ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

G. KOENIGS

Sur les propriétés infinitésimales de l'espace réglé

Annales scientifiques de l'É.N.S. 2e série, tome 11 (1882), p. 219-338

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1882_2_11__219_0>

SUR LES

PROPRIÉTÉS INFINITÉSIMALES

DE L'ESPACE RÉGLÉ,

PAR M. G. KŒNIGS,

ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

INTRODUCTION.

On pourrait faire remonter les premières recherches sur l'espace réglé au jour où l'on entreprit l'étude des surfaces engendrées par une ligne droite; mais, en réalité, c'est Monge qui, vers la fin du siècle dernier, inventa les systèmes doublement indéterminés.

On lui doit la proposition fondamentale de la théorie des congruences [1], ainsi que l'étude spéciale du système des normales à une surface [2].

C'est à Malus que l'on doit l'idée des systèmes triplement indéterminés, appelés depuis par Plücker *complexes*. Dans son *Traité d'Optique,* puis au Tome XIV du *Journal de l'École Polytechnique,* Malus étudie les systèmes généraux de droites, dans lesquels tout point de l'espace sert de départ à l'une d'elles : il y découvre le cône du deuxième degré, qui joue un rôle si important et qui nous a conduit à la conception de la forme fondamentale.

---

(1) *Mémoires de l'Académie des Sciences* pour 1781, p. 666.

(2) *Application de l'Analyse à la Géométrie.*

Les progrès incessants de l'Optique entraînaient cependant les savants à poursuivre l'étude des systèmes doublement indéterminés inaugurée par Monge; et Malus ([1]) découvrit en 1807 le célèbre théorème que Dupin généralisa ([2]).

Plus tard, M. Bertrand ([3]) trouva sa belle proposition relative aux propriétés angulaires des pinceaux de normales, proposition qui fut peu après généralisée par Sturm ([4]), et puis diversement exprimée par M. Bertrand ([5]) lui-même et par M. Ossian Bonnet ([6]).

Hamilton ([7]), en Angleterre, et vers 1830, s'était occupé des systèmes généraux doublement indéterminés.

En 1860, M. Kummer ([8]) résuma et compléta les travaux antérieurs. On trouve dans son Mémoire les propriétés fondamentales des *surfaces focales,* qui conduisent à des résultats si importants dans la recherche des lignes asymptotiques des surfaces.

On y trouve également développée la théorie de la *densité* des pinceaux, dont la première idée est due à Hamilton, et qui constitue une belle généralisation des propriétés des systèmes de normales.

Nous ne croyons pas qu'on ait encore cherché à rapprocher la proposition fondamentale de cette théorie de la belle propriété due à Sturm sur les systèmes généraux. Ce rapprochement nous a conduit à un résultat assez simple, que nous donnons au cours de ce travail.

Dans son admirable *Aperçu historique* ([9]), qui contient le germe de tant de découvertes modernes, Chasles avait développé un mode de correspondance dualistique dans lequel tout point de l'espace était situé dans le plan correspondant. C'était, sauf le nom, la découverte du *complexe linéaire*.

([1]) *Traité d'Optique,* inséré au t. II des *Mémoires des Savants étrangers.*

([2]) *Mémoires sur les routes de la lumière, dans les phénomènes de la réflexion et de la réfraction,* 1816.

([3]) *Journal de Liouville,* t. IX, p. 133; 1844.

([4]) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences,* t. XX; 1845.

([5]) *Journal de Liouville,* t. XII, p. 343; 1847.

([6]) *Comptes rendus,* t. LII, p. 1081.

([7]) *Theory of systems of rays* (*Irish Acad. Transact.,* t. XV, XVI, XVII).

([8]) *Théorie générale des rayons rectilignes* (*Nouvelles Annales de Math.,* 1860-61-62).

([9]) Page 674.

Mais c'est Plücker ([1]), qui avait déjà érigé en corps de doctrine la théorie des systèmes tangentiels, qui devait encore doter la théorie des systèmes de droites des méthodes fécondes de la Géométrie moderne.

En passant par ses mains, cette théorie prit une forme toute nouvelle. La ligne droite devint un *élément de l'espace*, et entre l'espace ponctuel et l'espace tangentiel vint naturellement se placer l'*espace réglé*. Une transformation homographique laissait les deux premiers invariables; mais la dualité les permutait l'un dans l'autre.

L'espace réglé, au contraire, se présentait comme homographique et dualistique à lui-même.

C'est à ce point de vue fécond que Plücker s'est attaché ([2]).

La difficulté de cette étude était évidemment de n'y introduire que des éléments dualistiques par eux-mêmes, ou de ne jamais y séparer un élément de l'élément réciproque. Aussi Plücker, qui ne voulut pas s'affranchir de la double notion d'espace ponctuel et d'espace tangentiel, fut-il contraint d'employer un double système de coordonnées, répondant chacun à une définition de la ligne droite : les deux définitions étant, du reste, réciproques l'une de l'autre. En 1869, M. Klein ([3]), élève et disciple de Plücker, reprit la méthode du grand géomètre et entra franchement dans l'étude de l'espace réglé en n'y introduisant que des éléments dualistiques en eux-mêmes.

L'élément qu'il emploie exclusivement, c'est le complexe linéaire que Plücker lui-même avait indiqué.

M. Klein a fondé toutes ses recherches sur la transformation linéaire des six coordonnées homogènes de la ligne droite liées par une équation quadratique; et c'est dans la forme que ces coordonnées attribuent au premier membre de cette équation qu'il cherche leur interprétation.

Les résultats des recherches de M. Klein se rapportent surtout aux surfaces du quatrième ordre que l'on rencontre dans la théorie des

---

([1]) *Sur une nouvelle Géométrie de l'espace* (*Journal de Liouville*, t. XI, 2e série, p. 337; 1866).

([2]) L'œuvre de Plücker est exposée dans l'ouvrage intitulé : *Neue Geometrie des Raumes*, Leipsick, 1869.

([3]) *Mathematische Annalen*, t. II et V.

complexes du second degré, et aux surfaces que M. Kümmer [1] a découvertes.

En 1872, dans un Mémoire important publié au Tome V des *Mathematische Annalen*, M. Lie [2] a fait voir le lien étroit qui existait entre la théorie profonde des équations différentielles et les principes de réciprocité développés par Plücker. Il a montré la théorie de la ligne droite sous un point de vue encore plus élevé que ce géomètre ne l'avait fait en rattachant l'existence d'un complexe à celle d'une équation aux dérivées partielles.

C'est dans ce même Mémoire qu'il a déduit de ses principes et développé une correspondance entre la géométrie des lignes droites et celle des sphères, sur laquelle M. Darboux avait publié des travaux bien connus. La théorie de l'espace réglé se trouva ainsi dotée d'un coup de tous les résultats auxquels avait conduit l'étude des systèmes de sphères.

Peu après, M. Klein [3], cherchant au cœur même de la Géométrie la raison de cette correspondance, développa cette idée, que *la géométrie de l'espace réglé est comme la géométrie d'un point sur une quadrique à quatre dimensions dans un espace linéaire à cinq dimensions*. Puis, remarquant que la projection stéréographique ramène la géométrie sur une quadrique à la géométrie sur un plan, et qu'un complexe linéaire se comporte comme une section plane d'une quadrique, il parvient par analogie à ce résultat, qu'il existe trois complexes linéaires tangents stationnaires d'un complexe donné suivant une droite donnée.

Nous avons insisté sur ce dernier point, qui intéresse notre travail.

Les travaux ultérieurs [4] sont dus à MM. Zeuthen, Weiler, Pasch, Voss, Battaglini, etc.; ils sont pour la plupart fondés sur l'emploi des coordonnées de M. Klein.

En France, Painvin [5] a écrit deux Mémoires sur certains complexes

---

(1) *Ueber die algebraischen Strahlensysteme* (*Math. Abhand. der Kön. Akademie der Wiss. zu Berlin*, 1866).

(2) *Ueber complexe insbesondere, etc.* (*Mathematische Annalen*, t. V).

(3) *Math. Annalen*, t. V.

(4) *Ibid.*, t. I, II, V et suivants.

(5) *Bulletin des Sciences mathématiques*, t. II; *Journal de Liouville*.

du second ordre. M. Darboux [1] a étudié le complexe des normales à une série de surfaces du second degré homothétiques ou homofocales. M. Mannheim, qui s'est beaucoup occupé des propriétés des surfaces réglées, a aussi publié dans le *Journal de Liouville*, t. XVII, une exposition élémentaire des propriétés des pinceaux. Nous pourrons faire voir un jour que la même méthode s'applique fort élégamment aux complexes.

Enfin M. Picard, dans une Thèse, a fait voir la fécondité de la théorie des complexes appliquée à celle des surfaces.

Là se bornent les travaux des savants français sur cette partie de la Géométrie, du moins à notre connaissance [2].

Nous devons actuellement parler de l'objet et du plan de ces essais.

Le complexe linéaire est un élément algébrique dont l'usage est d'une utilité incontestable quand il s'agit de développer la théorie de l'espace réglé faite au point de vue plückérien, c'est-à-dire en le considérant comme un être dualistique en soi.

Mais M. Lie nous a appris, par l'introduction de ses éléments de contact, à nous élever au-dessus de cette conception algébrique, et, pour se placer à ce point de vue général dans l'étude des propriétés infinitésimales, il est nécessaire de n'introduire que des éléments dualistiques *dérivant uniquement du déplacement de la ligne droite quand on s'écarte d'une position initiale*.

Nous avons remarqué que dans l'espace ponctuel la notion de direction et celle de distance élémentaire suffisaient pour établir toutes les propriétés infinitésimales; c'est ainsi que nous avons été conduits à nous demander s'il n'en serait pas de même dans le cas de l'espace réglé. Voici les résultats que nous avons obtenus.

Sous le nom de *couple* nous introduisons le système d'un plan et d'un point dans ce plan. Une *corrélation* n'est autre chose qu'une correspondance entre les points et les plans d'un couple sur une droite, le point et le plan appartenant à cette droite.

Un déplacement infinitésimal d'une droite engendre sur la position initiale de la droite une *corrélation anharmonique*.

---

(1) *Bulletin des Sciences mathématiques*, t. II, p. 40 et 301.

(2) Nous pouvons encore citer M. Halphen, qui a publié plusieurs Notes sur ce sujet (*Comptes rendus* et *Bull. de la Soc. Math.*).

Ces corrélations s'offrent ainsi comme analogues des directions.

Une considération géométrique nous permet de définir et de donner un sens concret de l'*angle de deux corrélations* destiné à jouer le rôle de l'angle de deux directions.

Enfin, pour ce qui concerne le carré de la distance élémentaire, nous trouvons qu'une certaine forme quadratique des différentielles des coordonnées, qu'on peut prendre égale au *moment* de deux droites successives, se présente naturellement pour le remplacer.

Cette forme fondamentale, ainsi que l'expression de ds^2, suffit pour définir les angles, et montre l'orthogonalité comme un cas d'involution.

Les corrélations anharmoniques sur une droite qui vérifient une ou deux conditions forment des *réseaux* et des *séries* de corrélations qui jouent le même rôle que les cônes de directions élémentaires.

Dans la première Partie du travail nous développons les propriétés des corrélations et de leurs systèmes, et faisons voir que, grâce à l'existence de la forme fondamentale, ces propriétés trouvent une image commode dans la Géométrie non euclidienne telle qu'elle a été définie par M. Klein (¹).

La seconde Partie est consacrée au développement systématique, et suivant ces principes, des propriétés infinitésimales du premier ordre de l'espace réglé. Nous faisons voir que ces propriétés se rattachent naturellement à l'existence de la forme quadratique des différentielles des coordonnées dont nous avons déjà parlé.

Le fait que nous mettons ainsi en évidence se rattache à un ordre d'idées beaucoup plus général, car si l'on prend pour élément de l'espace un être géométrique (courbe ou surface) dépendant de plusieurs paramètres, il existe une forme, en général non quadratique, des différentielles des coordonnées, et qui nous a paru également intimement liée aux propriétés infinitésimales des systèmes formés avec ces éléments.

Cette forme est quadratique dans le cas du point, de la droite et de la sphère : peut-être ne sont-ce pas les seuls cas.

Dans deux derniers paragraphes nous montrons comment la particularisation des coordonnées, jusque-là supposées quelconques, permet

(¹) *Bulletin des Sciences mathématiques*, t. II, p. 341.

de donner aux résultats généraux des formes diverses, et nous faisons voir comment à cet égard la transformation d'Ampère peut être rattachée à ces principes : nous disons quelques mots d'une représentation linéaire des surfaces, sur laquelle notre plan ne nous a pas permis d'insister comme elle le méritait.

Nous terminons cette Partie par l'étude d'un système de coordonnées quadruplement orthogonal qui permet de montrer d'une façon élémentaire la correspondance entre les complexes linéaires et les sphères dans un espace à quatre dimensions. Cela nous permet encore de rendre frappante l'analogie entre les coordonnées de M. Klein et les coordonnées pentasphériques.

La dernière Partie est consacrée aux propriétés du second ordre.

Les propositions du premier ordre sont indépendantes de la variation de la forme quadratique. Celles du second, au contraire, lui sont essentiellement liées. Il résulte de là que l'introduction d'un facteur indépendant des différentielles dans la forme quadratique n'altère pas les premières propriétés, au lieu que les secondes en sont profondément modifiées.

Or, le choix qui a été fait du moment pour la forme quadratique offre un certain arbitraire, car les premières propriétés subsistent si on la multiplie par un facteur indépendant des différentielles. Il résulte de là une infinité de manières de concevoir les propriétés du second ordre. Cette indétermination est analogue à celle que l'on rencontre dans la théorie de l'espace ponctuel, ainsi que l'a fait voir Riemann.

Et, à cet égard, le choix du moment pour forme fondamentale ne paraît pas plus arbitraire que celui qu'on fait de $dx^2 + dy^2 + dz^2$ pour le carré de la distance de deux points.

Néanmoins, la gravité de cette question nous a arrêtés quand il s'est agi de définir la courbure par des formations covariantes déduites du moment. Nous nous sommes contentés pour ce premier essai de résoudre le problème analogue de celui des géodésiques; et, mettant en usage de beaux travaux de M. Lipschitz (¹) sur les formes des différentielles, nous arrivons à démontrer que, la forme fondamentale étant prise égale au moment, il est impossible qu'un changement de variables

(¹) *Bulletin des Sciences mathematiques*, t. IV, p. 97.

la réduise à une forme à coefficients constants. Nous devons signaler ce résultat curieux, que les hélicoïdes gauches se sont offerts à nous comme les surfaces géodésiques de l'espace réglé.

Dans tout ce qui suit, nous développons les propriétés du second ordre fondées sur la remarque de l'analogie entre les complexes linéaires et les sphères.

Nous retrouvons l'hyperboloïde osculateur dans le cas des surfaces réglées.

Dans le cas des congruences, nous trouvons une correspondance entre les congruences osculatrices et les droites infiniment voisines d'une droite fixe de la congruence. Cette correspondance permet d'étendre aux congruences les théorèmes de Meusnier et d'Euler.

Nous parvenons à ce résultat, que les génératrices des hyperboloïdes osculateurs des surfaces réglées d'une congruence relatifs à une droite fixe du système forment un complexe du second degré.

Nous trouvons dans le cas des complexes une correspondance analogue, qui nous conduit aux mêmes résultats et nous permet de définir les surfaces principales de M. Klein. Le rôle du cône de Malus dans cette question paraît intéressant.

Nos recherches sur ce vaste sujet sont, du reste, loin d'être terminées, et le cadre que nous nous étions imposé nous a contraint d'omettre bien des résultats.

PREMIÈRE PARTIE.

PROPRIÉTÉS DES CORRÉLATIONS.

I. — Des couples et des corrélations en général.

1. Nous appelons *couple* un système formé par l'ensemble d'un point et d'un plan mené par ce point. Nous désignons un couple par la notation (a, α), où a désigne le point et α le plan du couple. Un couple

sera dit situé sur une droite A, ou bien la droite A sera dite appartenir au couple, si cette droite est dans le plan α du couple et passe par le point a de ce couple.

Deux couples (a, α) et (b, β) étant situés sur une même droite, nous dirons que les couples (a, β), (b, α) obtenus en échangeant les points et les plans sont les *inverses* des deux premiers. Quatre couples (a, α), (b, β), (c, γ), (d, δ) étant situés sur une même droite, nous dirons que ces couples sont en *relation anharmonique,* s'il y a égalité entre les deux rapports anharmoniques

$$(a, b, c, d) \quad \text{et} \quad (\alpha, \beta, \gamma, \delta).$$

Si ces deux rapports sont tous deux harmoniques, nous dirons que les couples sont en *relation harmonique.*

2. Pour définir un couple sur une droite A, on doit se servir de deux coordonnées z et u, définissant l'une le point et l'autre le plan. Un couple sur une droite donnée dépend donc de deux conditions : on peut assujettir un couple à une condition, se traduisant par une équation entre z et u; l'ensemble des couples, satisfaisant ainsi à une même condition, forme une *corrélation.*

Une nouvelle condition suffit évidemment pour définir un couple d'une corrélation. Donnons-nous, par exemple, le plan du couple : il se peut qu'il corresponde m couples de la corrélation; de même, donnons-nous le point du couple; il se peut qu'il corresponde μ couples. Nous dirons alors que la corrélation est du $m^{ième}$ *ordre* et de la $\mu^{ième}$ *classe;* nous la désignerons par le symbole Γ_μ^m. On voit qu'une corrélation Γ_μ^m n'est autre chose qu'une correspondance, entre les points et les plans d'une droite A, en vertu de laquelle m points correspondent à un plan, μ plans correspondent à un point.

Nous citerons d'abord le théorème suivant, qui est fondamental et qui résulte immédiatement du principe de correspondance :

Quatre couples d'une même corrélation Γ_1^1 *du premier ordre et de la première classe sont en relation anharmonique;* et réciproquement *les couples qui, situés sur une droite, sont en relation anharmonique avec trois couples fixes situés sur cette droite, engendrent une corrélation* Γ_1^1 *du premier ordre et de la première classe.*

Nous appellerons, pour cette raison, la corrélation du premier ordre et de la première classe une *corrélation anharmonique*.

Nous emploierons aussi souvent le mot de *corrélation* simplement; mais l'ambiguïté ne sera pas possible, car, en parlant des corrélations supérieures, nous aurons toujours soin d'énoncer l'ordre et la classe de la corrélation.

Le principe de correspondance, déjà invoqué, nous apprend que deux corrélations

$$\Gamma_{\mu}^{m} \quad \text{et} \quad \Gamma_{\mu'}^{m'}$$

ont en commun un nombre de couples égal à

$$m\mu' + m'\mu.$$

II. — Des corrélations anharmoniques.

3. En particulier, deux corrélations anharmoniques ont en commun deux couples (a, α) et (b, β). Les points a et b de ces couples sont les foyers de l'homographie qui relie les points correspondant aux mêmes plans dans les deux corrélations. Si p et q sont deux points correspondants de l'homographie, il existe un plan ϖ, tel que les couples $(p\varpi)$ et $(q\varpi)$ appartiennent aux corrélations Γ et Γ' proposées. On sait que le rapport anharmonique

$$\rho = (a, b, p, q)$$

est constant.

De même, α et β sont les plans doubles de l'homographie des plans qui, dans les deux corrélations, répondent aux mêmes points. Si ϖ et $\varkappa$ sont deux plans correspondants de cette homographie, il existe un point p, tel que $(p\varpi)$ et $(p\varkappa)$ soient deux couples des corrélations Γ et Γ' respectivement. Le rapport anharmonique

$$\rho' = (\alpha, \beta, \varkappa, \varpi)$$

est pareillement constant; j'ajoute que :

Les rapports anharmoniques constants ρ et ρ' sont égaux.

Conservons, en effet, aux lettres a, b, p, q et $\alpha, \beta, \varpi, \varkappa$ leur signification précédente.

Les couples

$$(a, \alpha),\ (b, \beta),\ (p, \varkappa),\ (q, \varpi)$$

appartiennent à la corrélation anharmonique Γ'. On a donc

$$(a, b, p, q) = (\alpha, \beta, \varkappa, \varpi),$$

c'est-à-dire

$$\rho = \rho'.$$

Ce théorème montre que le rapport anharmonique ρ est un élément dualistique, puisqu'il se déduit indifféremment des points ou des plans des couples des corrélations proposées. On voit aussi que ce rapport est un invariant simultané du système des deux corrélations.

Nous appellerons *angle des deux corrélations* la quantité H définie par l'équation

$$e^{2iH} = \rho.$$

Deux corrélations anharmoniques étant données sur une même droite, leur rapport anharmonique ρ a deux valeurs inverses l'une de l'autre; car, dans l'équation

$$\rho = (a, b, p, q),$$

rien ne distingue le point p du point q. On en conclut que, si H_0 est une valeur de l'angle de deux corrélations, toutes les autres valeurs sont comprises dans la formule

$$H = k\pi \pm H_0.$$

On a, en effet,

$$H = \frac{1}{2i} L\rho.$$

Ce fait est tout à fait analogue à celui qui se présente, pour l'angle de deux droites, dans l'espace ponctuel.

4. Lorsque l'une des deux homographies qui nous ont précédemment occupé est une involution, l'autre est également involutive, car ρ et ρ' sont alors égaux à -1.

L'angle des deux corrélations est droit; nous exprimerons ce fait en disant que les deux corrélations sont *en involution* ou *orthogonales*.

Si (a, α) et (b, β) sont deux couples d'une corrélation, (a, β) étant un couple d'une autre, on exprime évidemment leur involution en exprimant que le couple (b, a) appartient également à cette dernière; ainsi :

Pour que deux corrélations anharmoniques soient en involution, il faut et il suffit que l'une d'elles admette les couples inverses de deux couples de l'autre.

5. Il est facile d'exprimer analytiquement les résultats qui précèdent. Supposons que z soit la distance d'un point de la droite fondamentale A à une origine fixe, et u la tangente de l'angle que fait avec un plan fixe un plan mené par la même droite. Deux corrélations anharmoniques seront définies par les équations

$$a_1 z u - b_1 z + p_1 u - q_1 = 0,$$
$$a_2 z u - b_2 z + p_2 u - q_2 = 0,$$

où $a_1, b_1, p_1, q_1, a_2, b_2, p_2, q_2$ sont des constantes. L'équation

$$(a_1 b_2 - b_1 a_2) z z' + (a_1 q_2 - b_1 p_2) z + (b_2 p_1 - q_1 a_2) z' + (p_1 q_2 - p_2 q_1) = 0$$

définit l'homographie des points qui correspondent aux mêmes plans dans les deux corrélations; on l'obtient en faisant $z = z'$ dans l'équation de la seconde corrélation, et éliminant u entre les équations des deux corrélations. Il est, dès lors, bien facile de calculer la valeur de ρ; c'est là une question élémentaire d'homographie; on trouve l'expression

$$\sqrt{\rho} + \frac{1}{\sqrt{\rho}} = \frac{a_1 q_2 + a_2 q_1 - b_1 p_2 - b_2 p_1}{\sqrt{(a_1 q_1 - b_1 p_2)(a_2 q_2 - b_2 p_2)}};$$

mais on a aussi

$$\rho = e^{2i\text{H}},$$

d'où

$$\sqrt{\rho} + \frac{1}{\sqrt{\rho}} = e^{i\text{H}} + e^{-i\text{H}} = 2 \cos \text{H},$$

c'est-à-dire

$$\cos \text{H} = \frac{1}{2} \frac{a_1 q_2 + a_2 q_1 - b_1 p_2 - b_2 p_1}{\sqrt{a_1 q_1 - b_1 p_1}\sqrt{a_2 q_2 - b_2 p_2}}.$$

Posons

$$\varphi(a, b, p, q) = aq - bp;$$

on a

$$\cos H = \frac{1}{2} \frac{\frac{\partial\varphi}{\partial a_1} a_2 + \frac{\partial\varphi}{\partial b_1} b_2 + \frac{\partial\varphi}{\partial p_1} p_2 + \frac{\partial\varphi}{\partial q_1} q_2}{\sqrt{\varphi(a_1, b_1, p_1, q_1)}\sqrt{\varphi(a_2, b_2, p_2, q_2)}}.$$

Cette dernière forme nous sera très utile.

III. — Rôle des corrélations anharmoniques dans les propriétés infinitésimales de l'espace réglé.

6. Supposons qu'une droite donnée A dans l'espace appartienne à une surface réglée : pour étudier la surface autour de la droite, prenons cette droite pour axe Oz, les coordonnées étant rectangulaires. Les équations de la génératrice de la surface réglée seront

$$x = az + p, \quad y = bz + q,$$

et a, b, p, q sont des fonctions d'une même variable λ, s'annulant simultanément avec la variable. Le développement en série donne

$$\begin{aligned} a &= a_1\lambda + \alpha_1\lambda^2 + \alpha'_1\lambda^3 + \ldots, \\ b &= b_1\lambda + \beta_1\lambda^2 + \beta'_1\lambda^3 + \ldots, \\ p &= p_1\lambda + \varpi_1\lambda^2 + \varpi'_1\lambda^3 + \ldots, \\ q &= q_1\lambda + \varkappa_1\lambda^2 + \varkappa'_1\lambda^3 + \ldots. \end{aligned}$$

Ceci posé, si l'on cherche le point ($x = 0, y = 0, z = \zeta$) où le plan $y = ux$ touche la surface, on tombe sur l'équation

$$a_1\zeta u - b_1\zeta + p_1 u - q_1 = 0, \tag{1}$$

ce qui démontre le théorème bien connu de Chasles sur la distribution des plans tangents à une surface gauche le long d'une génératrice. Ainsi : *les couples formés par un point d'une surface gauche et le plan tangent en ce point, et qui sont situés sur une même génératrice rectiligne, engendrent une corrélation anharmonique.*

7. Considérons une autre surface réglée passant aussi par la droite A; elle donnera lieu à d'autres développements et à une autre corrélation

anharmonique. On aura, par exemple, les développements

$$
\begin{aligned}
a &= a_2\lambda + \alpha_2\lambda_2 + \alpha'_2\lambda^3 + \ldots,\\
b &= b_2\lambda + \beta_2\lambda_2 + \beta'_2\lambda^3 + \ldots,\\
p &= p_2\lambda + \varpi_2\lambda_2 + \varpi'_2\lambda^3 + \ldots,\\
q &= q_2\lambda + \varkappa_2\lambda_2 + \varkappa'_2\lambda^3 + \ldots,
\end{aligned}
$$

et la corrélation

$$
(2) \qquad a_2\zeta' u' - b_2\zeta' + p_2 u' - q_2 = 0.
$$

Les couples communs aux corrélations (1) et (2) sont, comme l'on sait, les couples de raccordement des deux surfaces.

Mais si tous les déterminants compris dans la matrice

$$
\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & p_1 & q_1 \\ a_2 & b_2 & p_2 & q_2 \end{vmatrix}
$$

sont nuls, ces deux corrélations coïncident : les deux surfaces sont tangentes tout du long de la droite A.

On voit ainsi que, si on laisse a_1, b_1, p_1, q_1 invariables, et que l'on attribue aux constantes α, α', ..., β, β', ..., ϖ, ϖ', ..., $\varkappa$, $\varkappa'$, ... telles valeurs qu'on voudra, les développements suivants, où λ est une variable indépendante, conviendront à toutes les surfaces réglées tangentes entre elles tout du long de Oz.

$$
\begin{aligned}
a &= a_1\lambda + \alpha\lambda^2 + \alpha_1\lambda^3 + \ldots,\\
b &= b_1\lambda + \beta\lambda^2 + \beta_1\lambda^3 + \ldots,\\
p &= p_1\lambda + \varpi\lambda^2 + \varpi_1\lambda^3 + \ldots,\\
q &= q_1\lambda + \varkappa\lambda^2 + \varkappa_1\lambda^3 + \ldots.
\end{aligned}
$$

Or, attribuons à λ une valeur infiniment petite ε, en négligeant les termes du second ordre, on a

$$
a = a_1\varepsilon, \quad b = b_1\varepsilon, \quad p = p_1\varepsilon, \quad q = q_1\varepsilon.
$$

La droite correspondante est infiniment voisine de la droite Oz ou A; et, comme elle est indépendante de α, α', ..., β, β', ..., ϖ, ϖ', ..., $\varkappa$, $\varkappa'$, ..., on en conclut qu'elle est commune à toutes les surfaces réglées qui définissent la corrélation (1) sur la droite A.

C'est ce que nous voudrons exprimer quand nous dirons qu'une corrélation anharmonique sur une droite A correspond à une droite de l'espace infiniment voisine de la droite A.

Ainsi, de même qu'un point de l'espace infiniment voisin d'un point fixe définit une direction issue de ce point, et inversement, que dans une foule de questions la considération de cette direction peut être substituée à celle du point voisin, de même, dans l'espace réglé, une droite infiniment voisine d'une droite définit sur elle une corrélation anharmonique dont l'usage peut réciproquement être substitué à celui de la droite infiniment voisine, au moins dans certaines questions (¹).

8. Ce point éclairci, nous allons passer à la représentation analytique des droites et des corrélations anharmoniques.

Les droites de l'espace forment un système quadruplement indéterminé. Chaque droite dépend donc de quatre paramètres

$$u_1, \quad u_2, \quad u_3, \quad u_4,$$

que nous ne spécifions pas : nous désignerons cette droite par la notation (u).

