L. BOURGUET

Développement en séries des intégrales eulériennes

Annales scientifiques de l'É.N.S. 2e série, tome 10 (1881), p. 175-232
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1881_2_10__175_0>

DÉVELOPPEMENT

EN SÉRIES

DES INTÉGRALES EULÉRIENNES,

PAR M. L. BOURGUET,

PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES.

Les plus grands géomètres se sont occupés des intégrales eulériennes. Euler, qui leur a donné son nom, en a fait connaître les principales propriétés; mais Euler avait eu d'illustres précurseurs, qui avaient ouvert la voie des recherches.

Wallis, par la mémorable découverte de sa formule, avait attiré l'attention des savants sur l'importance des intégrales définies pour la détermination de certaines valeurs (exemple, π).

Stirling, dans son Ouvrage sur les séries, *Methodus differentialis, sive Tractatus de sommatione et interpolatione serierum infinitarum*, s'occupe de la détermination de $\log(1.2.3.4\ldots n) = \log\Gamma(n+1)$, ce qui est un cas particulier de l'intégrale eulérienne de seconde espèce. La série à laquelle il arrive est une des plus remarquables qu'on rencontre en Analyse. Elle ne fut d'abord établie que pour le cas où la variable est un nombre entier et positif. Elle a été ensuite généralisée. C'est surtout dans le Calcul des probabilités qu'elle est employée. Tout d'abord très convergente, elle devient divergente après un certain nombre de termes. Les géomètres ont attaché un grand intérêt à la détermination du reste et du nombre de termes à prendre pour obtenir le meilleur résultat. Je présenterai quelques observations à ce sujet dans ce travail.

Vandermonde, dans son Mémoire de 1772 (*Histoire de l'Académie royale des Sciences*, 1772), a signalé à l'attention des savants l'importance que peut avoir, en Analyse, le produit de facteurs en progression arithmétique et la généralisation de ce produit au moyen d'une fonction continue qui serait au produit ce que l'exponentielle est à la puissance.

Legendre a consacré aux intégrales eulériennes une partie de son *Traité des fonctions elliptiques*. Il a construit des Tables pour le calcul de $\Gamma(a)$. C'est lui qui le premier a désigné cette fonction par Γ; il représente l'intégrale de première espèce par $B(p,q)$. C'est Legendre qui a fait connaître la propriété $\Gamma(a+\frac{1}{2})\Gamma(a+1)=\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2a}}\Gamma(2a+1)$.

Krampt, dans son *Analyse des réfractions astronomiques*, après Vandermonde, s'est occupé de la généralisation du produit de facteurs en progression arithmétique. Malheureusement sa fonction est définie d'une manière peu précise, et il lui attribue toutes les propriétés démontrées pour le cas où la variable a une valeur entière et positive. Cette généralisation arbitraire a conduit Krampt dans un dédale de contradictions inextricable. Les explications qu'il donne dans le *Journal de Gergonne* ne me paraissent pas satisfaisantes.

Gauss a publié dans le *Journal de la Société royale de Gœttingue*, en 1812, un magnifique Mémoire sur le même sujet. Ce Mémoire a pour objet la série hypergéométrique

$$1+\frac{\alpha.\beta}{n.1}x+\frac{\alpha(\alpha+1).\beta(\beta+1)}{n(n+1).1.2}x^2+\ldots,$$

dont les propriétés, dans le cas de $x=1$, sont intimement liées aux intégrales eulériennes. L'illustre géomètre de Gœttingue a pris dans le Mémoire de Vandermonde quelques-unes des idées qu'il a développées si magistralement. C'est Gauss qui a mis $\Gamma(a+1)$ sous forme de produit indéfini. C'est aussi Gauss qui a fait connaître la propriété

$$\Gamma\left(1+\frac{1}{m}\right)\Gamma\left(1+\frac{2}{m}\right)\ldots\Gamma\left(1+\frac{m-1}{m}\right)=(\sqrt{2\pi})^{m-1}m^{-m+\frac{1}{2}}\Gamma(m),$$

propriété qui a été ensuite généralisée par Cauchy.

Binet a aussi publié, dans le XXVII^e Cahier du *Journal de l'École Poly-*

technique, un Mémoire très étendu sur les intégrales eulériennes. Ce géomètre s'est surtout préoccupé de trouver une série pouvant remplacer celle de Stirling et n'ayant pas le défaut de devenir divergente. Malheureusement les formules qu'il donne perdent en simplicité ce qu'elles gagnent en rigueur; elles se prêtent difficilement au calcul numérique. Il fait connaître plusieurs intégrales définies se rattachant aux intégrales eulériennes. C'est Binet qui, le premier, a fait connaître la relation

$$l\Gamma(n) = n(ln - 1) + l\sqrt{\frac{2\pi}{n}} + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} \frac{e^{x}(2 - x) - (2 + x)}{x^2(1 - e^{x})} e^{nx}\,dx.$$

Cauchy a écrit de nombreux Mémoires sur le même sujet. J'ai dit qu'il avait généralisé le théorème de Gauss. Il s'est aussi occupé de la formule de Binet (*Nouveaux exercices d'Analyse et de Physique*, t. II, p. 84).

M. Hermite a publié de nombreux travaux sur la même question. Je citerai un très beau et très élégant Mémoire, publié récemment dans les *Atti della reale Accademia di Torino* (vol. XIV), du savant professeur. Je demande à M. Hermite de prendre dans ce travail quelques-unes de ses idées.

N'y a-t-il pas présomption, après tant et de si illustres géomètres, de venir aborder le même sujet? Ne me suis-je pas fait illusion en pensant que je pouvais ajouter quelque chose à cette théorie?

Il m'a semblé :

1° Que les séries données par Binet et Stirling pouvaient encore se prêter à quelques développements;

2° Que le développement en série de $\frac{1}{\Gamma(x)}$, dont la possibilité a été démontrée par M. Weierstrass (*Journal de Crelle*, t. 51), pouvait avoir quelque utilité;

3° Que le développement de $\Gamma(x)$ pouvait aussi avoir son utilité.

4° M. Prym ayant donné à $\Gamma(x)$ une forme très remarquable, savoir

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\frac{1}{x+1} + \frac{1}{1.2}\frac{1}{x+2} - \frac{1}{1.2.3}\frac{1}{x+3} + \ldots + c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots,$$

dans laquelle les deux parties sont toujours convergentes, il m'a semblé qu'il y aurait intérêt à connaître la valeur numérique des coefficients $c_0, c_1, c_2, \ldots$.

Tels sont les quatre points qui forment le sujet de ce travail. Les résultats nouveaux consistent dans la détermination des coefficients des trois développements

$$\frac{1}{\Gamma(x)}, \quad \Gamma(x), \quad c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots.$$

On trouve dans les Traités de Calcul intégral les deux intégrales suivantes :

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x}\,dx = \frac{\pi}{\sin a\pi},$$

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1} - x^{-a}}{1-x}\,dx = 2\pi \cot a\pi.$$

Une des méthodes les plus élégantes d'intégration est celle que donnent MM. Briot et Bouquet dans leur *Traité des fonctions elliptiques*.

