i=1}^{i=p} n_i \sum_{k=1}^{k=q} \varepsilon_k A_{ki}}.$$

L'exponentielle du terme considéré se reproduit multipliée par

$$e^{\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{k=q} \varepsilon_k\left(2\lambda_k\pi\sqrt{-1} + 2\sum_{j=1}^{j=p} n_j A_{kj}\right)}.$$

Le terme tout entier se reproduit donc multiplié par

$$e^{-J + \pi\sqrt{-1}\sum_{k=1}^{k=q} \varepsilon_k \lambda_k}.$$

Remarquons que le nombre entier $\sum_{k=1}^{k=q} \varepsilon_k \lambda_k$ a la même parité pour tous les termes de la fonction $\Theta^{(q)}$; car si l'une des quantités ε, ε_k, par exemple, prend la valeur $+1$ au lieu de -1, en passant d'un terme à un autre, la somme en question varie de $2\lambda_k$. Il en résulte que tous les termes de la fonction $\Theta^{(q)}$ se trouvent multipliés par une même exponentielle $\pm e^{-J}$.

Considérons maintenant la fonction

$$\begin{aligned}\Theta^{(q)}_{(1)}&[u^{(i)}-G_i, v^{(k)}-g_k, w^{(1)}-\gamma_1]\\ &=[w^{(1)}-\gamma_1]\,\Theta^{(q)}[u^{(i)}-G_i, v^{(k)}-g_k]+D_{\zeta^{(1)}}\Theta^{(q)}[u^{(i)}-G_i, v^{(k)}-g_k].\end{aligned}$$

Puisque la fonction $\Theta^{(q)}$ se reproduit multipliée par e^{-J} quand on change le chemin d'intégration, sa dérivée prend en un même point analytique une infinité de valeurs représentées par

$$\pm e^{-J}\left(\frac{d\Theta^{(q)}}{dx}-\Theta^{(q)}\sum_{i=1}^{i=p} n_i\frac{du^{(i)}}{dx}\right).$$

Faisant la substitution $x=\zeta^{(1)}$, $y=\zeta_1^{(1)}$ dans les dérivées des intégrales $u^{(i)}$, $v^{(k)}$, on en conclut que la fonction $D_{\zeta^{(1)}}\Theta^{(q)}$ prend, par le changement du chemin d'intégration, les valeurs

$$\pm e^{-J}\left(D_{\zeta^{(1)}}\Theta^{(q)}-\Theta^{(q)}\sum_{i=1}^{i=p} n_i\mathrm{a}_{1i}\right).$$

D'un autre côté, l'intégrale $w^{(1)}-\gamma_1$ prend les valeurs

$$w^{(1)}-\gamma_1+\sum_{i=1}^{i=p} n_i\mathrm{a}_{1i}.$$

En ajoutant les deux résultats et remarquant que les signes $+$ et $-$ se correspondent, on voit que les termes contenant les périodes a_{1i} disparaissent, et que l'on retrouve le produit de la fonction $\Theta^{(q)}_{(1)}$ par l'exponentielle $\pm e^{-J}$.

Le mode de démonstration montre immédiatement que la même propriété s'applique à la fonction $\Theta^{(q)}_{(r)}$, car ayant

$$\Theta^{(q)}_{(r)}=(w^{(r)}-\gamma_r)\,\Theta^{(q)}_{(r-1)}+D_{\zeta^{(r)}}\Theta^{(q)}_{(r-1)}, \tag{12}$$

si l'on admet que la propriété est vraie pour $\Theta^{(q)}_{(r-1)}$, il en sera de même pour $\Theta_{(r)}^{(q)}$, puisque, d'après le calcul précédent, les périodes de l'intégrale $\varpi^{(r)}$ disparaissent du résultat.

Infinis de la fonction $\Theta_{(r)}^{(q)}[u^{(i)} - G_i, v^{(k)} - g_k, \varpi^{(h)} - \gamma_h]$.

8. Les fonctions Θ et leurs dérivées partielles qui entrent dans la fonction $\Theta_{(r)}^{(q)}$, ayant pour arguments des intégrales de première espèce qui ne peuvent devenir infinies pour aucune valeur de la variable, la fonction $\Theta_{(r)}^{(q)}$ ne devient infinie qu'avec une des intégrales de seconde ou de troisième espèce. Considérons d'abord un pôle $(\zeta^{(r)}, \zeta_1^{(r)})$. L'intégrale $\varpi^{(r)} - \gamma_r$ se développe aux environs de ce pôle suivant la série

$$(13) \qquad -\frac{1}{x - \zeta^{(r)}} + e_r - \gamma_r + e'_r(x - \zeta^{(r)}) + \ldots.$$

La fonction $\Theta_{(r-1)}^{(q)}$, qui ne contient que les intégrales $\varpi^{(r)}, \ldots, \varpi^{(r-1)}$, étant finie aux environs de ce pôle, se développe par la formule de Taylor suivant la série

$$(14) \quad \Theta_{(r-1)}^{(q)}[u^{(i)}(\zeta^{(r)}) - G_i, \ldots] + (x - \zeta^{(r)})\left(\frac{d}{dx}\right)_{\zeta^{(r)}} \Theta_{(r-1)}^{(q)}[u^{(i)}(\zeta^{(r)}) - G_i, \ldots] + \ldots$$

On en conclut immédiatement que la fonction $\Theta_{(r)}^{(q)}$ devient infinie et se développe en une série dont le premier terme est

$$-\frac{1}{x - \zeta^{(r)}} \Theta_{(r-1)}^{(q)}[u^{(i)}(\zeta^{(r)}) - G_i, \ldots].$$

Mais nous aurons besoin pour la suite de calculer en outre le second terme du développement qui est la valeur à laquelle se réduit le reste de la série pour $x = \zeta^{(r)}$. D'après la formule (12), il faut d'abord chercher le terme indépendant de $x - \zeta^{(r)}$ dans le produit des deux expressions (13) et (14), puis y ajouter le premier terme du développement de la fonction $D_{\zeta^{(r)}} \Theta_{(r-1)}^{(q)}$. Ce premier terme s'obtient simplement en faisant $x = \zeta^{(r)}, y = \zeta_1^{(r)}$ dans la fonction représentée par le symbole $D_{\zeta^{(r)}}$; par la définition de ce symbole, la fonction obtenue diffère de la dérivée de la fonction $\Theta_{(r-1)}^{(q)}$ en ce qu'on doit y faire partiellement la substitution indiquée; en achevant d'opérer cette substitution partout où x et y restent encore, on tombe évidemment sur l'expression $\left(\frac{d}{dx}\right)_{\zeta^{(r)}} \Theta_{(r-1)}^{(q)}$. Ce terme disparaît par réduction dans le terme indépendant de $x - \zeta^{(r)}$, qui est ainsi

$$(e_r - \gamma_r)\,\Theta^{(q)}_{(r-1)}[u^{(i)}(\zeta^{(r)}) - G_i, \ldots].$$

A cause de la symétrie, ce que nous venons de dire du développement de $\Theta^{(q)}_{(r)}$ aux environs du pôle $(\zeta^{(r)}, \zeta_1^{(r)})$ s'applique à tous les autres pôles. Le développement met alors en évidence une fonction $\Theta^{(q)}_{(r-1)}$ qui contient toutes les intégrales $w^{(h)} - \gamma_h$, à l'exception de celle dont on considère le pôle.

9. La fonction $\Theta^{(q)}_{(r)}$ devient encore infinie avec une intégrale de troisième espèce $\varphi^{(k)}$, c'est-à-dire aux $2q$ points $(\xi^{(k)}, \xi_1^{(k)})$, $(\eta^{(k)}, \eta_1^{(k)})$. Au point $(\xi^{(k)}, \xi_1^{(k)})$, l'exponentielle $e^{\frac{1}{2}\varphi^{(k)}}$ devient infinie, comme cela résulte (n° 1) du développement de l'intégrale $\varphi^{(k)}$; on peut la regarder aux environs de ce point comme le produit de $(x - \xi^{(k)})^{-\frac{1}{2}}$ par une fonction finie et développable, suivant les puissances entières positives de $x - \xi^{(k)}$. L'exponentielle $e^{-\frac{1}{2}\varphi^{(k)}}$ peut être regardée, aux environs du même point, comme le produit d'une telle fonction par le facteur $(x - \xi^{(k)})^{\frac{1}{2}}$, et par suite s'annule avec le facteur $x - \xi^{(k)}$. En se reportant à la définition de la fonction $\Theta^{(q)}_{(r)}$, on voit que la moitié des termes de cette fonction s'annulent, savoir tous ceux pour lesquels $\varepsilon_k = -1$. Les autres termes, pour lesquels $\varepsilon_k = +1$, deviennent infinis avec l'exponentielle $e^{\frac{1}{2}\varphi^{(k)}}$, et la fonction $\Theta^{(q)}_{(r)}$ pourra être représentée elle-même par le produit

$$M(x - \xi^{(k)})^{-\frac{1}{2}},$$

M étant une fonction finie et développable suivant les puissances entières positives de $x - \xi^{(k)}$.

On verra de la même façon que la fonction $\Theta^{(q)}_{(r)}$ devient infinie au point $(\eta^{(k)}, \eta_1^{(k)})$ et peut se représenter, aux environs de ce point, par l'expression

$$N(x - \eta^{(k)})^{-\frac{1}{2}},$$

la fonction N étant finie et développable suivant les puissances entières positives de $x - \eta^{(k)}$. Mais les termes qui deviennent infinis sont ceux pour lesquels $\varepsilon_k = -1$; les autres s'annulent pour $x = \eta^{(k)}$, $y = \eta_1^{(k)}$.