Une droite infiniment voisine de la droite (u) a pour coordonnées

$$u_i + \Delta u_i,$$

ou, en négligeant les termes du second ordre,

$$u_i + du_i.$$

On peut la désigner par le symbole $(u + du)$. Chaque système de valeurs des rapports

$$du_1 : du_2 : du_3 : du_4$$

définit une droite infiniment voisine de la droite (u), et par suite une

(¹) Ce qui précède permet de donner une représentation fort simple de l'angle de deux corrélations. Considérons deux surfaces réglées S et S′ définissant sur la droite A deux corrélations Γ et Γ′, ainsi que nous venons de le voir; puis transformons homographiquement de sorte que les plans des couples de raccordement deviennent des plans isotropes. En tous les points de la droite A, transformée de A, les surfaces S_1 et S'_1 transformées de S et S′ se coupent sous un angle constant H, qui est l'angle des deux corrélations.

corrélation anharmonique sur cette droite. Ainsi, en appelant t_1, t_2, t_3, t_4 des quantités *finies* proportionnelles à du_1, du_2, du_3, du_4. On pourra dire que les quantités t sont les coordonnées homogènes d'une corrélation anharmonique sur la droite (u). On peut désigner cette corrélation par le symbole (u, t) ou simplement (t).

Les corrélations anharmoniques sur une droite donnée (u) forment une triple infinité. Soit $\theta(t)$ une forme homogène des variables t, l'équation

$$\theta(t) = 0$$

définit l'ensemble des corrélations anharmoniques qui sur la droite (u) satisfont à une condition.

Nous appelons *réseau* un tel ensemble. Les corrélations communes à deux réseaux forment ce que nous appellerons une série de corrélations.

Puisque les corrélations anharmoniques sur une droite jouent le rôle des directions issues d'un point, les *réseaux* et les *séries* de corrélations remplacent les cônes de directions dont l'usage est si fécond dans l'espace ponctuel.

IV. — Forme quadratique fondamentale.

9. Il existe une forme quadratique des différentielles des coordonnées, ou des coordonnées d'une corrélation qui joue un rôle fondamental dans la géométrie de l'espace réglé; nous allons la définir.

Si nous prenons pour coordonnées de la ligne droite les coefficients a, b, p, q dans les équations

$$x = az + p, \quad y = bz + q$$

de la ligne droite rapportée à trois axes de coordonnées, la condition de rencontre des droites infiniment voisines

$$(a, b, p, q), \quad (a + da, b + db, p + dp, q + dq)$$

s'exprime par l'évanouissement de la forme quadratique

$$da\,dq - db\,dp. \tag{1}$$

Si maintenant on prend des coordonnées u_1, u_2, u_3, u_4 quelconques pour la ligne droite dans l'espace, la forme quadratique (1) va se transformer en une forme quadratique des différentielles du_1, du_2, du_3, du_4 que nous désignerons par $N(du)$.

On aura

$$N(du) = da\,dq - db\,dp,$$

et si l'on désigne par K une expression indépendante des différentielles des coordonnées, l'évanouissement de la forme quadratique

$$KN(du) = M(du) = \Sigma M_{ij}\,du_i\,du_j$$

exprime généralement la rencontre des droites infiniment voisines (u_1, u_2, u_3, u_4), $(u_1 + du_1, \ldots)$.

La forme $M(du)$ est celle dont nous voulions parler.

10. D'après notre définition, la forme $M(du)$ n'est déterminée qu'à un facteur près K qui est indépendant des différentielles.

Par un choix convenable de ce facteur, on peut donner à la forme $M(du)$ une expression qui rende concrète l'interprétation de $M(du)$ même pour des valeurs des différentielles qui ne l'annulent pas.

Prenons

$$K = \frac{1}{a^2 + b^2 + 1},$$

on a

$$M(du) = \frac{da\,dq - db\,dp}{a^2 + b^2 + 1},$$

c'est-à-dire que, si h est la plus courte distance des deux droites (u) et $(u + du)$, ε leur angle infiniment petit, on a

$$M(du) = h \sin \varepsilon.$$

On appelle *moment de deux droites* le moment par rapport à l'une d'un segment égal à l'unité ayant l'autre pour ligne d'action. En désignant par h et ε la plus courte distance et l'angle des deux droites, l'expression de leur moment est justement $h \sin \varepsilon$. Ainsi nous pouvons dire que :

La forme quadratique fondamentale peut être considérée comme représentée par le moment de deux droites infiniment voisines de l'espace.

On reconnaîtra par la suite que les propriétés que nous développons sont (sauf celles développées dans la IIIe Partie, § I) indépendantes d'une telle particularisation de la forme quadratique fondamentale; nous ne portons donc pas atteinte à la généralité en faisant ce choix, et l'interprétation concrète nous éclaire sur le rôle géométrique de cette forme.

11. Nous allons montrer comment la forme $\mathrm{M}(du)$ s'offre comme l'analogue du carré de la distance de deux points infiniment voisins dans l'espace ponctuel.

Nous ferons voir successivement qu'elle suffit pour définir l'angle de deux corrélations, et qu'elle offre l'orthogonalité comme un cas d'involution.

Soit A une droite de l'espace, et désignons par u_1, u_2, u_3, u_4 les coordonnées d'une droite quelconque.

Si nous rapportons l'espace à des axes rectangulaires, et que A soit l'axe $\mathrm{O}z$, une droite infiniment voisine de $\mathrm{O}z$ (ou de A) aura pour équations

$$x = z\,da + dp, \quad y = z\,db + dq,$$

et, puisque pour $\mathrm{O}z$ on a $a = b = 0$,

$$\mathrm{M}(du) = da\,dq - db\,dp.$$

Désignons par a_1, b_1, p_1, q_1 des quantités finies proportionnelles à da, db, dp, dq; on pourra regarder ces quantités comme les coordonnées homogènes d'une corrélation anharmonique sur A. Et ces quantités sont liées aux coordonnées t_1, t_2, t_3, t_4, déjà définies, par les mêmes équations linéaires qui relient les différentielles da, db, dp, dq aux différentielles du_1, du_2, du_3, du_4.

Or, l'équation de la corrélation dont a_1, b_1, p_1, q_1 sont les coordonnées s'écrit (voir n° 6)

$$a_1 \zeta u - b_1 \zeta + p_1 u - q_1 = 0.$$

Une seconde corrélation dont a'_1, b'_1, p'_1, q'_1 (ou, dans le second système, dont t'_1, t'_2, t'_3, t'_4) seraient les coordonnées homogènes, aura pour équation

$$a'_1 \zeta u - b'_1 \zeta + p'_1 u - q'_1 = 0.$$

Mais posant

$$\varphi(a, b, p, q) = aq - bp,$$

nous avons trouvé pour le cosinus de l'angle de deux corrélations

$$\cos H = \frac{1}{2} \frac{\frac{\partial\varphi}{\partial a_1} a'_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial b_1} b'_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial p_1} p'_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial q_1} q'_1}{\sqrt{\varphi(a_1, b_1, p_1, q_1)\varphi(a'_1, b'_1, p'_1, q'_1)}};$$

et, de même qu'on a

$$M(du) = \varphi(da, db, dp, dq),$$

on a

$$M(t) = \varphi(a_1, b_1, p_1, q_1); \quad M(t') = \varphi(a'_1, b'_1, p'_1, q'_1),$$

$$\sum_1^4 \frac{\partial M}{\partial t_i} t'_i = \frac{\partial\varphi}{\partial a_1} a'_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial b_1} b'_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial p_1} p'_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial q_1} q'_1.$$

Nous parvenons ainsi à définir l'angle de deux corrélations (t) et (t') sur une droite quelconque A à l'aide de la seule forme fondamentale; on a, en effet,

$$\cos H = \frac{1}{2} \frac{\sum \frac{\partial M}{\partial t_i} t'_i}{\sqrt{M(t)M(t')}}.$$

L'orthogonalité s'exprime par l'équation

$$\sum \frac{\partial M}{\partial t_i} t'_i = 0,$$

qui est symétrique en t et t' : la relation d'orthogonalité est donc involutive. Ce qui est conforme à la définition géométrique que nous avons donnée de l'orthogonalité.

12. Comme analogie curieuse entre le moment élémentaire et le carré de la distance élémentaire, nous citerons les résultats suivants, dont la démonstration est des plus aisées.

Soient trois droites infiniment voisines A, B, C, et désignons par (BC), (CA), (AB) les moments de ces droites prises deux à deux; désignons aussi par $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ les angles que font entre elles les deux corrélations que B et C déterminent sur A, C et A sur B, A et B sur C. On a

$$(BC) = (AB) + (CA) - 2\sqrt{(AB)(CA)}\cos\widehat{A}, \tag{1}$$

analogue de la formule

$$\overline{bc}^2 = \overline{ab}^2 + \overline{ca}^2 - 2\sqrt{\overline{ab}^2\,\overline{ca}^2}\cos\widehat{A},$$

relative aux triangles dans l'espace ponctuel.

A l'équation (1), on peut en joindre deux autres analogues, et on en déduit

$$\frac{\sin\widehat{A}}{\sqrt{(BC)}} = \frac{\sin\widehat{B}}{\sqrt{(CA)}} = \frac{\sin\widehat{C}}{\sqrt{(AB)}},$$

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = \pi,$$

et ainsi de suite.

Citons encore le cas ou $\widehat{A} = \frac{\pi}{2}$, on a

$$(BC) = (AB) + (CA) :$$

c'est le carré de l'hypoténuse pour l'espace réglé.

13. En résumant et complétant les résultats de ce paragraphe, nous voyons que :

1° Toute corrélation anharmonique sur une droite a un invariant $M(t)$; et l'évanouissement de l'invariant exprime que la corrélation est *singulière,* c'est-à-dire, que la droite $(u + du)$ qui la détermine sur la droite (u) rencontre cette droite.

Les droites (u) et $(u + du)$ ont ainsi un couple commun (a, α). Ce couple est le *couple singulier* de la corrélation singulière.

Tout couple d'une corrélation singulière admet pour un de ses deux éléments (point ou plan) au moins un des éléments du couple singulier.

2° Deux corrélations anharmoniques, sur une même droite A, ont un invariant simultané

$$\sum \frac{\partial M}{\partial t_i} t'_i.$$

L'évanouissement de cet invariant exprime l'orthogonalité (ou l'involution) des deux corrélations.

Pour qu'une corrélation singulière soit en involution avec une corrélation donnée, il faut et il suffit que son couple singulier appartienne à cette corrélation.

Ou encore :

Une corrélation anharmonique est le lieu des couples singuliers des corrélations anharmoniques singulières avec lesquelles elle est en involution.

Pour que deux corrélations singulières soient en involution, il faut et il suffit que leurs couples singuliers aient un élément (point ou plan) commun.

Il est bien facile de démontrer ces propositions, à l'aide des équations (1) et (2) du n° 6.

V. — Représentation des corrélations par l'espace non euclidien.

14. Nous venons de ramener aux propriétés des formes quadratiques quaternaires la théorie des corrélations. Cela va nous permettre d'introduire une représentation géométrique, qui nous montrera cette même théorie comme une image de l'espace *non euclidien*, tel que M. Klein l'a défini au Tome II du *Bulletin des Sciences mathématiques*.

Considérons les t comme les coordonnées d'un plan dans l'espace à trois dimensions. Nous faisons correspondre à ce plan la corrélation anharmonique (t). De la sorte, une surface représente par ses plans tangents un réseau de corrélations anharmoniques, et une développable représente une série de ces corrélations.

En particulier, le réseau quadratique des corrélations singulières est représenté par une quadrique, qui a pour équation

$$M(t) = 0.$$

Nous prendrons cette quadrique M pour quadrique fondamentale.

La première remarque qui s'offre, c'est que *l'angle de deux corrélations anharmoniques égale l'angle (sens non euclidien) des deux plans qui les représentent.*

Les corrélations orthogonales sont donc représentées par des plans orthogonaux (sens non euclidien), c'est-à-dire conjugués par rapport à la quadrique fondamentale.

Comme chaque plan tangent de la quadrique M représente une corrélation singulière, on peut prendre le point de contact pour en représenter le couple singulier. Tous les couples de la droite fondamentale sont alors représentés par tous les points de la quadrique.

Nous avons vu que la condition d'involution de deux corrélations singulières était que les couples singuliers eussent un élément commun (point ou plan). Si A et B sont les points de la quadrique M qui représentent ces couples, il faut, d'après la condition d'orthogonalité déjà énoncée, que le plan tangent en A contienne le point B, ou que A et B soient sur une même génératrice rectiligne de la surface. On voit ainsi que la condition nécessaire et suffisante pour que deux couples, situés sur la droite fondamentale, aient un élément commun, c'est que les points A et B, qui les représentent, soient sur une même génératrice rectiligne de la surface M. On en conclut que les couples de la droite fondamentale, qui ont un élément commun, sont représentés par les points d'une génératrice rectiligne et réciproquement.

Si les génératrices rectilignes G et G' représentent les couples qui ont les uns le même point a, les autres le même point a', il est bien évident que G et G' ne peuvent se couper; car, si ces droites se coupaient en un point A, le couple représenté par ce point aurait à la fois les points a et a', ce qui n'a aucun sens. On est ainsi conduit à dire que :

Les génératrices rectilignes G *d'un mode de génération de la quadrique fondamentale représentent chacune un point a de la droite fondamentale.*

C'est-à-dire que chacune représente, par ses points, les couples qui admettent un même point a de la droite fondamentale.

Les génératrices rectilignes Φ *du second mode de génération représentent, au contraire, les plans menés par la même droite.*

En sorte que :

Tout point A *de la quadrique* M *représente un couple; les génératrices* G *et* Φ *du premier et du deuxième mode de génération qui se croisent en ce point représentent, l'une le point, l'autre le plan du couple.*

15. M. Chasles, dans le mois de décembre 1861, a présenté à l'Académie des Sciences une théorie de courbes tracées sur les quadriques; il les classe d'après le nombre de fois que ces courbes sont coupées par les génératrices de l'un et de l'autre système. Désignons par C_μ^m une courbe coupée en m points par les génératrices Φ et en μ points par les génératrices G. Dans l'état actuel, comme toute courbe C_μ^m tracée sur la surface M fait correspondre m génératrices G à une génératrice Φ, et μ génératrices Φ à une génératrice G, on en conclut qu'une courbe C_μ^m représente par ses points les couples d'une corrélation supérieure Γ_μ^m de l'ordre m et de la classe μ.

En particulier, toute conique tracée sur la quadrique représente, par ses points, les couples de la corrélation anharmonique représentée par le plan qui la contient.

En effet, un plan tangent à la surface M en un point de cette conique passe au pôle du plan représentatif de la corrélation; ce plan tangent représente donc une corrélation anharmonique singulière en involution avec la proposée; et, d'après une proposition déjà énoncée, le couple singulier, qui est ici représenté par le point pris sur la conique, appartient à la corrélation anharmonique proposée.

16. Nous venons de voir comment se représentaient les corrélations supérieures, il reste à établir la représentation des réseaux et des séries de corrélations anharmoniques et d'en déduire des propriétés.

Représentation des réseaux. — Une surface R_p de la classe p représente un réseau d'ordre p. La développable D_{2p} de la classe $2p$ circonscrite à R_p et à M représente la série d'ordre $2p$, formée par les corrélations singulières du réseau. La courbe de contact de D_{2p} avec M est de l'ordre $2p$; d'après nos notations, elle doit être désignée par C_p^p. Cette courbe représente une corrélation supérieure Γ_p^p d'ordre et de classe p, engendrée par les couples singuliers des corrélations singulières du réseau. Cette corrélation, nous l'appelons la corrélation *focale* du réseau.

Il y a une infinité de réseaux d'ordre p admettant la même corrélation focale; ils sont représentés par des surfaces de la classe p homofocales, c'est-à-dire inscrites dans une même développable circonscrite à la quadrique M.

Représentation des séries. — Considérons une série définie par deux réseaux d'ordres p et q, représentés par deux surfaces R_p et R_q des classes p et q. La série, dont on peut dire qu'elle est de l'ordre pq, est représentée par la développable $S_{(p,q)}$, circonscrite à la fois aux surfaces R_p et R_q et qui est de la classe pq. Les $2pq$ plans tangents communs à la développable et à la surface M représentent les $2pq$ corrélations singulières de la série. Les points de contact de ces plans avec M représentent les $2pq$ couples singuliers de ces corrélations singulières. Nous appelons ces couples les *couples focaux;* ce qui n'est que l'extension d'une dénomination déjà en usage pour le cas de $p = q = 1$. Les séries ayant les mêmes couples focaux sont représentées par des développables homofocales, c'est-à-dire ayant avec la quadrique M les mêmes plans tangents communs.

Il faut remarquer que les couples focaux d'une série donnée appartiennent aux corrélations focales de tous les réseaux qui comprennent ces séries; de là le nom de *corrélations focales* que nous avons adopté.

17. *Réseaux linéaires.* — Un réseau linéaire est représenté par un point R_1. La série focale est représentée par le cône ayant ce point pour sommet et circonscrit à M. Le plan polaire du point R_1 est celui de la courbe de contact; il représente la corrélation focale du réseau; car ici cette corrélation est anharmonique. On arrive ainsi à ce résultat important :

Les corrélations d'un réseau linéaire sont définies géométriquement par la condition d'être en involution avec une corrélation fixe, qui est la corrélation du réseau.

Quand la corrélation focale d'un réseau linéaire est singulière, le réseau est également singulier. La condition d'involution précédemment énoncée, et ce fait, que l'involution de deux corrélations, dont l'une est singulière, s'exprime en écrivant que le couple singulier appartient à l'autre corrélation, conduisent à cette proposition :

Pour que des corrélations anharmoniques forment un réseau linéaire singulier, il faut et il suffit qu'elles admettent un couple fixe.

On exprime encore qu'un réseau linéaire est singulier en disant qu'il comprend sa corrélation focale, car les corrélations singulières jouissent seules de la condition d'être en involution avec elles-mêmes; on voit l'analogie avec les directions isotropes.

18. *Séries linéaires.* — Deux réseaux linéaires ont en commun une série linéaire. Une telle série est représentée par une droite S_{11}. La droite Σ_{11}, polaire de la droite S_{11}, représente une seconde série linéaire dont on peut dire qu'elle est conjuguée de la première.

Deux séries linéaires conjuguées jouissent de la propriété suivante :

Deux corrélations prises arbitrairement chacune dans l'une d'elles sont en involution.

Les plans tangents issus de S_{11} à la quadrique M représentent les corrélations singulières de l'une des séries. Les points de contact, qui représentent les couples focaux, sont à l'intersection de la droite Σ_{11} avec la surface fondamentale. Au contraire, la droite S_{11} coupe cette surface aux points qui représentent les couples focaux de l'autre série. En ayant égard aux résultats du n° 14, on voit que les deux systèmes de couples focaux de deux séries linéaires conjuguées sont inverses l'un de l'autre, car les points qui les représentent sont les sommets d'un quadrilatère gauche formé par quatre génératrices de la surface M.

La propriété d'involution de deux corrélations quelconques, prises chacune dans une des deux séries, appliquée aux corrélations singulières de ces séries eût conduit aux mêmes résultats.

De la même manière, en appliquant cette propriété d'involution à une corrélation de la première série et à l'une des deux corrélations singulières de la seconde, on arrive à cette définition géométrique des series linéaires.

Une série linéaire se compose de toutes les corrélations qui admettent deux couples fixes. Ces couples fixes sont les inverses des couples focaux, ou les couples focaux de la série conjuguée.

Nous nous contenterons d'énoncer les résultats suivants que le mode de représentation rend intuitifs :

Pour qu'une série linéaire appartienne à un réseau linéaire, il faut et il suffit que ses couples focaux appartiennent à la corrélation focale du réseau.

Les séries singulières, c'est-à-dire dont les couples focaux coïncident, ont chacune pour conjuguée une série singulière; donc le couple focal double se confond avec le couple focal double de la première série.

On exprime qu'une série est singulière en écrivant que la droite S_{11} *qui la représente touche la quadrique* M.

Les séries linéaires singulières qui appartiennent à un réseau linéaire représenté par un point R_1 sont représentées par les génératrices du cône qui représente la série focale du réseau. Ainsi ce cône représente :

Par ses plans tangents, les corrélations singulières du réseau;

Par ses génératrices, les séries linéaires singulières de ce même réseau.

Nous retrouverons cette propriété dans l'étude du cône de Malus.

19. *Réseaux quadratiques.* — Un réseau quadratique de corrélation anharmonique est représenté par une équation du second degré $\theta(t) = 0$. Dans l'espace, il est représenté par une quadrique R_2.

La série des corrélations singulières est du quatrième degré; la corrélation focale est d'ordre et de classe 2. La série des corrélations singulières est représentée par une développable D_{22} de la quatrième classe, circonscrite à la fois aux quadriques R_2 et M.

Si le discriminant de la forme θ est nul, la quadrique R_2 est infiniment aplatie; mais cela n'influe en rien sur la nature de la corrélation focale, attendu que parmi les quadriques inscrites dans une même développable D_{22}, il y en a toujours au moins une infiniment aplatie.

Si tous les mineurs du discriminant de θ sont nuls, la développable D_{22} se décompose en deux cônes de seconde classe, car la quadrique R_2 se décompose en deux points. Plus généralement, chaque fois que les quadriques R_2 et M sont bi-tangentes, la développable D_{22} se décompose en deux cônes. La corrélation focale se décompose alors en deux corrélations anharmoniques.

Enfin les surfaces R_2 et M peuvent être circonscrites l'une à l'autre; dans ce cas, on a un réseau linéaire double, et la corrélation focale se compose d'une corrélation anharmonique prise deux fois.

20. *Séries quadratiques.* — Deux réseaux, l'un linéaire, l'autre quadratique, ont en commun une série quadratique. Une série quadratique

est représentée par un cône de seconde classe. Il existe quatre couples focaux : ces couples focaux sont toujours en relation anharmonique.

Nous n'entrerons pas dans le détail des singularités que peuvent offrir les séries quadratiques, et que le mode de représentation permettrait de définir et d'étudier très simplement.

Nous réservons pour un autre moment diverses autres propriétés des corrélations qui nous seront utiles et conduisent à de nouvelles analogies entre le moment de deux droites infiniment voisines et le carré de la distance de deux points infiniment voisins.

DEUXIÈME PARTIE.

LES PROPRIÉTÉS INFINITÉSIMALES DU PREMIER ORDRE.

21. Nous allons d'abord montrer comment les propriétés du premier ordre des systèmes de droites peuvent être rattachées à l'existence de la forme fondamentale.

I. — Propriétés des surfaces réglées.

Si une surface réglée est représentée par les trois équations

$$f(u_1, u_2, u_3, u_4) = 0, \quad \varphi(u_1, u_2, u_3, u_4) = 0, \quad \psi(u_1, u_2, u_3, u_4) = 0,$$

et que l'on pose

$$U_i = \frac{\partial f}{\partial u}, \quad V_i = \frac{\partial \varphi}{\partial u_i}, \quad W_i = \frac{\partial \psi}{\partial u_i},$$

une droite $(u + du)$ infiniment voisine d'une droite (u) de la surface et appartenant à cette surface vérifie les équations

$$\Sigma U_i \, du_i = 0, \quad \Sigma V_i \, du_i = 0, \quad \Sigma W_i \, du_i = 0.$$

Appelons Δ_α le déterminant obtenu en retranchant la colonne d'indice α dans le tableau

$$\begin{vmatrix} U_1 & U_2 & U_3 & U_4 \\ V_1 & V_2 & V_3 & V_4 \\ W_1 & W_2 & W_3 & W_4 \end{vmatrix}.$$

On déduit des équations précédentes

$$\frac{du_1}{\Delta_1} = \frac{du_2}{\Delta_2} = \frac{du_3}{\Delta_3} = \frac{du_4}{\Delta_4}.$$

On peut envisager les Δ comme les coordonnées homogènes de la corrélation de Chasles, relative à la droite (u), c'est-à-dire de la corrélation anharmonique que la surface définit sur cette droite en vertu du théorème de M. Chasles, sur la distribution des plans tangents.

22. L'invariant $M(\Delta)$ de cette corrélation se met sous la forme

$$I = \begin{vmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} & M_{14} & U_1 & V_1 & W_1 \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} & M_{24} & U_2 & V_2 & W_2 \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} & M_{34} & U_3 & V_3 & W_3 \\ M_{41} & M_{42} & M_{43} & M_{44} & U_4 & V_4 & W_4 \\ U_1 & U_2 & U_3 & U_4 & 0 & 0 & 0 \\ V_1 & V_2 & V_3 & V_4 & 0 & 0 & 0 \\ W_1 & W_2 & W_3 & W_4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

On peut appeler *singulières* toutes les droites de la surface pour lesquelles I est nul. On a $I = 0$ quand tous les Δ sont nuls; mais en remettant à plus tard l'examen de ce cas, l'équation $I = 0$ exprime qu'autour de la droite (u) la surface réglée se comporte comme une surface développable; ainsi le plan tangent est le même pour tous les points de la droite (u), etc.

On voit en même temps que *la condition nécessaire et suffisante pour qu'une surface soit développable, c'est que l'équation*

$$I = 0$$

soit vérifiée pour toutes ses droites sans que les déterminants Δ soient tous et toujours nuls.

23. Deux surfaces réglées qui sur une droite définissent la même corrélation de Chasles se raccordent suivant cette droite. Parmi les surfaces qui, suivant une droite, se raccordent avec une surface réglée donnée, on peut distinguer les *hyperboloïdes de raccordement*. Voici comment on les obtient.

Soient (a, α), (b, β), (c, γ) trois couples de la corrélation de Chasles relative à une droite (u) d'une surface réglée, soient A, B, C trois droites appartenant respectivement à ces couples : l'hyperboloïde dont ces droites sont les directrices est de raccordement.

On voit ainsi que ces hyperboloïdes sont triplement indéterminés. On peut, en effet, les envisager comme des quadriques passant par deux droites (u) et $(u + du)$ infiniment voisines.

II. — Propriétés des congruences.

24. Deux équations

$$f = 0 \quad \text{et} \quad \varphi = 0$$

suffisent pour définir une congruence. Si (u) et $(u + du)$ sont deux droites infiniment voisines de la congruence, en conservant les notations précédentes, on a

$$\Sigma U_i du_i = 0, \quad \Sigma V_i du_i = 0,$$

ou, en introduisant les coordonnées t d'une corrélation,

$$\Sigma U_i t_i = 0, \quad \Sigma V_i t_i = 0.$$

Les corrélations sur une droite d'une congruence qui appartiennent à la congruence forment donc une série linéaire.

On en déduit, par les propriétés déjà exposées des séries linéaires, les résultats suivants :

Les corrélations qui appartiennent à une congruence sur une de ses droites admettent deux couples fixes (b, α) *et* (a, β). Les inverses de ces couples sont les *couples focaux* de la série linéaire.

L'existence de ces deux couples focaux montre que, parmi les corrélations qui appartiennent à la congruence, il y en a deux singulières dont ils sont les couples singuliers : de là ce théorème dû à Monge :

Étant donnée une droite d'une congruence, il existe deux droites de la congruence infiniment voisines de la première et la rencontrant.

Les points a et b, les plans α et β, sont les *foyers* et les plans *focaux* de la droite (u).

25. Les foyers ne dépendent que des deux coordonnées, ainsi que les plans focaux. Ils engendrent donc des surfaces. Soient A et B les deux surfaces lieux des points a et b, et qu'on appelle les *surfaces focales* de la congruence. Nous remarquons deux choses : d'abord, si l'on envisage une développable de la congruence et une de ses génératrices (u), le plan tangent à cette développable et le point de l'arête de rebroussement relatifs à cette génératrice forment un couple focal (a, α) de cette droite; en second lieu, puisqu'il correspond deux couples focaux à chaque droite d'une congruence, toute droite du système appartient à deux développables de cette congruence. On en conclut que les surfaces focales A et B sont respectivement le lieu des deux séries d'arêtes de rebroussement des développables de la congruence, et, par suite, que :

Les droites de la congruence sont tangentes aux surfaces focales.

Une développable de la congruence a son arête de rebroussement R_a sur la surface A, par exemple, et est circonscrite à la surface B, suivant une courbe S_b. Le plan α, étant tangent à la surface développable, est donc tangent en b à la surface B. Ainsi :

Les plans focaux touchent les surfaces focales.

En résumé, si l'on envisage les arêtes de rebroussement des développables de la congruence, elles forment deux séries de courbes R_a, R_b sur les surfaces focales A et B. Les plans osculateurs de ces courbes sont respectivement tangents aux surfaces B et A, et les points de contact décrivent respectivement sur ces surfaces deux séries de courbes S_b et S_a.

26. Nous sommes naturellement amenés à nous demander ce qui

arriverait dans le cas où les couples focaux coïncideraient. Si cela avait lieu et que (a, α) fût le couple de coïncidence, les surfaces focales se toucheraient en a, et α serait leur plan tangent commun. Mais alors la courbe R_a admettrait (aussi bien que R_b) pour plan osculateur le plan tangent à la surface A (ou B), sur laquelle elle est tracée; la tangente (u) à cette courbe serait donc une tangente asymptotique de la surface focale au point a.