La première peut se déduire de la seconde, comme l'a très bien démontré M. Hermite.

En effet,

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty \frac{x^{a-1} - x^{-a} + x^{-\frac{1}{2}-a} - x^{-\frac{1}{2}+a}}{1-x}\,dx \\
&= 2\pi(\cot a\pi + \operatorname{tang} a\pi) = \int_0^\infty \frac{x^{a-1} + x^{-a-\frac{1}{2}}}{1 + x^{\frac{1}{2}}}\,dx \\
&= 2\int_0^\infty \frac{x^{2a-1} + x^{-2a}}{1+x}\,dx = 2\int_0^\infty \frac{x^{2a-1}}{1+x}\,dx + 2\int_0^\infty \frac{x^{-2a}}{1+x}\,dx \\
&= 4\int_0^\infty \frac{x^{2a-1}}{1+x}\,dx = \frac{4\pi}{\sin 2a\pi},
\end{aligned}$$

d'où

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x}\,dx = \frac{\pi}{\sin a\pi}.$$

Ces formules ne sont vraies que lorsque la partie réelle de a est comprise entre 0 et 1.

La première, qui joue un si grand rôle dans les fonctions eulériennes, a été donnée par Euler.

On peut changer les limites dans la seconde, car

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{a-1} - x^{-a}}{1 - x}\, dx = \int_0^1 \frac{x^{a-1} - x^{-a}}{1 + x}\, dx + \int_0^{\infty} \frac{x^{a-1} - x^{-a}}{1 + x}\, dx.$$

Or, la seconde intégrale se change en la première par la substitution de x^{-1} à la place de x. Donc

$$\int_0^1 \frac{x^{a-1} - x^{-a}}{1 - x}\, dx = \pi \cot a\pi,$$

ou bien

$$\int_{-\infty}^0 \frac{e^{ax} - e^{-(a-1)x}}{1 - e^x}\, dx = \pi \cot a\pi.$$

Cette dernière relation sert de lien et de transition entre les fonctions circulaires et les intégrales eulériennes.

En développant le premier membre de l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{x^{a-1} - x^{-a}}{1 - x}\, dx = \pi \cot a\pi,$$

il viendra

$$\begin{aligned}
\pi \cot a\pi &= \int_0^1 (x^{a-1} - x^{-a})\left(1 + x + x^2 + \ldots + \frac{x^n}{1 - x}\right) dx \\
&= \frac{1}{a} + \frac{1}{a+1} + \frac{1}{a+2} + \ldots + \frac{1}{a+n-1} + \frac{1}{a-1} + \frac{1}{a-2} + \ldots \\
&\quad + \frac{1}{a-n} + \int_0^1 \frac{x^{a-1} - x^{-a}}{1 - x}\, x\, dx.
\end{aligned}$$

Il ne suffit pas que la série soit convergente, quel que soit a, pour représenter le premier membre : il faut encore que l'intégrale qui représente le reste converge vers zéro, en même temps que n converge vers ∞. Or, je dis qu'il en est ainsi. Plus généralement, je dis que, quels que soient α et β,

$$\lim \int_0^1 \frac{x^{\alpha} - x^{\beta}}{1 - x}\, x^n\, dx = 0.$$

En effet, nous pouvons supposer que la partie réelle de α et β est positive; s'il en était autrement, on pourrait prendre sur n un nombre suffisant d'unités pour les porter sur α et β et satisfaire à la condition précédente. Cela posé, le rapport $\frac{x^\alpha - x^\beta}{1-x}$ ne devient infini pour aucune valeur de x comprise entre les limites d'intégration. Soient

$$\frac{x^\alpha - x^\beta}{1-x} = \mathrm{A} + \mathrm{B}i,$$

et A_1, B_1 les maxima de A et B entre les limites de l'intégration.

Le module de l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{x^\alpha - x^\beta}{1-x} x^n\,dx = \int_0^1 \mathrm{A}x^n\,dx + i\int_0^1 \mathrm{B}x^n\,dx$$

sera moindre que le module de

$$\frac{\mathrm{A}_1}{n+1} + i\frac{\mathrm{B}_1}{n+1},$$

qui a pour limite zéro.

Donc on a bien

$$\lim \int_0^1 \frac{x^\alpha - x^\beta}{1-x} x^n\,dx = 0.$$

Ainsi, pour toute valeur de a dont la partie réelle est comprise entre 0 et 1, on a bien

$$\pi \cot a\pi = \frac{1}{a} + \frac{1}{a+1} + \frac{1}{a+2} + \ldots + \frac{1}{a-1} + \frac{1}{a-2} + \frac{1}{a-3} + \ldots.$$

Comme les deux membres ne changent pas lorsqu'on augmente la variable de plusieurs unités, il résulte que l'égalité a lieu pour toutes les valeurs de a.

Cependant, en mettant ai à la place de a dans l'égalité précédente et en supposant que a tende vers l'infini, le premier membre a pour limite $\pm i\pi$, tandis que le second membre ne tend pas vers cette limite;

ce paradoxe, signalé par Eisenstein, a été expliqué par M. Hermite, en tenant compte de la valeur que prend l'intégrale qui forme la partie complémentaire de la série (*Atti della reale Accademia delle Scienze di Torino*, vol. XIV).

Multiplions les deux membres de l'égalité précédente par da et intégrons depuis $a=0$ jusqu'à a :

$$l\frac{\sin a\pi}{a\pi} = l\left(1-\frac{a^2}{1}\right)\left(1-\frac{a^2}{2^2}\right)\left(1-\frac{a^2}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{a^2}{n^2}\right)+\int_0^a \mathrm{R}\,da,$$

d'où

$$\sin a\pi = a\pi\left(1-\frac{a^2}{1}\right)\left(1-\frac{a^2}{2^2}\right)\left(1-\frac{a^2}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{a^2}{n^2}\right)e^{\int_0^a \mathrm{R}\,da}.$$

Soit R_1 le maximum du module de R; le module de $\int_0^a \mathrm{R}\,da$ est plus petit que $\mathrm{R}_1\int_0^a da$, qui a pour limite zéro. Donc le produit du second membre a pour limite $\sin a\pi$.