Zéros de la fonction $\Theta_{(r)}^{(q)}[u^{(i)} - G_i, v^{(k)} - g_k, w^{(h)} - \gamma_h]$.

10. Théorème I. — *La fonction* $\Theta_{(r)}^{(q)}[u^{(i)} - G_i, v^{(k)} - g_k, w^{(h)} - \gamma_h]$ *admet* $p + q + r$ *zéros.*

La fonction se reproduit, multipliée par une exponentielle, quand on change le chemin qui va du point initial (x_0, y_0) au point (x, y). On peut donc, sans modifier le nombre des zéros, astreindre la variable à rester à l'intérieur du contour simple dont il a été question dans le n° 3, et le nombre cherché sera le quotient par $2\pi\sqrt{-1}$ de la somme des intégrales

$$\sum_{l=0}^{l=m-1} \int d\log\Theta_{(r)}^{(q)}[u_l^{(i)} - G_i, v_l^{(k)} - g_k, w_l^{(h)} - \gamma_h]$$

prises le long de ce contour.

Les m fonctions étant holomorphes à l'intérieur du contour, on voit d'abord que le rayon Ol, parcouru successivement dans deux sens différents, donne des intégrales qui se détruisent. Les mêmes fonctions étant finies pour une valeur infinie de x, on voit aussi que le grand cercle du contour donne une intégrale nulle. Il reste donc à chercher ce que donnent les différents lacets, qui sont parcourus ici dans le sens négatif.

Pour un lacet tel que $O\xi^{(k)}$, il suffit de tenir compte de la partie donnée par le petit cercle; car, en appelant m' et m deux points opposés sur le bord de gauche et sur le bord de droite de la coupure $O\xi^{(k)}$, la partie de l'intégrale relative à la droite $O\xi^{(k)}$ parcourue dans les deux sens est

$$(15) \qquad \int d\log(\Theta_{(r)}^{(q)})_{m'} - \int d\log(\Theta_{(r)}^{(q)})_m = \int d\log\frac{(\Theta_{(r)}^{(q)})_{m'}}{(\Theta_{(r)}^{(q)})_m}.$$

Or, quand on passe du point m' au point m en suivant le lacet, la fonction $\Theta_{(r)}^{(q)}$ ne fait que changer de signe. Car les intégrales des trois espèces reprennent leur valeur, sauf $v^{(k)}$ qui augmente de $2\pi\sqrt{-1}$; tous les termes de la fonction contiennent en facteur soit $e^{\frac{1}{2}v^{(k)}}$, soit $e^{-\frac{1}{2}v^{(k)}}$, et par suite se trouvent multipliés par -1. Il est clair que, s'il s'agissait de la fonction $\Theta_{(r)}$, où n'entrent pas d'intégrales de troisième espèce, cette fonction aurait la même valeur sur les deux bords de la coupure. Dans tous les cas, l'intégrale (15) est nulle pour les deux parties de la droite $O\xi^{(k)}$. L'intégrale relative au petit cercle du même lacet est (n° 9)

$$\int d\log \mathrm{M} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-\xi^{(k)}}.$$

La première partie est nulle, puisque M est finie pour $x=\xi^{(k)}$; la seconde est égale à $\pi\sqrt{-1}$.

On verra de la même façon que les deux bords d'une coupure $O\eta^{(k)}$ donnent une intégrale nulle, et que le petit cercle du lacet donne $\pi\sqrt{-1}$. On trouve ainsi pour l'intégrale relative à l'ensemble des $2q$ lacets $O\xi^{(k)}$, $O\eta^{(k)}$

$$2\pi q\sqrt{-1}.$$

Considérons un lacet $O\zeta^{(h)}$ relatif à un pôle. La droite $O\zeta^{(h)}$ donne à l'aller et au retour des intégrales qui se détruisent, puisque toutes les intégrales des trois espèces, sans excepter $w^{(h)}$, et par suite aussi la fonction $\Theta_{(r)}^{(q)}$, reprennent leurs valeurs quand on passe du point m' au point m en suivant le lacet. L'intégrale relative au petit cercle, décrit dans le sens négatif, est égale à $2\pi\sqrt{-1}$; cela résulte immédiatement du développement de la fonction $\Theta_{(r)}^{(q)}$ et de l'intégrale $w^{(h)}$ aux environs du pôle. Les r lacets polaires donnent ainsi pour l'intégrale

$$2\pi r\sqrt{-1}.$$

Considérons enfin un lacet (a) relatif à un point critique. Le petit cercle du lacet donne une intégrale nulle, puisque la fonction $\Theta_{(r)}^{(q)}$ reste finie aux environs du point correspondant. Cherchons les valeurs de la fonction sur les deux bords opposés de la coupure en m' et m. Appelons $u_{\alpha_{\rho+1}}^{(i)}$, $v_{\alpha_{\rho+1}}^{(k)}$, $w_{\alpha_{\rho+1}}^{(h)}$ les valeurs en m des intégrales des trois espèces quand on suit le chemin composé des lacets fondamentaux de seconde espèce conduisant de la racine initiale y_0 à la racine $y_{\alpha_{\rho+1}}$, avec laquelle commence le circuit contenant le lacet binaire $(a)_{g_{\rho+1}}^{g_{\rho+2}}$, chemin suivi des lacets composant la première partie de ce circuit jusqu'en m.

Soient maintenant $u'^{(i)}_{\alpha_\rho}$, $v'^{(k)}_{\alpha_\rho}$, $w'^{(h)}_{\alpha_\rho}$ les valeurs de ces mêmes intégrales en m' quand on suit le chemin composé des lacets fondamentaux de seconde espèce conduisant de la racine y_0 à la racine y_{α_ρ}, avec laquelle commence le circuit qui contient le lacet binaire $(a)^{g_{\rho+1}}_{g_\rho}$, suivi des lacets qui composent la première partie de ce circuit jusqu'en m'. Ces valeurs, considérées deux à deux, étant celles des intégrales en un même point analytique, leur différence est une période de l'intégrale correspondante. Mais nous avons vu (n° 7) que, quand on va du point m' au même point analytique m, en suivant un chemin quelconque, le rapport des valeurs que prend la fonction $\Theta^{(q)}_{(r)}$ en m' et en m est une exponentielle qui ne contient plus de traces des intégrales de seconde et de troisième espèce. Supposons qu'on ait exprimé en fonction des périodes normales la période de seconde espèce de l'intégrale $u^{(i)}$, relative au cycle simple de seconde espèce qui contient le lacet binaire $(a')^{\alpha_{\rho+1}}_{\alpha_\rho}$ (¹), on trouvera ainsi, pour le rapport des valeurs de la fonction $\Theta^{(q)}_{(r)}$ en m' et en m, l'exponentielle

$$\pm e^{-\sum\limits_{i=1}^{i=p} n_i\left(u^{(i)}_{\alpha_{\rho+1}}-G_i\right)-\sum\limits_{i=1}^{i=p}\sum\limits_{j=1}^{j=p} n_i n_j \alpha_{ij}}.$$

La différentielle du logarithme de ce rapport est

$$-\sum_{i=1}^{i=p} n_i\, du_{\alpha_{\rho+1}}.$$

C'est le même résultat que dans la recherche du nombre des zéros de la fonction $\Theta[u^{(i)}-G_i]$; les nombres entiers n_i ont les mêmes valeurs, et l'on est ramené à un calcul connu (²). Ajoutons seulement que les lacets $O\xi^{(k)}$, $O\eta^{(k)}$, $O\zeta^{(h)}$ n'ont aucune influence sur la partie relative aux points critiques, puisque le coefficient différentiel reprend à la fin d'un de ces lacets la valeur qu'il avait à l'entrée. L'ensemble des lacets des points critiques donne donc l'intégrale

$$2p\pi\sqrt{-1}.$$

Le nombre des zéros est donc $p+q+r$.

(¹) BRIOT, *Théorie des fonctions abéliennes*, p. 126.

(²) *Ibid.*, p. 127.

11. Théorème II. — *Les $p+q+r$ zéros de la fonction*

$$\Theta_{(r)}^{(q)}[u^{(i)}-G_i, v^{(k)}-g_k, w^{(h)}-\gamma_h]$$

satisfont aux équations

$$\sum_{j=1}^{j=p+q+r} u^{(i)}(x_j)-G_i \equiv C_i \quad (i=1,2,\ldots,p),$$

$$\sum_{j=1}^{j=p+q+r} v^{(k)}(x_j)-g_k \equiv D_k \quad (k=1,2,\ldots,q),$$

$$\sum_{j=1}^{j=p+q+r} w^{(h)}(x_j)-\gamma_h \equiv E_h \quad (h=1,2,\ldots,r).$$

Les quantités C_i, D_k, E_h sont des constantes, et le signe $\equiv$ indique que l'on doit ajouter aux seconds membres des multiples quelconques des périodes relatives aux intégrales qui figurent dans les premiers membres.

Considérons la fonction de x

$$R=\log\frac{\Theta_{(r)}^{(q)}[u^{(i)}-G'_i, v^{(k)}-g'_k, w^{(h)}-\gamma'_h]}{\Theta_{(r)}^{(q)}[u^{(i)}-G_i, v^{(k)}-g_k, w^{(h)}-\gamma_h]},$$

où le numérateur du rapport qui est soumis au logarithme ne diffère du dénominateur que par le changement des constantes G_i, g_k, γ_h en d'autres constantes quelconques G'_i, g'_k, γ'_h. Nous désignerons par (x'_j, y'_j) les $p+q+r$ zéros de la fonction $\Theta_{(r)}^{(q)}$ du numérateur. Les deux fonctions $\Theta_{(r)}^{(q)}$ deviennent infinies pour les mêmes valeurs de la variable; leur rapport est fini pour ces valeurs. Il en résulte que la fonction R ne devient infinie qu'aux points (x'_j, y'_j), (x_j, y_j), qui sont des points critiques logarithmiques. Nous supposerons ces points réunis deux à deux par des lacets doubles (1), et nous chercherons d'abord la valeur de la somme des intégrales.

$$\sum_{l=0}^{l=m-1} \int R_l\, du_l^{(i)},$$

(1) Briot, *Théorie des fonctions abéliennes*, p. 133.

où $u^{(t)}$ désigne l'une quelconque des intégrales de première espèce, le long du contour simple déjà considéré précédemment.