Si les couples focaux coïncident pour toutes les droites de la congruence, les deux surfaces focales coïncident, et il est visible, d'après ce qui précède, que, dans ce cas, les droites du système se composent des *tangentes asymptotiques* d'une série de la surface suivant laquelle coïncident les deux surfaces focales.

La réciproque est vraie. Considérons, en effet, le système des tangentes asymptotiques d'une série d'une surface A donnée : soient a un point de la surface et (u) la tangente asymptotique du système considéré, relative à ce point. Le plan osculateur α à la ligne asymptotique, c'est-à-dire le plan tangent en a, à la surface focale A, doit toucher la seconde surface focale B, ainsi que nous l'avons vu. Donc, tout plan tangent à A est tangent à B, donc A et B coïncident.

Cette propriété des surfaces focales peut se déduire d'une autre plus générale, qu'il serait facile de démontrer ici en quelques mots; mais cette proposition trouve sa place parmi les propriétés du second ordre, et nous l'y retrouverons.

Il est facile d'exprimer, à l'aide de la forme fondamentale, la coïncidence des couples focaux relatifs à une droite (u) de la congruence. Il suffit d'annuler l'expression

$$J = \begin{vmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} & M_{14} & U_1 & V_1 \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} & M_{24} & U_2 & V_2 \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} & M_{34} & U_3 & V_3 \\ M_{41} & M_{42} & M_{43} & M_{44} & U_4 & V_4 \\ U_1 & U_2 & U_3 & U_4 & 0 & 0 \\ V_1 & V_2 & V_3 & V_4 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

dont on peut rapprocher la forme de l'expression de I. Désignons par $\Delta_{\alpha,\beta}$ le déterminant obtenu, en retranchant les colonnes d'indice

α et β dans le Tableau

$$\begin{vmatrix} U_1 & U_2 & U_3 & U_4 \\ V_1 & V_2 & V_3 & V_4 \end{vmatrix}.$$

L'équation $J = 0$ exprime la coïncidence des couples focaux, pourvu que les déterminants $\Delta_{\alpha,\beta}$ ne soient pas tous nuls, cas que nous examinerons plus tard. Ainsi :

L'équation $J = 0$ *caractérise les congruences formées par les tangentes inflexionnelles d'une surface.*

De même que l'équation $I = 0$ caractérisait les surfaces réglées formées des tangentes à une courbe.

27. Les droites d'une congruence dépendent de deux paramètres; désignons-les par p et q. L'introduction de ces deux paramètres attribue à la forme fondamentale l'expression

$$M(du) = E\,dp^2 + 2F\,dp\,dq + G\,dq^2.$$

Les diverses formes qu'on peut faire prendre au second membre conduisent à des interprétations différentes des mêmes faits analytiques, qui jouent un rôle si important dans la théorie des surfaces, lorsque l'on envisage la valeur de ds^2.

Les équations $p =$ const., $q =$ const. représentent deux séries de surfaces réglées de la congruence, et l'équation

$$F = 0$$

exprime l'involution des deux corrélations de Chasles que définissent sur une droite quelconque de la congruence les deux surfaces de chaque série qui y passent. Ainsi, la forme

$$M(du) = E\,dp^2 + G\,dq^2$$

signifie que les surfaces $p =$ const., $q =$ const. forment deux systèmes orthogonaux, au sens que nous attribuons à ce mot.

Pour obtenir les développables de la congruence, il suffit d'intégrer l'équation

$$E\,dp^2 + 2F\,dp\,dq + G\,dq^2 = 0.$$

Par exemple, si l'on a mis la forme $M(du)$ sous la forme

$$M(du) = \lambda dp\, dq,$$

les équations $p = \text{const.}$, $q = \text{const.}$ représentent les deux séries de développables de la congruence.

Ainsi, *ces développables s'offrent comme les analogues des courbes isotropes sur une surface.*

Supposons que les deux séries de développables de la congruence coïncident. Il faut et il suffit pour cela que l'expression

$$E\, dp^2 + 2F\, dp\, dq + G\, dq^2$$

soit un carré parfait, ou que

$$EG - F^2 = 0.$$

La coïncidence des deux séries de développables entraîne celle des surfaces focales; donc :

L'équation différentielle des congruences à surfaces focales coïncidentes est précisément

$$EG - F^2 = 0.$$

C'est une autre forme de l'équation $J = 0$, d'où l'on peut d'ailleurs la déduire.

Mais cette forme d'équation offre cet intérêt de nous montrer cette catégorie de congruences comme analogue des développables circonscrites au cercle de l'infini.

Les développements dans lesquels nous pourrions entrer encore nous entraîneraient sur le domaine du second ordre : nous y reviendrons dans la troisième partie.

28. Pour terminer ce qui a trait aux propriétés du premier ordre des congruences, il nous reste à parler du rôle des couples focaux dans l'étude des surfaces réglées qui appartiennent au système.

D'abord, *les surfaces réglées d'une congruence qui ont une génératrice (u) commune, se raccordent toutes suivant les couples inverses des couples focaux.*

En effet, ces surfaces sont toutes circonscrites aux surfaces focales.

Il est dès lors bien facile d'obtenir la série des *hyperboloïdes de raccordement* pour toutes ces surfaces.

Appelons, comme toujours, a et b les foyers de la droite (u), et en ces points, dans les plans tangents α et β aux surfaces focales $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$, menons les tangentes A et B à ces surfaces. Tous les hyperboloïdes qui admettent A et B pour directrices sont de raccordement pour une surface réglée du système.

On voit ainsi que ces hyperboloïdes sont quadruplement indéterminés.

Si l'on envisage deux congruences, qui sur une droite commune (u) définissent les mêmes couples focaux (a, α) et (b, β) (auquel cas les surfaces focales $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{A}'$ et $\mathcal{B}'$ des deux systèmes sont tangentes en a et b), on peut dire que ces deux congruences sont tangentes suivant cette droite. Le système des hyperboloïdes de raccordement est le même pour les deux congruences, et toute corrélation anharmonique qui appartient à l'une appartient à l'autre.

Parmi les congruences tangentes, on peut distinguer les *congruences linéaires tangentes*.

En désignant par A et B les mêmes droites que plus haut, la congruence linéaire dont A et B seraient les directrices est une congruence tangente.

On voit ainsi que ces congruences sont doublement indéterminées.

En particulier, si l'on prend A et B perpendiculaires à la droite (u), on obtient une certaine congruence linéaire tangente dont la découverte est due, croyons-nous, à Sturm.

III. — Propriétés des mplexes.

29. Soit l'équation d'un complexe

$$f(u_1, u_2, u_3, u_4) = 0.$$

Si (u) et $(u + du)$ sont deux droites du système infiniment voisines, l'équation suivante, où l'on conserve les notations précédentes,

$$\Sigma U_i \, du_i = 0$$

doit être vérifiée. L'introduction des coordonnées des corrélations anharmoniques donne

$$\Sigma U_i t_i = 0,$$

qui exprime que :

Toutes les corrélations anharmoniques sur une droite d'un complexe qui appartiennent à ce complexe forment un réseau linéaire.

Une propriété fondamentale du réseau nous apprend que :

Toutes les corrélations anharmoniques sur une droite d'un complexe qui appartiennent à ce complexe sont définies par la condition d'être en involution ou orthogonales avec une corrélation fixe.

Ce résultat offre une analogie réelle avec le suivant, qui est fondamental dans la théorie des surfaces.

Toutes les directions issues d'un point d'une surface et qui appartiennent (tangentes) à la surface sont définies par la condition d'être orthogonales à une direction fixe, la direction normale.

A cause de cette analogie, nous appelons *corrélation normale* la corrélation focale du réseau linéaire ci-dessus considéré.

Les coordonnées de la corrélation normale sont données par les équations

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial t_1}}{U_1} = \frac{\frac{\partial M}{\partial t_2}}{U_2} = \frac{\frac{\partial M}{\partial t_3}}{U_3} = \frac{\frac{\partial M}{\partial t_4}}{U_4}.$$

L'invariant K a une forme symétrique qui le rapproche des invariants I et J déjà trouvés; on a

$$K = \begin{vmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} & M_{14} & U_1 \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} & M_{24} & U_2 \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} & M_{34} & U_3 \\ M_{41} & M_{42} & M_{43} & M_{44} & U_4 \\ U_1 & U_2 & U_3 & U_4 & 0 \end{vmatrix}.$$

30. On peut, d'une manière générale, appeler *droites singulières* du complexe toutes celles pour lesquelles a lieu l'équation $K = 0$. Écartons jusqu'à nouvel ordre l'hypothèse où tous les U seraient nuls. L'évanouissement de l'invariant exprime que la corrélation normale est singulière, ainsi que le réseau qu'elle définit.

Lorsqu'une droite (u) est ainsi singulière, toutes les corrélations sur cette droite qui appartiennent au complexe admettent un couple fixe (a, α), à savoir le couple singulier de la corrélation normale.

L'équation $K = 0$ définit dans le complexe une congruence, celle des droites singulières. Le point a décrit une surface $[f]$ qu'on appelle la *surface de singularité* du complexe $f = 0$.

Dans la congruence des droites singulières, a est un foyer de la la droite (u) et α est un plan focal; mais, le couple (a, α) n'est pas un couple focal. On en déduit que $[f]$ est une nappe de la surface focale de la congruence des droites singulières, et que α est le plan tangent à cette surface en ce point. Ainsi, en disant, selon l'usage, qu'un couple appartient à une surface quand le point étant sur la surface le plan touche la surface en ce point, on peut dire que :

Les couples singuliers des corrélations normales singulières d'un complexe appartiennent à la surface de singularités.

Ce théorème a été énoncé pour la première fois sous une forme un peu différente par M. Pasch.

31. On peut se proposer de savoir s'il est possible que l'équation $K = 0$ soit vérifiée identiquement pour toutes les droites du complexe.

Pour étudier cette question, prenons pour coordonnées les coefficients a, b, p, q dans les équations de la droite rapportée à trois axes rectangulaires; soit

$$q = f(a, b, p)$$

l'équation du complexe; on en déduit, par différentiation,

$$f'_a\,da + f'_b\,db + f'_p\,dp - dq = 0,$$

de sorte que les coordonnées de la corrélation normale ont pour expressions

$$1,\ f'_p,\ f'_b,\ -f'_a;$$

ce qui signifie que la droite dont les coordonnées sont

$$a + \varepsilon,\quad b + f'_p\varepsilon,\quad p + f'_b\varepsilon,\quad q - f'_a\varepsilon$$

définit, sur la droite

$$a,\ b,\ p,\ q,$$

la corrélation normale du complexe.

Ces deux droites ont un point m et un plan μ communs chaque fois que la corrélation normale est singulière; et (m, μ) est alors le couple singulier. La condition de rencontre s'écrit

$$-f'_b = \frac{f'_a}{f'_p};$$

de sorte que, dans notre système de coordonnées, l'équation $K = 0$ s'écrit

$$\frac{\partial q}{\partial a} + \frac{\partial q}{\partial b}\frac{\partial q}{\partial p} = 0.$$

Le point m a pour coordonnées

$$(m) \qquad x_0 = a z_0 + p, \quad y_0 = b z_0 + q, \quad z_0 = -f'_b = \frac{f'_a}{f'_p},$$

le plan μ a pour équation

$$(\mu) \qquad -x f'_p + y + (a f'_p - b) z + (p f'_p - q) = 0.$$

Différentions les deux premières équations (m) et ajoutons les différentielles membre à membre, les deux membres de la première étant multipliés par $-f'_p$, il vient

$$-f'_p dx_0 + dy_0 + (a f'_p - b)\, dz_0 = -z_0 f'_p\, da + z_0\, db - f'_p\, dp + dq;$$

mais on a

$$z_0 f'_p = f'_a, \quad z_0 = -f'_b,$$

donc, le second membre de la relation précédente devient

$$-f'_a\, da - f'_b\, db - f'_p\, dp + dq,$$

c'est-à-dire zéro; on a donc la relation

$$(r) \qquad -f'_p\, dx_0 + dy_0 + (a f'_p - b)\, dz_0 = 0.$$

Cette équation prouve que le point m décrit une surface S, et en la rapprochant de l'équation (μ), on voit que le plan (μ) est le plan tangent en m à la surface de singularités.

Nous avons ainsi démontré une seconde fois le théorème de Pasch, qui consiste en ce que :

Les couples singuliers des corrélations normales singulières d'un complexe appartiennent à une surface.

Si l'on suppose actuellement que l'équation

$$\frac{\partial q}{\partial a} + \frac{\partial q}{\partial b}\frac{\partial q}{\partial p} = 0$$

ait lieu pour toutes les droites du complexe, les raisonnements et les calculs précédents subsistent, et l'on voit que toutes les droites du complexe sont alors tangentes à la surface S. De là ce théorème dû à M. Klein, et énoncé par lui sous une autre forme :

Un complexe dont toutes les corrélations normales sont singulières se compose des tangentes à une même surface.

Réciproquement, les tangentes d'une surface forment un complexe qui vérifie l'équation $K = 0$.

Il est facile de le voir directement. Mais voici une démonstration analytique de ce fait. Soit l'équation de la surface

$$F(x, y, z) = 0.$$

Si entre l'équation

$$F(az + p, \quad bz + q, z) = 0$$

et sa dérivée par rapport à z,

$$a F'_x + b F'_y + F'_z = 0,$$

nous éliminons z, l'équation obtenue entre a, b, p, q est celle du complexe des tangentes de la surface proposée. Différentions totalement F, en tenant compte de l'équation

$$\frac{dF}{dz} = 0;$$

il vient

$$zF'_x da + zF'_y db + F'_x dp + F'_y dq = 0.$$

Cette équation définit le réseau linéaire engendré par les droites du complexe infiniment voisines de la droite (a, b, p, q). La corrélation normale du réseau a donc pour coordonnées

$$F'_y, \ -F'_x, \ -zF'_y, \ zF'_x,$$

c'est-à-dire qu'elle est définie sur la droite

$$a, \ b, \ p, \ q$$

par la droite infiniment voisine

$$a + F'_y \varepsilon, \quad b - F'_x \varepsilon, \quad p - z F'_y \varepsilon, \quad q + z F'_x \varepsilon.$$

Mais il est facile de voir que ces deux droites se coupent au point (x, y, z) de la surface, et que leur plan commun est précisément le plan tangent à la même surface en ce point. La corrélation normale est donc singulière, et, par suite, l'équation $K = 0$ est satisfaite.

En résumé :

L'équation $K = 0$ *est l'équation différentielle des complexes des droites ayant avec une surface un simple contact.*

De même que l'équation $J = 0$ était l'équation différentielle des congruences des droites ayant avec une surface un contact du *deuxième* ordre.

De même, enfin, que l'équation $I = 0$ était l'équation des surfaces engendrées par les droites tangentes à une courbe, ou, si l'on veut, ayant avec une surface un contact du *troisième* ordre.

23. Avant de développer plus longuement les propriétés des droites singulières, il convient de montrer le rôle de la corrélation normale dans l'étude des surfaces réglées et des congruences formées des droites du complexe.

D'abord, le théorème d'involution qui définit la corrélation normale montre que *toutes les surfaces réglées d'un complexe déterminent, sur leurs génératrices, des corrélations de Chasles respectivement orthogonales aux corrélations normales.*

La définition des *hyperboloïdes de raccordement* des surfaces réglées d'un complexe dérive immédiatement de cette remarque. Si (a, α) et (b, β) sont deux couples quelconques de la corrélation normale relative à une droite (a), et si A et B sont deux droites appartenant aux couples (a, β) et (b, α) inverses des premiers, tout hyperboloïde admettant A et B pour directrices est un hyperboloïde de raccordement pour une surface réglée du complexe. Ces hyperboloïdes sont, on le voit, quintuplement indéterminés.

33. Considérons une développable formée des droites d'un complexe; soient (u) une de ses génératrices, a le point où elle touche l'arête de rebroussement et α le plan tangent tout du long de cette génératrice. La développable définit sur la droite (u) une corrélation singulière dont (a, α) est le couple singulier; et, comme une corrélation anharmonique est le lieu des couples singuliers des corrélations singulières avec lesquelles elle est en involution, on en conclut que le couple (a, α) appartient à la corrélation normale.

Ainsi :

Toute développable formée des droites d'un complexe définit sur chaque génératrice un couple de la corrélation normale; le point est le point de contact avec l'arête de rebroussement, le plan est le plan tangent tout du long de la génératrice.

On peut en particulier prendre, soit le cône du complexe de sommet a, et α est alors le plan tangent suivant la génératrice (u), soit la courbe enveloppe du complexe dans le plan α, et a est alors le point de contact de la génératrice (u) avec cette courbe.

34. La corrélation normale définit également les congruences du complexe. En effet, une congruence étant donnée dans un complexe, les couples focaux appartiennent respectivement aux corrélations normales.

De là la possibilité de définir les *congruences linéaires tangentes* à un complexe. En effet, si (u) est une droite du complexe et A, B deux droites comme nous les avons définies à propos des hyperboloïdes de raccordement, on voit que la congruence linéaire dont elles sont les directrices est tangente à une congruence du complexe; ces congruences tangentes sont quadruplement indéterminées.

35. Considérons une congruence à couples focaux coïncidents du complexe; d'après ce qu'on sait sur ces congruences, si (a, α) est le couple de coïncidence relatif à une droite (u) de la congruence, ce couple appartient à la surface focale unique du système; il appartient aussi à la corrélation normale du complexe.

Un couple (point et plan mené par ce point) dépend dans l'espace de cinq paramètres; mais on voit que les couples des corrélations normales d'un complexe ne dépendent que de quatre paramètres; ces couples sont donc assujettis à une condition. Or on sait que les couples de l'espace assujettis à une condition correspondent à une équation aux dérivées partielles; on conclut donc que tout complexe de droites dans l'espace équivaut à une équation aux dérivées partielles entre les coordonnées d'un espace soit ponctuel, soit planaire.

Il résulte de ce qui précède que les surfaces focales des congruences à couples focaux coïncidents du complexe sont les surfaces intégrales de cette équation aux dérivées partielles, tandis que les développables du complexe et leurs arêtes de rebroussement en sont les développables et les courbes intégrales.

Ces résultats sont bien connus; nous les citons simplement parce qu'ils nous seront utiles pour l'exposition des propriétés du second ordre.

36. On peut se proposer de chercher en coordonnées lignes les équations des développables, ou des congruences singulières (à couples focaux coïncidents) du complexe.

Supposons que l'on exprime en fonction de trois paramètres p, q, r les coordonnées des droites du complexe, la forme fondamentale deviendra

$$\mathrm{M}(du) = \mathrm{P}\,dp^2 + \mathrm{Q}\,dq^2 + \mathrm{R}\,dr^2 + 2\mathrm{P}'\,dq\,dr + 2\mathrm{Q}'\,dr\,dp + 2\mathrm{R}'\,dp\,dq.$$

On peut, dans ce cas, faire usage d'un espace représentatif (ponctuel ou planaire). Supposons, par exemple, que p, q, r soient les coordonnées d'un point rapporté à trois axes rectangulaires. Il y aura correspondance entre les points de l'espace et les droites du complexe, entre les directions issues d'un point et les corrélations qui appartiennent au complexe sur la droite correspondante. Il correspondra à une surface une congruence, à une courbe une surface réglée. Tout plan mené par un point représentera une congruence élémentaire (*un pinceau*) du complexe sur la droite représentée par ce point. Un cône ayant son sommet en un point p représentera, par ses génératrices, une série de corrélations anharmoniques du complexe, et par ses plans tangents une famille de pinceaux sur la droite que son sommet p représente.

Ainsi, les corrélations singulières du complexe sur une droite (p, q, r) seront représentées par un cône du second degré ayant son sommet au point (p, q, r), et dont l'équation s'écrit

$$P\,dp^2 + Q\,dq^2 + R\,dr^2 + \ldots = 0.$$

Lorsque le point représentatif appartient à la droite représentée, on reconnaît dans ce cône du second degré le cône découvert par Malus, pour les complexes définis par des points de départ.

Nous conserverons, dans le cas général, le nom de *cône de Malus* à ce cône du second ordre. On voit sans peine que, si l'on mène un plan par un point (p, q, r) qui coupe suivant deux génératrices le cône de Malus, ces deux génératrices représentent, par leurs directions, chacune une corrélation singulière du pinceau que le plan représente.

Pour que les couples focaux coïncident, il faut et il suffit par conséquent que ces deux génératrices coïncident, ou que le plan touche le cône de Malus. Ainsi :

Par ses plans tangents, le cône de Malus représente les pinceaux à couples focaux coïncidents du complexe.

En résumé, on voit, en se reportant à l'espace représentatif, que l'équation aux dérivées partielles entre $p, q, r,$ qui provient de l'équation

$$P\,dp^2 + K\,dq^2 + R\,dr^2 + 2R'\,dq\,dr + \ldots = 0,$$

admet, pour intégrale générale, les surfaces représentatrices des congruences singulières du complexe, et pour courbes intégrales les courbes représentatrices des développables du complexe.

37. Cette interprétation du cône de Malus n'est peut-être pas dépourvue d'intérêt; mais voici une proposition générale qui découle immédiatement de la considération de la forme fondamentale et fait ressortir encore mieux son utilité.

Considérons deux droites

$$p + dp, \quad q + dq, \quad r + dr$$

et

$$p + \delta p, \quad q + \delta q, \quad r + \delta r,$$

infiniment voisins de la droite p, q, r. Elles définissent sur cette droite deux corrélations anharmoniques dont *l'involution s'exprime en écrivant que les directions représentatrices correspondantes sont conjuguées par rapport au cône de Malus.*

De même, deux pinceaux dont les couples focaux sont en relation harmonique, et que nous pouvons appeler *pinceaux en involution,* sont représentés par deux plans conjugués par rapport au cône de Malus.

Ainsi :

Pour qu'un pinceau soit en involution avec un pinceau fixe, c'est-à-dire pour que les couples d'un pinceau soient en relation harmonique avec deux couples fixes de la corrélation normale, il faut et il suffit que le plan représentatif du pinceau contienne une droite déterminée.

Proposons-nous dès lors le problème général suivant :

Sur chaque droite d'un complexe on détermine a priori *deux couples de la corrélation normale suivant une loi continue : trouver les congruences du complexe dont les couples focaux sont en relation harmonique avec ces deux couples.*

Puisque le plan représentatif du pinceau doit être assujetti seulement à passer par une droite fixe, on en conclut que le problème dépend d'une équation aux dérivées partielles du *premier ordre* et *linéaire* entre p, q, r, et, réciproquement, que toute équation aux dérivées partielles du *premier ordre* et *linéaire* entre p, q, r admet comme intégrales générales les surfaces représentatrices des congruences du complexe dont les couples focaux sont en relation harmonique avec deux couples de la corrélation normale connus *a priori.*

Un premier exemple est fourni par le problème d'Abel Transon.

Transon, dans un Mémoire présenté à l'Académie des Sciences en 1861, et qui a été l'objet d'un Rapport de M. Chasles le 20 mai de la même année, se proposait de décomposer un complexe en congruences de normales à une même surface, c'est-à-dire en congruences dont les plans focaux fussent rectangulaires. Il trouva que la question dépendait d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre et linéaire.

Il suffit de mener par chaque droite du complexe les plans isotropes

i et i' : il est clair que les couples (m, i), (m', i') appartenant à la corrélation normale sont bien déterminés sur chaque droite du complexe. Cela étant, les congruences dont il s'agit sont définies par la condition que leurs couples focaux soient en relation harmonique avec les couples définis *a priori* (m, i) et (m', i').

Ce problème est donc un cas particulier de celui qui précède.

Un second exemple est donné par la recherche des congruences qui ont pour couple focal un couple de la corrélation normale connu *a priori*. La droite enveloppe est alors une génératrice du cône de Malus.

On pourrait, dans la représentation des droites d'un complexe, faire usage d'un espace planaire; on arriverait ainsi à concevoir une conique remplaçant le cône de Malus. Mais nous n'insisterons pas davantage.

38. Quand deux complexes sur une droite commune définissent la même corrélation normale, on peut dire qu'ils sont *tangents* suivant cette droite. Parmi les complexes tangents, on peut distinguer les complexes linéaires tangents. Ces complexes sont définis par l'unique condition de contenir la congruence linéaire singulière formée par les droites qui appartiennent aux couples de la corrélation normale. Ils forment donc un faisceau. On peut remarquer que la condition nécessaire et suffisante pour qu'un hyperboloïde soit de raccordement, ou qu'une congruence linéaire soit tangente, c'est qu'ils appartiennent à un complexe linéaire tangent.

39. Il nous reste, pour compléter ce que nous voulions dire sur les propriétés du premier ordre des complexes, à donner quelques propriétés des droites singulières que nous ne pouvions exposer qu'après ce qui précède.

Nous avons vu que, si (a, α) est un couple de la corrélation normale d'un complexe, la courbe enveloppe du complexe dans le plan α touche en a la droite du complexe considérée, et que le plan α touche tout du long de cette droite le cône du complexe dont a est le sommet. Nous avons vu également que le couple (a, α) appartenait à une surface focale d'une congruence singulière du complexe. Il y a lieu de voir ce que deviennent ces propriétés dans le cas des droites singulières.

Le théorème d'involution qui définit la corrélation normale prouve d'abord que :

Toutes les surfaces réglées du complexe qui ne sont pas développables, et qui passent par une droite singulière de ce complexe, ont un même couple de raccordement.

Mais si la droite singulière du complexe que l'on considère est aussi singulière dans la surface (ce qui aura toujours lieu si elle est développable), on voit que le théorème d'involution exige seulement que l'un des éléments du couple singulier de la corrélation normale singulière du complexe coïncide avec l'un des éléments du couple singulier de la corrélation singulière relative à la surface.

Comme, d'ailleurs, l'équation $K = 0$ n'entraîne pas en général l'équation $I = 0$, on voit que, en général, une surface réglée non développable du complexe touche en un nombre limité de points la surface de singularités.

En effet, toute surface réglée d'un complexe contient un nombre limité de droites singulières de ce complexe.

Si l'on envisage également une congruence appartenant au complexe et une droite A singulière dans le complexe et appartenant à la congruence, en désignant par (m, μ) le couple singulier de la corrélation normale singulière sur A, et (a, α), (b, β) les couples focaux sur A dans la congruence, il faut que ces couples appartiennent à la corrélation normale singulière. Supposons qu'ils ne coïncident pas, ce qui est permis, puisque, en général, l'équation $K = 0$ n'entraîne pas $J = 0$. Il faudra, par exemple, que m coïncide avec a, et μ avec β.

Autrement dit, le couple (m, μ) appartient à la surface focale, qui se trouve ainsi être tangente en m à la surface de singularités.

Ceci est applicable à toutes les droites de la surface formée dans la congruence proposée par les droites singulières du complexe; donc :

Une des nappes de la surface focale de toute congruence non singulière d'un complexe est circonscrite à la surface de singularités.

Ou encore :

La surface focale d'une congruence est une enveloppe des surfaces de singularités des complexes qui contiennent cette congruence.

40. Lorsque l'on envisage des développables d'un complexe et des droites singulières d'un complexe sur ces développables, on se trouve en présence d'un cas particulier que nous allons étudier de plus près.

D'abord, il est clair que, lorsqu'une droite d'un complexe est singulière à la fois dans ce complexe et dans une surface réglée formée des droites du complexe, il faut que le point central sur cette génératrice coïncide avec le point du couple singulier de la corrélation normale, ou que le plan tangent, tout au long de cette droite à la surface, coïncide avec le plan du même couple singulier.

Nous allons, d'ailleurs, établir ce résultat par l'analyse.

En prenant une droite d'un complexe pour axe Oz, zOx étant le plan central et O le point central de la corrélation normale, on peut écrire son équation

$$(1)\qquad p = kb + \mathrm{A}a^2 + \mathrm{B}b^2 + \mathrm{Q}q^2 + 2\mathrm{A}'bq + 2\mathrm{B}'qa + 2\mathrm{Q}'ab + \ldots,$$

et la corrélation normale a pour équation

$$\zeta \cot\theta = \mathrm{K}.$$

Si la droite considérée est singulière, K est nul, et le couple singulier de la corrélation normale est formé du point O et du plan zOy. L'équation du complexe est alors

$$(2)\qquad p = \mathrm{A}a^2 + \mathrm{B}b^2 + \mathrm{Q}q^2 + 2\mathrm{A}'bq + 2\mathrm{B}'qa + 2\mathrm{Q}'ab + \ldots.$$

Une surface réglée représentée par les équations

$$(3)\qquad \begin{cases} a = a_1\lambda + a_2\lambda^2 + a_3\lambda^3 + \ldots, \\ b = b_1\lambda + b_2\lambda^2 + b_3\lambda^3 + \ldots, \\ p = p_1\lambda + p_2\lambda^2 + p_3\lambda^3 + \ldots, \\ q = q_1\lambda + q_2\lambda^2 + q_3\lambda^3 + \ldots \end{cases}$$

appartient au complexe sous les conditions suivantes :

$$(4)\qquad \begin{cases} p_1 = 0, \\ p_2 = \mathrm{A}a_1^2 + \mathrm{B}b_1^2 + \mathrm{Q}q_1^2 + 2\mathrm{A}'b_1q_1 + 2\mathrm{B}'q_1a_1 + 2\mathrm{Q}'a_1b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Elle est développable si l'on a

$$\frac{da}{d\lambda}\frac{dq}{d\lambda} - \frac{db}{d\lambda}\frac{dp}{d\lambda} = 0,$$

quel que soit λ; on trouve ainsi, en ayant égard à la condition $p_1 = 0$,

$$(5)\quad \left\{\begin{array}{l} a_1 q_1 = 0, \\ a_1 q_2 + a_2 p_1 - b_1 p_2 = 0, \\ 2(a_2 q_2 - b_2 p_2) + 3(a_1 q_3 + a_3 q_1 - b_2 p_3) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

Les rapports $\frac{p}{q}$, $\frac{p}{a}$ déterminent, par leurs limites t et ζ, la position du plan tangent suivant Oz, et celle du point central sur cette droite.