Revenons à l'égalité

$$l\frac{\sin a\pi}{\pi} = la + l\left(1+\frac{a}{1}\right)+l\left(1+\frac{a}{2}\right)+\ldots+l\left(1+\frac{a}{n-1}\right)+l\left(1-\frac{a}{1}\right)$$

$$+l\left(1-\frac{a}{2}\right)+\ldots+l\left(1-\frac{a}{n-1}\right)+l\left(1-\frac{a}{n}\right)+\int_0^1\int_0^a \frac{x^{a-1}-x^{-a}}{1-x}x^n\,dx\,da$$

$$= la + l\left(1+\frac{a}{1}\right)+\ldots+l\left(1+\frac{a}{n-1}\right)+l\left(1-\frac{a}{1}\right)+\left(1-\frac{a}{2}\right)+\cdots$$

$$+l\left(1-\frac{a}{n}\right)+\int_{-\infty}^0\int_0^a \frac{e^{ax}-e^{-(a-1)x}}{1-e^x}e^{nx}\,dx\,da$$

$$= la + l\left(1+\frac{a}{1}\right)+l\left(1+\frac{a}{2}\right)+\ldots+l\left(1+\frac{a}{n-1}\right)+l\left(1-\frac{a}{1}\right)$$

$$+l\left(1-\frac{a}{2}\right)+\ldots+l\left(1-\frac{a}{n}\right)+\int_{-\infty}^0 \frac{e^{ax}+e^{-(a-1)x}-e^x-1}{x(1-e^x)}e^{nx}\,dx.$$

Multiplions encore les deux membres par da et intégrons depuis $a=0$

jusqu'à $a=1$, et, pour cela, remarquons que

$$\int lx\,dx = x(lx-1),$$

$$\int l\left(1+\frac{x}{k}\right)dx = \int[-lk+l(k+x)]\,dx = -x\,lk+(k+x)[l(k+x)-1],$$
$$=(k+x)\,l\left(1+\frac{x}{k}\right)-x,$$

d'où

$$\int_0^1 la\,da = -1,$$

$$\int_0^1 l\left(1+\frac{a}{k}\right)da = -1+(k+1)\,l\left(1+\frac{1}{k}\right);$$

de là il vient

$$\int_0^1 l\left(1+\frac{a}{k}\right)da+\int_0^1 l\left(1-\frac{a}{k+1}\right)da = (2k+1)\,l\,\frac{k+1}{k}-2,$$

et par suite

$$\int_0^1 l\frac{\sin a\pi}{\pi}\,da = -2n+3(l2-l1)+5(l3-l2)+7(l5-l3)+\ldots$$
$$+(2n-1)[ln-l(n-1)]+\int_{-\infty}^0\frac{e^x(2-x)-(2+x)}{x^2(1-e^x)}e^{nx}\,dx$$
$$=-2n-2\,l(1.2.3\ldots n-1)+(2n-1)\,ln+\mathrm{R}.$$

Cherchons l'intégrale du premier membre

$$\int_0^1 l\frac{\sin a\pi}{\pi}\,da.$$

Voici la méthode employée par Cauchy et par M. Hermite.

Posons

$$f(a) = l\frac{\sin a\pi}{\pi},$$

d'où

$$f(a) = f(1-a) = f\left(\frac{a}{2}\right)+f\left(\frac{1-a}{2}\right)+l2\pi,$$

et

$$\int_0^1 f(a)\,da = \int_0^1 f\left(\frac{a}{2}\right) da + \int_0^1 f\left(\frac{1-a}{2}\right) da + l\,2\pi,$$

ou bien, à cause de la relation $f(a) = f(1-a)$,

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(a)\,da &= \int_0^1 f\left(\frac{a}{2}\right) da + \int_0^1 f\left(\frac{1-a}{2}\right) da + l\,2\pi\\ &= 2\int_0^1 f\left(\frac{a}{2}\right) da + l\,2\pi\\ &= 4\int_0^{\frac{1}{2}} f(a)\,da + l\,2\pi\\ &= 2\int_0^1 f(a)\,da + l\,2\pi = \int_0^1 f(a)\,da.\end{aligned}$$

Donc

$$\int_0^1 f(a)\,da = -l\,2\pi,$$

et finalement on a la relation de Binet

$$\begin{aligned}&l(1.2.3\ldots n-1)\\ &= n(ln-1) + l\sqrt{\frac{2\pi}{n}} + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^0 \frac{e^x(2-x)-(2+x)}{x^2(1-e^x)}\, e^{nx}\,dx = l\,\Gamma(n).\end{aligned}$$

Cette formule n'est démontrée que pour n entier et positif; mais elle est aussi vraie pour toutes les autres valeurs de n : c'est ce que je vais faire voir.

Posons

$$F(a) = a(la-1) + l\sqrt{\frac{2\pi}{a}} + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^0 \frac{e^x(2-x)-(2+x)}{x^2(1-e^x)}\, e^{ax}\,dx.$$

On déduit de là

$$F''(a) = \frac{1}{a} + \frac{1}{2a^2} + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^0 \frac{e^x(2-x)-(2+x)}{1-e^x}\, e^{ax}\,dx,$$

et, en développant l'intégrale et remarquant que

$$\int_{-\infty}^{0} [e^x(2-x)-(2+x)]\, e^{(a+n)x}\,dx$$
$$=\frac{1}{(a+n+1)^2}+\frac{1}{(a+n)^2}-\frac{2}{(a+n)}+\frac{2}{(a+n+1)},$$

il viendra

$$F''(a)=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{(a+1)^2}+\frac{1}{(a+2)^2}+\ldots.$$

Donc

$$F''(a)=[l\,\Gamma(a)]''.$$

Par conséquent, $F(a)$ et $l\Gamma(a)$ ne peuvent différer que par un binôme du premier degré; comme d'ailleurs ces fonctions sont égales pour toutes les valeurs entières et positives de a, elles sont identiques.

$$\frac{\Gamma(n+1)}{a^{n+1}}=\int_0^\infty x^n e^{-ax}\,dx.$$

Si dans cette formule nous mettons successivement, à la place de a, $a+1$, $a+2$, ..., $a+\infty$, et si nous ajoutons, il viendra

$$\Gamma(n+1)\,\mathrm{S}\frac{1}{(a+1)^{n+1}}=\int_0^\infty x^n\left(e^{-(a+1)x}+e^{-(a+2)x}+\ldots\right)dx$$
$$=\int_0^\infty x^n\left(\frac{e^{-(a+1)x}}{1-e^{-x}}\right)dx$$
$$=\int_0^\infty \frac{x^n e^{-ax}}{e^x-1}\,dx$$

ou bien encore

$$\frac{n}{(n+1)(n+2)}\,\mathrm{S}\frac{1}{(a+1)^{n+1}}=\frac{n}{\Gamma(n+3)}\int_0^\infty\frac{x^n e^{-ax}}{e^x-1}\,dx.$$

Faisons successivement $n=1, 2, 3, \ldots, n$, et ajoutons; nous obtiendrons

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2.3}\left[\frac{1}{(a+1)^2}+\frac{1}{(a+2)^2}+\ldots\right]\\
&\quad+\frac{2}{3.4}\left[\frac{1}{(a+1)^3}+\frac{1}{(a+2)^3}+\ldots\right]\\
&\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\quad+\frac{n}{(n+1)(n+2)}\left[\frac{1}{(a+1)^{n+1}}+\frac{1}{(a+2)^{n+1}}+\ldots\right]\\
&=\int_0^\infty\frac{e^{-ax}}{e^x-1}\left(\frac{x}{1.2.3}+\frac{2x^2}{1.2\ldots4}+\frac{3x^3}{1.2\ldots5}+\ldots+\frac{nx^n}{1.2\ldots n+2}\right)dx.
\end{aligned}$$