La fonction R étant finie, ainsi que l'intégrale $u^{(t)}$ pour x infini, la grande circonférence du contour donne une intégrale nulle. Chacune des fonctions R_l et u_l étant monotrope dans l'intérieur du contour, la droite Ol, parcourue successivement dans les deux sens, donne des intégrales qui se détruisent.

Les lacets $(O\xi^{(k)})$, $(O\eta^{(k)})$, $(O\zeta^{(h)})$ donnent tous une intégrale nulle; car, pour les deux premiers, les deux fonctions $\Theta_{(r)}^{(q)}$ reprennent sur le bord de droite de la coupure correspondante une valeur égale et le signe contraire à celle qu'ils avaient sur le bord de gauche (n° **10**). S'il s'agit d'un lacet $(O\zeta^{(h)})$, les deux fonctions reprennent la même valeur sur les deux bords. Il en est de même relativement à tous les lacets pour la fonction $\Theta_{(r)}$. Dans tous les cas, la fonction R reprend la même valeur quand on passe d'un bord à l'autre de la coupure en suivant le lacet. Quant au petit cercle du lacet, il donne une intégrale nulle, puisque la fonction R et l'intégrale $u^{(t)}$ restent finies au point correspondant.

Un des lacets doubles (x_j, x'_j) donne pour l'intégrale (¹)

$$2\pi\sqrt{-1}\,[u^{(t)}(x'_j) - u^{(t)}(x_j)],$$

et l'intégrale fournie par les $p+q+r$ lacets analogues est

$$2\pi\sqrt{-1}\sum_{j=1}^{j=p+q+r}[u^{(t)}(x'_j) - u^{(t)}(x_j)].$$

Il faut maintenant évaluer la partie de l'intégrale relative aux lacets des points critiques algébriques. Soit (a) un lacet sur lequel se permutent p racines : ce lacet donne

$$\sum_{\rho=1}^{\rho=p}\int_0^a R'_{\alpha_\rho}\,du'^{(t)}_{\alpha_\rho} - \sum_{\rho=1}^{\rho=p}\int_0^a R_{\alpha_{\rho+1}}\,du^{(t)}_{\alpha_{\rho+1}} = \sum_{\rho=1}^{\rho=p}(R'_{\alpha_\rho} - R_{\alpha_{\rho+1}})\,du^{(t)}_{\alpha_{\rho+1}},$$

les indices α_ρ, $\alpha_{\rho+1}$ ayant la même signification que dans le numéro

(¹) BRIOT, *Théorie des fonctions abéliennes*, p. 136.

précédent. La différence $R'_{\alpha_\rho} - R_{\alpha_{\rho+1}}$ est le logarithme du quotient de deux rapports que j'appelle pour un moment T′ et T. Le premier T′ est le quotient des valeurs que prend la fonction $\Theta^{(q)}_{(r)}$, dont les constantes sont accentuées en deux points opposés m' et m de la coupure Oa; nous avons vu (n° 10) que ce rapport est

$$T' = \pm e^{-\sum_{i=1}^{i=p} n_i\left(u^{(i)}_{\alpha_{\rho+1}} - G'_i\right) - \sum_{i=1}^{i=p}\sum_{j=1}^{j=p} n_i n_j \alpha_{ij}}.$$

Le rapport T est de même

$$T = \pm e^{-\sum_{i=1}^{i=p} n_i\left(u^{(i)}_{\alpha_{\rho+1}} - G_i\right) - \sum_{i=1}^{i=p}\sum_{j=1}^{j=p} n_i n_j \alpha_{ij}}.$$

Les deux signes de T′ et T se correspondent; car ce signe dépend seulement de la façon dont les lacets logarithmiques entrent dans les circuits. Le rapport $\frac{T'}{T}$ est égal à

$$e^{\sum_{i=1}^{i=p} n_i(G'_i - G_i)}.$$

On aura donc, en profitant de la remarque faite par M. Briot [1],

$$R'_{\alpha_\rho} - R_{\alpha_{\rho+1}} = \sum_{i=1}^{i=p} n_i(G'_i - G_i).$$

Ce résultat est identique à celui que l'on trouve dans le cas des fonctions Θ; les nombres entiers n_i ont les mêmes valeurs que dans ce cas particulier. Nous en concluons que la partie relative à l'ensemble des lacets (a) est

$$-2\pi\sqrt{-1}(G'_i - G_i).$$

En divisant par $2\pi\sqrt{-1}$, on obtient les p premières équations qu'il s'agissait d'établir. Par la suppression des coupures, on rétablit les périodes que comporte le signe $\equiv$ dans ces équations.

---

(1) *Loc. cit.*, p. 135.

12. Passons à la démonstration des r dernières relations. Elle résulte de l'évaluation de la somme

$$\sum_{l=0}^{l=m-1} R_l\, dv_l^{(t)}$$

le long du même contour que ci-dessus. Les lacets $(O\xi^{(k)})$, $(O\eta^{(k)})$ donnent encore une intégrale nulle. Il en est de même des lacets $(O\zeta^{(h)})$, à l'exception du lacet $(O\zeta^{(t)})$, dont le petit cercle donne une intégrale différente de zéro. Or on a

$$\frac{dv^{(t)}}{dx} = \frac{1}{(x-\zeta^{(t)})^2} + e'_t + \ldots$$

L'intégrale relative au petit cercle parcouru dans le sens négatif est le produit de $-2\pi\sqrt{-1}$ par le résidu, lequel s'obtient en faisant $x=\zeta^{(t)}$, $y=\zeta_1^{(t)}$ dans la dérivée de R. Mais, d'après la définition de la fonction R, on a

$$(16)\qquad \frac{dR}{dx} = \frac{d}{dx}\log\Theta_{(r)}^{(q)}[u^{(i)}-G'_i,\ldots] - \frac{d}{dx}\log\Theta_{(r)}^{(q)}[u^{(i)}-G_i,\ldots].$$

Les deux fonctions $\Theta_{(r)}^{(q)}$ deviennent infinies pour $x=\zeta^{(t)}$. Appelons pour un instant $\Phi(x)$ une fonction qui devient infinie pour $x=\zeta^{(t)}$ et se développe suivant la série

$$\Phi(x) = \frac{\mathfrak{A}}{x-\zeta^{(t)}} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C}(x-\zeta^{(t)}) + \ldots;$$

on aura

$$\frac{d\Phi(x)}{dx} = -\frac{\mathfrak{A}}{(x-\zeta^{(t)})^2} + \mathfrak{C} + \ldots$$

et, par suite, en faisant le quotient des deux développements,

$$\frac{d}{dx}\log\Phi(x) = -\frac{1}{x-\zeta^{(t)}} + \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}} + \ldots$$

Il résulte de là que le terme $-\frac{1}{x-\zeta^{(t)}}$ disparaît dans le second membre de l'équation (16). Ce second membre se réduit, pour $x=\zeta^{(t)}$, à la différence des termes $\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}}$, qu'il s'agit maintenant d'obtenir. Or il résulte du n° 8 que la fonction $\Theta_{(r-1)}^{(q)}[u^{(i)}(\zeta^{(t)})-G'_i,\ldots]$, où entrent toutes les intégrales de seconde espèce différentes de $\varpi^{(t)}$, disparaît dans le rapport $\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}}$ qui se réduit à $\gamma'_t - e_t$, et que la fonction $\Theta^{(q)}_{(r-1)}[u^{(i)}(\zeta^{(t)}) - G_i, \ldots]$ disparaît dans le second rapport $\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}}$ qui se réduit à $\gamma_t - e_t$. Le résidu de $\left(\frac{dR}{dx}\right)_{\zeta^{(t)}}$ est donc égal à $\gamma'_t - \gamma_t$, et l'intégrale relative au lacet $(O\zeta^{(t)})$ est égale à $-2\pi\sqrt{-1}(\gamma'_t - \gamma_t)$.

Les $p+q+r$ doubles lacets donnent, comme précédemment,

$$2\pi\sqrt{-1}\sum_{j=1}^{j=p+q+r}[\varpi^{(t)}(x'_j) - \varpi^{(t)}(x_j)].$$

L'ensemble des lacets relatifs aux points critiques (a) donne une intégrale nulle; car le calcul est identiquement le même que pour la fonction $\Theta(u^{(i)} - G_i)$, et l'on aura à évaluer une somme donnée par la formule (25), page 137 de l'Ouvrage de M. Briot, avec la seule différence que l'intégrale de première espèce $u^{(t)}$ est remplacée par l'intégrale de seconde espèce $\varpi^{(t)}$. Cette somme se compose de deux parties dont la seconde est nulle identiquement, les entiers n_i ayant les mêmes valeurs que dans le cas de la fonction Θ; la première est aussi nulle, parce que *toutes* les périodes normales d'indice impair de l'intégrale $\varpi^{(t)}$ sont nulles. En divisant le résultat de l'intégration par $2\pi\sqrt{-1}$, on obtient les r équations qu'il s'agissait d'établir.