Mais l'équation $a_1 q_1 = 0$ se décompose en deux : l'une, $a_1 = 0$, conduit aux valeurs

$$t = 0, \quad \zeta = \frac{p_2}{a_2};$$

l'autre, $q_1 = 0$, donne

$$t = \frac{p_2}{q_2}, \quad \zeta = 0.$$

Cela fait bien voir l'exactitude de la proposition que nous avions déduite des principes exposés ci-dessus.

Mais nous allons tirer de ces calculs d'autres conséquences.

Cherchons l'enveloppe des droites du complexe dans le plan zOy, on a

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = 0, \quad \ldots, \quad p_1 = 0, \quad p_2 = 0, \quad p_3 = 0, \quad \ldots;$$

les équations (5) sont satisfaites, mais la seconde des équations (4) devient

$$(6)\qquad 0 = B b_1^2 + Q q_1^2 + 2A' b_1 q_1;$$

or la limite de $\frac{q}{b}$ définit le point de contact de Oz avec l'enveloppe : cette limite est $\frac{q_1}{b_1}$, et, comme l'équation (6) fournit deux racines pour ce rapport, on en conclut que :

Toute droite singulière est tangente double de la courbe enveloppe du complexe relative au plan du couple singulier.

Cherchons de même le plan tangent suivant Oz au cône du complexe dont l'origine est le sommet : une marche analogue, consistant à poser

$$p_1 = 0, \quad p_2 = 0, \quad p_3 = 0, \quad \ldots, \quad q_1 = 0, \quad q_2 = 0, \quad q_3 = 0, \quad \ldots,$$

conduirait à l'équation

$$o = A a_1^2 + B b_1^2 + 2 Q' a_1 b_1,$$

qui donne deux valeurs pour $\frac{b_1}{a_1}$, limite du rapport $\frac{b}{a}$, qui définit le plan tangent. Il y a donc deux plans tangents au cône suivant Oz; donc :

Toute droite singulière d'un complexe est génératrice double du cône de ce complexe dont le sommet est au point du couple correspondant.

La surface de singularités d'un complexe s'offre ainsi :

1° Comme l'enveloppe des plans pour lesquels la courbe enveloppe du complexe a une tangente double;

2° Comme lieu des points pour lesquels le cône du complexe a une génératrice double.

IV. — Sur les singularités supérieures des systèmes de droites.

41. Les systèmes de lignes droites offrent des singularités d'un tout autre ordre que celles qui ont été étudiées plus haut.

Prenons, par exemple, le cas d'un complexe, et supposons que, pour une droite (u) du complexe, on ait $U_1 = o$, $U_2 = o$, $U_3 = o$, $U_4 = o$. Le déterminant K sera nul et la droite (u) s'offrira comme singulière.

Plus généralement, considérons le cas où, pour une droite (u) du complexe, toutes les dérivées partielles d'ordre inférieur à p du premier membre de son équation sont nulles et où l'une au moins des dérivées partielles de l'ordre p n'est pas nulle.

En différentiant p fois l'équation

$$f(u_1, u_2, u_3, u_4) = o,$$

les différentielles d'ordre supérieur au premier disparaîtront, en vertu des hypothèses, et il restera

$$d^p f = F_p(du) = o,$$

où $F_p(du)$ est une fonction homogène de degré p des différentielles.

Cette dernière équation exprime la condition nécessaire et suffisante pour que la droite $(u + du)$ appartienne au complexe. Ainsi :

Dans le cas qui nous occupe, les corrélations anharmoniques qui appartiennent au complexe forment sur la droite (u) un réseau de l'ordre p.

La série focale de ce réseau est de l'ordre $2p$, et la corrélation focale est de degré et de classe p.

On en conclut tout de suite que, dans le cas qui nous occupe :

1° La droite (u) est tangente multiple d'ordre p de toutes les courbes enveloppes du complexe relatives à des plans passant par cette droite ;

2° La droite (u) est arête multiple d'ordre p de tout cône du complexe qui a sur elle son sommet.

On peut dire d'une telle droite qu'elle est multiple d'ordre p dans le complexe.

Ainsi, outre les droites singulières, c'est-à-dire à corrélation normale singulière, qui sont chacune tangente double d'une courbe du complexe, et arête double d'un cône du complexe, il peut y avoir d'autres droites qui soient tangentes doubles pour *toutes* les courbes du complexe qu'elles touchent, génératrices doubles pour *tous* les cônes du complexe qui ont sur elles leurs sommets.

Il est clair d'ailleurs que ces singularités ne se présenteront pas en général, car il n'arrivera pas toujours que les équations

$$f = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial u_1} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial u_2} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial u_3} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial u_4} = 0$$

soient compatibles.

42. Considérons actuellement une congruence représentée par les deux équations

$$f(u) = 0, \quad \varphi(u) = 0,$$

et, en adoptant les notations précédentes, supposons que tous les déterminants à quatre éléments tirés du Tableau

$$\begin{vmatrix} U_1 & U_2 & U_3 & U_4 \\ V_1 & V_2 & V_3 & V_4 \end{vmatrix},$$

et que nous avons désignés par $\Delta_{\alpha,\beta}$, soient nuls. Si la droite (u) n'est multiple sur aucun des complexes $f = 0$ ou $\varphi = 0$, l'hypothèse introduite revient à dire que ces complexes sont tangents suivant la droite (u), c'est-à-dire définissent sur elle la même corrélation normale.

Les deux équations

$$\Sigma U_i du_i = 0,$$
$$\Sigma V_i du_i = 0$$

se réduisent alors à une seule, que nous représenterons par

$$(1) \qquad \Sigma P_i du_i = 0.$$

On peut, en effet, dans ce cas, déterminer les constantes λ et μ, de sorte que l'expression

$$\Sigma(\lambda U_i + \mu V_i) du_i$$

soit identiquement nulle.

En posant

$$U_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial u_i \partial u_j}, \quad V_{ij} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u_i \partial u_j},$$

et différentiant deux fois l'expression

$$\lambda f + \mu \varphi,$$

les différentielles d'ordre supérieur au second disparaissent, et il reste

$$(2) \qquad \Sigma(\lambda U_{ij} + \mu V_{ij}) du_i du_j = 0.$$

Les équations (1) et (2) définissent la série des corrélations sur la droite (u) qui appartiennent à la congruence : *cette série est quadratique.*

On peut dire que la droite (u) est une droite double de la congruence.

La série quadratique que nous venons de définir renferme quatre corrélations singulières. On en conclut cette propriété des droites doubles d'une congruence :

Dans toute congruence ayant une droite double, il existe QUATRE *droites infiniment voisines de cette droite et la rencontrant.*

Il est clair que, si l'on supposait tous les U_i nuls, les raisonnements précédents subsisteraient. Il suffirait de faire $\mu = 0$. Dans ce cas, la droite serait double dans le premier complexe et simple dans le second. En résumé :

On n'obtiendra de congruence à droite double qu'en prenant l'intersection de deux complexes linéaires tangents, ou de deux complexes dans lesquels une droite commune est double pour l'un d'eux.

43. La série quadratique, définie par les équations (1) et (2), peut d'ailleurs se décomposer en deux séries linéaires *distinctes* ou *confondues*.

En posant

$$R(du) = \Sigma R_{ij}\,du_i\,du_j = \Sigma(\lambda U_{ij} + \mu V_{ij})\,du_i\,du_j, \tag{3}$$

la condition, pour que la série se décompose en deux séries linéaires, est la suivante :

$$\begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & R_{14} & P_1 \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & R_{24} & P_2 \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & R_{34} & P_3 \\ R_{41} & R_{42} & R_{43} & R_{44} & P_4 \\ P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & 0 \end{vmatrix} = 0. \tag{4}$$

On peut faire voir que cette hypothèse correspond au cas où les deux complexes qui donnent la congruence sont *tangents suivant deux droites successives*, en supposant, toutefois, que la droite (u), que l'on considère, ne soit droite double pour aucun des deux.

L'équation (4) exprime, en effet, la condition nécessaire et suffisante pour que, si l'on tire de (1) la valeur d'une différentielle (de du_4, par exemple), la forme $R(du)$ devienne, par substitution de cette valeur, une forme ternaire à déterminant nul. Or, si l'on a pris les équations des deux complexes sous la forme

$$u_4 = f(u_1, u_2, u_3),$$
$$u_4 = \varphi(u_1, u_2, u_3),$$

et que l'on pose

$$l_1 = \frac{\partial f}{\partial u_1}, \quad l_2 = \frac{\partial f}{\partial u_2}, \quad l_3 = \frac{\partial f}{\partial u_3},$$
$$\lambda_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial u_2}, \quad \lambda_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial u_3}, \quad \lambda_3 = \frac{\partial u}{\partial u_4},$$

ainsi que

$$d^2 f = l_1\,d^2 u_1 + l_2\,d^2 u_2 + l_3\,d^2 u_3 + F(du),$$
$$d^2 \varphi = \lambda_1\,d^2 u_1 + \lambda_2\,d^2 u_2 + \lambda_3\,d^2 u_3 + \Phi(du),$$

où $F(du)$ et $\Phi(du)$ sont deux formes quadratiques ternaires, il est clair que $F(du) - \Phi(du) = H(du)$ est ce que devient la forme quaternaire $R(du)$, quand on y remplace du_4 par sa valeur tirée de (1). Cela posé :

Les équations

$$l_1 = \lambda_1, \quad l_2 = \lambda_2, \quad l_2 = \lambda_3$$

expriment le contact des deux complexes suivant la droite (u). Les équations

$$dl_1 = d\lambda_1, \quad dl_2 = d\lambda_2, \quad dl_3 = d\lambda_3$$

expriment que le contact a lieu, en outre, suivant la droite $(u + du)$.

Mais, si l'on remarque que

$$dl_i = \frac{1}{2}\frac{\partial F(du)}{\partial du_i}, \quad d\lambda_i = \frac{1}{2}\frac{\partial \Phi(du)}{\partial du_i},$$

on voit que ces dernières équations s'écrivent

$$\frac{\partial H(du)}{\partial du_1} = 0, \quad \frac{\partial H(du)}{\partial du_2} = 0, \quad \frac{\partial H(du)}{\partial du_3} = 0.$$

Elles expriment la condition nécessaire et suffisante pour que la forme ternaire $H(du)$ ait son déterminant nul.

La proposition est donc démontrée.

L'introduction de nouvelles hypothèses, concernant les dérivées partielles d'ordre supérieur des équations $f = 0$ et $\varphi = 0$, permettrait de concevoir et d'étudier les droites multiples d'ordre p d'une congruence, caractérisées par la propriété générale que :

Dans toute congruence ayant une droite multiple d'ordre p, il existe, en général, $2p$ droites infiniment voisines de la droite multiple et la rencontrant.

44. Les singularités des surfaces réglées s'étudient par les mêmes méthodes. Soient $f = 0$, $\varphi = 0$, $\psi = 0$ les équations d'une surface réglée.

Posons encore

$$U_i = \frac{\partial f}{\partial u_i}, \qquad V_i = \frac{\partial \varphi}{\partial u_i}, \qquad W_i = \frac{\partial \psi}{\partial u_i},$$
$$U_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial u_i \partial u_j}, \quad V_{ij} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u_i \partial u_j}, \quad W_{ij} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial u_i \partial u_j},$$

$$U\,(du) = \Sigma U_{ij}\, du_i du_j,$$
$$V\,(du) = \Sigma V_{ij}\, du_i du_j,$$
$$W(du) = \Sigma W_{ij} du_i du_j.$$

Formons le tableau

$$\left| \begin{array}{cccc} U_1 & U_2 & U_3 & U_4 \\ V_1 & V_2 & V_3 & V_4 \\ W_1 & W_2 & W_3 & W_4 \end{array} \right|.$$

Si l'on suppose nuls tous les déterminants à neuf termes contenus dans ce tableau, cela signifie qu'on peut trouver des constantes λ, μ, ν qui soient telles que les quantités

$$R_i = \lambda U_i + \mu V_i + \nu W_i \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

soient toutes nulles.

Ce qui signifie, en général, que les couples focaux d'une quelconque des congruences $(f = 0,\ \varphi = 0)$, $(\varphi = 0,\ \psi = 0)$, $(\psi = 0, f = 0)$ appartiennent aux complexes $\psi = 0$, $f = 0$, $\varphi = 0$, ou que chacun de ces complexes est tangent à celle des trois congruences qu'il ne contient pas; à moins toutefois que la droite (u) ne soit multiple dans l'une des congruences ou même dans l'un des complexes. D'ailleurs, tout ce que nous allons dire est applicable à ce cas, en admettant que une ou deux des quantités λ, μ, ν aient des valeurs nulles. Mais nous supposons essentiellement qu'il n'y ait pas plus d'un système de valeurs de λ, μ, ν satisfaisant aux conditions énoncées, de sorte que les équations

$$(1) \qquad \Sigma U_i du_i = 0, \quad \Sigma V_i du_i = 0, \quad \Sigma W_i du_i = 0$$

se réduisent toujours à *deux* équations distinctes

$$(1') \qquad \Sigma P_i du_i = 0, \quad \Sigma Q_i du_i = 0.$$

Nous remarquons que, si toutes les quantités R_i sont nulles, le déterminant que nous avions désigné par I est nul ; la droite (u) s'offre comme singulière sur la surface ; mais, si nous remarquons que, en différentiant deux fois

$$\lambda f + \mu\varphi + \nu = 0,$$

on trouve

$$\Sigma R_i d^2 u_i + R(du) = 0,$$

où l'on a posé

$$R(du) = \Sigma R_{ij} du_i du_j$$

et

$$R_{ij} = \lambda U_{ij} + \mu V_{ij} + \nu W_{ij},$$

comme $R_i = 0$, il reste

$$R(du) = 0. \tag{2}$$

Les équations (1′) et (2) définissent deux corrélations anharmoniques sur la droite (u), ce qui prouve qu'il y a deux manières de déplacer une droite en s'écartant de la droite (u) pour décrire la surface.

La droite (u) est une droite double de la surface.

En chaque point de cette droite double la surface a deux plans tangents, et les deux corrélations trouvées donnent ces deux plans. Inversement : tout plan mené par la droite touche la surface en deux points de cette droite, et ces deux points sont donnés par les deux corrélations.

45. On peut introduire l'hypothèse que ces deux corrélations coïncident et concevoir ainsi une singularité analogue au rebroussement des courbes.

On exprimera cette hypothèse en écrivant que, si des équations (1′) on tire les valeurs de deux différentielles (du_4 et du_3 par exemple), la forme binaire $R(du)$, qui résulte de la substitution, est un carré parfait, c'est-à-dire a un discriminant nul. C'est ce qu'exprime le contrevariant double

$$\begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & R_{14} & P_1 & Q_1 \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & R_{24} & P_2 & Q_2 \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & R_{34} & P_3 & Q_3 \\ R_{41} & R_{42} & R_{43} & R_{44} & P_4 & Q_4 \\ P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & 0 & 0 \\ Q_1 & Q_2 & Q_3 & Q_4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Il nous importe de reconnaître à quel fait dans la situation respective des complexes $f=0$, $\varphi=0$, $\psi=0$ correspond cette hypothèse. Nous allons faire voir que dans ce cas :

Un quelconque des trois complexes est tangent suivant deux droites consécutives à la congruence qu'il ne contient pas.

Prenons en effet les équations

$$\lambda'(U_i+\delta U_i)+\mu'(V_i+\delta V_i)+\nu'(W_i+\delta W_i)=0,$$

où λ', μ', ν' sont des constantes et qui expriment le contact suivant la droite $(u+\delta u)$; comme on a

$$\lambda U_i+\mu V_i+\nu W_i=0,$$

il en résulte

$$\varepsilon' U_i+\varepsilon'' V_i+\varepsilon''' W_i+\lambda\,\delta U_i+\mu\,\delta V_i+\nu\,\delta W_i=0, \tag{3}$$

où l'on a désigné par ε', ε'', ε''' les différences $\lambda'-\lambda$, $\mu'-\mu$, $\nu'-\nu$.

Or on remarque que

$$\lambda\,\delta U_i+\mu\,\delta V_i+\nu\,\delta W_i=\frac{1}{2}\frac{\partial R(\delta u)}{\partial\,\delta u_i};$$

les équations comprises dans le type (3) s'écrivent donc

$$\frac{1}{2}\frac{\partial R(\delta u)}{\partial\,\delta u_i}+\varepsilon' U_i+\varepsilon'' V_i+\varepsilon''' W_i=0;$$

mais l'on sait qu'à cause de l'équation $R_i=0$, $\varepsilon' U_i+\varepsilon'' V_i+\varepsilon''' W_i$ est égal à une fonction linéaire de P_i et de Q_i ; on a donc

$$\frac{\partial R(\delta u)}{\partial\,\delta u_i}+\alpha P_i+\beta Q_i=0, \tag{3'}$$

où α et β sont deux constantes. Mais on doit avoir aussi

$$\Sigma P_i\,\delta u_i=0,\quad \Sigma Q_i\,\delta u_i=0 \tag{4}$$

et

$$R(\delta u)=0. \tag{5}$$

On voit que l'équation (5) est une conséquence des équations (3′) et (4). Pour qu'il y ait contact suivant la droite $(u+\delta u)$, il est donc nécessaire et suffisant que les équations (3′) et (4) aient un système de solutions communes, c'est-à-dire que le discriminant doublement bordé avec les P_i et les Q_i soit nul.

Les droites multiples d'ordre p d'une surface réglée s'obtiendraient d'une manière analogue à celle qui nous a fourni les droites doubles; il suffirait de faire porter les hypothèses sur les dérivées d'ordre supérieur.

46. Avant de terminer ce qui a trait aux singularités, nous pouvons faire observer : 1° qu'un complexe peut avoir une congruence ou une surface de droites multiples; 2° qu'une congruence peut avoir une surface de droites multiples.

Si l'on suppose, par exemple, qu'il s'agisse de droites doubles, on peut démontrer les propositions suivantes :

1° Dans le cas d'un complexe ayant une congruence de droites doubles, le réseau quadratique relatif à chacune des droites doubles se décompose en deux réseaux linéaires, et les couples communs aux deux corrélations focales de ces réseaux sont les couples focaux de la congruence des droites doubles.

2° Dans le cas d'un complexe ayant une surface de droites doubles, le réseau quadratique relatif à chacune des droites doubles est singulier, c'est-à-dire que son discriminant est nul. Dans l'espace non euclidien représentatif, il lui correspond une quadrique infiniment aplatie dont le plan représente une corrélation. Cette corrélation est la corrélation de Chasles pour la surface de droites doubles.

3° Enfin, dans le cas d'une congruence ayant une surface de droites doubles, la série quadratique se décompose en deux séries linéaires ayant une corrélation anharmonique commune; cette corrélation est la corrélation de Chasles, relative à la surface des droites doubles.

Ce que nous venons de dire sur les singularités nous suffira pour le but que nous nous proposons.

V. — Sur les systèmes de coordonnées des lignes droites.

47. Dès le début de ce travail, nous nous sommes placé à un point de vue général en ce qui concerne les coordonnées des lignes droites. Il est aisé de concevoir que, par un choix convenable de ces coordon-

nées, on puisse faire prendre aux résultats généraux que nous avons trouvés des formes diverses.

Ainsi, par exemple, si l'on considère la corrélation anharmonique qui, sur une droite Oz, a pour équation

$$z - \zeta = K \operatorname{tang}(\theta - \alpha),$$

on voit que (ζ, α) sont les coordonnées du point central et du plan central de la corrélation. Si l'on cherche la condition d'involution avec la corrélation

$$z' = A \operatorname{tang}\theta',$$

on trouve la relation, remarquable par sa simplicité,

$$A + K + \zeta \operatorname{tang}\alpha = 0.$$

Appliquée aux propriétés infinitésimales du premier ordre des complexes, cette formule en est la traduction métrique.

Elle fait connaître le paramètre de distribution des corrélations du complexe quand on connaît leur point central et leur plan central.

48. Également pour les congruences.

Veut-on trouver pour expression des propriétés infinitésimales du premier ordre des congruences la relation angulaire de Sturm : il suffit de prendre a, b, p, q pour coordonnées de la ligne droite.

On peut supposer que Oz est une droite du système. Par un point $A(dx, dy, z)$ infiniment voisin de Oz, il passe une droite [A] infiniment voisine de Oz. Soient da, db, dp, dq les coordonnées de cette droite; on a

$$dx = z\,da + dp,$$
$$dy = z\,db + dq.$$

Les équations de la congruence donnent du reste, en général,

$$dp = p_1\,da + p_2\,db, \quad dq = q_1\,da + q_2\,db,$$

d'où l'on déduit, pour l'expression du moment de la droite [A] par rapport à Oz,

$$da\,dq - db\,dp = \frac{q_1\,dx^2 + (q_2 - p_1)\,dx\,dy - p_2\,dy^2}{z^2 + (p_1 + q_2)z + p_1 q_2 - p_2 q_1}.$$

Cette expression de la forme fondamentale conduit immédiatement au théorème de Sturm. Appelons ε l'angle de la droite [A] avec le plan zOA, et posons

$$dx = \rho\cos\varphi, \quad dy = \rho\sin\varphi,$$

où ρ désigne la distance du point A à la droite Oz; on a

$$\sin\varepsilon \text{ ou } \varepsilon = \frac{da\,dq - db\,dp}{\rho},$$

donc

$$\frac{\varepsilon}{\rho} = \frac{da\,dq - db\,dp}{\rho^2} = \frac{q_1\cos^2\varphi + (q_2 - p_1)\cos\varphi\sin\varphi - p_2\sin^2\varphi}{z^2 + (p_1 + q_2)z + p_1q_2 - p_2q_1}.$$

Un second point A', pris dans le plan mené par A perpendiculairement à Oz, donne l'équation analogue (où ε', ρ', φ' désignent les quantités analogues à ε, ρ, φ),

$$\frac{\varepsilon'}{\rho'} = \frac{q_1\cos^2\varphi' + (q_2 - p_1)\cos\varphi'\sin\varphi' - p_2\sin^2\varphi'}{z^2 + (p_1 + q_2)z + p_1q_2 - p_2q_1},$$

et en ajoutant

$$\frac{\varepsilon}{\rho} + \frac{\varepsilon'}{\rho'} = \frac{q_1(\cos^2\varphi + \cos^2\varphi') + (q_2 - p_1)(\cos\varphi\sin\varphi + \cos\varphi'\sin\varphi') - p_2(\sin^2\varphi + \sin^2\varphi')}{z^2 + (p_1 + q_2)z + p_1q_2 - p_2q_1}.$$

Désignons par P le point où Oz est rencontrée par le plan qui lui est perpendiculaire et qui contient les points A et A'. Si les droites PA, PA' sont rectangulaires, il est clair que

$$\varphi - \varphi' = \frac{\pi}{2};$$

la formule précédente devient

$$(f) \qquad \frac{\varepsilon}{\rho} + \frac{\varepsilon'}{\rho'} = \frac{q_1 - p_2}{z^2 + (p_1 + q_2)z + p_1q_2 - p_2q_1}.$$

Si dans cette dernière relation on suppose z constant, on obtient une proposition un peu plus générale que celle de Sturm, et exprimée par l'équation

$$\frac{\varepsilon}{\rho} + \frac{\varepsilon'}{\rho'} = \text{const.}$$

Il est aisé de voir que les racines de l'équation

$$z^2 + (p_1 + q_2)z + p_1 q_2 - p_2 q_1 = 0$$

sont les coordonnées z_1 et z_2 des foyers; de sorte que, si l'on désigne par F_1 et F_2 ces foyers, le dénominateur de l'expression de la constante est le produit $PF_1\,PF_2$.

M. Kummer a introduit la quantité

$$\frac{1}{PF_1\,PF_2}$$

dans la théorie des congruences, sous le nom de *mesure de la densité*. Si l'on désigne par Θ cette mesure, on a pour expression de la constante de Sturm

$$(q_1 - p_2)\Theta.$$

Voici donc le théorème de Sturm généralisé, tel qu'il résulte de la formule (f).

En un point P *d'une droite* Δ *d'un pinceau* (*congruence élémentaire*), *on élève deux perpendiculaires* PA, PA′ *à cette droite rectangulaires entre elles, on s'écarte sur ces perpendiculaires à partir du point* P *de quantités* $PA = \rho$, $PA' = \rho'$, *et l'on désigne par* ε *et* ε' *les angles infiniment petits que font respectivement avec les plans* $A\Delta$, $A'\Delta$ *les droites du système qui passent par les points* A *et* A′.

1° *La somme des rapports* $\frac{\varepsilon}{\rho}$, $\frac{\varepsilon'}{\rho'}$ *est constante quand, le point* P *restant fixe, les droites* PA *et* PA′ *restent rectangulaires entre elles et avec* Δ.

2° *Lorsque le point* P *se meut sur la droite* Δ, *la valeur de la constante reste toujours proportionnelle à la mesure de la densité au point* P.

L'équation

$$\frac{\varepsilon}{\rho} + \frac{\varepsilon'}{\rho'} = (q_1 - p_2)\Theta,$$

qui exprime le théorème précédent, permet encore de faire voir le lien qui rattache la proposition de Sturm à une proposition de M. Bertrand, concernant les congruences formées des normales à une même surface.

En effet, il est presque évident que les angles α_1 et α_2 que font avec le plan zOx les plans focaux du pinceau sont donnés par l'équation

$$q_1 \cos^2\varphi + (q_2 - p_1)\cos\varphi \sin\varphi - p_2 \sin^2\varphi = 0.$$

Or la condition nécessaire et suffisante pour que $\tang\alpha_1 \tang\alpha_2 = -1$, c'est-à-dire pour que les plans focaux soient rectangulaires, est la suivante :

$$q_1 - p_2 = 0.$$

Elle exprime que la constante de Sturm est toujours nulle.

Mais, pour qu'une congruence soit formée des normales à une même surface, il faut et il suffit que les couples focaux soient rectangulaires pour toute droite du système; donc enfin :

Pour qu'une congruence soit formée de normales à une même surface, il faut et il suffit que la constante de Sturm soit nulle pour toutes les droites du système, pourvu qu'on ne suppose pas qu'un des foyers soit constamment à l'infini.

C'est, sous une autre forme, la proposition de M. Bertrand.

VI. — Représentation linéaire des surfaces.

49. C'est encore par une considération analogue, c'est-à-dire par l'étude d'une congruence à l'aide d'un système particulier de coordonnées, qu'on peut rattacher aux théories précédentes la transformation célèbre d'Ampère.

Dans le cours professé à la Sorbonne durant l'hiver 1881-1882, M. Darboux a fait voir que la transformation d'Ampère conduisait, pour les surfaces transformées, à une équation des lignes asymptotiques privées du terme en $dx\,dy$.

Sur ses indications bienveillantes, nous avons cherché si les principes que nous venons d'exposer ne contenaient pas la raison générale de ce fait. Rien de plus aisé, tout d'abord, que de reconnaître que la transformation de contact trouvée par Ampère établit une correspondance entre les couples (a, α) d'une surface, et ceux d'une droite I située à l'infini, dans l'un des plans zOx ou zOy, selon que l'on prend

p ou q pour variable indépendante. D'ailleurs, cette correspondance s'établit géométriquement ainsi qu'il suit; et pour généraliser tout de suite nous traiterons I comme une droite à distance finie.

Au point a de la surface, menons le plan tangent α; ce plan coupe au point p la droite I; par la droite I et le point a, on mène un plan ϖ; d'après nos notations, (p, ϖ) est un couple de la droite I : c'est celui qui correspond au couple (a, α) de la surface.

La droite pa engendre donc une congruence dans laquelle une des nappes de la surface focale se réduit à la droite I. Les deux séries de développables de la surface sont ici : 1° les cônes circonscrits à la surface suivant des courbes S et dont les sommets sont sur I; 2° les tangentes aux sections planes R faites par des plans passant par la même droite I.

D'après la théorie générale, et comme cela est presque évident ici, les courbes R et S forment sur la surface que l'on considère deux réseaux conjugués.

Nous avons donc là un moyen de tracer sur une surface quelconque, et sans intégration, deux réseaux conjugués.