Le premier membre, prolongé jusqu'à $n=\infty$, formera une série convergente, si le module de chacun des termes $a+1, a+2, a+3, \ldots$ est plus grand que 1. Quant au second membre, il égale

$$\int_0^\infty\frac{-e^x(2-x)+(2+x)}{x^2(e^x-1)}e^{-ax}dx=\int_{-\infty}^0\frac{e^x(2-x)-(2+x)}{x^2(1-e^x)}e^{ax}dx.$$

Donc

$$l\Gamma(a)=a(la-1)+l\sqrt{\frac{2\pi}{a}}+\frac{1}{2}\left\{\begin{array}{l}
\dfrac{1}{2.3}\left[\dfrac{1}{(a+1)^2}+\dfrac{1}{(a+2)^2}+\ldots\right],\\
\dfrac{2}{3.4}\left[\dfrac{1}{(a+1)^3}+\dfrac{1}{(a+2)^3}+\ldots\right],\\
\dfrac{3}{4.5}\left[\dfrac{1}{(a+1)^4}+\dfrac{1}{(a+2)^4}+\ldots\right],\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right.$$

Telle est la première expression de $l\Gamma(a)$ donnée par Binet. Cette série est convergente pour toutes les valeurs de a telles que le module de chacun des termes $a+1$, $a+2$, $a+3$, ... soit plus grand que 1, mais elle se prête difficilement au calcul numérique.

Une série bien connue de Stirling est la suivante :

$$\frac{1}{p-a}=\frac{1}{p}+\frac{a}{p(p+1)}+\frac{a(a+1)}{p(p+1)(p+2)}+\ldots.$$

La démonstration de cette égalité est au reste bien simple :

$$\frac{a(a+1)\ldots(a+k-1)}{p(p+1)\ldots(p+k)} = \left[\frac{a(a+1)\ldots(a+k-1)}{p(p+1)\ldots(p+k-1)} - \frac{a(a+1)\ldots(a+k)}{p(p+1)\ldots(p+k)}\right]\frac{1}{p-a},$$

d'où résulte immédiatement la démonstration de la formule de Stirling. Cette série est convergente si la partie réelle de p est plus grande que la partie réelle de a.

On tire de cette formule

$$\begin{aligned}\frac{1}{p(p-a)} &= \frac{1}{p[(p+1)-(a+1)]}\\ &= \frac{1}{p(p+1)} + \frac{a+1}{p(p+1)(p+2)} + \frac{(a+1)(a+2)}{p(p+1)(p+2)(p+3)} + \ldots\\ &= \frac{1}{p^2} + \frac{a}{p^3} + \frac{a^2}{p^4} + \frac{a^3}{p^5} + \ldots.\end{aligned}$$

Si, dans cette égalité, nous mettons à la place de p successivement $p+1, p+2, \ldots, p+\infty$, et si nous ajoutons toutes ces égalités, en remarquant qu'on a identiquement

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)\ldots(k+i)} = \frac{1}{i}\left[\frac{1}{k(k+1)\ldots(k+i-1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)\ldots(k+i)}\right]$$

et que, par suite,

$$\sum_k^\infty \frac{1}{k(k+1)\ldots(k+i)} = \frac{1}{i}\,\frac{1}{k(k+1)\ldots(k+i-1)},$$

il viendra

$$\begin{aligned}&\mathbf{S}\frac{1}{(p+1)^2} + a\,\mathbf{S}\frac{1}{(p+1)^3} + a^2\,\mathbf{S}\frac{1}{(p+1)^4} + \ldots\\ &\quad = \frac{1}{p+1} + \frac{1}{2}\,\frac{a+1}{(p+1)(p+2)} + \frac{1}{3}\,\frac{(a+1)(a+2)}{(p+1)(p+2)(p+3)} + \ldots.\end{aligned}$$

Le premier membre, étant le développement de $\mathbf{S}\dfrac{1}{(p+1)(p+1-a)}$ suivant les puissances croissantes de a, sera convergent pour toute valeur de a dont le module sera inférieur au plus petit module des quantités $p+1, p+2, p+3, \ldots, p+\infty$.

Pour le second membre, la condition nécessaire et suffisante pour la convergence est que la partie réelle de a soit plus petite que la partie réelle de $p+1$. Pour le démontrer, j'établirai d'abord le lemme suivant, qui pourra être utile dans plusieurs cas :

LEMME. — *Soit* $1-\varepsilon_i$ *le rapport du* $i^{\text{ième}}$ *terme d'une série au précédent; la série sera convergente ou divergente suivant qu'on aura* (ε_i *étant réel et positif*)

$$\varepsilon_i+\varepsilon_{i+1}+\varepsilon_{i+2}+\ldots+\varepsilon_{2i}\gtrless l2.$$

Prenons dans la série les termes $u_i, u_{2i}, u_{4i}, \ldots$ et formons la série suivante :

$$iu_i+2iu_{2i}+4iu_{4i}+\ldots.$$

On sait que la proposée et celle-ci sont convergentes ou divergentes en même temps. Dans cette dernière, le rapport d'un terme au précédent est $2\dfrac{u_{2ki}}{u_{ki}}$ ou plus simplement

$$2\frac{u_{2i}}{u_i}=2(1-\varepsilon_i)(1-\varepsilon_{i+1})(1-\varepsilon_{i+2})\ldots(1-\varepsilon_{2i}).$$

Posons

$$1-\varepsilon_i=e^{-\alpha},\quad \text{d'où}\quad \alpha=\varepsilon_i+\tfrac{1}{2}\varepsilon_i^2+\tfrac{1}{3}\varepsilon_i^3+\ldots$$

et, par suite,

$$1-\varepsilon_i=e^{-\varepsilon_i-\frac{1}{2}\varepsilon_i^2-\frac{1}{3}\varepsilon_i^3-\ldots},$$

d'où

$$2\frac{u_{2i}}{u_i}=2e^{-(\varepsilon_i+\varepsilon_{i+1}+\ldots+\varepsilon_{2i})-\omega}.$$

La série sera donc convergente ou divergente, suivant qu'on aura

$$\varepsilon_i+\varepsilon_{i+1}+\ldots+\varepsilon_{2i}\gtrless l2.$$

Supposons, en second lieu, que ε_i soit de la forme $\alpha+\beta\sqrt{-1}$; le rapport des modules de deux termes consécutifs sera égal à

$$\sqrt{(1-\alpha)^2+\beta^2}=1-\alpha+\omega.$$

Les modules formeront donc une série convergente si les parties positives de ε satisfont à la relation précédente.