13. Il nous reste à démontrer les q équations intermédiaires qui résultent de l'évaluation suivant le même contour que précédemment de la somme

$$\sum_{l=0}^{l=m-1} R_l\, dv_l^{(t)}.$$

Il est clair que les lacets $(O\zeta^{(h)})$ donnent une intégrale nulle, ainsi que les lacets $(O\xi^{(k)})$, $(O\eta^{(k)})$, à l'exception des deux lacets pour lesquels $k = t$.

Les $p+q+r$ doubles lacets donnent, sans difficulté, l'intégrale

$$2\pi\sqrt{-1}\sum_{j=1}^{j=p+q+r}[v^{(t)}(x'_j) - v^{(t)}(x_j)].$$

Le résultat relatif aux lacets (a) des points critiques algébriques n'est encore nullement affecté par la présence des lacets précédents. L'ensemble de tous ces lacets donne une intégrale nulle pour la même raison que dans le cas de l'intégrale de seconde espèce.

Le lacet $(O\xi^{(t)})$, parcouru dans le sens négatif comme il l'est dans le contour, donne $2\pi\sqrt{-1}\,R(\xi^{(t)})$; le lacet $(O\eta^{(t)})$ donne de même $-2\pi\sqrt{-1}\,R(\eta^{(t)})$. Nous avons donc à chercher la valeur de $2\pi\sqrt{-1}\,[R(\xi^{(t)})-R(\eta^{(t)})]$, c'est-à-dire de

$$(17)\qquad 2\pi\sqrt{-1}\log\frac{\Theta_{(r)}^{(q)}[u^{(i)}(\xi^{(t)})-G'_i,\ldots]\;\Theta_{(r)}^{(q)}[u^{(i)}(\eta_1^{(t)})-G_i,\ldots]}{\Theta_{(r)}^{(q)}[u^{(i)}(\xi^{(t)})-G_i,\ldots]\;\Theta_{(r)}^{(q)}[u^{(i)}(\eta_1^{(t)})-G'_i,\ldots]}.$$

D'après la loi de formation des fonctions $\Theta_{(r)}^{(q)}$, chacun des termes de cette fonction contient une exponentielle où entrent comme exposants les q intégrales de troisième espèce soit avec le signe $+$, soit avec le signe $-$. Quand on fait $x=\xi^{(t)}$, $y=\xi_1^{(t)}$, tous les termes pour lesquels $\varepsilon_t=-1$ s'annulent; tous ceux pour lesquels $\varepsilon_t=+1$ deviennent infinis avec l'exponentielle $e^{\frac{1}{2}\varphi^{(t)}}$. De même, quand on fait $x=\eta^{(t)}$, $y=\eta_1^{(t)}$, les termes pour lesquels $\varepsilon_t=+1$ s'annulent; ceux pour lesquels $\varepsilon_t=-1$ deviennent infinis avec $e^{-\frac{1}{2}\varphi^{(t)}}$. Le double rapport qui figure sous le logarithme dans l'expression (17) a une limite finie que l'on obtient en supprimant l'exponentielle $e^{\frac{1}{2}\varphi^{(t)}}$ dans tous les termes différents de zéro du rapport

$$(18)\qquad \frac{\Theta_{(r)}^{(q)}[u^{(i)}(\xi^{(t)})-G'_i,\ldots]}{\Theta_{(r)}^{(q)}[u^{(i)}(\xi^{(t)})-G_i,\ldots]},$$

et l'exponentielle $e^{-\frac{1}{2}\varphi^{(t)}}$ dans les termes différents de zéro du rapport

$$(19)\qquad \frac{\Theta_{(r)}^{(q)}[u^{(i)}(\eta_1^{(t)})-G_i,\ldots]}{\Theta_{(r)}^{(q)}[u^{(i)}(\eta_1^{(t)})-G'_i,\ldots]},$$

puis faisant le produit des résultats. L'intégrale $\varphi^{(t)}$ entrant partout accompagnée de la constante $-g_t$ ou bien $-g'_t$, on voit que l'on pourra mettre en facteur $e^{-\frac{1}{2}g'_t}$ dans tous les termes du numérateur du rapport (18) et $e^{-\frac{1}{2}g_t}$ dans ceux du dénominateur. De la même façon, on peut mettre $e^{\frac{1}{2}g_t}$ en facteur au numérateur du rapport (19) et $e^{\frac{1}{2}g'_t}$ au dénominateur. En faisant le produit, on aura à multiplier le facteur $e^{-(g'_t-g_t)}$ par un rapport analogue à celui de l'expression (17), mais où les exponentielles des différents termes ne contiennent plus ni l'intégrale $\varphi^{(t)}$ ni les constantes g_t, g'_t. Nous conviendrons d'indiquer la suppression de ces facteurs par la lettre t, placée au-dessous de la caractéristique Θ^{q}_{r}. Réunissons maintenant les fonctions qui renferment les mêmes constantes, et nous aurons à chercher la valeur du produit des deux expressions suivantes

$$\frac{\underset{t}{\Theta^{(q)}_{(r)}}[u^{(i)}(\eta^{(t)})-\mathrm{G}_i,\ldots]}{\underset{t}{\Theta^{(q)}_{(r)}}[u^{(i)}(\xi^{(t)})-\mathrm{G}_i,\ldots]},$$

$$\frac{\underset{t}{\Theta^{(q)}_{(r)}}[u^{(i)}(\xi^{(t)})-\mathrm{G}'_i,\ldots]}{\underset{t}{\Theta^{(q)}_{(r)}}[u^{(i)}(\eta^{(t)})-\mathrm{G}'_i,\ldots]}.$$

Nous allons voir que ces rapports sont égaux tous les deux à $+1$ ou bien à -1, en faisant intervenir les constantes H_k qui, jusqu'à présent, n'ont joué aucun rôle. Nous ferons d'abord la démonstration pour la fonction $\Theta^{(q)}$, puis nous verrons que la loi de formation des fonctions $\Theta^{(q)}_{(r)}$ laisse entièrement subsister la même conséquence.

14. Considérons donc l'expression

$$\frac{\underset{t}{\Theta^{(q)}}[u^{(i)}(\eta^{(t)})-\mathrm{G}_i,\ldots]}{\underset{t}{\Theta^{(q)}}[u^{(i)}(\xi^{(t)})-\mathrm{G}_i,\ldots]}. \tag{20}$$

Un terme quelconque du numérateur répond à des valeurs données arbitrairement aux ε, sauf ε_t, qui est égal à -1; ce terme est le produit de la fonction

$$\Theta[u^{(i)}(\eta^{(t)})-\mathrm{G}_i+\varepsilon_1\mathrm{A}_{1i}+\ldots+\varepsilon_{t-1}\mathrm{A}_{t-1\,i}-\mathrm{A}_{ti}+\varepsilon_{t+1}\mathrm{A}_{t+1\,i}+\ldots+\varepsilon_q\mathrm{A}_{qi}] \tag{21}$$

par une exponentielle dont l'exposant est

$$\left\{\begin{aligned}&\frac{\varepsilon_1}{2}[\varphi^{(1)}(\eta^{(t)})-g_1+\mathrm{H}_1]+\ldots+\frac{\varepsilon_{t-1}}{2}[\varphi^{(t-1)}(\eta^{(t)})-g_{t-1}+\mathrm{H}_{t-1}]-\frac{1}{2}\mathrm{H}_t\\&+\frac{\varepsilon_{t+1}}{2}[\varphi^{(t+1)}(\eta^{(t)})-g_{t+1}+\mathrm{H}_{t+1}]+\ldots+\varepsilon_q[\varphi^{(q)}(\eta^{(t)})-g_q+\mathrm{H}_q].\end{aligned}\right. \tag{22}$$

Faisons correspondre à ce terme celui du dénominateur pour lequel les ε ont la même valeur, sauf ε_t qui a nécessairement la valeur $+1$. Ce terme sera le produit de la fonction

$$(23)\quad \Theta[u^{(i)}(\xi^{(t)}) - G_i + \varepsilon_1 A_{1i} + \ldots + \varepsilon_{t-1} A_{t-1,i} + A_{ti} + \varepsilon_{t+1} A_{t+1,i} + \ldots + \varepsilon_q A_{qi}]$$

par l'exponentielle dont l'exposant est

$$(24)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\varepsilon_1}{2}[v^{(1)}(\xi^{(t)}) - g_1 + H_1] + \ldots + \frac{\varepsilon_{t-1}}{2}[v^{(t-1)}(\xi^{(t)}) - g_{t-1} + H_{t-1}] + \frac{1}{2} H_t \\ &+ \frac{\varepsilon_{t+1}}{2}[v^{(t+1)}(\xi^{(t)}) - g_{t+1} + H_{t+1}] + \ldots + \frac{\varepsilon_q}{2}[v^{(q)}(\xi^{(t)}) - g_q + H_q]. \end{aligned}\right.$$

Les fonctions Θ de ces deux termes sont les mêmes, en vertu de la formule (1) du n° **2**. Cherchons maintenant la différence des exposants (22) et (24). Les constantes $g_1, \ldots, g_{t+1}, \ldots, g_q$ disparaissent. La quantité H_t, qui ne dépend pas de ε_t, est la même pour les deux termes et donne $-H_t$ dans la différence. La quantité H_1 a dans les deux exposants des valeurs qui diffèrent par le terme contenant ε_t; la différence est $-\frac{1}{2} L_{1t}$, en sorte que l'on trouvera dans la différence des deux exposants $-\frac{1}{4}\varepsilon_1 L_{1t}$. On en conclut que les termes H donnent dans la différence des exposants

$$-\tfrac{1}{4}[\varepsilon_1 L_{1t} + \ldots + \varepsilon_{t-1} L_{t-1,t} + \varepsilon_{t+1} L_{t+1,t} + \ldots + \varepsilon_q L_{qt}] - H_t.$$