Supposons que ζ et λ soient deux paramètres qui fixent, le premier, la position du point p sur la droite I, le second, celle du plan ϖ autour de la même droite. Si l'on prend pour variables indépendantes ζ et λ, et qu'on exprime les coordonnées d'un point quelconque de la surface en fonction de ces paramètres, les courbes S et R auront respectivement pour équations

$$\zeta = \text{const}, \quad \lambda = \text{const}.$$

Or l'équation des lignes asymptotiques sera alors la suivante :

$$A\,d\zeta^2 + 2B\,d\zeta\,d\lambda + C\,d\lambda^2 = 0;$$

les directions $(d\zeta, d\lambda)$, $(\delta\zeta, \delta\lambda)$ sont conjuguées si l'équation suivante est vérifiée,

$$(A\,d\zeta + B\,d\lambda)\,d\zeta + (B\,d\zeta + C\,d\lambda)\,\delta\lambda = 0.$$

Nous devons exprimer que $d\zeta = 0$, $\delta\lambda = 0$ sont deux directions conjuguées, ce qui donne

$$B = 0.$$

Donc, l'équation des lignes asymptotiques est ici

$$A\,d\zeta^2 + C\,d\lambda^2 = 0.$$

On voit bien qu'elle ne contient pas le rectangle.

50. Ces considérations nous ont conduit à un choix particulier de variables indépendantes dans les surfaces dont l'emploi ne serait peut-être pas sans utilité. Supposons que I ait été pris pour axe Oz; une droite quelconque du complexe spécial dont I est l'axe a pour équation

$$(1) \qquad y = \lambda x, \quad z = \zeta - \mu x.$$

Si l'on envisage la congruence des droites de ce complexe tangentes à une surface, les coordonnées ζ, λ, μ de ces droites sont liées par une équation

$$F(\zeta, \lambda, \mu) = 0.$$

Réciproquement, toute équation de cette forme définit une congruence de ce complexe spécial, et, tant que μ entre dans l'équation, on a une surface focale effective qui se trouve ainsi représentée par cette équation.

On peut l'écrire

$$(2) \qquad \mu = f(\zeta, \lambda).$$

Il est aisé de trouver l'expression des coordonnées du couple (a, α) qui correspond sur la surface représentée par l'équation (2) au couple (ζ, λ) de la droite Oz. Faisons d'abord λ constant, en adjoignant aux équations (1) la suivante

$$(3) \qquad d\zeta - x\,d\mu = 0;$$

on a le point où la droite (1) touche la surface.

Posons

$$\frac{\partial \mu}{\partial \zeta} = P, \quad \frac{\partial \mu}{\partial \lambda} = Q;$$

on a, puisque ici $d\lambda = 0$,

$$d\mu = P\,d\zeta.$$

Le point a a donc pour coordonnées

$$(a) \qquad x = \frac{1}{P}, \quad y = \frac{\lambda}{P}, \quad z = \zeta - \frac{\mu}{P}.$$

Le plan α est tangent au cône circonscrit dont $(0, 0, \zeta)$ sont les coordonnées du sommet : en prenant, avec Monge, pour coordonnées de ce plan, p, q, u, auquel cas il a pour équation

$$z = px + qy + u,$$

on trouve

$$(\alpha) \qquad p = -\mu + \lambda Q, \quad q = -Q, \quad u = \zeta.$$

Le couple $(a\alpha)$ est ainsi complètement défini.

51. Formons l'expression

$$\delta p\, dx + \delta q\, dy;$$

des réductions conduisent à l'expression simple

$$\frac{1}{P}(dP\,\delta\zeta - d\lambda\,\delta Q).$$

Nous poserons

$$R = \frac{\partial^2 \mu}{\partial \zeta^2}, \quad S = \frac{\partial^2 \mu}{\partial \zeta\, \partial \lambda}, \quad T = \frac{\partial^2 \mu}{\partial \lambda^2};$$

on a

$$dP = R\, d\zeta + S\, d\lambda, \quad \delta Q = S\,\delta\zeta + T\,\delta\lambda;$$

il vient donc

$$\delta p\, dx + \delta q\, dy = \frac{1}{P}(R\, d\zeta\,\delta\zeta - T\, d\lambda\,\delta\lambda).$$

L'équation des lignes asymptotiques est donc simplement

$$R\, d\zeta^2 - T\, d\lambda^2 = 0.$$

Cette forme permet, dans une infinité de cas, d'intégrer complètement l'équation des lignes asymptotiques, ou de la ramener aux quadratures.

52. Supposons, par exemple, qu'on prenne les surfaces

$$z = A x^\alpha y^\beta$$

où A, α, β sont des constantes quelconques. On trouve que l'équation correspondante entre λ, μ, ζ a la forme

$$\mu = A' \zeta^p \lambda^q.$$

L'équation des lignes asymptotiques est

$$p(p-1)\left(\frac{d\zeta}{\zeta}\right)^2 = q(q-1)\left(\frac{d\lambda}{\lambda}\right)^2,$$

qui a pour intégrale

$$\zeta^{\pm\sqrt{p(p-1)}}\lambda^{\pm\sqrt{q(q-1)}} = \text{const.}$$

La condition de réalité des lignes asymptotiques est la suivante

$$pq(p-1)(q-1) > 0,$$

ou, comme A, α, β, A′, p, q sont liés par les équations

$$A'pA^{p-1} = \left(\frac{p-1}{p}\right)^{p-1}, \quad \alpha(p-1) = q-1, \quad \beta(p-1)+q = 0,$$

on en déduit, pour la condition de réalité,

$$\alpha\beta(\alpha+\beta-1) > 0.$$

On constate ainsi, par exemple, que les lignes asymptotiques des surfaces

$$x^l y^m z^n = k,$$

où l, m, n sont des nombres entiers positifs, ne sont jamais réelles.

53. L'application de la même représentation aux surfaces de révolution conduit à ce résultat que la recherche des lignes asymptotiques d'une surface de révolution se ramène toujours aux quadratures.

Voici comment : supposons que Oz soit l'axe de révolution, et que l'équation qui exprime que la droite

$$z = \zeta + x\,\mathrm{tang}\,\theta$$

du plan des zOx touche la méridienne soit

$$f(\zeta, -\mathrm{tang}\,\theta) = 0,$$

l'angle θ que fait avec Oz la droite

$$y = \lambda x, \quad z = \zeta - \mu x$$

ayant pour tangente $\dfrac{-\mu}{\sqrt{1+\lambda^2}}$.

L'équation qui répond à la surface de révolution est la suivante

$$f\left(\zeta, \frac{\mu}{\sqrt{1+\lambda^2}}\right) = 0,$$

ou, en posant

$$\mu = \rho\sqrt{1+\lambda^2},$$

on a

$$f(\zeta, \rho) = 0;$$

du reste,

$$\frac{\partial^2 \mu}{\partial \zeta^2} = \rho'' \sqrt{1+\lambda^2}, \quad \frac{\partial^2 \mu}{\partial \lambda^2} = \frac{\rho}{(1+\lambda^2)^{\frac{3}{2}}};$$

on a posé

$$\frac{d^2 \rho}{d\zeta^2} = \rho''.$$

L'équation des lignes asymptotiques est ainsi

$$\pm\sqrt{\frac{\rho''}{\rho}}\, d\zeta = \frac{d\lambda}{1+\lambda^2},$$

ou

$$\operatorname{arc\,tang} \lambda = \pm \int \sqrt{\frac{\rho''}{\rho}}\, d\zeta.$$

Comme ρ est une fonction de ζ définie par l'équation $f(\zeta, \rho) = 0$, le problème est bien ramené aux quadratures.

Ce résultat est, du reste, bien connu; mais il est peut-être curieux qu'on puisse le déduire d'une transformation analogue à celle d'Ampère.

On voit que, lorsque la méridienne est algébrique, l'équation s'intégrera généralement par les fonctions abéliennes.

Le cas le plus étendu où le problème général des lignes asymptotiques se ramène immédiatement aux quadratures est celui où R et T sont de la forme

$$\varphi(\zeta, \lambda)\, g_1(\zeta)\, g_2(\lambda),$$
$$\varphi(\zeta, \lambda)\, h_1(\zeta)\, h_2(\lambda);$$

car, dans ce cas, les variables se séparent.

54. Lorsqu'on envisage une corrélation supérieure sur la droite Oz, il lui correspond sur la surface une courbe.

Par exemple, à une corrélation anharmonique quelconque il correspond une courbe telle que, si par quatre quelconque de ses points on mène des plans contenant Oz, et les plans tangents à la surface en ces points, le rapport anharmonique des quatre premiers plans est égal à celui des points suivant lesquels Oz est rencontré par les plans tangents à la surface.

Si la surface est réglée, il est clair que chaque génération rectiligne sera représentée par une corrélation anharmonique.

Supposons, s'il est possible, qu'une ligne asymptotique soit représentée par une corrélation anharmonique.

Cette courbe jouira de la propriété suivante :

Si par quatre quelconque de ses points on mène quatre plans contenant la droite Oz *et les plans osculateurs en ces points, le rapport anharmonique des quatre premiers plans égale celui des points suivant lesquels* Oz *est rencontré par les plans osculateurs.*

Nous sommes ainsi conduit à définir une classe curieuse de courbes, dont nous allons chercher l'équation différentielle. Nous dirons, pour abréger, que la droite Oz est l'axe anharmonique d'une telle courbe.

Prenons pour variable indépendante une quantité quelconque t; en désignant par x', x'', ... les dérivées des coordonnées, le plan osculateur a pour équation

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} = 0.$$

Appelons z_0 le z du point où il coupe l'axe anharmonique Oz; on a

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} - z_0 \begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix} = 0.$$

Mais on a, α, β, γ, δ désignant des constantes,

$$z_0 = \frac{\alpha x + \beta y}{\gamma x + \delta y};$$

de là l'équation différentielle des courbes ayant Oz pour axe anharmonique

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} - \frac{\alpha x + \beta y}{\gamma x + \delta y} \begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix} = 0.$$

Nous allons, pour intégrer cette équation, effectuer une transformation qui revient à prendre pour axe anharmonique la droite de l'infini du plan $z=0$.

Posons

$$x_1 = \frac{1}{x}, \quad y_1 = \frac{z}{x}, \quad z_1 = \frac{y}{x}$$

et regardons x_1, y_1, z_1 comme des coordonnées rectilignes ordinaires. A la droite $x=0$, $y=0$ correspond la droite de l'infini du plan $z_1=0$.

Cherchons l'équation différentielle des courbes admettant la droite à l'infini du plan $z_1=0$ pour axe anharmonique. Prenons z_1 pour variable indépendante. La valeur de z_1 définit un plan parallèle au plan $z_1=0$, et, par conséquent, passant par l'axe anharmonique. La trace du plan osculateur

$$-y''_1(X_1-x_1)+x''_1(Y_1+y_1)+\ldots=0,$$

sur la droite à l'infini du plan $z_1=0$, est donnée par la valeur du rapport $\frac{y''_1}{x''_1}$. On a donc, a, b, p, q étant des constantes,

$$\frac{ax''_1+by''_1}{px''_1+qy''_1}=z_1;$$

c'est l'équation différentielle cherchée. En posant

$$ax_1+by_1=z_1 F'(z_1)-2F(z_1),$$

où $F(z_1)$ est une fonction arbitraire, on trouve

$$ax''_1+by''_1=z_1 F'''(z_1);$$

donc

$$px''_1+qy''_1=F'''(z_1),$$

d'où

$$px_1+qy_1=F'(z_1)+\lambda z_1+\mu.$$

Mais on peut faire rentrer λz_1 dans $F'(z_1)$, et on a finalement l'intégrale générale

$$ax_1+by_1=z_1F'(z_1)-2F(z_1), \quad px_1+qy_1=F'(z_1)+\mu.$$

En remplaçant x_1, y_1, z_1 par

$$x_1 = \frac{1}{x}, \quad y_1 = \frac{z}{x}, \quad z_1 = \frac{y}{x},$$

on aura les équations générales des courbes qui admettent Oz pour axe, c'est-à-dire l'intégrale de l'équation

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} - \frac{\alpha x + \beta y}{\gamma x + \delta y} \begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix} = 0.$$

55. Revenons aux surfaces dans lesquelles les lignes asymptotiques d'une série S_1 sont des courbes ayant un même axe anharmonique, qu'on peut supposer confondu avec l'axe Oz des coordonnées.

Ces surfaces jouissent d'une propriété intéressante, qu'on peut envisager comme une généralisation d'une fort belle propriété des lignes asymptotiques d'une surface réglée.

Nous appellerons *rapport anharmonique* de quatre points A, B, C, D d'une courbe ayant Oz pour axe anharmonique le rapport anharmonique des quatre plans menés par Oz et ces points, ou des quatre points de rencontre de Oz avec les plans osculateurs en ces points.

Si une des séries S_1 de lignes asymptotiques d'une surface se compose de courbes ayant même axe anharmonique Oz, l'équation

$$R\, d\zeta^2 - T\, d\lambda^2 = 0$$

admet une intégrale de la forme

$$\zeta = m \frac{\lambda - a}{\lambda - b},$$

où m, a, b sont des fonctions d'un même paramètre ρ, qui est constant pour chaque ligne asymptotique de la série S_1. D'ailleurs, on a généralement

$$\text{(E)} \quad d\zeta = \frac{m(a-b)}{(\lambda-b)^2}\, d\lambda + \frac{m'(\lambda-a)(\lambda-b) - m[a'(\lambda-b) - b'(\lambda-a)]}{(\lambda-b)^2}\, d\rho.$$

Désignons par $(d'\lambda, d'\zeta)$, $(d''\lambda, d''\zeta)$ les variations relatives aux lignes asymptotiques qui se croisent en un point; on a

$$\frac{d'\zeta}{d'\lambda}+\frac{d''\zeta}{d''\lambda}=0;$$

car les courbes $d\lambda=0$, $d\zeta=0$ sont conjuguées sur la surface. Mais les lignes asymptotiques de la série S_1 donnent

$$\frac{d'\zeta}{d'\lambda}=\frac{m(a-b)}{(\lambda-b)^2};$$

on aura donc, pour celles de la seconde série S_2,

$$\frac{d''\zeta}{d''\lambda}=-\frac{m(a-b)}{(\lambda-b)^2},$$

ou, en supprimant les accents,

$$\frac{d\zeta}{d\lambda}=-\frac{m(a-b)}{(\lambda-b)^2}.$$

Or, de l'équation (E) on tire

$$\frac{d\zeta}{d\lambda}=\frac{m(a-b)}{(\lambda-b)^2}+\frac{m'(\lambda-a)(\lambda-b)-m[a'(\lambda-b)-b'(\lambda-a)]}{(\lambda-b)^2}\frac{d\rho}{d\lambda};$$

donc, enfin,

$$2m(a-b)\frac{d\lambda}{d\rho}+m'(\lambda-a)(\lambda-b)-m[a'(\lambda-b)-b'(\lambda-a)]=0.$$

En remarquant que a, b, m sont des fonctions de ρ, on a une équation de la forme

$$\frac{d\lambda}{d\rho}+g(\rho)\lambda^2+h(\rho)\lambda+k(\rho)=0:$$

c'est une équation de Riccati.

De là ce premier résultat, que les lignes asymptotiques de la série S_2, ainsi que celles d'une surface réglée, dépendent d'une équation de Riccati. Soient

$$f_1(\rho),\ f_2(\rho),\ f_3(\rho),\ f_4(\rho)$$

quatre solutions de cette équation, et

$$\lambda=f_1(\rho),\quad \lambda=f_2(\rho),\quad \lambda=f_3(\rho),\quad \lambda=f_4(\rho)$$

les équations en coordonnées λ et ρ de quatre lignes asymptotiques de la seconde série S_2. Faisons

$$\rho = \rho_0.$$

Cela revient à chercher les quatre points A_1, A_2, A_3, A_4, où une même ligne asymptotique de la première série est coupée par ces quatre lignes asymptotiques fixes. Or le rapport anharmonique de ces quatre points est égal au rapport anharmonique des quatre valeurs de λ qui lui correspondent, c'est-à-dire à

$$\frac{f_1(\rho_0)-f_2(\rho_0)}{f_1(\rho_0)-f_4(\rho_0)} : \frac{f_3(\rho_0)-f_2(\rho_0)}{f_3(\rho_0)-f_4(\rho_0)};$$

et c'est une propriété caractéristique de l'équation de Riccati que ce rapport anharmonique soit indépendant de ρ_0. Donc :

Une surface étant donnée, dans laquelle les lignes asymptotiques d'une série S_1 *ont un même axe anharmonique, le rapport anharmonique des quatre points suivant lesquels quatre lignes asymptotiques fixes de la seconde série* S_2 *coupent une quelconque des lignes asymptotiques de la série* S_1 *est constant.*

VII. — Étude particulière d'un système quadruplement orthogonal.

56. Nous avons, dès le début, trouvé pour expression du cosinus de l'angle de deux corrélations t, t'

$$\cos(t, t') = \frac{1}{2} \frac{\sum \frac{\partial M}{\partial t_i} t'_i}{\sqrt{M(t)\, M(t')}}.$$

En particulier, le cosinus de l'angle de deux corrélations coordonnées, c'est-à-dire de deux corrélations pour chacune desquelles toutes les coordonnées sont nulles, sauf une (t_α pour l'une, t'_β pour l'autre), ce cosinus a pour expression

$$\cos(\alpha, \beta) = \frac{M_{\alpha\beta}}{\sqrt{M_{\alpha\alpha} M_{\beta\beta}}}.$$

Nous poserons

$$M_{\alpha\alpha} = m_\alpha^2;$$

on a ainsi

$$\begin{aligned}
\mathrm{M}(du) = {} & m_1^2 du_1^2 + m_2^2 du_2^2 + m_3^2 du_3^2 + m_4^2 du_4^2 \\
& + 2 m_1 m_2 du_1 du_2 \cos(1, 2) + 2 m_1 m_3 du_1 du_3 \cos(1, 3) \\
& + 2 m_1 m_4 du_1 du_4 \cos(1, 4) + 2 m_2 m_3 du_2 du_3 \cos(2, 3) \\
& + 2 m_2 m_4 du_3 du_4 \cos(2, 4) + 2 m_3 m_4 du_3 du_4 \cos(3, 4).
\end{aligned}$$

Des considérations analogues à celles que M. Somoff a développées dans sa *Cinématique* (*Theoretische Mechanik*, Ire Partie, p. 147) nous permettraient de puiser dans l'expression précédente une série d'analogies nouvelles, entre le moment élémentaire et le carré de la distance de deux points consécutifs.

Mais nous supposerons, tout de suite, que $\mathrm{M}(du)$ soit privée des rectangles, ce qui est la condition nécessaire et suffisante pour que les corrélations coordonnées soient orthogonales deux à deux. Une substitution linéaire permet toujours cette réduction *pour une droite déterminée* de l'espace, car, dans l'espace non euclidien représentatif, il y a une infinité de tétraèdres conjugués par rapport à la quadrique fondamentale.

L'angle de deux corrélations a, dans ce cas, pour cosinus

$$\cos(t, t') = \frac{\Sigma m_i^2 t_i t_i'}{\sqrt{\Sigma m_i^2 t_i^2 \, \Sigma m_i^2 t_i'^2}}.$$

En particulier,

$$\cos(t, \alpha) = \frac{m_i t_\alpha}{\sqrt{\Sigma m_i^2 t_i^2}},$$

d'où l'on déduit

$$\begin{aligned}
\cos(t, t') = {} & \cos(t, 1)\cos(t', 1) + (\cos t, 2)\cos(t', 2) \\
& + \cos(t, 3)\cos(t', 3) + \cos(t, 4)\cos(t', 4).
\end{aligned}$$

De là ce théorème :

Le cosinus de l'angle de deux corrélations égale la somme des produits des cosinus des angles de ces corrélations avec quatre corrélations orthogonales deux à deux.

En particulier, si $t' = t$,

$$1 = \cos^2(t, 1) + \cos^2(t, 2) + \cos^2(t, 3) + \cos^2(t, 4).$$

La somme des carrés des cosinus des angles d'une corrélation, avec quatre corrélations orthogonales deux à deux, est égale à l'unité.

57. Il n'est généralement pas vrai que, si un système de coordonnées réduit la forme $M(du)$ pour une *droite déterminée* à ne contenir que les carrés des différentielles, cette réduction s'étende à toutes les droites de l'espace.

Mais on peut se proposer de savoir si de tels systèmes existent.

Les hypothèses portant sur les coefficients de la forme quadratique caractérisent les systèmes de coordonnées correspondants, et ces hypothèses, d'après les recherches générales de Riemann, Christoffel, Lipschitz, etc., sont limitées par l'existence de certaines formes covariantes qu'on déduit de la proposée par des différentiations. C'est ainsi que nous verrons qu'il n'existe pas de systèmes de coordonnées ramenant $M(du)$ à avoir des coefficients constants.

Mais il existe des coordonnées *quadruplement orthogonales*, c'est-à-dire pour lesquelles la forme quadratique est privée des rectangles des différentielles pour toutes les droites de l'espace. Dans ce cas, les équations

$$u_1 = \text{const.}, \quad u_2 = \text{const.}, \quad u_3 = \text{const.}, \quad u_4 = \text{const.}$$

représentent quatre séries de complexes, telles qu'un complexe de chaque série passe par une droite de l'espace, et que les corrélations normales de ces complexes y sont orthogonales deux à deux.

Nous allons, dans ce qui suit, étudier un système quadruplement orthogonal particulier, qui nous conduira à faire voir comment la théorie des complexes linéaires peut être déduite des recherches de M. Darboux sur le système de cercles et de sphères, et comment aussi on peut y puiser une extension de la représentation de M. Lie, des lignes droites par des sphères.

58. Prenons pour coordonnées de la ligne droite les constantes u_1, u_2, u_3, u_4 de ses équations, mises sous la forme

$$x = (u_1 + u_3\sqrt{-1})\,z - u_2 + u_4\sqrt{-1},$$
$$y = (u_2 + u_4\sqrt{-1})\,z + u_1 - u_3\sqrt{-1}.$$

La condition de rencontre de deux droites (u), (u') s'écrit symétriquement

(1) $$\Sigma(u_i - u'_j)^2 = 0.$$

En posant

$$\frac{1}{\lambda} = 1 + (u_1 + u_3\sqrt{-1})^2 + (u_2 + u_4\sqrt{-1})^2,$$

la forme fondamentale a pour expression

$$M(du) = \lambda\,\Sigma\,du_i^2.$$

Le système de coordonnées que nous considérons est donc quadruplement orthogonal.

L'équation générale des complexes linéaires, dans ce système de coordonnées, prend la forme

(2) $$\Sigma(u_i - a_i)^2 - R^2 = 0.$$

Dans le système de coordonnées qui nous occupe, un complexe linéaire s'offre donc comme *une sphère dans un espace à quatre dimensions*.

M. Klein, par un procédé différent, est arrivé à un résultat analogue.

Cette remarque permet de rattacher aux travaux sur les systèmes de cercles et de sphères les propriétés des complexes linéaires.

En faisant $R^2 = 0$, les équations (1) et (2) coïncident. Un *complexe spécial* s'offre ainsi comme une sphère de rayon nul.

59. L'équation générale des complexes linéaires qui admettent pour conjuguées deux droites (u') et (u'') est évidemment la suivante

(3) $$\lambda\,\Sigma(u_i - u'_i)^2 + \mu\,\Sigma(u_i - u''_i)^2 = 0.$$

En identifiant (2) et (3), on aura la condition pour que les droites (u') et (u'') soient conjuguées par rapport au complexe linéaire (3). On trouve ainsi

$$\frac{\lambda + \mu}{1} = \frac{\lambda\,u'_i + \mu\,u''_i}{a_i} = \frac{\lambda\,\Sigma\,u'^2_i + \mu\,\Sigma\,u''^2_i}{\Sigma\,a_i^2 - R^2};$$

de ces équations on déduit sans peine les suivantes

$$\Sigma(u'_i - a_i)(u''_i - a_i) = R^2,$$
$$\lambda(u'_i - a_i) + \mu(u''_i - a_i) = 0;$$

on en tire

$$-\frac{\lambda}{\mu}\Sigma(u'_i-a_i)^2=R^2,$$

$$-\frac{\mu}{\lambda}\Sigma(u''_i-a_i)^2=R^2,$$

d'où

$$\Sigma(u'_i-a_i)^2\,\Sigma(u''_i-a_i)^2=R^4.$$

Ainsi :

La transformation par polaires réciproques, relativement à un complexe linéaire donné, s'offre comme une transformation par rayons vecteurs réciproques dans un espace à quatre dimensions.

60. Il peut être intéressant d'interpréter les valeurs infinies de u_1, u_2, u_3, u_4. Elles correspondent aux droites de l'espace qui rencontrent la droite de l'infini du plan des xOy. Ces droites forment donc un complexe spécial. Appelons I la droite à l'infini du plan des xOy; des formules précédentes, où l'on fait $u''_i=a_i$, on conclut que la droite dont a_1, a_2, a_3, a_4 sont les coordonnées est la polaire de la droite I par rapport au complexe linéaire défini par l'équation (2).

De même que le centre d'une sphère est l'élément corrélatif de l'infini, la droite (a) est l'élément corrélatif de l'infini, qui se trouve représenté ici par le complexe spécial dont I est l'axe : on peut dire que la droite (a) est la polaire de l'infini.

Lorsque le centre d'une sphère est à l'infini, on sait que son équation se réduit au premier degré. De même ici, la polaire de l'infini étant à l'infini, a_1, a_2, a_3, a_4 sont infinis, et l'équation du complexe linéaire se réduit au premier degré. Mais comme, dans ce cas, la droite I rencontre sa polaire, elle appartient au complexe.

L'équation générale des complexes linéaires qui contiennent la droite I est donc la suivante

$$\Sigma b_i u_i - C = 0.$$

Si les constantes b sont nulles, l'équation

$$C=0$$

représente l'infini, c'est-à-dire le complexe spécial des droites qui rencontrent la droite I.

61. La corrélation normale d'un complexe linéaire a pour coordonnées des quantités proportionnelles à

$$u_1 - a_1, \quad u_2 - a_2, \quad u_3 - a_3, \quad u_4 - a_4.$$

L'angle de deux complexes

$$\Sigma(u_i - a_i)^2 - \mathrm{R}^2 = 0,$$
$$\Sigma(u_i - b_i)^2 - \mathrm{R}'^2 = 0$$

a donc pour cosinus

$$\cos\theta = \frac{\Sigma(u_i - a_i)(u_i - b_i)}{\sqrt{\Sigma(u_i - a_i)^2 \Sigma(u_i - b_i)^2}};$$

en appelant *angle de deux complexes* l'angle de leurs corrélations normales.

La droite (u) appartient aux deux complexes, et, en ajoutant leurs équations, on trouve

$$2\Sigma(u_i - a_i)(u_i - b_i) = \mathrm{R}^2 + \mathrm{R}'^2 - \Sigma(a_i - b_i)^2,$$

donc

$$\cos\theta = \frac{\mathrm{R}^2 + \mathrm{R}'^2 - \Sigma(a_i - b_i)^2}{2\mathrm{RR}'}.$$

Ceci montre d'abord que *deux complexes linéaires se coupent sous le même angle suivant toutes leurs droites communes*.

La condition de contact $\theta = 0$, ou $\theta = \pi$ donne

$$(\mathrm{R} \pm \mathrm{R}')^2 - \Sigma(a_i - b_i)^2 = 0.$$

La condition d'orthogonalité est, au contraire,

$$\mathrm{R}^2 + \mathrm{R}'^2 - \Sigma(a_i - b_i)^2 = 0.$$

Comme l'équation d'un complexe linéaire dépend de cinq constantes, on conclut que cinq conditions suffisent pour le déterminer; par exemple : cinq droites; une droite, et un couple de droites conjuguées; être tangent à cinq complexes donnés; être orthogonal à cinq complexes linéaires donnés, etc.

Nous allons examiner ce dernier problème.

62. Soient

$$\mathrm{S}_1 = 0, \quad \mathrm{S}_2 = 0, \quad \mathrm{S}_3 = 0, \quad \mathrm{S}_4 = 0, \quad \mathrm{S}_5 = 0,$$

ou

$$\mathrm{S}_p = \Sigma(u_i - a_{p,i})^2 - \mathrm{R}_p^2$$

les équations de cinq complexes linéaires donnés; nous poserons

$$k_{p,q} = \sum_i (a_{p,i} - a_{q,i})^2 - R_p^2 - R_q^2;$$

de sorte que le cosinus de l'angle des complexes S_p et S_q aura pour expression

$$\cos(p,q) = \frac{-k_{p,q}}{2R_pR_q}.$$

La méthode employée par M. Darboux dans la recherche de la sphère orthogonale à quatre sphères données (*Annales de l'École Normale*, 1872) est intégralement applicable à la question que nous nous sommes posée.

En augmentant d'une unité le nombre des variables, les formules de M. Darboux trouvent ainsi une interprétation dans la géométrie des complexes linéaires.