Comme application, cherchons les conditions de convergence de la série hypergéométrique de Gauss

$$1 + \frac{pq}{1\ldots n} + \frac{p(p+1)q(q+1)}{1.2\ldots n(n+1)} + \ldots.$$

Le rapport du $i^{\text{ième}}$ terme au précédent est

$$\frac{(p+i)(q+i)}{i(n+i)} = \left(1+\frac{p}{i}\right)\left(1+\frac{q-n}{n+i}\right) = 1 + \frac{p}{i} + \frac{q-n}{n+i} + \omega.$$

Donc la condition de convergence sera

$$(n-q)\left(\frac{1}{n+i} + \frac{1}{n+i+1} + \frac{1}{n+i+2} + \cdots + \frac{1}{n+2i}\right)$$
$$-p\left(\frac{1}{i} + \frac{1}{i+1} + \frac{1}{i+2} + \cdots + \frac{1}{2i}\right) + \Omega > l2.$$

Mais

$$\frac{1}{n+i} + \frac{1}{n+i+1} + \frac{1}{n+i+2} + \cdots + \frac{1}{n+2i} = l2 + \omega,$$
$$\frac{1}{i} + \frac{1}{i+1} + \cdots + \frac{1}{2i} = l2 + \omega';$$

donc, finalement, la condition de convergence est

$$n > p + q + 1.$$

Pour la série que nous étudions, le rapport d'un terme au précédent est

$$\frac{i}{i+1}\,\frac{a+i}{p+i+1} = \left(1-\frac{1}{i+1}\right)\left(1-\frac{p-a+1}{p+i+1}\right) = 1 - \frac{1}{i+1} - \frac{p-a+1}{p+i+1} + \omega,$$

et l'on trouverait, comme dans le cas précédent, pour condition de convergence,

$$a < p + 1,$$

les quantités a, p étant réduites à leur partie réelle.

Ainsi donc, pour toutes les valeurs de a satisfaisant aux deux conditions précédentes, savoir module de a plus petit que mod $p+k+1$ et partie réelle de a plus petite que partie réelle de $p+1$, on a

$$\mathrm{S}\frac{1}{(p+1)^2}+a\,\mathrm{S}\frac{1}{(p+1)^2}+a^2\,\mathrm{S}\frac{1}{(p+1)^3}+\ldots=\frac{1}{(p+1)}+\frac{a+1}{(p+1)(p+2)}+\ldots.$$

Puisque les deux membres sont identiques, on peut remplacer les puissances de a par des quantités égales, dans les deux membres. Remplaçons a^n par $\frac{n+1}{(n+2)(n+3)}$, et l'égalité précédente deviendra

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2.3}\left[\frac{1}{(p+1)^2}+\frac{1}{(p+2)^2}+\ldots\right]\\
&+\frac{2}{3.4}\left[\frac{1}{(p+1)^3}+\frac{1}{(p+2)^3}+\ldots\right]\\
&+\frac{3}{4.5}\left[\frac{1}{(p+1)^4}+\frac{1}{(p+2)^4}+\ldots\right]\\
&+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&=\frac{\frac{1}{6}}{p+1}+\frac{1}{2}\frac{\mathrm{I}_1}{(p+1)(p+2)}+\frac{1}{3}\frac{\mathrm{I}_2}{(p+1)(p+2)(p+3)}+\ldots.
\end{aligned}$$

Les nombres $\mathrm{I}_1, \mathrm{I}_2, \mathrm{I}_3, \ldots$ se forment de la manière suivante. On développe, par exemple, $(a+1)(a+2)\ldots(a+i)=\mathrm{A}_0^i+\mathrm{A}_1^i a+\mathrm{A}_2^i a^2+\ldots+\mathrm{A}_i a^i$; puis on remplace a^k par $\frac{k+1}{(k+2)(k+3)}$. Si à présent nous faisons

$$\mu(a)=\frac{\frac{1}{6}}{a+1}+\frac{1}{2}\frac{\mathrm{I}_1}{(a+1)(a+2)}+\frac{1}{3}\frac{\mathrm{I}_3}{(a+1)(a+2)(a+3)}+\ldots,$$

il viendra

$$l\Gamma(a)=a(la-1)+l\sqrt{\frac{2\pi}{a}}+\frac{1}{2}\mu(a).$$

Telle est la formule que donne Binet pour calculer $l\Gamma(a)$.

Ici trois questions se présentent : 1° Dans quelles limites la série est-elle convergente? 2° Quel est le reste de cette série lorsqu'on l'arrête à un terme donné? 3° Combien faut-il prendre de termes pour obtenir une approximation déterminée?

Nous avons vu que, pour former I_i, il fallait développer $(a+1)(a+2)(a+3)\ldots(a+i)$ et remplacer a^k par $\frac{k+1}{(k+2)(k+3)}$; la plus grande de ces valeurs est $\frac{1}{6}$ et la plus petite $\frac{i+1}{(i+2)(i+3)}$. Donc on a

$$\frac{1}{6}(A_0^i + A_1^i + \ldots + A_i^i) > I_i > \frac{i+1}{(i+2)(i+3)}(A_0^i + A_1^i + \ldots + A_i^i);$$

Or

$$A_0 + A_1^i + A_2^i + \ldots + A_i^i = 1.2.3\ldots i+1;$$

donc

$$\frac{1}{6}\cdot 1.2.3\ldots(i+1) > I_i > \frac{i+1}{(i+2)(i+3)}\cdot 1.2.3\ldots(i+1)$$

Un terme de rang i est donc compris entre

$$\frac{\frac{1}{6}}{i+1}\,\frac{1.2\ldots(i+1)}{(a+1)(a+2)\ldots(a+i+1)} = \frac{\frac{1}{6}}{i^{a+1}}\,i^{a+1}\,\frac{1.2\ldots i}{(a+1)(a+2)\ldots(a+i+1)}$$

et

$$\frac{i+1}{(i+2)(i+3)}\,\frac{1.2\ldots i}{(a+1)(a+2)\ldots(a+i+1)}$$
$$= \frac{i+1}{(i+2)(i+3)\,i^{a+1}}\,i^{a+1}\,\frac{1.2\ldots i}{(a+1)(a+2)\ldots(a+i+1)},$$

et ces quantités, pour des valeurs considérables de i, sont sensiblement égales à

$$\frac{1}{6}\,\frac{1}{i^{a+1}}\Gamma(a+1) \quad \text{et} \quad \frac{1}{(i+3)^{a+2}}\Gamma(a+1).$$

Par conséquent, en arrêtant la série au $i^{\text{ième}}$ terme, le reste sera compris entre

$$\frac{1}{6}\Gamma(a+1)\,\mathrm{S}\,\frac{1}{(i+1)^{a+1}} \quad \text{et} \quad \Gamma(a+1)\,\mathrm{S}\,\frac{1}{(i+4)^{a+2}}$$

On voit par là que la série est convergente pour toute valeur de a dont la partie réelle est positive, et nous avons deux limites entre lesquelles sera compris le reste. Cependant les changements que nous avons faits ayant pour effet de diminuer un peu les termes, la première limite pourra ne pas être une limite supérieure pour de petites valeurs de i; mais la seconde sera toujours une limite inférieure.