On sait (n° **4**) que l'on peut permuter les indices des L, ce qui permet de réduire l'expression précédente à $-2H_t$. Pour évaluer la partie qui provient des intégrales $v^{(k)}$, il faut remarquer que l'expression $v^{(k)}(\eta^{(t)}) - v^{(k)}(\xi^{(t)})$ n'est pas nécessairement égale à L_{kt}, à cause des lacets logarithmiques qu'on a eu à décrire dans le contour d'intégration. Nous poserons donc

$$v^{(k)}(\eta^{(t)}) - v^{(k)}(\xi^{(t)}) = L_{kt} + 2 f_{kt} \pi\sqrt{-1},$$

f_{kt} étant un nombre entier. Nous trouverons ainsi, pour compléter la différence des deux exposants,

$$\begin{aligned} &\tfrac{1}{2}(\varepsilon_1 L_{1t} + \ldots + \varepsilon_{t-1} L_{t-1,t} + \varepsilon_{t+1} L_{t+1,t} + \ldots + \varepsilon_q L_{qt}) \\ &+ \pi\sqrt{-1}(\varepsilon_1 f_{1t} + \ldots + \varepsilon_{t-1} f_{t-1,t} + \varepsilon_{t+1} f_{t+1,t} + \ldots + \varepsilon_q f_{qt}). \end{aligned}$$

La première parenthèse donne $4H_t$; la seconde est un nombre entier qui conserve évidemment la même parité pour tous les termes. Ainsi, à un terme quelconque du numérateur, dans le rapport (20), correspond un terme égal dans le dénominateur, ou bien on retrouve au dénominateur tous les termes du numérateur changés de signe.

Le même raisonnement s'applique au rapport, qui se déduit du rapport (20) en changeant G_i, g_k en G'_i, g'_k. Les nombres entiers f ne dépendent pas de ces constantes; les deux rapports seront donc égaux tous les deux à $+1$ ou à -1.

Remarquons aussi qu'on aurait pu se dispenser de tenir compte des lacets logarithmiques, puisqu'en définitive il s'agit de trouver ce que devient la fonction R aux points $(\xi^{(t)}, \xi_1^{(t)})$, $(\eta^{(t)}, \eta_1^{(t)})$, et qu'elle n'est pas altérée évidemment par les lacets $(O\xi^{(k)})$, $(O\eta^{(k)})$. C'est ce que nous ferons dans ce qui suit.

15. Considérons maintenant la fonction $\Theta_{(1)}^{(q)}$. Dans l'opération $D_{\zeta^{(1)}}\Theta^{(q)}$, il nous faut distinguer ici les termes que l'on obtient en prenant la dérivée de chaque terme de la fonction $\Theta^{(q)}$ par rapport à l'intégrale $v^{(t)}$. D'après la signification du symbole $D_{\zeta^{(1)}}$, on trouve ainsi le produit du terme primitif par $\pm\frac{1}{2}\left(\frac{dv^{(t)}}{dx}\right)_{\zeta^{(1)}}$, selon que ce terme répond à $\varepsilon_t = \pm 1$. Nous pourrons représenter l'ensemble de ces termes par l'expression

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dv^{(t)}}{dx}\right)_{\zeta^{(1)}}\left(\underset{\varepsilon_t=+1}{\Theta^{(q)}} - \underset{\varepsilon_t=-1}{\Theta^{(q)}}\right).$$

Quant aux autres termes fournis par l'opération $D_{\zeta^{(1)}}\Theta^{(q)}$, nous les désignerons maintenant par le symbole $\Delta_{\zeta^{(1)}}\Theta^{(q)}$, en sorte que la fonction $\Theta_{(1)}^{(q)}$ sera

$$\Theta_{(1)}^{(q)} = (v^{(1)} - \gamma_1)\Theta^{(q)} + \frac{1}{2}\left(\frac{dv^{(t)}}{dx}\right)_{\zeta^{(1)}}\left(\underset{\varepsilon_t=+1}{\Theta^{(q)}} - \underset{\varepsilon_t=-1}{\Theta^{(q)}}\right) + \Delta_{\zeta^{(1)}}\Theta^{(q)}.$$

Il faut démontrer que le numérateur et le dénominateur du rapport

$$\frac{\underset{t}{\Theta_{(1)}^{(q)}}[u^{(t)}(\eta^{(t)}) - G_i, \ldots]}{\underset{t}{\Theta_{(1)}^{(q)}}[u^{(t)}(\xi^{(t)}) - G_i, \ldots]} \tag{25}$$

sont égaux terme à terme.

Occupons-nous d'abord de l'opération $\Delta_{\zeta^{(1)}}\Theta^{(q)}$. Prenons un terme de la fonction $\Theta^{(q)}$ pour lequel $\varepsilon_t = -1$; c'est le produit d'une exponentielle par une fonction Θ; on peut y différentier soit la fonction Θ, soit une intégrale $v^{(k)}$, k étant différent de t. Dans le premier cas, on trouve le produit de l'exponentielle primitive par la somme des p dérivées partielles de cette fonction Θ multipliées respectivement par les dérivées $\left(\frac{du^{(i)}}{dx}\right)_{\zeta^{(1)}}$, c'est-à-dire par les périodes a_{1i}. Ayant supprimé le facteur $e^{-\frac{1}{2}(v^{(t)}-g_t)}$ et remplacé x et y par $\eta^{(t)}$, $\eta_1^{(t)}$, nous obtiendrons ainsi p termes déterminés appartenant au numérateur du rapport (25). L'exponentielle commune à ces termes est de la forme (22) et les arguments des dérivées partielles de la fonction Θ sont ceux de la fonction (21). Or, il existe dans la fonction $\Theta^{(q)}$ un autre terme qui ne diffère du premier que par le changement de $\varepsilon_t = -1$ en $\varepsilon_t = +1$; une opération analogue à la précédente fournira p termes appartenant au dénominateur du rapport (25). L'exposant de l'exponentielle commune à ces termes est de la forme (24), et les dérivées partielles de la fonction Θ ont pour arguments ceux de la fonction (23). Ces deux séries de p termes sont les mêmes d'après le numéro précédent.

Dans le second cas, on différentie une intégrale $v^{(k)}$; on reproduit ainsi le terme primitif de la fonction $\Theta^{(q)}$ multipliée par $\frac{\varepsilon_k}{2}\left(\frac{dv^{(k)}}{dx}\right)_{\zeta^{(1)}}$. Les deux termes de la fonction $\Theta^{(q)}$, qui ne diffèrent entre eux que par le signe de ε_t, fourniront encore deux termes égaux.

Passons maintenant aux termes différents de ceux que l'on obtient par l'opération $\Delta_{\zeta^{(1)}}$. En remarquant que pour $x = \eta^{(t)}$ tous les termes de $\Theta^{(q)}$ pour lesquels $\varepsilon_t = +1$ s'annulent, on voit qu'il faudra écrire au numérateur du rapport (25) l'expression

$$\left[w^{(1)}(\eta_1^{(t)}) - \gamma_1 - \frac{1}{2}\left(\frac{dv^{(t)}}{dx}\right)_{\zeta^{(1)}}\right]\Theta_t^{(q)}[u^{(i)}(\eta_1^{(t)}) - G_i, \ldots]$$

et au dénominateur

$$\left[w^{(1)}(\xi^{(t)}) - \gamma_1 + \frac{1}{2}\left(\frac{dv^{(t)}}{dx}\right)_{\zeta^{(1)}}\right]\Theta_t^{(q)}[u^{(i)}(\xi^{(t)}) - G_i, \ldots].$$

Les fonctions $\Theta_t^{(q)}$ de ces deux expressions sont égales; quant à leurs coefficients, ils sont égaux en vertu de la formule (5) du n° 3. Ainsi le rapport (25) est égal à $+1$.

Supposons que, ayant formé les termes fournis par l'opération $\Delta_{\zeta^{(1)}}$, on les soumette à l'opération indiquée par le symbole $\Delta_{\zeta^{(2)}}$, puis qu'on fasse sur ces nouveaux termes l'opération $\Delta_{\zeta^{(3)}}$, et ainsi de suite. Le raisonnement qui précède montre que l'on arrivera dans tous les cas à une fonction jouissant de cette propriété, qu'en faisant d'une part $x=\eta^{(t)}$, $y=\eta_1^{(t)}$, et divisant tous les termes par $e^{-\frac{1}{2}(v^{(t)}-g_t)}$, et en faisant d'autre part $x=\xi^{(t)}$, $y=\xi_1^{(t)}$, puis divisant tous les termes par $e^{\frac{1}{2}(v^{(t)}-g_t)}$, les deux résultats obtenus sont égaux. La même propriété subsiste pour les termes que l'on obtient en effectuant cette série d'opérations sur les autres termes de $\Theta_{(1)}^{(q)}$, savoir

$$(w^{(1)}-\gamma_1)\,\Theta^{(q)}+\frac{1}{2}\left(\frac{dv^{(t)}}{dx}\right)_{\zeta^{(1)}}\left(\underset{\epsilon_t=+1}{\Theta^{(q)}}-\underset{\epsilon_t=-1}{\Theta^{(q)}}\right).$$