C'est ainsi qu'on peut mettre l'équation du complexe linéaire orthogonal à cinq complexes linéaires donnés sous la forme élégante

$$\varphi(\mu) = \tfrac{1}{2}\Sigma - k_{p,q}\mu_p\mu_q = 0,$$

où les quantités μ sont liées aux coordonnées u de la ligne droite par les équations

$$u_i = \frac{\sum_p a_{p,i}\mu_p}{\sum_p \mu_p}.$$

En appelant Δ le discriminant de la forme $\varphi(\mu)$, et Δ_1 ce discriminant bordé par les quantités 1, 1, 1, 1, 1, 0, on trouve

$$\Delta + 2R^2\Delta_1 = 0.$$

Or, quand un complexe linéaire spécial est orthogonal à un complexe linéaire, son axe appartient à ce complexe. On voit par là que

$$\Delta = 0$$

est la condition nécessaire et suffisante pour que les cinq complexes proposés aient une droite commune.

L'équation $\Delta_1 = 0$ exprime que la droite I et ses conjugués par rapport aux cinq complexes linéaires donnés sont six droites d'un même complexe linéaire.

63. Soient six complexes linéaires $S_1 = 0$, $S_2 = 0$, ..., $S_6 = 0$; cherchons la condition qui doit être remplie pour qu'ils soient orthogonaux à un septième complexe $S = 0$.

La condition d'orthogonalité

$$R_p^2 + R^2 - \Sigma(a_{p,i} - a_i)^2 = 0$$

peut s'écrire en posant

$$H_p = R_p^2 - \sum_i a_{p,i}^2,$$

$$R^2 - \Sigma a_i^2 - 2a_{p,1}a_1 - 2a_{p,2}a_2 - 2a_{p,3}a_3 - 2a_{p,4}a_4 + H_p = 0.$$

Or, si l'on pose

$$\frac{2a_1}{-\alpha_1} = \frac{2a_2}{-\alpha_2} = \frac{2a_3}{-\alpha_3} = \frac{2a_4}{-\alpha_4} = \frac{R^2 - \Sigma a_i^2}{\alpha_5} = \frac{1}{\alpha_6},$$

cette équation s'écrit

$$(e) \qquad a_{p,1}\alpha_1 + a_{p,2}\alpha_2 + a_{p,3}\alpha_3 + a_{p,4}\alpha_4 + \alpha_5 + H_p\alpha_6 = 0,$$

tandis que l'équation du complexe orthogonal devient

$$\alpha_6 \Sigma u_i^2 + \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 + \alpha_4 u_4 - \alpha_5 = 0.$$

Pour que les six complexes proposés soient orthogonaux à un même complexe linéaire, il faut et il suffit que les six équations homogènes (e) soient compatibles. Il faut et il suffit pour cela que le déterminant suivant soit nul

$$\begin{vmatrix} 1 & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & H_1 \\ 1 & a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & H_2 \\ 1 & a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & H_3 \\ 1 & a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & H_4 \\ 1 & a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & H_5 \\ 1 & a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & H_6 \end{vmatrix} = 0.$$

Théorème. — *Pour que six complexes linéaires soient orthogonaux à un même complexe linéaire, il faut et il suffit qu'il existe entre les premiers membres de leurs équations une relation linéaire et homogène.*

Cela résulte immédiatement de la condition que nous venons de trouver.

Théorème. — *Étant donnés sept complexes linéaires tels qu'il n'existe pas de complexe linéaire orthogonal à la fois à six d'entre eux, il existera entre les premiers membres de leurs équations une relation linéaire et homogène, dans laquelle aucun des coefficients n'est nul.*

Soit, en effet, la relation identique

$$\Sigma u_i^2 - 2a_{p,1}u_1 - 2a_{p,2}u_2 - 2a_{p,3}u_3 - 2a_{p,4}u_4 - \mathrm{H}_p - \mathrm{S}_p = 0.$$

En éliminant Σu_i^2, $-2u_1$, $-2u_2$, $-2u_3$, $-2u_4$, -1 entre les sept relations qui affectent cette forme, et qu'on obtient en faisant $p = 1, 2, 3, \ldots, 7$, on trouve le déterminant nul :

$$\begin{vmatrix} 1 & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \mathrm{H}_1 & \mathrm{S}_1 \\ 1 & a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \mathrm{H}_2 & \mathrm{S}_2 \\ 1 & a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \mathrm{H}_3 & \mathrm{S}_3 \\ 1 & a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & \mathrm{H}_4 & \mathrm{S}_4 \\ 1 & a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & \mathrm{H}_5 & \mathrm{S}_5 \\ 1 & a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & \mathrm{H}_6 & \mathrm{S}_6 \\ 1 & a_{71} & a_{72} & a_{73} & a_{74} & \mathrm{H}_7 & \mathrm{S}_7 \end{vmatrix} = 0.$$

Ce qui prouve bien qu'il existe entre les S_p une relation de la forme

$$\Sigma\lambda_p \mathrm{S}_p = 0.$$

Si l'un des coefficients λ était nul, λ_7 par exemple, il existerait une relation linéaire entre $\mathrm{S}_1, \ldots, \mathrm{S}_6$, et il existerait un complexe linéaire orthogonal à la fois aux six complexes $\mathrm{S}_1 = 0, \ldots, \mathrm{S}_6 = 0$, ce qui est contre l'hypothèse.

64. On en déduit que, si $\mathrm{S}_1, \ldots, \mathrm{S}_6$ sont six complexes linéaires non orthogonaux à un même complexe linéaire, l'équation d'un complexe linéaire quelconque peut affecter la forme

$$\mathrm{S} = \sum_p y_p \mathrm{S}_p = 0.$$

Posons

$$(f) \quad \begin{cases} \sum_p a_{p,i} y_p = \mathrm{A}_i \sum_p y_p, \\ \sum_p (\sum_i a_{p,i}^2 - \mathrm{R}_p^2) y_p = (\sum_i \mathrm{A}_i^2 - \mathrm{R}^2) \sum_p y_p, \end{cases}$$

d'où l'on tire

$$R^2 = \frac{\sum\limits_p R_p^2 y_p^2 - \sum\limits_{p,q} k_{p,q} y_p y_q}{\sum\limits_p y_p},$$

où $p = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ et $i = 1, 2, 3, 4$.

En posant

$$R_p y_p = x_p,$$

et remarquant que le cosinus de l'angle des complexes S_p, S_q a pour expression

$$\cos(p, q) = \frac{-k_{p,q}}{2 R_p R_q},$$

on peut écrire encore

$$R^2 = \frac{\sum\limits_p x_p^2 + 2 \sum\limits_{p,q} x_p x_q \cos(p, q)}{\sum\limits_p \frac{x_p}{R_p}},$$

et, si l'on convient de faire $\cos(p, q) = 1$ pour $q = p$, on peut mettre la valeur de R^2 sous la forme simple

$$R^2 = \frac{\sum\limits_{p,q} x_p x_q \cos(p, q)}{\sum\limits_p \frac{x_p}{R_p}}.$$

D'ailleurs, le complexe $S = 0$ a pour équation

$$\Sigma (u_i - A_i)^2 - R^2 = 0.$$

On sait qu'en coordonnées pentasphériques on définit le point comme une sphère de rayon nul. Dans le cas actuel, on peut définir une droite comme l'axe d'un complexe linéaire spécial.

Si donc les quantités x sont telles que le complexe $S = 0$ soit spécial, c'est-à-dire si ces quantités vérifient l'équation

$$\Omega(x) = \Sigma x_p x_q \cos(p, q) = 0,$$

on pourra envisager $x_1, x_2, \ldots, x_6$ comme les coordonnées homogènes d'une ligne droite.

Ainsi, dans ce système de coordonnées, l'espace réglé s'offre comme un espace quadratique à quatre dimensions.

65. Pour retrouver le système de coordonnées de M. Klein, il suffit de supposer que les six complexes fondamentaux sont orthogonaux deux à deux. Les rectangles des variables diparaissent de $\Omega(x)$, qui se réduit dès lors à

$$\Sigma x_p^2.$$

La formule (f), où A_i est remplacé par u_i, permet le passage des coordonnées u aux coordonnées x, et inversement.

Il est facile de reconnaître qu'en posant

$$\rho\, l_p = \frac{R^2 + R_p^2 - \sum_i (a_{p,i} - a_i)^2}{2 R R_p},$$

le complexe linéaire

$$\sum_i (u_i - a_i)^2 - R^2 = 0$$

a pour équation, dans le nouveau système de coordonnées,

$$\sum_p l_p x_p = 0.$$

Si l'on désigne par (l, p) l'angle du complexe précédent avec le complexe fondamental S_p, il est clair qu'on a

$$\rho\, l_p = \cos(l, p).$$

Cette équation donne une interprétation simple des coefficients de l'équation d'un complexe linéaire en coordonnées de M. Klein.

On voit que cette équation peut s'écrire

$$\sum_p x_p \cos(l, p) = 0.$$

66. Cherchons la condition en fonction des nouveaux coefficients pour que le complexe linéaire

$$\sum_p l_p x_p = 0$$

soit spécial.

Cherchons d'abord la condition de rencontre de deux droites (x') et (x''). On trouve

$$\sum_p \frac{\partial\, \Omega(x')}{\partial x'_p}\, x''_p = 0.$$

Si l'on a

$$\rho\, l_p = \frac{\partial\,\Omega(x)}{\partial x'_p} \quad (p = 1, 2, 3, \ldots, 6),$$

le complexe $\sum\limits_p l_p x_p = 0$ se composera évidemment de droites qui rencontrent la droite (x') : il sera spécial. En éliminant x'_p et ρ $(p = 1, 2, \ldots, 6)$ entre les six équations précédentes et l'équation

$$\Omega(x') = 0,$$

on aura la condition pour que le complexe soit spécial. Ainsi, en désignant par $\Phi(\xi)$ la forme adjointe de la forme $\Omega(x)$, l'équation

$$\Phi(l) = 0$$

exprime que le complexe $\sum\limits_p l_p x_p = 0$ est spécial.

On reconnaît dans $\Phi(l)$ une forme générale de ce que M. Klein appelle l'*invariant* du complexe.

67. L'équation

$$\sum_p \frac{\partial\,\Omega(x)}{\partial x_p}(x_p + dx_p) = 0,$$

ou

$$\sum \frac{\partial\,\Omega(x)}{\partial x_p}\, dx_p = 0,$$

exprime la rencontre de deux droites successives de l'espace.

Mais comme on a toujours

$$\Omega(x) = 0,$$
$$\Omega(x + dx) = 0,$$

on en déduit que

$$\sum \frac{\partial\,\Omega(x)}{\partial x_p}\, dx_p + \Omega(dx) = 0.$$

Par conséquent

$$\Omega(dx)$$

est la forme quadratique des différentielles dont l'évanouissement exprime la rencontre de deux droites successives de l'espace.

En négligeant une fonction indépendante des différentielles, on peut prendre

$$\Omega(dx)$$

pour la forme fondamentale.

68. Cela posé, cherchons l'expression de l'angle de deux complexes linéaires (l) et (l'); en désignant par (dx) et $(d'x)$ leurs corrélations normales, on sait que

$$\rho\, l_p = \frac{\partial\,\Omega(dx)}{\partial\, dx_p},$$

$$\rho'\, l'_p = \frac{\partial\,\Omega(d'x)}{\partial\, d'x_p}.$$

En désignant par $\Phi(\xi)$ la forme adjointe de $\Omega(x)$ comme précédemment, on en déduit que

$$\cos(l, l') = \frac{1}{2}\,\frac{\sum\limits_p \dfrac{\partial\,\Omega(dx)}{\partial\, dx_p}\, d'x_p}{\sqrt{\Omega(dx)\,\Omega(d'x)}} = \frac{1}{2}\,\frac{\sum\limits_p \dfrac{\partial\,\Phi(l)}{\partial l_p}\, l'_p}{\sqrt{\Phi(l)\,\Phi(l')}}.$$

Prenons en particulier le cas des coordonnées de M. Klein, où les six complexes fondamentaux sont orthogonaux deux à deux. Alors

$$\Phi(l) = \sum_p l_p^2:$$

donc

$$\cos(l, l') = \frac{\sum\limits_p l_p\, l'_p}{\sqrt{\sum\limits_p l_p^2 \sum\limits_p l'^2_p}}.$$

Prenons pour le complexe (l') le complexe orthogonal aux complexes $S_2, S_3, \ldots, S_6$, on aura

$$l'_2 = l'_3 = l'_4 = l'_5 = l'_6 = 0.$$

Mais il est clair que ce complexe coïncide alors avec le complexe S_1; on a donc

$$\cos(l, 1) = \frac{l_1}{\sqrt{\sum\limits_p l_p^2}}$$

et, en général,

$$\cos(l, q) = \frac{l_q}{\sqrt{\sum\limits_p l_p^2}} \quad (q = 1, 2, 3, \ldots, 6);$$

on en déduit

$$\sum_q \cos^2(l, q) = 1.$$

Donc :

La somme des carrés des cosinus des angles que fait un complexe linéaire avec six complexes linéaires orthogonaux deux à deux est égale a l'unité.

En remplaçant dans l'expression de $\cos(l, l')$ les quantités l et l' par leurs valeurs en fonction des cosinus des angles des deux complexes avec les six complexes fondamentaux, on trouve

$$\cos(l, l') = \sum_q \cos(l, q)\cos(l', q) \quad (q = 1, 2, 3, \ldots, 6).$$

Ainsi :

Le cosinus de l'angle de deux complexes linéaires est égal à la somme des produits des cosinus des angles que ces complexes font avec six complexes linéaires orthogonaux deux à deux.

Ces deux théorèmes établissent un rapprochement avec l'espace ponctuel.

69. Avant de terminer ce qui a trait au choix particulier des coordonnées quadruplement orthogonales que nous avons fait, et après avoir montré comment les coordonnées de M. Klein s'en déduisent comme une extension des coordonnées pentasphériques, nous devons montrer encore comment on peut les rattacher à la représentation des lignes droites par des sphères de M. Lie.

Il suffit de remarquer que, si l'on cherche à représenter par un espace ponctuel les droites du *complexe linéaire*

$$u_3 = 0,$$

on tombe précisément sur la correspondance que M. Lie a découverte.

On peut donc considérer les coordonnées u_1, u_2, u_3, u_4 comme établissant une correspondance analogue, mais cette fois entre les droites de l'*espace réglé* et un espace ponctuel à *quatre* dimensions. C'est l'idée qui nous guidera en dernier lieu dans l'étude des propriétés infinitésimales du second ordre des systèmes de droites.

TROISIÈME PARTIE.

LES PROPRIÉTÉS INFINITÉSIMALES DU SECOND ORDRE.

I. — Étude de la forme fondamentale.

70. Nous avons, dès le début, défini la forme quadratique des différentielles des coordonnées comme une fonction de ces différentielles exprimant par son évanouissement la rencontre de deux droites successives de l'espace. Dans la suite, nous avons vu qu'on pouvait prendre pour cette forme le moment des deux droites u et $(u + du)$, mais ce choix pouvait être fort différent. Il eût suffi de multiplier $M(du)$ par un coefficient indépendant des différentielles des coordonnées. Les propriétés du premier ordre, l'expression de l'angle, eussent conservé leur forme; mais les propriétés du second ordre dépendent essentiellement de la variation de la forme fondamentale et, par conséquent, de sa détermination absolue. Nous ne développerons pas, dans ce travail, ce point de vue général.

Nous nous contenterons de donner quelques résultats relatifs au choix particulier du moment des deux droites successives pour valeur absolue de la forme fondamendale; après quoi, nous chercherons dans l'analogie ci-dessus reconnue entre les sphères et les complexes linéaires une traduction des propriétés infinitésimales du second ordre de l'espace réglé.

71. Désignons par $M(du)$ la forme quadratique qui est égale au moment de deux droites infiniment voisines de l'espace, ainsi que nous l'avons déjà fait.

Il sera peut-être commode de désigner sous le nom d'*éloignement de deux droites* (u), $(u + du)$ une quantité dont le carré soit égal à $M(du)$.

Si deux droites sont tracées sur une surface réglée, et qu'on prenne l'intégrale

$$\int \sqrt{\mathrm{M}(du)}$$

entre deux droites A et B de la surface entre lesquelles $\mathrm{M}(du)$ reste constamment positif, on pourra dire que l'intégrale

$$\mathrm{E} = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \sqrt{\mathrm{M}(du)} \tag{1}$$

représente l'éloignement des droites A et B sur la surface considérée.

Si l'on se donne deux droites A et B dans un système de droites (congruence, complexe ou espace réglé), et que l'on envisage les surfaces de ce système qui passent par les droites A et B, on peut imaginer celle de ces surfaces qui donne lieu à une valeur de E dont la première variation soit nulle. La solution de ce problème conduira à concevoir ce qu'on peut appeler la *surface géodésique* du système.

Ce problème offre le lien le plus étroit avec celui qui consiste à chercher l'expression des coordonnées en fonction d'un paramètre λ, de telle sorte que l'expression

$$\mathrm{F} = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \mathrm{M}\left(\frac{du}{d\lambda}\right) d\lambda \tag{2}$$

ait sa première variation nulle.

Les équations de Lagrange relatives à ce dernier problème affectent la forme générale

$$\frac{d}{d\lambda}\,\frac{\partial \mathrm{M}(u')}{\partial u'_i} - \frac{\partial \mathrm{M}(u')}{\partial u_i} = 0, \tag{3}$$

où $u'_i = \dfrac{du_i}{d\lambda}$.

Par une extension du théorème des forces vives, les équations (3) admettent l'intégrale

$$\mathrm{M}(u') = \text{const.} \tag{4}$$

L'élimination de $d\lambda$ entre les équations (3) conduit aux équations différentielles entre les coordonnées u qui résolvent le premier problème.

72. Supposons d'abord que nous cherchions les surfaces géodésiques de l'espace réglé. Les équations (3) s'intègrent sans difficulté. Prenons des axes rectangulaires et faisons coïncider Oz avec la droite A, par exemple; nous prendrons pour variables indépendantes les constantes a, b, p, q des deux équations de la ligne droite

$$x = az + p, \quad y = bz + q.$$

La forme $M(du)$ a pour expression

$$\frac{da\,dq - db\,dp}{1 + a^2 + b^2}$$

et

$$M(u') = \frac{a'q' - b'p'}{1 + a^2 + b^2}.$$

Les équations de Lagrange sont donc

$$(3')\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{d}{d\lambda}\frac{q'}{1+a^2+b^2} = -2a\frac{a'q' - b'p'}{(1+a^2+b^2)^2},\\ &\frac{d}{d\lambda}\frac{p'}{1+a^2+b^2} = +2b\frac{a'q' - b'p'}{(1+a^2+b^2)^2},\\ &\frac{d}{d\lambda}\frac{b'}{1+a^2+b^2} = 0, \qquad \frac{d}{d\lambda}\frac{a'}{1+a^2+b^2} = 0.\end{aligned}\right.$$

En tenant compte de l'intégrale (4), on trouve aisément es intégrales de ces équations

$$(5)\qquad \frac{a}{\alpha_1} = \frac{b}{\alpha_2} = \frac{\alpha_2 q + \alpha_1 p}{\beta} = \frac{\operatorname{tang}\left(\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}\,\lambda\right)}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}}, \quad \alpha_1 q - \alpha_2 p = \gamma\lambda.$$

λ est une variable auxiliaire et α_1, α_2, β, γ sont des constantes exprimées en fonction des valeurs initiales de a, b, p, q et de leurs dérivées relatives à la droite A de la manière suivante

$$(6)\qquad \alpha_1 = a'_0, \quad \alpha_2 = b'_0, \quad \beta = b'_0 q'_0 + a'_0 p'_0, \quad \gamma = a'_0 q'_0 - b'_0 p'_0.$$

Si l'on prend pour Oy la perpendiculaire commune à A et à B, et si l'on fait correspondre $\lambda = \lambda_1$ à la droite B, en désignant par h et θ la plus courte distance et l'angle aigu des droites A et B, on a

$$(6')\qquad \alpha_1 = \frac{\theta + n\pi}{\;}, \quad \alpha_2 = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = \frac{h(\theta + n\pi)}{\;}$$

(n est un entier quelconque). Les formules (5) deviennent

$$a = \operatorname{tang}(0 + n\pi)\frac{\lambda_1}{\lambda}, \quad b = 0, \quad p = 0, \quad q = h\frac{\lambda}{\lambda_1}. \tag{7}$$

On en déduit

$$\frac{x}{z} = \operatorname{tang}\frac{\gamma}{h}(0 + n\pi). \tag{8}$$

On reconnaît là l'équation générale des hélicoïdes gauches que l'on peut faire passer par les droites A et B. Ainsi :

Les hélicoïdes gauches sont les surfaces géodésiques de l'espace réglé.

Ils se présentent comme analogues de la ligne droite dans l'espace ponctuel. En sorte que, tandis que le déplacement qui fait décrire à un point de l'espace la ligne géodésique est un déplacement rectiligne, celui qui fait décrire à une droite la surface géodésique de l'espace réglé est un déplacement hélicoïdal.

73. Il est naturel de rechercher si les hélicoïdes correspondent à une propriété de maximum ou de minimum relativement à l'intégrale

$$\int \sqrt{\mathrm{M}(du)}.$$

Il suffit d'étudier le signe de la variation seconde.

Partons des équations

$$a = \operatorname{tang}\lambda, \quad b = \alpha f(\lambda), \quad p = \beta\varphi(\lambda), \quad q = h\lambda + \gamma\psi(\lambda),$$

qui, pour $\alpha = \beta = \gamma = 0$, représentent un hélicoïde gauche passant par Oz et par la droite dont les coordonnées sont $a = \operatorname{tang}\lambda_0$, $b = 0$, $p = 0$, $q = h\lambda_0$, pourvu que les conditions suivantes soient remplies

$$f(0) = 0, \quad \varphi(0) = 0, \quad \psi(0) = 0, \quad f(\lambda_0) = 0, \quad \varphi(\lambda_0) = 0, \quad \psi(\lambda_0) = 0;$$

on a

$$\frac{da\,dq - db\,dp}{1 + a^2 + b^2} = \frac{h + \gamma\psi'(\lambda) - \alpha\beta f'(\lambda)\varphi'(\lambda)\cos^2\lambda}{1 + \alpha^2 f^2(\lambda)\cos^2\lambda}\,d\lambda^2,$$

d'où

$$\mathrm{I} = \int \sqrt{\mathrm{M}(du)} = \int_0^{\lambda_0} \sqrt{\frac{h + \gamma\psi'(\lambda) - \alpha\beta f'(\lambda)\varphi'(\lambda)\cos^2\lambda}{1 + \alpha^2 f^2(\lambda)\cos^2\lambda}}\,d\lambda.$$

Attribuons à α, β, γ la valeur zéro, I sera égal à la valeur I_0 relative à l'hélicoïde. Si α, β, γ sont très petits, I sera la valeur de l'intégrale relative à une surface infiniment voisine de l'hélicoïde, et $I - I_0$ sera la différence de ces intégrales dont il faut étudier le signe.

Le radical qui multiplie $d\lambda$ sous le signe somme, en posant

$$x_1 = \gamma \frac{\psi'(\lambda)}{2\sqrt{h}}, \quad x_2 = -\frac{1}{2\sqrt{h}}\left[\alpha^2 h f^2(\lambda)\cos^2\lambda + \gamma^2 \frac{\psi'^2(\lambda)}{4h} + \alpha\beta f'(\lambda)\varphi'(\lambda)\cos^2\lambda\right],$$

se développe par la formule

$$\sqrt{h} + x_1 + x_2 + \ldots .$$

De là, en remarquant que $I_0 = \int_0^{\lambda_0} \sqrt{h}\, d\lambda = \sqrt{h}\,\lambda_0$,

$$I - I_0 = \gamma \int_0^{\lambda_0} \frac{\psi'(\lambda)}{2\sqrt{h}}\, d\lambda + \int_0^{\lambda_0} x_2\, d\lambda + \int_0^{\lambda_0} \varepsilon^3\, d\lambda,$$

où ε^3 désigne dans le développement du radical les termes qui ne contiennent pas de termes en α, β ou γ à une puissance inférieure à 3. On se rend compte ainsi que

$$-\frac{1}{2\sqrt{h}} J = \int_0^{\lambda_0} x_2\, d\lambda$$

est une expression de la variation seconde.

En posant

$$A^2 = \int_0^{\lambda_0} h f^2(\lambda)\cos^2\lambda\, d\lambda, \quad C^2 = \int_0^{\lambda_0} \frac{\psi'^2(\lambda)}{4h}\, d\lambda$$

(car ces intégrales sont toujours positives) et

$$2L = \int_0^{\lambda_0} f'(\lambda)\varphi'(\lambda)\cos^2\lambda\, d\lambda,$$

on a

$$J = \left(A\alpha + \frac{L\beta}{A}\right)^2 + c^2\gamma^2 - \frac{L^2}{A^2}\beta^2.$$

On peut toujours faire en sorte, par un choix de $f(\lambda)$ et $\varphi(\lambda)$, que A et

L ne soient pas nuls. Or, il est clair qu'on peut choisir α, β, γ de sorte que J ait tel signe qu'on voudra.

Il n'y a donc pas de maximum ni de minimum pour l'hélicoïde.

74. Le problème que résolvent les équations (5) conduit à une interprétation géométrique des *variables normales*, introduites par M. Lipschitz. Nous allons nous arrêter un instant sur ce point.

Nous remarquons d'abord que tout hélicoïde gauche mené par A ou Oz y détermine une corrélation de Chasles.

Réciproquement, donnons-nous une corrélation de Chasles sur Oz, prenons l'origine au plan central et le plan central pour zOy. Désignons par k le paramètre de distribution; l'hélicoïde qui a pour équation

$$\frac{x}{z} = \operatorname{tang} \frac{y}{k}$$

définit sur Oz la corrélation proposée.

On peut dire que cet hélicoïde est déterminé par Oz, et par la droite infiniment voisine de Oz qui détermine sur Oz la corrélation proposée.

L'analogie de cet hélicoïde avec la ligne droite, tangente à une courbe dans l'espace ponctuel, est évidente.

Considérons deux droites A (prise pour Oz) et B, cette dernière ayant les coordonnées que nous lui avons assignées au n° 72.

Des relations suivantes

$$M(du) = M(u')\,d\lambda^2 = \gamma\,d\lambda^2,$$

qui ont lieu pour les droites d'un des hélicoïdes qui passent par A et B, on déduit

$$E = \int_A^B \sqrt{M(du)} = \int_0^{\lambda_1} \sqrt{\gamma}\,d\lambda = \sqrt{\gamma}\,\lambda_1 = \sqrt{\gamma\lambda_1^2}.$$

Maintenant la dernière des équations (6') nous donne

$$E = \sqrt{h(\theta + n\pi)\lambda_1}.$$

Si l'on convient de prendre constamment $n = 0$, on a

$$E = \sqrt{h\theta\lambda_1}.$$

Pour une droite B donnée, E est bien déterminé, ainsi que la corrélation que définit sur A l'hélicoïde particulier passant par A et B que l'on considère. Réciproquement, une corrélation sur A définit un hélicoïde, et, si on lui adjoint une valeur de l'éloignement E, on définit une droite sur cet hélicoïde.

Voici donc un système de coordonnées complètement analogue aux coordonnées polaires. Il nous suffira de l'avoir indiqué. Il est clair que son usage conduira à des analogies avec l'espace ponctuel. Citons, par exemple, les complexes qu'on pourrait appeler *sphériques* et caractérisés par l'équation $E = \text{const.}$

75. Nous passons actuellement à l'interprétation géométrique des *variables normales* de M. Lipschitz.

Les formules (6) permettent de mettre les formules (5) sous la forme suivante

$$(9)\quad \begin{cases} \dfrac{a}{(a'_0\lambda)} = \dfrac{b}{(b'_0\lambda)} = \dfrac{(b'_0\lambda)\,q + (a'_0\lambda)\,p}{(b'_0\lambda)(q'_0\lambda) + (a'_0\lambda)(p'_0\lambda)} = \dfrac{\operatorname{tang}\sqrt{(a'_0\lambda)^2 + (b'_0\lambda)^2}}{\sqrt{(a'_0\lambda)^2 + (b'_0\lambda)^2}}, \\ (a'_0\lambda)\,q - (b'_0\lambda)\,p = (a'_0\lambda)(q'_0\lambda) - (b'_0\lambda)(p'_0\lambda). \end{cases}$$

Ces formules montrent que a, b, p, q sont des fonctions de $a'_0\lambda$, $b'_0\lambda$, $p'_0\lambda$, $q'_0\lambda$, qui sont précisément les variables normales, dans le cas actuel.

Posons

$$a'_0\lambda = u_1,\quad b'_0\lambda = u_2,\quad p'_0\lambda = u_3,\quad q'_0\lambda = u_4.$$

Les formules (9) deviennent

$$(10)\quad \begin{cases} \dfrac{a}{u_1} = \dfrac{b}{u_2} = \dfrac{u_2 q + u_1 p}{u_2 u_4 + u_1 u_3} = \dfrac{\operatorname{tang}\sqrt{u_1^2 + u_2^2}}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}}, \\ u_1 q - u_2 p = u_1 u_4 - u_2 u_3. \end{cases}$$

Les formules (10) permettent le passage des coordonnées a, b, p, q de la ligne droite aux coordonnées normales.

Nous allons rapprocher les coordonnées normales des coordonnées polaires, dont nous avons déjà parlé.