Si dans ces expressions on remplace $\Gamma(a+1)$ par sa valeur approchée, ce qui aura encore pour effet de diminuer les limites, on aura

$$\frac{1}{6}\,\frac{(a+1)^{a+\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi}}{e^{a+1}}\,\mathrm{S}\,\frac{1}{(i+1)^{a+1}} \quad \text{et} \quad \frac{(a+1)^{a+\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi}}{e^{a+1}}\,\mathrm{S}\,\frac{1}{(i+4)^{a+2}},$$

et, en tenant compte des relations données par Euler, savoir

$$\frac{1}{ai^a} > \mathrm{S}\,\frac{1}{(i+1)^{a+1}} > \frac{1}{a(i+1)^a},$$

il viendra

$$\frac{1}{6}\,\frac{(a+1)^{a+\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi}}{e^{a+1}}\,\mathrm{S}\,\frac{1}{(i+1)^{a+1}} < \frac{\sqrt{2\pi(a+1)}}{6ae}\left(\frac{a+1}{ie}\right)^a$$

$$\frac{(a+1)^{a+\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi}}{e^{a+1}}\,\mathrm{S}\,\frac{1}{(i+4)^{a+2}} > \frac{e\sqrt{2\pi}}{(a+1)^{\frac{3}{2}}}\left[\frac{a+1}{(i+4)e}\right]^{a+2}.$$

On voit par là que le nombre de termes à prendre ne peut pas être moindre que $\frac{a+1}{e}-4$. Ainsi il faut prendre, dans la série, un nombre de termes d'autant plus grand que a est plus grand. Si, par exemple, pour $a=100$, on voulait avoir $\mu(a)$ avec treize décimales exactes, il faudrait prendre de quarante-huit à cinquante termes.

Ainsi, la formule de Binet a l'avantage théorique d'être convergente pour toute valeur de a dont la partie réelle est positive, mais elle a le désavantage d'être très peu convergente.

(*Voir*, à la fin, le Tableau des coefficients A, jusqu'à douze facteurs, et des dix premiers coefficients I.)

Les coefficients I peuvent aussi se mettre sous forme d'intégrale définie,

$$\mathrm{A}_i\,\frac{i+1}{(i+2)(i+3)} = \mathrm{A}_i\left[\frac{2}{i+3}-\frac{1}{(i+2)}\right] = 2\int_0^1 \mathrm{A}_i a^{i+2}\,da - \int_0^1 \mathrm{A}_i a^{i+1}\,da.$$

Donc

$$\mathrm{I}_k = \int_0^1 a(a+1)\ldots(a+k)(2a-1)\,da.$$

Une autre formule pour le calcul de $\mu(a)$ est celle de Stirling, dont je vais parler à présent :

$$\int_0^1 x^p (lx)^{2n-1}\, dx = -\frac{1.2.3\ldots 2n-1}{(p+1)^{2n}}.$$

Donc

$$\int_0^1 \frac{(lx)^{2n-1}}{(1-x)}\, dx = \int_0^1 (lx)^{2n-1}\, dx (1 + x + x^2 + x^3 + \ldots)$$

$$= -1.2\ldots 2n-1 \left(1 + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \ldots\right)$$

$$= -\frac{2^{2n-2}}{n}\, \pi^{2n} B_n.$$

B_n représente le $n^{\text{ième}}$ nombre de Bernoulli.

Faisons $x = e^{-z}$, $dx = -e^{-z}dz$; il viendra

$$\int_0^\infty \frac{z^{2n-1}\, dz}{e^z - 1} = \frac{2^{2n-2}}{n}\, \pi^{2n} B_n$$

ou bien encore, en faisant $z = 2\pi y$,

$$\int_0^\infty \frac{y^{2n-1}\, dy}{e^{2\pi y} - 1} = \frac{1}{4n}\, B_n.$$

Considérons à présent l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{\sin mx}{e^{2\pi x} - 1}\, dx = \int_0^\infty \frac{dx}{e^{2\pi x} - 1}\left(mx - \frac{m^3 x^3}{1.2.3} + \ldots\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{B_1}{1.2}\, m - \frac{B_2}{1.2.3.4}\, m^3 + \frac{B_3}{1.2\ldots 6}\, m^5 - \ldots\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{e^m + 1}{e^m - 1} - \frac{2}{m}\right).$$

Telle est la formule donnée par Poisson (*Journal de l'École Polytechnique*, XVIII^e Cahier), et dont nous allons déduire celle de Stirling.

$$-\int_{-\infty}^0 e^{ax}\left(\frac{1+e^x}{1-e^x} + \frac{2}{x}\right) dx = 4\int_{-\infty}^0 \cdot x \int_0^\infty \frac{e^{ax} \sin xt}{e^{2\pi t} - 1}\, dt = 4\int_0^\infty \frac{t\, dt}{(t^2+a^2)(e^{2\pi t}-1)}.$$

Multiplions les deux membres par da et intégrons depuis a jusqu'à ∞ :

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{e^x(2-x)-(2+x)}{x^2(1-e^x)}\, e^{ax}\, dx = 4\int_0^\infty \frac{dt}{e^{2\pi t}-1} \operatorname{arc\,tang} \frac{t}{a}.$$

Donc

$$\tfrac{1}{2}\mu(a) = 2\int_0^\infty \frac{dt}{e^{2\pi t}-1} \operatorname{arc\,tang} \frac{t}{a},$$

d'où, en intégrant par parties,

$$\tfrac{1}{2}\mu(a) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{a\,dt}{(t^2+a^2)}\, l\,\frac{1}{1-e^{-2\pi t}} = \frac{1}{\pi}\int_0 \frac{dt}{1+t^2}\, l\,\frac{1}{1-e^{-2\pi a t}}.$$

De même, en intégrant par parties,

$$\int_0^\infty t^{2n}\, l\,\frac{1}{1-e^{-2\pi t}}\, dt = \left(\frac{1}{2n+1}\, t^{2n+1}\, l\,\frac{1}{1-e^{-2\pi t}}\right)_0^\infty$$
$$+\frac{2\pi}{2n+1}\int_0^\infty \frac{t^{2n+1}\,dt}{e^{2\pi t}-1} = \frac{\pi B_{n+1}}{(2n+1)(2n+2)}.$$