Car on obtiendra d'abord, par la différentiation de $w^{(1)}$, les deux termes

$$\left(\frac{dw^{(1)}}{dx}\right)_{\zeta^{(2)}}\underset{t}{\Theta^{(q)}}[u^{(i)}(\eta^{(t)})-G_i,\ldots],$$
$$\left(\frac{dw^{(1)}}{dx}\right)_{\zeta^{(2)}}\underset{t}{\Theta^{(q)}}[u^{(i)}(\xi^{(t)})-G_i,\ldots],$$

puis deux expressions que l'on peut écrire

$$\left[w^{(1)}(\eta^{(t)})-\gamma_1-\frac{1}{2}\left(\frac{dv^{(t)}}{dx}\right)_{\zeta^{(1)}}\right]\underset{t}{\Delta_{\zeta^{(2)}}}\Theta^{(q)}[u^{(i)}(\eta^{(t)})-G_i,\ldots],$$
$$\left[w^{(1)}(\xi^{(t)})-\gamma_1+\frac{1}{2}\left(\frac{dv^{(t)}}{dx}\right)_{\zeta^{(1)}}\right]\underset{t}{\Delta_{\zeta^{(2)}}}\Theta^{(q)}[u^{(i)}(\xi^{(t)})-G_i,\ldots],$$

la lettre t placée sous le signe Δ indiquant toujours la suppression du facteur $e^{\pm\frac{1}{2}(v^{(t)}-g_t)}$. Ces expressions sont égales, d'après ce qui a été dit plus haut. On en conclut immédiatement que les résultats trouvés pour la fonction $\Theta_{(1)}^{(q)}$ s'étendent à la fonction $\Theta_{(2)}^{(q)}$, et successivement à toutes les fonctions $\Theta_{(r)}^{(q)}$. En résumé, la valeur de l'intégrale (17) est $-2\pi\sqrt{-1}(g'_t-g_t)$, ce qui démontre les q équations intermédiaires.

16. Théorème III. — *La fonction* $\Theta_{(r)}^{(q)}(u_i, v_k, w_h)$ *de* $p+q+r$ *va-*

riables indépendantes est paire ou impaire suivant que le nombre r est pair ou impair.

On sait que la fonction Θ de p variables indépendantes est paire. Il résulte de la série qui définit cette fonction Θ que sa dérivée partielle par rapport à l'une des variables est impaire, qu'une nouvelle différentielle partielle donne une fonction paire et ainsi de suite. Cette remarque rend la proposition évidente pour la fonction $\Theta_{(r)}$. Considérons maintenant la fonction $\Theta^{(q)}$ définie par la somme

$$\sum_{\varepsilon} \Theta\left(u_i + \sum_{k=1}^{k=q} \varepsilon_k A_{ki}\right) e^{\frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{k=q} \varepsilon_k(v_k + H_k)}.$$

Un terme quelconque s'obtient quand on donne aux ε des valeurs déterminées. En changeant dans ce terme le signe des u_i et des v_k, il est aisé de voir que l'on obtient un autre terme de la fonction répondant à un changement de signe de tous les ε dans le terme donné. On a, en effet, la fonction Θ étant paire,

$$\Theta\left(-u_i + \sum_{k=1}^{k=q} \varepsilon_k A_{ki}\right) = \Theta\left(u^{(i)} - \sum_{k=1}^{k=q} \varepsilon_k A_{ki}\right).$$

Quant à l'exponentielle, elle devient, par le changement de signe des v_k,

$$e^{-\frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{k=q} \varepsilon_k v_k + \frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{k=q} \varepsilon_k H_k},$$

ce qui revient bien au changement de signes de tous les ε, puisque tous les termes de H_k contiennent un ε en facteur. Ainsi la fonction $\Theta^{(q)}$ est paire. On voit immédiatement que l'opération $D_{\zeta^{(i)}}$ faite sur $\Theta^{(q)}$ donne une fonction impaire.... On en conclut le théorème énoncé pour la fonction $\Theta^{(q)}_{(r)}$ qui a, par rapport à $\Theta^{(q)}$ et aux variables w_h, la même composition que $\Theta_{(r)}$ par rapport à Θ et à ces mêmes variables w_h.

17. Théorème IV. — *On peut déterminer les constantes G_i, g_k, γ_h de façon que la fonction $\Theta^{(q)}_{(r)}(u^{(i)} - G_i, v^{(k)} - g_k, w^{(h)} - \gamma_h)$ admette $p + q + r$ zéros donnés arbitrairement.*

Soient (x_j, y_j) $p+q+r$ points arbitraires. Si l'on veut que ce soient des zéros de la fonction, on devra avoir, d'après les équations du théorème II,

$$G_i \equiv \sum_{j=1}^{j=p+q+r} u^{(i)}(x_j) - C_i,$$

$$g_k \equiv \sum_{j=1}^{j=p+q+r} v^{(k)}(x_j) - D_k,$$

$$\gamma_h \equiv \sum_{j=1}^{j=p+q+r} w^{(h)}(x_j) - E_h.$$

Supposons que l'on ait remplacé les constantes par ces valeurs; les multiples des périodes ne font que multiplier la fonction par une exponentielle sans changer par conséquent ses zéros. Or, nous verrons dans la seconde Partie que le système des $p+q+r$ équations du théorème II, où l'on regarde les x_j comme inconnues, n'admet qu'une solution, d'où l'on conclut que les $p+q+r$ zéros de la fonction coïncident avec les $p+q+r$ zéros donnés. La fonction pourra s'écrire, à une exponentielle près,

$$(26) \qquad \Theta_{(r)}^{(q)}\left\{\begin{aligned} &u^{(i)}(x) - \sum_{j=1}^{j=p+q+r} u^{(i)}(x_j) + C_i, \\ &v^{(k)}(x) - \sum_{j=1}^{j=p+q+r} v^{(k)}(x_j) + D_k, \\ &w^{(h)}(x) - \sum_{j=1}^{j=p+q+r} w^{(h)}(x_j) + E_h. \end{aligned}\right.$$

18. Théorème V. — *La fonction de $p+q+r$ variables indépendantes*

$$\Theta_{(r)}^{(q)}\left[\sum_{j=1}^{j=p+q+r-1} u^{(i)}(x_j) - C_i, \quad \sum_{j=1}^{j=p+q+r-1} v^{(k)}(x_j) - D_k, \quad \sum_{j=1}^{j=p+q+r-1} w^{(h)}(x_j) - E_h\right]$$

est identiquement nulle.

Il suffit de remplacer dans la fonction (26), qui admet $p+q+r$ zéros donnés, le point variable (x,y) par l'un des $p+q+r$ points donnés, et de remarquer que la fonction $\Theta_{(r)}^{(q)}$ est paire ou impaire.

19. Théorème VI. — *Pour que la fonction de $p+q+r-1$ variables indépendantes (x_j, y_j)*

$$\Theta_{(r)}^{(q)}\left[\sum_{j=1}^{j=p+q+r-1} u^{(i)}(x_j)-C'_i,\ \sum_{j=1}^{j=p+q+r-1} v^{(k)}(x_j)-D'_k,\ \sum_{j=1}^{j=p+q+r-1} w^{(h)}(x_j)-E'_h\right]$$

s'annule identiquement, il faut que l'on ait

$$C'_i = C_i,\quad D'_k = D_k,\quad E'_h = E_h.$$

Car, dans l'hypothèse admise, en considérant un nouveau point (x_{p+q+r}, y_{p+q+r}), la fonction $\Theta_{(r)}^{(q)}$, dont les arguments sont

$$u^{(i)}(x)-\sum_{j=1}^{j=p+q+r} u^{(i)}(x_j)+C'_i,$$

$$v^{(k)}(x)-\sum_{j=1}^{j=p+q+r} v^{(k)}(x_j)+D'_k,$$

$$w^{(h)}(x)-\sum_{j=1}^{j=p+q+r} w^{(h)}(x_j)+E'_h,$$

admet les $p+q+r$ zéros (x_j, y_j). En comparant ce résultat avec les équations qui déterminent les zéros, on en conclut immédiatement les relations cherchées.

Des courbes adjointes.

20. Soient $\varphi_i(x,y)$, l'indice i variant de 1 à p, des polynômes du degré $m-3$ satisfaisant aux conditions relatives aux points critiques de la courbe fondamentale $F(x,y)=0$, $\psi_k(x,y)$ et $\chi_h(x,y)$, l'indice k variant de 1 à q et l'indice h de 1 à r, des polynômes du degré $m-2$, satisfaisant également aux conditions des points critiques. Appelons

$(\xi^{(k)}, \eta^{(k)})$ le premier membre de l'équation de la droite joignant les deux points $(\xi^{(k)}, \xi_1^{(k)})$, $(\eta^{(k)}, \eta_1^{(k)})$, c'est-à-dire le déterminant