Posons

$$\frac{t_1}{u_1} = \frac{t_2}{u_2} = \frac{t_3}{u_3} = \frac{t_4}{u_4};$$

en désignant par $M(du)$ la forme quadratique fondamentale, exprimée à l'aide des variables normales et de leurs différentielles; on trouve

$$(11) \qquad u_i = \frac{t_i}{\sqrt{M(t)}} \sqrt{M(u)} \quad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Interprétons $\sqrt{M(u)}$. Quand la droite décrit un hélicoïde passant par A, on a $u_i = u'_i \lambda$, où u'_i est constant. Donc

$$E = \int_0^\lambda \sqrt{M(u')}\, d\lambda = \sqrt{M(u')}\,\lambda = \sqrt{M(u)}.$$

Donc $\sqrt{M(u)}$ représente l'éloignement des deux droites A (ou Oz) et (u) sur un hélicoïde passant par ces deux droites.

Mais t_1, t_2, t_3, t_4 sont les cooordonnées homogènes d'une corrélation anharmonique sur A.

Les formules (11) permettent donc de passer des coordonnées polaires aux coordonnées normales. En appelant *paramètres directeurs* d'une corrélation les quantités $\frac{t_i}{\sqrt{M(t)}}$, ainsi qu'on le fait pour les directions, on peut dire que *les coordonnées normales sont égales aux produits de l'éloignement géodésique par les paramètres directeurs d'une corrélation.*

On sait que, si α, β, γ sont les paramètres directeurs d'une direction de droite et ρ la distance à l'origine d'un point de cette droite, on a

$$x = \alpha\rho, \quad y = \beta\rho, \quad z = \gamma\rho;$$

ces formules et les formules (11) sont complètement analogues. Ainsi, *les coordonnées normales sont analogues aux coordonnées rectilignes dans l'espace ponctuel.*

Nous n'insisterons pas davantage sur ce point.

76. Comme application des formules (10), nous avons cherché si, pour un système convenable de coordonnées de la ligne droite, la forme

$$\frac{da\,dq - db\,dp}{1 + a^2 + b^2}$$

était réductible à une forme à coefficients constants. D'après un théorème sur les formes de différentielles dû à M. Lipschitz, il est nécessaire et suffisant de chercher si le type normal du moment élémentaire est une forme à coefficients constants.

Nous avons calculé le coefficient de du_1^2 dans le type normal; nous avons trouvé une expression compliquée et qui n'est point constante; donc : *Parmi les formes quadratiques et quaternaires qui appartiennent à la même classe* [1] *que*

$$\frac{da\,dq - db\,dp}{1 + a^2 + b^2},$$

il n'y en a aucune qui ait tous ses coefficients constants.

77. Ce qui caractérise un espace linéaire, c'est précisément la possibilité de trouver une forme à coefficients constants et appartenant à la même classe que la forme fondamentale à laquelle on rapporte cet espace.

Par exemple, $dx^2 + dy^2$ caractérise l'espace plan et les surfaces qui lui sont applicables : la forme $dx^2 + dy^2 + dz^2$ caractérise l'espace euclidien, qui est linéaire.

Ainsi, adopter pour forme fondamentale le moment élémentaire revient à considérer l'espace réglé comme un espace non linéaire à quatre dimensions. On sait que, chez Plücker et les géomètres allemands, l'espace réglé est conçu comme un espace *quadratique* à quatre dimensions. On pourrait rapprocher le résultat que nous venons d'obtenir de cette conception.

78. Ce que nous venons de dire pour l'espace réglé est applicable à tout complexe ou à toute congruence. Le moment est dans un cas une forme quadratique ternaire, dans l'autre une forme quadratique binaire; car les coordonnées d'une ligne droite s'expriment avec trois paramètres si elle décrit un complexe, et avec deux si elle décrit une congruence.

---

[1] Nous disons avec M. Lipschitz que deux formes des différentielles $du_1, \ldots$ et $dv_1, \ldots$ sont de la même classe quand une transformation faisant passer des variables u aux variables v les rend *identiques*.

Le calcul appliqué aux complexes et aux congruences linéaires ne conduit pas à des intégrations aussi faciles et aussi simples que dans le cas de l'espace réglé.

Nous nous contenterons actuellement de ces indications, pour passer à l'étude des propriétés du second ordre, fondées sur l'analogie que nous avons établie entre les complexes linéaires et les sphères dans un espace à quatre dimensions.

II. — Sur les droites infiniment voisines d'une droite d'un complexe linéaire.

79. Reprenons les coordonnées quadruplement orthogonales, qui sont les constantes des équations de la droite mises sous la forme

$$x = (u_1 + iu_3)z + (-u_2 + iu_4),$$
$$y = (u_2 + iu_4)z + (\quad u_1 - iu_3).$$

Le moment de deux droites (u'), (u'') a généralement pour expression

$$\frac{\Sigma(u'_i - u''_i)^2}{\sqrt{1 + (u'_1 + iu'_3)^2 + (u'_2 + iu'_4)^2}\sqrt{1 + (u''_1 + iu''_3)^2 + (u''_2 + iu''_4)^2}}.$$

Un complexe linéaire passant par l'axe Oz a pour équation

$$\Sigma u_i^2 - 2\Sigma a_i u_i = 0, \tag{2}$$

et la condition nécessaire et suffisante pour que les droites (u'), (u'') soient conjuguées par rapport à ce complexe s'exprime par les équations

$$\left\{\begin{aligned} &\lambda + \mu = \frac{\lambda u'_i + \mu u''_i}{a_i}, \\ &\lambda \Sigma u'^2_i + \mu \Sigma u''^2_i = 0. \end{aligned}\right. \tag{3}$$

Les premières équations (3) sont satisfaites en prenant

$$u'_i = a_i - \mu\rho_i, \quad u''_i = a_i + \lambda\rho_i,$$

où ρ_i désigne une arbitraire qui change de valeur avec son indice. En portant dans la dernière des équations (3), on trouve

$$\Sigma a_i^2 + \lambda\mu\Sigma\rho_i^2 = 0. \tag{4}$$

Posons

$$S' = \Sigma u_i'^2 - 2\Sigma a_i u_i';$$

on trouve

$$S' = \mu^2 \Sigma \rho_i^2 - \Sigma a_i^2,$$

ou, à cause de (4),

$$S' = -\frac{\lambda+\mu}{\mu}\Sigma a_i^2. \tag{5}$$

Posons

$$T = \Sigma(u_i' - u_i')^2;$$

on trouve

$$T = (\lambda+\mu)^2 \Sigma \rho_i^2 = -\frac{(\lambda+\mu)^2}{\lambda\mu}\Sigma a_i^2,$$

d'où enfin

$$T = \frac{\left(\frac{S'}{\Sigma a_i^2}\right)^2}{1 + \frac{S'}{\Sigma a_i^2}}.$$

Supposons que la droite (u') soit infiniment voisine de Oz, il en sera évidemment de même de (u''), et le moment (u', u'') des droites (u') et (u'') a pour expression

$$(u', u'') = T(1 - \varepsilon^2),$$

où ε^2 désigne un infiniment petit du second ordre.

Soit p l'ordre du résultat de la substitution de u_1', u_2', u_3', u_4' dans le premier membre de l'équation du complexe, quantité que nous appelons S'. On a

$$T = \left(\frac{S'}{\Sigma a_i^2}\right)^2 (1 - \varepsilon'^p),$$

où ε'^p est un infiniment petit de l'ordre p. Donc

$$(u', u'') = \left(\frac{S'}{\Sigma a_i^2}\right)^2 (1 - \varepsilon^2)(1 - \varepsilon'^p).$$

Si $p = 1$, ce qui est le cas général, aux infiniment petits du troisième ordre près, on a

$$(u', u'') = \left(\frac{S'}{\Sigma a_i^2}\right)^2;$$

le moment (u', u'') est du second ordre.

Si $p=2$, aux infiniment petits du *sixième* ordre près, on a

$$(u', u'') = \left(\frac{S'}{\Sigma a_i^2}\right)^2;$$

le moment (u', u'') est du quatrième ordre, etc.

Ainsi :

Le moment, par rapport à sa conjuguée dans un complexe linéaire, d'une droite infiniment voisine d'une droite de ce complexe, est généralement du second ordre. Ce moment est proportionnel au carré du résultat de la substitution des coordonnées de la droite dans le premier membre de l'équation du complexe.

III. — Propriétés du second ordre des surfaces réglées.

80. Soient $f(u)=0$, $\varphi(u)=0$, $\psi(u)=0$ les équations d'une surface réglée. En conservant des notations déjà employées, deux différentiations successives donnent

$$\Sigma U_i\, du_i = 0, \quad \Sigma V_i\, du_i = 0, \quad \Sigma W_i\, du_i = 0,$$
$$\Sigma U_i\, d^2 u_i + \Sigma U_{ij}\, du_i\, du_j = 0,$$
$$\Sigma V_i\, d^2 u_i + \Sigma V_{ij}\, du_i\, du_j = 0,$$
$$\Sigma W_i\, d^2 u_i + \Sigma W_{ij}\, du_i\, du_j = 0.$$

Supposons que nous nous proposions d'étudier la surface autour d'une de ses droites prise pour axe Oz.

Désignons par U_i^0, V_i^0, W_i^0 ce que deviennent les dérivées partielles quand on y suppose les u nuls, et désignons par $U_0(du)$, $V_0(du)$, $W_0(du)$ ce que deviennent les sommes $\Sigma U_{ij}\, du_i\, du_j$, ...

L'équation générale des complexes linéaires tangents à la surface sera

$$\Sigma u_i^2 - 2\Sigma(l U_i^0 + m V_i^0 + n W_i^0) u_i = 0.$$

Si dans cette équation on substitue les coordonnées $(du + \frac{1}{2} d^2 u)$ de la droite de la surface infiniment voisine de Oz, on trouve pour résultat, à cause des équations

$$\Sigma U_i^0\, du_i = 0, \quad \Sigma V_i^0\, du_i = 0, \quad \Sigma W_i^0\, du_i = 0,$$
$$S' = \Sigma\, du_i^2 - \Sigma(l U_i^0 + m V_i^0 + n W_i^0)\, d^2 u_i + \varepsilon^3.$$

Donc :

Le moment d'une droite A *d'une surface réglée par rapport à sa conjuguée dans un complexe linéaire tangent à la surface suivant une droite infiniment voisine de* A *est du quatrième ordre*.

L'expression de S' peut se transformer si l'on a égard aux équations

$$\Sigma U_i^0 d^2 u_i = - U_0(du), \quad \Sigma V_i^0 d^2 u_i = - V_0(du), \quad \Sigma W_i^0 d^2 u_i = - W_0(du);$$

on trouve

$$S' = \Sigma du_i^2 + l U_0(du) + m V_0(du) + n W_0(du) + \varepsilon^3.$$

On peut se proposer de chercher s'il existe des complexes linéaires tangents à la surface pour lesquels le moment soit d'un ordre supérieur au quatrième. Il suffit évidemment de poser

$$\Sigma du_i^2 + l U_0(du) + m V_0(du) + n W_0(du) = 0;$$

le moment est alors du sixième ordre. Parmi les complexes tangents qui sont triplement indéterminés, les complexes que nous venons de trouver forment un système doublement indéterminé. On pourrait appeler ces complexes *osculateurs*.

Ils forment un système linéaire et ont par suite en commun un même hyperboloïde, que nous appellerons *l'hyperboloïde osculateur* de la surface.

En exprimant que le moment était du sixième ordre, nous avons écrit, au fond, que les droites de la surface

$$\begin{array}{lllll} D, & u_1 = 0, & u_2 = 0, & u_3 = 0, & u_4 = 0, \\ D', & du_1, & du_2, & du_3, & du_4, \\ D'', & 2\,du_1 + d^2 u_1, & 2\,du_2 + d^2 u_2, & 2\,du^3 + d^2 u_3, & 2\,du_4 + d^2 u_4 \end{array}$$

étaient dans le complexe. Ces trois droites appartiennent donc aux complexes osculateurs, et par suite à leur hyperboloïde commun. On retrouve ainsi la définition habituelle de l'hyperboloïde osculateur.

Rappelons que *les génératrices d'un même système de l'hyperboloïde osculateur sont les tangentes asymptotiques de la surface réglée le long de la génératrice considérée*.

La raison en est la suivante : les génératrices Δ d'un système rencontrent trois droites consécutives D, D', D'' de la surface; chacune est donc une tangente inflexionnelle de la surface.

L'hyperboloïde osculateur s'offre ainsi comme le lieu des droites qui en des points d'une même génératrice rectiligne de la surface ont avec elle un contact du second ordre.

81. On pourrait se proposer de chercher celles de ces droites pour lesquelles le contact est du troisième ordre.

Allons jusqu'aux quantités du troisième ordre dans le calcul de S'; nous trouverons que le résultat de la substitution, s'il s'agit d'un complexe osculateur, affecte la forme

$$S' = E + lF + mG + nH + \varepsilon^4,$$

où E, F, G, H désignent des expressions du troisième ordre. Si l'on pose encore

$$E + lF + mG + nH = 0,$$

on définit des complexes *surosculateurs* pour lesquels le moment n'est plus que du huitième ordre.

Ces complexes forment parmi les complexes osculateurs un faisceau : ils ont donc une congruence linéaire commune; les directrices de cette congruence sont deux génératrices Δ_1, Δ_2 de l'hyperboloïde osculateur. Mais si l'on remarque que la dernière équation écrite, jointe à celles qui expriment que les droites D, D', D'' appartiennent aux complexes considérés, exprime en outre que la droite $(0 + 3\,du + 3\,d^2u + d^3u)$ appartient à ces complexes, on voit que :

Les droites Δ_1 et Δ_2 sont les génératrices de l'hyperboloïde osculateur qui ont avec la surface un contact du troisième ordre.

82. Il est clair qu'en exprimant que le moment est du dixième ordre on arriverait à obtenir un complexe linéaire unique contenant cinq génératrices consécutives de la surface.

Nous n'avons rien dit des congruences linéaires osculatrices de la surface, il est clair qu'on les obtiendrait comme intersection de deux complexes osculateurs quelconques. En particulier, il existe une congruence linéaire surosculatrice commune à tous les complexes linéaires surosculateurs. C'est celle dont Δ_1 et Δ_2 sont les deux directrices.

Avant de terminer ce qui a trait aux surfaces réglées, nous pouvons parler d'une analogie avec les courbes, et qui rapproche encore les corrélations des directions.

Les directions normales à une courbe forment un faisceau plan; parmi elles, il y en a une qui est perpendiculaire aussi à la tangente infiniment voisine : c'est la binormale.

Si l'on considère les complexes tangents à la surface proposée, leurs corrélations normales forment un réseau linéaire (r_0) dont la corrélation focale est la corrélation de Chasles (c_0) relative à la surface.

Les corrélations normales des complexes osculateurs forment au contraire une série linéaire (s_0), comprise dans le réseau (r_0); comme les complexes osculateurs sont tangents suivant deux droites successives, on peut dire que (s_0) est la série des corrélations binormales, de même que (r_0) est le réseau des corrélations normales.

Les couples inverses des couples focaux de la série (s_0) *sont précisément ceux qui contiennent sur la surface les droites* Δ_1 *et* Δ_2 *déjà trouvées.*

IV. — Propriétés du second ordre des congruences.

83. Conservons les mêmes coordonnées et les mêmes notations que précédemment, et soient

$$f(u) = 0, \quad \varphi(u) = 0$$

les équations d'une congruence passant par l'axe Oz.

Le système des complexes linéaires tangents est défini par l'équation

$$\Sigma u_i^2 - 2\Sigma(l U_i^0 + m V_i^0) u_i = 0.$$

Transportons dans le premier membre de cette équation les coordonnées $\left(du + \frac{1}{2} d^2 u + \frac{1}{6} d^3 u, \ldots\right)$ d'une droite infiniment voisine de Oz et appartenant à la congruence. On trouve

$$S' = \Sigma(du_i)^2 - \Sigma(l U_i^0 + m V_i^0) d^2 u + \varepsilon^3,$$

où

$$\varepsilon^3 = \Sigma du\, d^2 u - \frac{1}{3}\Sigma(l U_i^0 + m V_i^0) d^3 u_i + \ldots,$$

car les équations

$$(e) \qquad \Sigma U_i^0 du_i = 0, \quad \Sigma V_i^0 du_i = 0$$

font disparaître les termes du premier ordre de S'. Le terme principal de S', à cause des relations

$$\Sigma U_i^0\, d^2 u_i = -U_0(du), \quad \Sigma V_i^0\, d^2 u_i = -V_0(du),$$

devient d'ailleurs

$$\Sigma(du_i)^2 + l U_0(du) + m V_0(du).$$

Donc :

Le moment d'une droite A *d'une congruence, par rapport à sa conjuguée dans un complexe linéaire tangent à la congruence suivant une droite infiniment voisine de* A, *est généralement du quatrième ordre.*

L'équation

$$(e') \qquad \Sigma(du_i)^2 + l U_0(du) + m V_0(du) = 0$$

exprime que ce moment est du sixième ordre.

Si l'on rapproche les équations (e) de l'équation (e'), on voit que le complexe linéaire tangent étant fixé, c'est-à-dire l, m étant choisis, les équations (e) et (e') définissent deux corrélations anharmoniques (du'), (du'') de la congruence, et toutes les droites de cette congruence, qui définissent sur cette droite l'une ou l'autre de ces corrélations, jouissent de la propriété de donner, par rapport au complexe linéaire tangent fixé (l, m), un moment du sixième ordre.

Cela permet de dire que tout complexe linéaire tangent d'une congruence est *osculateur suivant deux corrélations anharmoniques de la congruence*.

L'étude préalable qui a été faite des singularités permet d'expliquer ce résultat. En effet, chaque complexe linéaire tangent détermine dans la congruence une surface réglée, pour laquelle Oz est une droite double : les deux corrélations (du'), (du'') sont celles qui se rapportent à cette droite double.

Les équations (e) et (e') expriment que les droites successives (du), $(2\,du + d^2u)$ de la congruence $(f = 0, \varphi = 0)$ appartiennent au complexe (l, m) ; de là cette conclusion :

Chaque complexe linéaire tangent est osculateur pour deux séries de surfaces de la congruence; les surfaces d'une même série se raccordent suivant l'une des deux corrélations (du') *ou* (du'').

Réciproquement, donnons-nous une corrélation (du') de la congruence; l'équation

$$(e'') \qquad \Sigma(du'_i)^2 + l\,U_0(du') + m\,V_0(du') = 0$$

exprime la condition nécessaire et suffisante pour que le moment, par rapport au complexe (l, m) des droites de la congruence qui définissent sur Oz la corrélation (du'), soit du sixième ordre; ou, encore, la condition pour que le complexe linéaire tangent (l, m) soit osculateur pour l'une quelconque des surfaces réglées de la congruence proposée, qui se raccordent suivant Oz et suivant la corrélation (du').

Ces complexes forment un faisceau; ils ont donc en commun une congruence linéaire.

Nous parvenons de la sorte à la notion de *congruence linéaire osculatrice* d'une congruence suivant une corrélation donnée.

Cette congruence s'offre en même temps *comme le lieu des hyperboloïdes osculateurs des surfaces de la congruence proposée* $(f = 0, \varphi = 0)$, *qui définissent sur* Oz *la même corrélation* (du').

Le rapprochement de cette proposition de celle qui a trait aux surfaces ne sera peut-être pas sans intérêt.

On sait que le lieu des cercles osculateurs des courbes décrites sur une surface, et qui sont tangentes en un point à une même droite, est précisément la sphère tangente en ce point à la surface, et qui oscule cette surface, suivant la direction définie par la droite.

De même, le lieu des hyperboloïdes osculateurs des surfaces réglées d'une congruence qui sont tangentes, suivant une droite et suivant une corrélation fixe sur cette droite, est précisément la congruence linéaire tangente suivant cette droite, et qui oscule la congruence proposée suivant la corrélation fixe.

On peut, en conséquence, regarder cette proposition comme l'analogue du *théorème de Meusnier*.

84. C'est ici le cas de nous reporter à ce que nous avons dit sur les surfaces focales d'une congruence.

Désignons par (a, α), (b, β) les couples focaux.

Le plan β touche au point a la nappe A de la surface focale; le plan α touche en b la nappe B.

Une surface réglée S de la congruence est circonscrite aux deux nappes suivant deux courbes, dont nous désignons par at et bs les tangentes en a et b.

Désignons également par $a\theta$ et $b\sigma$ les génératrices des deux développables, respectivement circonscrites à la surface réglée et à une des nappes de la surface focale.

Les droites at et $a\theta$ sont deux tangentes conjuguées sur la nappe A; les droites bs et $b\sigma$ sont deux tangentes conjuguées sur la nappe B.

Désignons par al et bm les deux directrices de la congruence osculatrice qui correspond à la corrélation que définit, sur la droite du système que l'on considère, la surface réglée proposée S.

Ces deux directrices sont deux génératrices de tous les hyperboloïdes osculateurs des surfaces de la congruence, qui se raccordent avec la surface S suivant la droite ab considérée.

Ainsi, l'on connaît les tangentes asymptotiques de la surface S au point a; ce sont : la droite al et la génératrice ab.

Mais at et $a\theta$ sont deux tangentes conjuguées sur la surface. Donc :

Les droites at et $a\theta$, ab et al forment un faisceau harmonique.

Les droites at et $a\theta$ sont donc définies lorsque l'on connaît al, c'est-à-dire que :

Les droites at et $a\theta$ sont les mêmes pour toutes les surfaces réglées de la congruence qui se raccordent suivant la droite ab.

Les mêmes raisonnements s'appliquent évidemment aux droites bs, $b\sigma$, bm.

Ceci montre que, à toute corrélation de la congruence, il correspond un système unique et déterminé de droites, telles que

$$at,\quad a\theta,\quad al,\quad bs,\quad b\sigma,\quad bm.$$

Il est clair d'ailleurs que l'on pourra déduire les droites at, $a\theta$ de la connaissance de la droite al, et les droites bs, $b\sigma$ de celle de la droite bm.

Il suffit donc, pour étudier la correspondance géométrique entre ces diverses droites, d'étudier celle qui existe entre les directrices al et bm.

85. Remarquons que, si l'on envisage les courbes R_a, S_a du n° 25, la tangente à la courbe S_a qui passe en a est la droite at, et, comme la surface circonscrite à la nappe A le long de S_a est développable, on en déduit que $a\theta$ coïncide avec at, c'est-à-dire avec la tangente à R_a. Donc :

Les courbes R_a *et* S_a *forment un réseau conjugué sur la nappe* A : *les courbes* R_b *et* S_b *forment un réseau conjugué sur la nappe* B.

86. Pour compléter ce qui a trait à la correspondance entre les droites at, $a\theta$, al, bs, $b\sigma$, bm, il suffit d'étudier la correspondance des droites al et bm des couples (a, β) et (b, α).

Reprenons les équations

$$\Sigma u_i^2 - 2\Sigma(l U_i^0 + m V_i^0) u_i = 0, \tag{1}$$

$$\Sigma(du_i)^2 + l U_0(du) + m V_0(du) = 0. \tag{2}$$

La première équation représente un complexe linéaire tangent; la seconde exprime que ce complexe est osculateur suivant la corrélation (du).

Remarquons qu'il est permis de supposer que $f(u) = 0$ et $\varphi(u) = 0$ représentent deux complexes singuliers, formés des tangentes aux deux surfaces focales, c'est-à-dire qu'on peut supposer

$$\Sigma(U_i^0)^2 = 0, \quad \Sigma(V_i^0)^2 = 0.$$

La condition pour que le complexe linéaire (1) soit spécial se réduit alors à

$$lm = 0.$$

Faisons d'abord $m = 0$; le complexe spécial osculateur correspondant a pour axe, eu égard à l'équation (2), une droite (u') qui a pour coordonnées

$$u'_i = - U_i^0 \frac{\Sigma(du_i)^2}{U_0(du)}.$$

En faisant $l = 0$, on a une seconde droite (u'') et

$$u''_i = - V_i^0 \frac{\Sigma(du_i)^2}{V_0(du)}.$$

Les droites (u') et (u'') sont les directrices de la congruence osculatrice commune aux complexes osculateurs définis par les équations (1) et (2).

Cela posé, on peut exprimer les u relatifs aux droites de la congruence en fonction de deux paramètres p_1 et p_2; $\Sigma(du_i)^2$ deviendra $M(dp)$, $U_0(du)$ et $V_0(du)$ deviendront $G(dp)$ et $H(dp)$. On aura ainsi

$$(3)\qquad \begin{cases} u'_i = -U_i^0 \dfrac{M(dp)}{G(dp)}, \\[2ex] u''_i = -V_i^0 \dfrac{M(dp)}{G(dp)}. \end{cases}$$

Si l'on veut passer des coordonnées u aux coordonnées a, b, p, q; en posant

$$\begin{aligned} A' &= -(U_1^0 + iU_3^0), & A'' &= -(V_1^0 + iV_3^0), \\ B' &= -(U_2^0 + iU_4^0), & B'' &= -(V_2^0 + iV_4^0), \\ P' &= U_2^0 - iU_4^0, & P'' &= V_2^0 - iV_4^0, \\ Q' &= -U_1^0 + iU_3^0, & Q'' &= -V_1^0 + iV_3^0, \end{aligned}$$

et appelant (a', b', p', q'), (a'', b'', p'', q'') les coordonnées des droites al, bm, on trouve

$$(4)\qquad \begin{cases} a' = A' \dfrac{M}{G}, & a'' = A'' \dfrac{M}{H}, \\[2ex] b' = B' \dfrac{M}{G}, & b'' = B'' \dfrac{M}{H}, \\[2ex] p' = P' \dfrac{M}{G}, & p'' = P'' \dfrac{M}{H}, \\[2ex] q' = Q' \dfrac{M}{G}, & q'' = Q'' \dfrac{M}{H}, \end{cases}$$

et l'on doit avoir

$$A'Q' - B'P' = 0, \quad A''Q'' - B''P'' = 0.$$

Ces équations définissent entièrement la congruence linéaire osculatrice de la congruence proposée, suivant la corrélation anharmonique de cette congruence qui correspond aux valeurs dp_1, dp_2 des différentielles des variables indépendantes p_1 et p_2.

87. D'après ce que nous avons dit, tout hyperboloïde qui admet al et bm pour directrices et qui définit sur Oz la corrélation anharmo-

nique (dp) est osculateur pour une surface de la congruence qui définit sur Oz la même corrélation. On en conclut que toute droite qui rencontre à la fois al et bm est une génératrice d'un hyperboloïde osculateur de la congruence. Cela montre que *les génératrices des hyperboloïdes osculateurs relatifs à toutes les surfaces réglées d'une congruence, et pour une même droite de cette congruence, forment un complexe* [1]. Il est intéressant de connaître son degré. Il suffit de chercher la classe de son enveloppe dans un plan. Une transformation homographique permet toujours de prendre ce plan pour xOy. Or l'enveloppe de la droite qui joint les points

$$(x = p', y = q'), \quad (x = p'', y = q'')$$

est de la seconde classe. Car si l'on cherche à lui mener une tangente par un point (x, y) du plan, on aura à résoudre le système d'équations

$$ux + vy + w = 0, \quad uP' + vQ' + w\frac{G}{M} = 0, \quad uP'' + vQ'' + w\frac{H}{M} = 0.$$

L'élimination de u, v, w conduit à l'équation suivante

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ P' & Q' & \frac{G}{M} \\ P'' & Q'' & \frac{H}{M} \end{vmatrix} = 0,$$

qui est de la forme

$$A.G + B.H + C.M = 0,$$

et qui est du second degré en $dp_1 : dp_2$. Par tout point du plan on peut donc mener deux tangentes à l'enveloppe.

De là ce théorème, qui est l'expression de la correspondance géométrique entre les droites al et bm, directrices d'une congruence osculatrice.

Les génératrices des hyperboloïdes osculateurs des surfaces réglées

---

(1) L'étude de ce complexe est étroitement liée avec celle des propriétés relatives à la coïncidence des corrélations (du'), (du'') définies au n° 83. On en déduit de nouvelles propriétés des surfaces focales que nous n'avons pas développées ici.

d'une congruence relativement à une droite fixe de cette congruence appartiennent à un complexe du second degré.

Ce complexe est aussi le lieu des congruences osculatrices.

Pour obtenir son équation il suffirait d'éliminer $dp_1 : dp_2$ entre les équations d'une quelconque de ces congruences

$$\frac{\Sigma du_i^2}{-\mathrm{M}(dp)} = \frac{+2\Sigma \mathrm{U}_i^0 u_i}{\mathrm{G}(dp)} = \frac{2\Sigma \mathrm{V}_i^0 u_i}{\mathrm{H}(dp)}.$$

88. Résumons les propriétés du second ordre des congruences.

Si sur une droite D d'une congruence on se donne une corrélation (dp) de la congruence, il lui correspond une congruence linéaire tangente C dont nous disons qu'elle est osculatrice suivant la corrélation (dp). La congruence C est le lieu des hyperboloïdes osculateurs de toutes les surfaces réglées de la congruence qui se raccordent suivant la corrélation (dp). C'est l'analogue du théorème de Meusnier.