D'autre part, nous avons trouvé plus haut

$$\tfrac{1}{2}\mu(a) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{a\,dt}{t^2+a^2}\, l\,\frac{1}{1-e^{-2\pi t}}$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty dt\left(\frac{1}{a}-\frac{t^2}{a^3}+\frac{t^4}{a^5}+\ldots\pm\frac{t^{2n-2}}{a^{2n-1}}\mp\frac{\dfrac{t^{2n}}{a^{2n+1}}}{1+\dfrac{t^2}{a^2}}\right) l\,\frac{1}{1-e^{-2\pi t}},$$

d'où

$$\tfrac{1}{2}\mu(a) = \frac{B_1}{1.2}\,\frac{1}{a}-\frac{B_2}{3.4}\,\frac{1}{a^3}+\frac{B_3}{5.6}\,\frac{1}{a^5}+\ldots\pm\frac{B_n}{(2n-1)2n}\,\frac{1}{a^{2n-1}}\mp R_n,$$

$$R_n = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{t^{2n}}{1+t^2}\, l\,\frac{1}{1-e^{-2\pi a t}}\, dt = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{t^{2n}}{a^{2n-1}}\,\frac{dt}{t^2+a^2}\, l\,\frac{1}{1-e^{-2\pi t}}.$$

Telle est la formule de Stirling, l'une des plus importantes qu'on rencontre en Analyse.

La série

$$1 - \frac{t^2}{a^2} + \frac{t^4}{a^4} - \dots$$

représente bien $\dfrac{1}{1 + \dfrac{t^2}{a^2}}$ pour toutes les valeurs de t dont le module est inférieur à celui de a; mais pour des modules supérieurs la série devient divergente, et, comme t passe par toutes les valeurs depuis 0 jusqu'à ∞, il résulte que, dans l'intégration, on doit tenir compte du reste. Et ici se présentent deux questions importantes :

1° Combien de termes faut-il prendre pour obtenir le meilleur résultat?

2° Quelle est l'erreur du résultat lorsqu'on s'arrête à un terme donné?

Nous avons trouvé

$$T_n = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty t^{2n-2}\, l\,\frac{1}{1 - e^{-2\pi a t}}\, dt = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{t^{2n-2}}{a^{2n-1}}\, l\,\frac{1}{1 - e^{-2\pi t}}\, dt$$

$$R_n = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{t^{2n}}{1+t^2}\, l\,\frac{1}{1 - e^{-2\pi a t}}\, dt;$$

ou

$$R_n = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty t^{2n}\, l\,\frac{1}{1 - e^{-2\pi a t}}\, dt - \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\, l\,\frac{1}{1 - e^{-2\pi a t}}\, dt;$$

par suite,

$$T_{n+1} = R_n + R_{n+1}.$$

Il résulte de cette relation qu'un reste quelconque est plus petit que le terme qui le précède et que celui qui le suit.

En comparant deux restes consécutifs,

$$R_{n-1} - R_n = \int_0^\infty \frac{t^{2n-2}(1 - t^2)}{1+t^2}\, l\,\frac{1}{1 - e^{-2\pi a t}}\, dt,$$

on voit que leur différence va toujours en diminuant à mesure que n augmente, car les éléments positifs de l'intégrale vont en diminuant et les éléments négatifs en augmentant. Cette différence est d'abord positive : les restes vont en diminuant et en se rapprochant; puis elle devient négative : les restes vont en augmentant et en s'éloignant.

La même remarque s'applique aux termes.

Si nous considérons la série des restes et la série des termes, il viendra

$$
\begin{aligned}
R_0 &+ R_1 = T_1,\\
R_1 &+ R_2 = T_2,\\
R_2 &+ R_3 = T_3,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
R_{n-1} &+ R_n = T_n;
\end{aligned}
$$

on voit que, si T_n est le plus petit terme, le plus petit reste sera ou R_n ou R_{n-1}. De là cette conclusion importante :

La série va en convergeant tant que les termes vont en diminuant et s'approche de $\mu(a)$, et, pour avoir le meilleur résultat, il faut s'arrêter au plus petit terme ou à celui qui le précède.

On pourrait encore remarquer qu'en s'arrêtant à un terme quelconque la somme des termes est égale au double de la somme des restes, diminuée de la somme des restes extrêmes.

Tant que les restes et les termes vont en diminuant, un reste quelconque est plus petit que la moitié du terme correspondant et plus grand que la moitié du terme suivant.

La solution des deux problèmes que nous nous sommes proposé dépend donc de la détermination du plus petit terme.

On a

$$B_n = 2\,\frac{\Gamma(2n+1)}{(2\pi)^{2n}}\,S_{2n};$$

donc

$$T_{n+1} = T_n\,\frac{(2n-1)\,2n}{(2\pi a)^2}\,\frac{S_{2n+2}}{S_{2n}}.$$

Les termes vont en diminuant tant que le facteur qui multiplie T_n est plus petit que 1 et en augmentant lorsque ce facteur devient plus grand que 1. En regardant ce facteur comme fonction continue de n, l'indice du plus petit terme est le nombre entier qui suit la racine de

$$(2n-1)\,2n - \frac{S_{2n}}{S_{2n+2}}(2\pi a)^2 = 0.$$

Lorsque n varie depuis 1 jusqu'à l'infini, la seconde partie ne varie pas sensiblement; on voit donc que le premier membre de notre équation ne peut passer qu'une fois par zéro lorsque n va de 1 à ∞. Cette proposition est, au reste, facile à établir en toute rigueur au moyen de la dérivée. La racine de cette équation est plus grande que πa.

Cherchons cette racine avec plus de précision et faisons, pour abréger, $\alpha^2 = \frac{S_{2n}}{S_{2n+2}}(2\pi a)^2$. L'équation à résoudre est

$$(2n-1)2n - \alpha^2 = 0,$$

d'où

$$2n = \frac{1}{2} + \alpha\sqrt{1+\frac{1}{4\alpha^2}} = \frac{1}{2} + \alpha\left(1 + \frac{1}{8\alpha^2} - \frac{1}{128\alpha^4} + \cdots\right),$$

et, comme α est plus grand que $2\pi a$,

$$n > \pi a + \frac{1}{4};$$

par suite,

$$\frac{S_{2n}}{S_{2n+2}} < S_{2n} < 1 + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{2n-1}\,\frac{1}{2^{2n-1}} < 1 + \frac{1}{2^{2n-1}} < 1 + \frac{1}{2^{2\pi a - \frac{1}{2}}},$$

$$\alpha < 2\pi a\sqrt{1 + \frac{1}{2^{2\pi a - \frac{1}{2}}}} < 2\pi a + \frac{\pi a}{2^{2\pi a - \frac{1}{2}}};$$

par suite,

$$2n > \frac{1}{2} + 2\pi a\left[1 + \frac{1}{32(\pi a)^2}\,\frac{1}{\left(1 + \frac{1}{2^{2\pi a - \frac{1}{2}}}\right)} - \frac{1}{128(2\pi a)^4}\right],$$

$$n > \frac{1}{4} + \pi a + \frac{1}{32\pi a} - \frac{1}{256(2\pi a)^3} - \frac{1}{2\pi a . 2^{2\pi a + \frac{7}{2}}}.$$