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ \xi^{(k)} & \xi_1^{(k)} & 1 \\ \eta^{(k)} & \eta_1^{(k)} & 1 \end{vmatrix},$$

et $(\zeta^{(h)})$ le premier membre de l'équation de la tangente à la courbe $F(x,y) = 0$ au point $(\zeta^{(h)}, \zeta_1^{(h)})$. Nous supposons que la courbe $\psi_k(x,y) = 0$ passe par les $m-2$ points où la droite $(\xi^{(k)}, \eta^{(k)})$ coupe la courbe $F(x,y) = 0$, outre les deux points qui la déterminent, et que la courbe $\chi_h(x,y) = 0$ passe par les $m-2$ points où la tangente $(\zeta^{(h)})$ rencontre la courbe outre le point de contact. Soient enfin λ_i, μ_k et ν_h des constantes arbitraires. Considérons l'équation

$$\sum_{i=1}^{i=p} \lambda_i \varphi_i(x,y) + \sum_{k=1}^{k=q} \mu_k \frac{\psi_k(x,y)}{(\xi^{(k)}, \eta^{(k)})} + \sum_{h=1}^{h=r} \nu_h \frac{\chi_h(x,y)}{(\zeta^{(h)})} = 0; \tag{27}$$

cette équation représente des courbes du degré $m+q+r-3$, qui satisfont aux conditions suivantes quelles que soient les constantes λ_i, μ_k, ν_h : 1° elles remplissent toutes les conditions relatives aux points critiques; 2° elles passent par les $m-2$ points où chaque droite $(\xi^{(k)}, \eta^{(h)})$ rencontre $F(x,y) = 0$ en faisant abstraction des deux points qui la déterminent, et par les $m-2$ points différents du point de contact où chaque droite $(\zeta^{(h)})$ rencontre la même courbe ; 3° elles passent par les $\frac{1}{2}(q+r)(q+r-1)$ points d'intersection des $q+r$ droites prises deux à deux. Nous dirons, pour abréger, qu'une courbe est *adjointe* quand elle satisfait à ces trois séries de conditions, et nous allons démontrer que l'équation (27) est l'équation générale des courbes adjointes du degré $m+q+r-3$. Une courbe de ce degré est, en effet, déterminée par $\frac{1}{2}(m+q+r-3)(m+q+r)$ conditions. Le nombre A des conditions relatives aux points critiques est $\frac{1}{2}(m-1)(m-2) - p$. Les nombre des conditions nécessaires pour achever de déterminer une courbe adjointe est donc

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}(m+q+r-3)(m+q+r) - A - (m-2)(q+r) \\ - \tfrac{1}{2}(q+r)(q+r-1) = p+q+r-1; \end{aligned}$$

c'est bien le nombre des paramètres arbitraires qui entrent dans l'équation (27).

Supposons maintenant que l'on prenne sur la courbe $F(x,y)=0$ les $p+q+r-1$ points qui achèvent de déterminer une courbe adjointe; nous allons voir que cette courbe rencontre encore $F(x,y)=0$ en $p+q+r-1$ autres points qui se trouvent ainsi déterminés par les autres. En effet, le nombre des points communs aux deux courbes équivaut à $m(m+q+r-3)$. Les points critiques donnent un nombre de points communs qui équivaut à $2A$. Le nombre des points qui sont déterminés par les autres est donc

$$\begin{aligned} &m(m+q+r-3)-(m-1)(m-2) \\ &\quad +2p-(m-2)(q+r)-(p+q+r-1)=p+q+r-1. \end{aligned}$$

21. Désignons par (a'_j, b'_j) les $p+q+r-1$ points qui servent à déterminer une courbe adjointe du degré $m+q+r-3$ et par (a_j, b_j) les $p+q+r-1$ points qui résultent des autres. Le théorème d'Abel appliqué à une des intégrales de première espèce donne

$$\sum_{j=1}^{j=p+q+r-1} [u^{(i)}(a'_j)+u^{(i)}(a_j)]=\Gamma_i,$$

Γ_i étant une constante indépendante des points (a'_j, b'_j) quand on fait varier d'une façon continue la courbe adjointe $\Phi(x,y)=0$.

Appliquons maintenant le théorème d'Abel à une intégrale de troisième espèce $v^{(k)}$ et appelons $\Psi(x,y)=0$ l'équation d'une autre courbe adjointe déterminée par les $p+q+r-1$ points (α'_j, β'_j) et rencontrant encore $F(x,y)=0$ aux points (α_j, β_j), on aura

$$\sum_{j=1}^{j=p+q+r-1} [v^{(k)}(a'_j)+v^{(k)}(a_j)-v^{(k)}(\alpha'_j)-v^{(k)}(\alpha_j)]+\log\frac{\Phi(\xi^{(k)},\xi_1^{(k)})\,\Psi(\eta^{(k)},\eta_1^{(k)})}{\Phi(\eta^{(k)},\eta_1^{(k)})\,\Psi(\xi^{(k)},\xi_1^{(k)})}=0.$$

Or nous allons voir que la quantité soumise au logarithme dans cette expression est égale à l'unité. Supposons d'abord que $p+q+r-2$ des points (α'_j, β'_j) coïncident respectivement avec les points (a'_j, b'_j) de même indice. L'équation des courbes adjointes du degré $m+q+r-3$, passant par ces $p+q+r-2$ points, renferme linéairement un paramètre arbitraire et peut s'écrire $\Phi + k\Psi = 0$. On achève de déterminer une courbe de ce faisceau, en la faisant passer par un point de $F(x, y) = 0$. Remarquons maintenant que la courbe ne peut passer par le point $(\xi^{(k)}, \xi_1^{(k)})$, sans passer en même temps par le point $(\eta^{(k)}, \eta_1^{(k)})$; car elle rencontre déjà la droite $(\xi^{(k)}, \eta^{(k)})$ aux $m - 2$ points qui appartiennent à $F(x, y) = 0$ et, en outre, aux $q + r - 1$ points où la droite $(\xi^{(k)}, \eta^{(k)})$ est rencontrée par les autres droites. Elle ne peut donc passer par l'un des deux points en question, sans contenir la droite qui les joint. De là nous concluons que les valeurs de k obtenues en écrivant que la courbe passe par l'un ou l'autre des deux points sont égales. La quantité soumise au logarithme est alors égale à l'unité, et le théorème d'Abel se traduit par l'équation

$$\sum_{j=1}^{j=p+q+r-1} [v^{(k)}(a'_j) + v^{(k)}(a_j)] = \sum_{j=1}^{j=p+q+r-1} [v^{(k)}(\alpha'_j) + v^{(k)}(\alpha_j)].$$

Dans cette équation $p + q + r - 2$ intégrales disparaissent comme communes aux deux membres; mais la même équation a encore lieu, lorsque tous les points (a'_j, b'_j), (α'_j, β'_j) sont distincts. On peut, en effet, passer de l'un des systèmes de points à l'autre système, par l'intermédiaire de courbes adjointes ayant toujours $p + q + r - 2$ points communs. Appelant Δ_k la somme des intégrales pour les $p + q + r - 1$ points (a'_j, b'_j), et considérant le faisceau de courbes adjointes qui passent par $p + q + r - 2$ de ces points, nous appliquerons le théorème précédent et remplacerons ainsi le point (a_j, b'_j) que l'on avait laissé de côté par un des points (α'_j, β'_j) sans changer la constante Δ_k. On considère ensuite un faisceau de courbes passant par le point (α'_j, β'_j) déjà introduit et par $p + q + r - 3$ des points (a'_j, b_j); on remplacera ainsi un point (a'_j, b'_j) par un nouveau point (α'_j, β'_j). En faisant varier la courbe adjointe d'une façon continue, on aura donc

$$\sum_{j=1}^{j=p+q+r-1} [v^{(k)}(a'_j) + v^{(k)}(a_j)] = \Delta_k,$$

Δ_k étant une constante indépendante des points (a'_j, b'_j) qui servent à déterminer la courbe.

En appliquant le théorème d'Abel à une intégrale normale de seconde espèce, on a

$$\sum_{j=1}^{j=p+q+r-1} [w^{(h)}(a'_j) + w^{(h)}(a_j) - w^{(h)}(\alpha'_j) - w^{(h)}(\alpha_j)] = \left(\frac{d}{dx}\log\frac{\Psi}{\Phi}\right)_{\zeta^{(h)}}.$$

Le second membre de cette équation est nul, parce que la courbe adjointe ne peut passer par le point $(\zeta^{(h)}, \zeta_1^{(h)})$ sans contenir la droite $(\zeta^{(h)})$ tout entière, et par suite sans être tangente à $F(x,y)=0$. On verra, comme précédemment, que si l'on fait varier la courbe adjointe d'une façon continue, on aura

$$\sum_{j=1}^{j=p+q+r-1} [w^{(h)}(a'_j) + w^{(h)}(a_j)] = \varepsilon_h,$$

ε_h étant une constante indépendante des points qui servent à déterminer la courbe adjointe.

22. Théorème VII. — *Les constantes Γ_i, Δ_k, ε_h introduites par la considération des courbes adjointes ne diffèrent que par des multiples des périodes du double des constantes fondamentales* C_i, D_k, E_h.

La fonction de $p+q+r-1$ variables indépendantes (a'_j, b'_j)

$$\Theta\binom{q}{r}\left[\sum_{j=1}^{j=p+q+r-1} u^{(i)}(a'_j) - C_i,\ \sum_{j=1}^{j=p+q+r-1} v^{(k)}(a'_j) - D_k,\ \sum_{j=1}^{j=p+q+r-1} w^{(h)}(a_j) - E_h\right]$$

est identiquement nulle, d'après le théorème V. En tenant compte des relations données par le théorème d'Abel, il en est donc de même de la suivante :

$$\Theta\binom{q}{r}\left[-\sum_{j=1}^{j=p+q+r-1} u^{(i)}(a_j) + \Gamma_i - C_i,\ -\sum_{j=1}^{j=p+q+r-1} v^{(k)}(a_j) + \Delta_k - D_k,\ -\sum_{j=1}^{j=p+q+r-1} w^{(h)}(a_j) + \varepsilon_h - E_h\right].$$

On a donc, en vertu du théorème VI,

$$\Gamma_i \equiv 2C_i, \quad \Delta_k \equiv 2D_k, \quad \varepsilon_h \equiv 2E_h.$$