Enfin, la correspondance entre la corrélation (dp) et la congruence C, qui peut être considérée comme l'analogue de celle que définit la relation d'Euler, est donnée par la remarque qui a été faite, que la directrice al de la congruence C et la droite D forment un faisceau harmonique avec at et $a\theta$ (droites qui sont connues lorsque l'on connaît la corrélation (dp). Cette remarque est complétée par ce théorème que :

Si l'on prend les traces l et m sur un plan des directrices al et bm d'une congruence C *osculatrice suivant une corrélation* (dp), *lorsque cette corrélation varie, la droite lm roule sur une conique.*

89. On peut, d'ailleurs, donner à la correspondance entre la corrélation (dp) et la congruence C une forme analytique la rapprochant de la relation d'Euler.

Appelons α_1 et α_2 les angles de la corrélation (dp) avec les corrélations $dp_2 = 0$, $dp_1 = 0$ de la congruence. Si l'on représente une congruence linéaire tangente par les équations

$$\Sigma u_i^2 + 2\mathrm{R}\Sigma \mathrm{U}_i^0 u_i = 0,$$
$$\Sigma u_i^2 + 2\mathrm{R}'\Sigma \mathrm{V}_i^0 u_i = 0,$$

pour qu'elle soit osculatrice suivant la corrélation (dp), il faut et il suffit qu'on ait

$$\frac{1}{R} = \frac{G(dp)}{M(dp)}, \quad \frac{1}{R'} = \frac{H(dp)}{M(dp)}.$$

Mais si

$$G(dp) = G_{11}\,dp_1^2 + 2\,G_{12}\,dp_1\,dp_2 + G_{22}\,dp_2^2,$$
$$H(dp) = H_{11}\,dp_1^2 + 2\,H_{12}\,dp_1\,dp_2 + H_{22}\,dp_2^2,$$

on a

$$\frac{1}{R} = G_{11}\cos^2\alpha_1 + 2\,G_{12}\cos\alpha_1\cos\alpha_2 + G_{22}\cos^2\alpha_2,$$

$$\frac{1}{R'} = H_{11}\cos^2\alpha_1 + 2\,H_{12}\cos\alpha_1\cos\alpha_2 + H_{22}\cos^2\alpha_2.$$

Ces formules, on le voit, offrent un certaine ressemblance avec la relation d'Euler.

Si, en particulier, les corrélations $dp_1 = 0$, $dp_2 = 0$ sont orthogonales, $\alpha_1 + \alpha_2 = \frac{\pi}{2}$, et l'on a

$$\frac{1}{R} = G_{11}\cos^2\alpha_1 + 2\,G_{12}\cos\alpha_1\sin\alpha_1 + G_{22}\sin^2\alpha_1,$$

$$\frac{1}{R'} = H_{11}\cos^2\alpha_1 + 2\,H_{12}\cos\alpha_1\sin\alpha_1 + H_{22}\sin^2\alpha_1.$$

Au lieu de prendre les variables p_1 et p_2 de sorte que $M(dp)$ ait la forme canonique privée des rectangles, on peut choisir ces variables de sorte que G et H soient simultanément ramenées à cette forme. Cela est possible, et d'une seule manière en général. Dans ce cas, les relations précédentes prennent la forme simple

$$\frac{1}{R} = G_{11}\cos^2\alpha_1 + G_{22}\cos^2\alpha_2,$$

$$\frac{1}{R'} = H_{11}\cos^2\alpha_1 + H_{22}\cos^2\alpha_2.$$

On peut donner à ces équations une signification moins abstraite par la remarque suivante. Appelons λ et μ les angles que les droites al et bm font avec Oz; en vertu des formules du n° 86, on a

$$\frac{A'^2 + B'^2}{\operatorname{tang}^2\lambda} = \frac{G^2}{M^2},$$

d'où

$$\frac{\sqrt{A'^2+B'^2}}{\operatorname{tang}\lambda}=\frac{G}{M};$$

de même,

$$\frac{\sqrt{A''^2+B''^2}}{\operatorname{tang}\mu}=\frac{H}{M},$$

et, en posant, $K'=\sqrt{A'^2+B'^2}$, $K''=\sqrt{A''^2+B''^2}$,

$$\frac{K'}{\operatorname{tang}\lambda}=G_{11}\cos^2\alpha_1+G_{22}\cos^2\alpha_2,$$
$$\frac{K''}{\operatorname{tang}\mu}=H_{11}\cos^2\alpha_1+H_{22}\cos^2\alpha_2.$$

Dans ces formules, les premiers membres ont une signification concrète.

Les congruences osculatrices sont alors définies par leurs directrices.

Dans les formules précédentes, on doit remarquer que, si ω est l'angle des corrélations $dp_1=0$, $dp_2=0$ de la congruence, on a sans cesse

$$1=\cos^2\alpha_1+\cos^2\alpha_2+2\cos\omega\cos\alpha_1\cos\alpha_2.$$

Cette équation, jointe aux précédentes, permettrait de trouver l'équation du second degré qui lie $\frac{1}{R}$ et $\frac{1}{R'}$ ou bien $\cot\lambda$ et $\cot\mu$.

V. — Propriétés du second ordre des complexes.

90. En prenant pour axe Oz une droite D du complexe, l'équation générale des complexes linéaires tangents est la suivante

$$\Sigma u_i^2-2\lambda\Sigma U_i^0 u_i=0, \tag{1}$$

où les notations précédentes sont conservées.

La substitution des coordonnées d'une droite du complexe

$$(du+\tfrac{1}{2}d^2u+\ldots)$$

infiniment voisine de la droite D donne

$$S'=\Sigma(du_i)^2+\lambda U_0(du)+\varepsilon^3,$$

où

$$\varepsilon^3 = \Sigma du_i d^2 u_i - \tfrac{1}{3} \Sigma U_i^0 d^3 u_i + \ldots.$$

Donc :

Le moment d'une droite d'un complexe, par rapport à sa conjuguée dans un complexe linéaire tangent suivant une droite infiniment voisine de la première, est généralement du quatrième ordre.

On peut déterminer le complexe linéaire tangent de sorte que le moment soit seulement du sixième ordre. Il suffit pour cela de prendre λ de telle sorte que

$$(2) \qquad \Sigma(du_i)^2 + \lambda U_0(du) = 0.$$

Ainsi, comme λ ne dépend dans cette équation que des coordonnées de la corrélation (du), on voit qu'à toute corrélation (du) sur une droite D d'un complexe appartenant à ce complexe il correspond en général un complexe linéaire tangent suivant D qui jouit de la propriété que le moment par rapport à sa conjuguée dans ce complexe linéaire de toute droite du complexe proposé, qui définit sur D la corrélation (du), est du sixième ordre.

Inversement, si l'on se donne un complexe linéaire tangent, c'est-à-dire λ, l'équation (2) définit une série quadratique de corrélations dans le réseau linéaire du complexe.

On peut dire que le complexe (λ) *est osculateur du complexe proposé suivant une quelconque des corrélations du complexe appartenant à la série quadratique* (2).

Cette correspondance entre les complexes linéaires tangents et les séries quadratiques (2) était facile à prévoir, d'après ce que nous avons dit sur les singularités des congruences.

En effet, chaque complexe linéaire tangent coupe le complexe proposé suivant une congruence pour laquelle D est une droite double, et la série quadratique (2) est celle qui se rapporte à cette droite double dans cette congruence.

Une série du *deuxième* degré correspond ainsi à un complexe linéaire tangent, de même qu'à toute sphère tangente à une surface en un point il correspond *deux* directions suivant lesquelles elle est osculatrice.

91. La correspondance que nous venons de définir est fondamentale dans la théorie des propriétés du second ordre des complexes.

Proposons-nous, en effet, de chercher la condition nécessaire et suffisante pour qu'un *hyperboloïde* mené par la droite D soit *osculateur* pour une surface réglée du complexe suivant la droite D.

Il est clair d'abord que tout hyperboloïde osculateur doit avant tout être *de raccordement*. Il faut et il suffit pour cela qu'il appartienne à un complexe linéaire tangent.

Or, si S désigne une surface réglée du complexe passant par D et déterminant sur cette droite la corrélation (du), il est évident que le complexe linéaire tangent du complexe qui contient son hyperboloïde osculateur est un complexe osculateur de la surface S, et par suite qu'il sera déterminé par l'équation

$$\Sigma(du_i)^2 + \lambda U_0(du) = 0. \tag{2}$$

La réciproque est vraie; considérons en effet l'hyperboloïde défini par les équations suivantes, où g_i, h_i sont des constantes,

$$\left\{\begin{aligned} &\Sigma u_i^2 - 2\lambda\Sigma U_i^0 u_i = 0,\\ &\Sigma u_i^2 - 2\Sigma g_i u_i = 0,\\ &\Sigma u_i^2 - 2\Sigma h_i u_i = 0.\end{aligned}\right. \tag{3}$$

Les deux derniers complexes linéaires définissent dans le complexe proposé une surface, et il est bien clair que ces deux complexes linéaires, auxquels on associe un complexe osculateur de la surface, définissent l'hyperboloïde osculateur. Si donc le complexe linéaire tangent $\Sigma u_i^2 - 2\lambda\,\Sigma U_i^0 u_i = 0$ est osculateur de cette surface, c'est-à-dire si l'équation (2) est satisfaite, les équations (3) représentent un hyperboloïde osculateur d'une surface du complexe.

Ainsi :

Le complexe linéaire osculateur suivant une corrélation (du) *du complexe proposé est le lieu des hyperboloïdes osculateurs de toutes les surfaces réglées du complexe qui définissent sur la droite fixe* D *la corrélation anharmonique* (du).

De même que :

La sphère osculatrice en un point d'une surface et suivant une direction *déterminée est le lieu des cercles osculateurs des courbes tracées sur la surface et tangentes au point considéré à la direction fixe.*

Il suit de là qu'on peut envisager la proposition que nous venons d'obtenir comme analogue au *théorème de Meusnier.*

92. Le théorème d'Euler indique la correspondance entre la sphère de Meusnier et la direction fixe. Dans le cas des complexes, la correspondance analogue est définie par l'équation (2); d'où il résulte qu'on doit envisager cette équation comme l'analogue de la relation d'Euler.

L'emploi de l'angle de deux corrélations rendra le rapprochement plus frappant.

Si l'on effectue une transformation de coordonnées, on peut amener les coordonnées u_1, u_2, u_3, u_4 de toute droite du complexe à ne dépendre que de trois variables; de sorte que $M(du)$ et $U_0(du)$ deviendront deux formes quadratiques ternaires des différentielles.

Ces trois variables peuvent elles-mêmes être transformées en d'autres qui soient telles que la forme fondamentale *relative à la droite* B, et la forme ternaire en laquelle $U_0(du)$ s'était transformée, et qui est à coefficients constants, se transforment en deux fonctions homogènes ternaires et du second degré, privées des rectangles des variables. Nous écartons les cas d'exception.

On aura ainsi

$$\Sigma(du_i)^2 = dv_1^2 + dv_2^2 + dv_3^2,$$

$$-U_0(du) = \frac{dv_1^2}{R_1} + \frac{dv_2^2}{R_2} + \frac{dv_3^2}{R_3},$$

en désignant par v_1, v_2, v_3 les trois nouvelles variables indépendantes.

On détermine de la sorte dans le complexe trois corrélations remarquables, orthogonales deux à deux, et que nous appellerons les *corrélations principales;* ce sont celles que l'on obtient en annulant deux à deux les différentielles dv_1, dv_2, dv_3.

Désignons par α_1 l'angle de la corrélation du complexe dont les coordonnées sont dv_i avec la corrélation principale $dv_2 = 0$, $dv_3 = 0$; de même pour les angles que nous appellerons α_2, α_3.

On a

$$\cos\alpha_i = \frac{dv_i}{\sqrt{dv_1^2 + dv_2^2 + dv_3^2}}.$$

Posons $\lambda = R$: l'équation (2) s'écrit

$$\frac{dv_1^2 + dv_2^2 + dv_3^2}{R} = \frac{dv_1^2}{R_1} + \frac{dv_2^2}{R_2} + \frac{dv_3^2}{R_3},$$

c'est-à-dire

$$(2') \qquad \frac{1}{R} = \frac{\cos^2\alpha_1}{R_1} + \frac{\cos^2\alpha_2}{R_2} + \frac{\cos^2\alpha_3}{R_3}.$$

L'équation possède ainsi la même forme que la relation d'Euler.

93. Les corrélations principales s'offrent à nous comme les analogues des tangentes aux lignes de courbure d'une surface.

Le théorème suivant rend cette analogie plus évidente.

Les complexes linéaires tangentes qui correspondent à une corrélation principale, c'est-à-dire qui sont osculateurs suivant une corrélation principale, sont des complexes linéaires tangents stationnaires (ce qui signifie que chacun d'eux est tangent au complexe proposé suivant *deux* droites infiniment voisines).

En effet, en général, la série quadratique qui correspond à la congruence que le complexe linéaire tangent (R) définit dans le complexe proposé est définie par l'équation (2), c'est-à-dire

$$(2) \qquad dv_1^2\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R}\right) + dv_2^2\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R}\right) + dv_3^2\left(\frac{1}{R_3} - \frac{1}{R}\right) = 0.$$

Or il a été démontré que, chaque fois que la série quadratique relative à la droite double d'une congruence provenant de deux complexes tangents se décomposait en deux séries linéaires, les deux complexes étaient tangents suivant deux droites consécutives. Les deux séries ont dans ce cas une corrélation commune : c'est celle que détermine sur la droite D de contact la droite de contact infiniment voisine D'.

Appliquons ce résultat au cas présent.

Pour $dv_2 = 0$, $dv_3 = 0$, l'équation (2) se réduit à

$$\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R} = 0, \quad \text{ou} \quad R = R_1.$$

Ainsi, à la corrélation principale (1, 0, 0) correspond le complexe linéaire tangent (R_1). Mais il est clair que pour $R = R_1$ la série quadratique se décompose; le théorème est donc démontré.

La corrélation $dv_2 = 0$, $dv_3 = 0$ est bien celle que définit sur D la droite de contact infiniment voisine.

Dans tout complexe il y a donc, en général, pour chaque droite trois complexes linéaires tangents stationnaires.

Ils correspondent à $R = R_1, R_2, R_3$.

C'est M. Klein qui a découvert ces complexes.

Considérons une surface réglée du complexe telle que la corrélation qu'elle définit sur chacune de ses génératrices soit une corrélation principale du complexe.

Nous appellerons, avec M. Klein, *surfaces principales du complexe* de pareilles surfaces.

Théorème. — *Par toute droite du complexe il passe, en général, trois surfaces principales qui sont en involution deux à deux.*

Exprimons en effet en fonction de trois variables p_1, p_2, p_3 les coordonnées des droites d'un complexe. La forme fondamentale devient $M(dp)$, et $U(du)$ devient $G(dp)$, où l'on a

$$\left.\begin{aligned} M(dp) &= \Sigma M_{ij}\, dp_i\, dp_j \\ G(dp) &= \Sigma G_{ij}\, dp_i\, dp_j \end{aligned}\right\} \quad (i = 1, 2, 3, \ldots).$$

Les racines de l'équation

$$\varphi(S) = \begin{vmatrix} M_{11} - SG_{11} & M_{12} - SG_{12} & M_{13} - SG_{13} \\ M_{21} - SG_{21} & M_{22} - SG_{22} & M_{23} - SG_{23} \\ M_{31} - SG_{31} & M_{32} - SG_{32} & M_{33} - SG_{33} \end{vmatrix} = 0$$

sont des invariants absolus. En prenant la droite pour Oz, on trouverait pour racines les quantités R_1, R_2, R_3. Désignons par S une quelconque de ces racines; on sait que $\varphi(S) = 0$ exprime la condition nécessaire et suffisante pour que les équations suivantes soient compatibles :

$$\frac{\partial M(dp)}{\partial dp_1} - S\frac{\partial G(dp)}{\partial dp_1} = 0, \quad \frac{\partial M}{\partial dp_2} - S\frac{\partial G}{\partial dp_2} = 0, \quad \frac{\partial M}{dp_3} - S\frac{\partial M}{dp_3} = 0.$$

L'une est alors une conséquence des deux autres. Considérons dès lors les trois groupes d'équations que l'on obtient en faisant successivement : $S = R_1, R_2, R_3$ dans les équations

$$\frac{\partial M}{\partial\, dp_1} - S\,\frac{\partial G}{\partial\, dp_1} = 0,$$

$$\frac{\partial M}{\partial\, dp_2} - S\,\frac{\partial G}{\partial\, dp_2} = 0.$$

En intégrant les équations de chaque groupe, on aura trois systèmes d'intégrales contenant chacun deux constantes arbitraires. Or il est clair que chaque intégrale définira une série de surfaces principales du complexe.

En effet, si l'on envisage une droite D de cette surface, en la prenant pour axe Oz, et faisant la transformation qui nous a amené à définir les corrélations principales, on reconnaît qu'elle définit une de ces corrélations sur la droite D.

Par toute droite du complexe on pourra donc, en général, faire passer une surface principale de chaque série, et ces surfaces y seront en involution, puisque les corrélations principales (qui sont les corrélations de Chasles) sont orthogonales.

94. L'espace représentatif qui généralise le système des points de départ de Malus permet de donner une image élégante des propriétés du second ordre des complexes, de les compléter.

L'équation (2) définit effectivement un faisceau de cônes du second degré, comprenant le cône de Malus, et la recherche des surfaces principales du complexe revient à celle du trièdre conjugué commun aux cônes de ce faisceau. Toute courbe dont la tangente en chaque point est l'une des trois arêtes du trièdre qui correspond ainsi à ce point représente une surface principale du complexe.

Les cônes du faisceau ont quatre génératrices communes. Ces génératrices représentent quatre corrélations anharmoniques singulières du complexe, et, par conséquent, quatre couples de la corrélation normale.

Ces couples seront les *couples inflexionnels* du complexe.

Il résulte de ce qui précède que la connaissance du faisceau des cônes suffit pour définir les propriétés du second ordre du complexe, pourvu que l'on sache quel est le complexe linéaire tangent qui correspond à un cône du faisceau déterminé.

Désignons par (o_1, ω_1), (o_2, ω_2), (o_3, ω_3), (o_4, ω_4) les couples inflexionnels.

D'abord, puisqu'ils appartiennent à la corrélation normale du complexe, ils sont en relation anharmonique, c'est-à-dire que les rapports anharmoniques

$$(o_1, o_2, o_3, o_4), \quad (\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4)$$

sont égaux.

De plus, il est aisé de voir que l'on peut déduire de ces couples les corrélations principales. Cela résulte évidemment de la considération des cônes représentatifs.

Mais on peut le voir encore en effectuant la construction.

Il suffit de grouper deux par deux les couples inflexionnels pour définir par leurs couples focaux six séries linéaires du complexe. Associons deux à deux ces séries, de sorte que deux séries associées n'aient pas de couple focal commun : on obtient trois groupes de séries, et les deux séries d'un même groupe ont leurs couples focaux en relation anharmonique. Les deux séries d'un même groupe ont, par conséquent, une corrélation commune, et les trois corrélations ainsi obtenues sont les corrélations principales.

On remarquera que les plans correspondant au point o_1 dans ces trois corrélations sont les plans ω_2, ω_3, ω_4.

Cette remarque permet de définir par trois couples chaque corrélation principale, ou plus exactement, par quatre couples en relation anharmonique.

C'est ainsi que les quatre couples situés sur une des trois lignes ci-dessous appartiennent à une même corrélation principale :

$$\begin{array}{llll}
(o_1, \omega_2), & (o_2, \omega_1), & (o_3, \omega_4), & (o_4, \omega_3), \\
(o_1, \omega_3), & (o_2, \omega_4), & (o_3, \omega_1), & (o_4, \omega_2), \\
(o_1, \omega_4), & (o_2, \omega_3), & (o_3, \omega_2), & (o_4, \omega_1).
\end{array}$$

95. Nous allons, dans ce qui suit, développer quelques propriétés des couples inflexionnels, qui donneront lieu à des rapprochements

entre la théorie des complexes et celle des équations aux dérivées partielles du premier ordre.

Supposons qu'on ait pris pour variables les coordonnées a, b, p, q de la ligne droite, l'axe Oz coïncidant avec la droite D, autour de laquelle on étudie le complexe, et la corrélation normale que le complexe définit sur D ayant pour point central l'origine, et pour plan central le plan zOx.

L'équation du complexe supposée développable s'écrira

$$p = Kb + Aa^2 + Bb^2 + Qq^2 + 2A'bq + 2B'aq + 2Q'ab + T_3,$$

où T_3 désigne l'ensemble des termes d'un degré supérieur au second par rapport à a, b, q.

L'équation générale des complexes linéaires tangents est

$$aq - bp - 2\lambda(Kb - p) = 0.$$

Si l'on substitue les coordonnées d'une droite $(da + \frac{1}{2}d^2a, \ldots)$ dans le premier membre de cette équation, et qu'on suppose que cette droite appartienne au complexe, on aura

$$dp = K\,db,$$
$$d^2p - Kd^2b = A\,da^2 + B\,db^2 + Q\,dq^2 + 2A'\,db\,dq + 2B'\,da\,dq + 2Q'\,da\,db,$$

ou, en désignant, pour abréger, par Θ le second membre de la dernière relation,

$$d^2p - Kd^2b = \Theta,$$

et le résultat de la substitution aura pour terme principal

$$da\,dq - K\,db^2 + \lambda\Theta.$$

On en conclut que les équations qui définissent les couples inflexionnels sont les suivantes :

$$da\,dq - K\,db^2 = 0, \quad \Theta = 0.$$

Posons

$$b = \rho a, \quad p = \sigma a, \quad q = \rho p = \rho\sigma a,$$

et portons ces valeurs dans l'équation du complexe, on trouve, après la suppression du facteur a,

$$\sigma = K\rho + (Q\rho^2\sigma^2 + 2A'\rho^2\sigma + B\rho^2 + 2B'\rho\sigma + 2Q'\rho + A)a + ma^2,$$

où m désigne une série entière par rapport à a.

Les équations de la droite sont les suivantes :

$$x = a(z + \sigma), \quad y = \rho a(z + \sigma),$$

d'où l'on conclut que, si dans l'équation précédente on laisse σ constant et qu'on fasse varier ρ et a, elle représentera le cône du complexe dont les coordonnées du sommet sont o, o, $-\sigma$.

Au contraire, en faisant varier σ et a, on aura, si ρ est constant, l'équation de la courbe enveloppe du complexe dans le plan qui a pour équation

$$y = \rho x.$$

Si l'on suppose a infiniment petit et égal à da, l'équation

$$\sigma = K\rho$$

définit la corrélation normale du complexe.

Or, supposons qu'un couple (ρ_0, σ_0) de cette corrélation soit tel que, en même temps que $\sigma_0 = K\rho_0$, le coefficient de a disparaisse. On exprimera par là même que la droite

$$da, \ db, \ dp, \ dq$$

du complexe, infiniment voisine de D, vérifie les deux équations

$$da\, dq - K db^2 = 0, \quad \Theta = 0.$$

On exprime donc que le couple (ρ_0, σ_0), auquel cette droite appartient, est un couple inflexionnel. Mais le système de valeurs (ρ_0, σ_0) peut être atteint en laissant constant soit $\sigma = \sigma_0$, soit $\rho = \rho_0$, et faisant varier soit ρ et a, soit a et σ.

Dans le premier cas, on voit que :

Le plan d'un couple inflexionnel est un plan tangent d'inflexion suivant la droite D *du cône du complexe dont le point du même couple est le sommet.*

La seconde manière montre au contraire la propriété corrélative, à savoir que :

Tout point d'un couple d'inflexion est un point de rebroussement de la courbe enveloppe du complexe relative au plan du même couple, et la droite D *est la tangente au point de rebroussement.*

Les couples d'inflexion forment donc, parmi les couples du complexe, une famille particulière. Un couple ordinaire ne contient que *deux* droites *infiniment voisines* du complexe. On peut dire que ce qui caractérise un couple inflexionnel, c'est d'en contenir *trois*.

Si l'on suppose que le complexe soit défini par l'équation générale

$$f(a, b, p, q) = 0,$$

en exprimant que le plan tangent suivant la droite (a, b, p, q) du complexe au cône de ce complexe est un plan tangent d'inflexion, on trouve aisément l'équation suivante qui, sur chaque droite du système, définit les quatre points des couples inflexionnels :

$$0 = \mathrm{L}(f'_b - zf'_q)^2 - 2\mathrm{M}(f'_b - zf'_q)(f'_a - zf'_p) + \mathrm{N}(f'_a - zf'_p)^2.$$

On a posé

$$\begin{aligned} \mathrm{L} &= f''_{a^2} - 2f''_{ap}z + f''_{p^2}z^2, \\ \mathrm{M} &= f''_{ab} - (f''_{aq} + f''_{bp})z + f''_{pq}z^2, \\ \mathrm{N} &= f''_{b^2} - 2f''_{bq}z + f''_{q^2}z^2. \end{aligned}$$

Les plans de ces couples seront donnés par l'équation

$$(\mathrm{X} - a\mathrm{Z} - p)(f'_a - zf'_p) + (\mathrm{Y} - b\mathrm{Z} - q)(f'_b - zf'_q) = 0,$$

qui représente en général le plan tangent suivant la droite (a, b, p, q) au cône du complexe dont les coordonnées du sommet sont

$$az + p, \quad bz + q, \quad z.$$

Il suffira de prendre pour z une des quatre racines de l'équation précédente.

96. Ce que nous venons de voir va nous permettre de définir dans le complexe une nouvelle série de surfaces remarquables.

Soient effectivement p_1, p_2, p_3 trois paramètres dont dépendent les coordonnées des droites du complexe, comme précédemment. Si l'on intègre le système d'équations différentielles

$$G(dp) = 0, \quad M(dp) = 0,$$

on obtiendra quatre séries de développables du complexe qui jouiront de cette propriété, que le point où une génératrice D quelconque touchera l'arête de rebroussement et le plan tangent tout du long de cette génératrice forment un couple inflexionnel.

Ce sont ces surfaces qui suffisent pour définir les propriétés du second ordre, puisque nous avons vu qu'on pouvait en déduire les corrélations principales et, par conséquent, les surfaces principales du complexe.

Les surfaces développables que nous venons de définir jouissent de la propriété d'être osculées par tous les complexes linéaires tangents du complexe proposé suivant chacune de leurs génératrices, puisque pour elles on a

$$G(dp) = 0 \quad \text{et} \quad M(dp) = 0.$$

Les courbes qui sont les arêtes de rebroussement de ces développables ne sont pas des courbes intégrales quelconques de l'équation aux dérivées partielles que le complexe définit. Elles admettent, en effet, pour tangentes les génératrices d'inflexion du cône du complexe.

Voici donc un nouveau genre de singularités qui s'offre, et qui est tout à fait analogue à celui que M. Darboux a découvert touchant les équations aux dérivées partielles.

97. Si l'on se donne, en effet, un système géométrique tel que tout point de l'espace soit le sommet d'un cône, et que tout plan de l'espace contienne une courbe déterminée, il y a lieu de distinguer suivant que le cône et la courbe relatifs à un couple du système sont définis l'un par ses plans tangents, l'autre par ses points, ou bien par les génératrices et les tangentes.

Dans la première manière, le système est défini par les surfaces intégrales; dans la seconde, par les courbes et les développables intégrales.

Tandis que dans le premier cas le cône admet normalement des plans tangents de rebroussement, et la courbe des points d'inflexion, dans le second, ces singularités sont normalement exclues et remplacées par des génératrices d'inflexion pour le cône, et par des tangentes de rebroussement pour la courbe.

M. Darboux a considéré le premier les courbes intégrales remarquables dont les tangentes sont précisément les arêtes de rebroussement des cônes du système.

Les singularités, à un certain point de vue, corrélatives de celles-là sont celles que nous signalons. Elles sont constituées par les développables enveloppées par les plans tangents d'inflexion, et par les courbes dont les tangentes sont des tangentes de rebroussement des courbes du système.

Dans le cas du complexe, nous trouvons ainsi les développables que nous avons définies plus haut, de même que leurs arêtes de rebroussement.

98. Nous avons, dans ce qui précède, supposé que les racines de l'équation $\varphi(S) = 0$ étaient inégales, finies et différentes de zéro. Les cas exceptionnels qui peuvent se présenter conduisent naturellement à de nouvelles singularités des complexes, et même à de nouveaux complexes particuliers, pour lesquels ces singularités se présentent pour toutes les droites.

Il peut arriver, par exemple, que $G(dp)$ et $M(dp)$ soient réductibles simultanément aux formes

$$a(dp_1^2 + dp_2^2) + a' dp_3^2$$

et

$$dp_1^2 + dp_2^2 + dp_3^2,$$

ou que $G(dp)$ ne diffère de $M(dp)$ que par un facteur indépendant des différentielles.

Dans le premier cas, il existe une série linéaire de corrélations principales en involution avec une corrélation principale particulière étrangère à la série.

Dans le second cas, toutes les corrélations du complexe sont principales.

Les droites où ces singularités se présentent offrent ainsi certaines analogies avec les ombilics des surfaces.

Mais nous n'entrerons pas dans de plus amples développements sur ce sujet, non plus que sur bien d'autres qui se présentent encore et dont l'étude se déduirait aussi, par des analogies diverses avec l'espace ponctuel, de la considération de la forme quadratique fondamentale.

Il nous suffit d'avoir montré l'importance de cette forme dans la Géométrie de l'espace réglé, et d'y avoir rattaché les propriétés infinitésimales de cet espace.