Corollaire. — Le théorème précédent donne pour la détermination des constantes fondamentales les équations

$$C_i = \tfrac{1}{2}\Gamma_i + m_i\pi\sqrt{-1} + \sum_{s=1}^{s=p} n_s \alpha_{is},$$

$$D_k = \tfrac{1}{2}\Delta_k + \lambda_k\pi\sqrt{-1} + \sum_{s=1}^{s=p} n_s A_{ks},$$

$$E_h = \tfrac{1}{2}\varepsilon_h \qquad\qquad + \tfrac{1}{2}\sum_{s=1}^{s=p} n_s \mathfrak{a}_{hs},$$

m_i, λ_k, n_s étant des nombres entiers. Les constantes cherchées ne peuvent être déterminées qu'à des multiples près des périodes; mais on ne peut pas choisir arbitrairement les entiers m_i, λ_k, n_s. Considérons une courbe adjointe du degré $m+q+r-3$ dont les $2(p+q+r-1)$ points d'intersection avec $F(x, y) = 0$ soient confondus deux à deux. On aura

$$\sum_{j=1}^{j=p+q+r-1} u^{(i)}(a_j) = \tfrac{1}{2}\Gamma_i,$$

$$\sum_{j=1}^{j=p+q+r-1} v^{(k)}(a_j) = \tfrac{1}{2}\Delta_k,$$

$$\sum_{j=1}^{j=p+q+r-1} w^{(h)}(a_j) = \tfrac{1}{2}\varepsilon_h.$$

La fonction

$$\Theta_{(r)}^{(q)}\left[\sum_{j=1}^{j=p+q+r-1} u^{(i)}(x_j) - C_i, \quad \sum_{j=1}^{j=p+q+r-1} v^{(k)}(x_j) - D_k, \quad \sum_{j=1}^{j=p+q+r-1} w^{(h)}(x_j) - E_h\right]$$

s'annule identiquement. On peut l'écrire

$$\Theta_{(r)}^{(q)}(\tfrac{1}{2}\Gamma_i - C_i, \quad \tfrac{1}{2}\Delta_k - D_k, \quad \tfrac{1}{2}\varepsilon_h - E_h),$$

ou bien

$$(28)\quad \Theta_{(r)}^{(q)}\left(-m_i\pi\sqrt{-1} - \sum_{s=1}^{s=p} n_s\alpha_{is}, \quad -\lambda_k\pi\sqrt{-1} - \sum_{s=1}^{s=p} n_s A_{ks}, \quad -\tfrac{1}{2}\sum_{s=1}^{s=p} n_s \mathfrak{a}_{hs}\right),$$

et si cette fonction s'annule, on aura, d'après le théorème VI, les véritables valeurs des constantes fondamentales. Si dans la fonction (28) on change le signe de tous les arguments, la fonction sera multipliée par $(-1)^r$. D'un autre côté, les arguments nouveaux ne diffèrent des anciens que par des multiples des périodes, le rapport de la nouvelle fonction à la fonction (28) sera, d'après le n° 7, et réduction faite de l'exposant,

$$e^{\pi\sqrt{-1}\left(\sum\limits_{k=1}^{k=q}\varepsilon_k\lambda_k+\sum\limits_{i=1}^{i=p}m_i n_i\right)},$$

et l'on sera certain que le fonction (28) s'annule si l'on fait en sorte que le coefficient de $\pi\sqrt{-1}$ dans cette dernière exponentielle soit d'une parité différente de celle de r. Remarquons que l'on peut écrire simplement $\sum\limits_{k=1}^{k=q}\lambda_k$ au lieu de $\sum\limits_{q=1}^{k=q}\varepsilon_k\lambda_k$; car la parité de ce dernier nombre reste la même pour tous les systèmes de valeurs de ε_k, en sorte qu'on pourra les supposer tous égaux à $+1$. On en conclut finalement qu'il suffit de prendre des nombres entiers rendant impaire ou paire la somme $\sum\limits_{k=1}^{k=q}\lambda_k+\sum\limits_{i=1}^{i=p}m_i n_i$ suivant que r est pair ou impair.

23. Théorème VIII. — *La fonction $\Theta_{(r)}^{(q)}$, dont les arguments sont*

$$u^{(i)}(x)+\sum_{j=1}^{j=p+q+r-1}u^{(i)}(x_j)-u^{(i)}(\alpha)-\mathrm{C}_i,$$

$$v^{(k)}(x)+\sum_{j=1}^{j=p+q+r-1}v^{(k)}(x_j)-v^{(k)}(\alpha)-\mathrm{D}_k,$$

$$w^{(h)}(x)+\sum_{j=1}^{j=p+q+r-1}w^{(h)}(x_j)-w^{(h)}(\alpha)-\mathrm{E}_h,$$

admet le zéro (α, β) et $p+q+r-1$ autres zéros qui sont indépendants du premier.

Faisons passer une courbe adjointe du degré $m+q+r-3$ par les

$p+q+r-1$ points (x_j, y_j), et appelons (x'_j, y'_j) les $p+q+r-1$ autres points d'intersection de cette courbe avec $F(x,y)=0$. On peut, d'après le théorème d'Abel, remplacer les arguments de la fonction $\Theta_{(r)}^{(q)}$ par ceux-ci :

$$u^{(i)}(x) - \sum_{j=1}^{j=p+q+r-1} u^{(i)}(x'_j) - u^{(i)}(\alpha) + C_i,$$

$$v^{(k)}(x) - \sum_{j=1}^{j=p+q+r-1} v^{(k)}(x'_j) - v^{(k)}(\alpha) + D_k,$$

$$w^{(h)}(x) - \sum_{j=1}^{j=p+q+r-1} w^{(h)}(x'_j) - w^{(h)}(\alpha) + E_h,$$

ce qui montre qu'elle admet pour zéro le point (α, β), et les $p+q+r-1$ points (x'_j, y'_j) qui sont indépendants de (α, β).

24. Théorème IX. — *Soient $\Phi(x,y)=0$, $\Psi(x,y)=0$ les équations de deux courbes données du degré n, (a_l, b_l) les mn points d'intersection de la première, (α_l, β_l) les mn points d'intersection de la seconde avec* $F(x,y)=0$, *les deux produits*

$$V = \prod_{l=1}^{l=mn} \frac{\Theta_{(r)}^{(q)}\left[\sum_{j=1}^{j=p+q+r} u^{(i)}(x_j) - u^{(i)}(a_l) - C_i, \dots\right]}{\Theta_{(r)}^{(q)}\left[\sum_{j=1}^{j=p+q+r} u^{(i)}(x_j) - u^{(i)}(\alpha_l) - C_i, \dots\right]},$$

$$P = \prod_{j=1}^{=p+q+r} \frac{\Psi(x_j, y_j)}{\Phi(x_j, y_j)}$$

ne diffèrent que par une constante.

Considérons une des fonctions $\Theta_{(r)}^{(q)}$ du numérateur qui répond à une valeur déterminée de l. Regardons, pour un moment, le point (x_1, y_1) comme seul variable; la fonction admet le zéro (α_l, β_l) et $p+q+r-1$ autres qui dépendent des points (x_2, y_2), ... La fonction $\Theta_{(r)}^{(q)}$ du numérateur qui répond à la même valeur de l admet le zéro (a_l, b_l) et $p+q+r-1$ autres qui sont les mêmes que pour la fonction précédente. Le quotient de ces deux fonctions admet donc le seul zéro (α_l, β_l) et le seul infini (a_l, b_l). Supposons que l'on fasse varier le chemin qui conduit de l'origine (x_0, y_0) au point (x_1, y_1); les intégrales des trois espèces augmentent de multiples de leurs périodes et prennent les valeurs indiquées au n° 7; le quotient des deux fonctions $\Theta_{(r)}^{(q)}$ se reproduit multiplié par l'exponentielle

$$e^{\sum\limits_{i=1}^{i=p} n_i [u^{(i)}(\alpha_l) - u^{(i)}(a_l)]}.$$

On en conclut que V considéré comme fonction de (x_1, y_1) seulement admet les mn zéros (α_l, β_l), les mn infinis (a_l, b_l) et que par l'addition des périodes elle se reproduit multipliée par l'exponentielle

$$e^{\sum\limits_{i=1}^{i=p} n_i \sum\limits_{l=1}^{l=mn} [u^{(i)}(\alpha_l) - (u^{(i)} a_l)]}.$$

Or, si l'on passe de la courbe $\Phi = 0$ à la courbe $\Psi = 0$ par une variation continue, on a, d'après le théorème d'Abel,

$$\sum_{l=1}^{l=mn} [u^{(i)}(\alpha_l) - u^{(i)}(a_l)] = 0,$$

et la fonction $V(x_1, y_1)$ ne diffère de $\frac{\Psi(x_1, y_1)}{\Phi(x_1, y_1)}$, qui a les mêmes zéros et les mêmes infinis, que par un facteur indépendant de (x_1, y_1) [1].

En regardant maintenant les points (x_2, y_2), (x_3, y_3), ... successivement comme seuls variables, on en conclut que la fonction V ne diffère du produit P que par une constante. On aura donc

$$V = CP. \tag{29}$$

La constante C s'obtient en supposant que les $p+q+r$ points (x_j, y_j)

---

[1] Briot, *Théorie des fonctions abéliennes*, p. 154.

coïncident avec l'origine (x_0, y_0) des intégrales abéliennes, ce qui donne

$$C = \left[\frac{\Phi(x_0, y_0)}{\Psi(x_0, y_0)}\right]^{p+q+r'} \prod_{l=1}^{l=mn} \frac{\Theta_{(r)}^{(q)}[u^{(i)}(\alpha_l) + C_i, \ldots]}{\Theta_{(r)}^{(q)}[u^{(i)}(\alpha_l) + C_i, \ldots]}.$$

La seconde Partie, qui paraîtra dans un prochain numéro, aura pour objet l'application de ce qui précède à l'intégration d'un système d'équations différentielles analogue au système abélien.