De même,

$$2n < \frac{1}{2} + \left(2\pi a + \frac{\pi a}{2^{2\pi a - \frac{1}{2}}}\right)\left[1 + \frac{1}{8(2\pi a)^2}\right]$$

$$< \frac{1}{2} + 2\pi a + \frac{1}{16\pi a} + \frac{\pi a}{2^{2\pi a - \frac{1}{2}}}\left[1 + \frac{1}{8(2\pi a)^2}\right].$$

Donc, en négligeant les termes de degré supérieur, par rapport à $\frac{1}{\pi a}$,

$$n = \pi a + \frac{1}{4} + \frac{1}{32\pi a}.$$

Ainsi, l'indice du plus petit terme est le premier nombre entier supérieur à

$$n = \pi a + \frac{1}{4} + \frac{1}{32\pi a}.$$

Nous savons donc, à une unité près, à quel terme T_n il faut s'arrêter pour avoir le meilleur résultat. On peut encore décider du choix entre T_n et T_{n-1} par la considération suivante. Supposons que a soit tel que la racine de $(2n-1)2n - a^2 = 0$ soit un nombre entier n; dans ce cas,

$$T_n = T_{n+1}$$

et

$$R_{n-1} + R_n = R_n + R_{n+1}, \quad R_{n-1} = R_{n+1}.$$

Donc R_n est le plus petit reste. Si nous donnons à a des valeurs décroissantes, R_n restera le plus petit reste, jusqu'à ce que la racine de l'équation s'approche de $n-1$. Par suite, l'indice du plus petit reste le plus probable est le nombre entier le plus proche de la racine de l'équation précédente. Donc l'indice du plus petit reste est le nombre entier inférieur à

$$\pi a + \frac{3}{4} + \frac{1}{32\pi a}.$$

On déterminerait rigoureusement l'indice du plus petit reste en résolvant par rapport à n l'équation

$$\int_0^\infty \frac{x^{2n-1}(1-x^2)}{1+x^2}\, l\, \frac{1}{1-e^{-2\pi a x}}\, dx = 0 = R_{n-1} - R_n.$$

L'indice du plus petit reste est le premier nombre entier inférieur à cette racine.

M. Limbourg, dans un Mémoire couronné par l'Académie royale de Bruxelles, a fait voir que cette racine est comprise entre $\pi a + \frac{3}{4} - \frac{1}{7\pi a}$ et $\pi a + \frac{3}{4}$ (*Mémoires couronnés de l'Académie royale de Bruxelles*, t. XXX). J'ai trouvé, de mon côté, que cette racine est égale à $\pi a + \frac{3}{4} - \frac{3}{32\pi a}$, en négligeant les termes de degré supérieur par rapport à $\frac{1}{\pi a}$.

Nous avons vu que le reste R_n, lorsqu'on arrête la série au terme T_n, est plus petit que $\frac{1}{2}T_n$. Donc, en appelant S_n la somme des n premiers termes, $\frac{1}{2}\mu(a)$ sera compris entre S_n et $S_n \pm \frac{1}{2}T_n$, en prenant $+$ ou $-$ suivant que T_n a le signe $-$ ou $+$. En posant $\frac{1}{2}\mu(a) = S_n \pm \frac{1}{4}T_n$, on commettra une erreur moindre que $\frac{1}{4}T_n$. Si R_n est le plus petit reste et T_n le plus petit terme, le meilleur résultat sera $S_n \pm \frac{1}{4}T_n$, avec une erreur moindre que $\frac{1}{4}T_n$. Si R_{n-1} est le plus petit reste et T_n le plus petit terme, $R_{n-1} < \frac{1}{2}T_n$, et $\frac{1}{2}\mu(a)$ est compris entre S_{n-1} et $S_{n-1} \mp \frac{1}{2}T_n$; et, en faisant $\frac{1}{2}\mu(a) = S_{n-1} \mp \frac{1}{4}T_n$, on aura encore $\frac{1}{2}\mu(a)$ avec une erreur moindre que $\frac{1}{4}T_n$. Ainsi le meilleur résultat s'obtient en faisant la somme algébrique des n ou $n-1$ premiers termes, suivant que R_n ou R_{n-1} est le plus petit terme, et en ajoutant ou retranchant le quart du plus petit terme. L'erreur est alors moindre que le quart du plus petit terme. On ne pousse jamais les calculs, et cela est parfaitement inutile, jusqu'à ce degré d'approximation dans les applications.

Ainsi, en arrêtant la série au terme T_n et ajoutant un terme complémentaire, on obtient le résultat avec une erreur moindre que $\frac{1}{4}T_n$. Cherchons une expression simple et approchée de cette erreur :

$$T_n = \frac{B_n}{(2n-1)(2n)}\frac{1}{a^{2n-1}} = \frac{\Gamma(2n-1)}{(2\pi)^{2n}}\frac{S_{2n}}{a^{2n-1}},$$

quantité sensiblement égale à

$$\frac{\Gamma(2n-1)}{2\pi(2\pi a)^{2n-1}}.$$

Donc l'erreur de $\frac{1}{2}\mu(a)$ est plus petite que

$$\frac{1}{8\pi}\frac{\Gamma(2n-1)}{(2\pi a)^{2n-1}},$$

ou du moins ne dépasse pas sensiblement cette valeur. Pour $a = 100$, trois termes suffiraient pour calculer $\frac{1}{2}\mu(a)$ avec une erreur moindre qu'une demi-unité du treizième ordre; nous avons vu qu'il en faudrait de quarante-huit à cinquante pour obtenir la même approximation par la formule de Binet. De là résulte l'immense avantage de la formule de Stirling sur celle de Binet. Cette dernière est inapplicable, vu qu'on ne connaît pas les coefficients I.

Nous allons nous occuper à présent du développement en série de $\frac{1}{\Gamma(a)}$ et $\Gamma(a)$, et tout d'abord de $\frac{1}{\Gamma(a)}$.

C'est M. Weierstrass qui le premier a démontré la possibilité du développement de $\frac{1}{\Gamma(a)}$ suivant les puissances de a et pour toutes les valeurs de cette variable. Pour démontrer cette possibilité, il suffit de prouver que cette fonction ne devient jamais infinie.

On a, dans toute l'étendue du plan,

$$G(a) = \frac{\sin a\pi}{\pi}\Gamma(1-a).$$

Or, comme nous le verrons un peu plus loin,

$$\frac{\sin a\pi}{\pi}\Gamma(1-a)$$

n'a pas de pôles; donc $G(a)$ n'a pas de pôles et peut être développé en série convergente, dans toute l'étendue du plan.

La fonction $\frac{1}{\Gamma(a)}$, que nous représenterons par $G(a)$, peut être mise sous forme d'intégrale définie.

On sait que pour toute valeur de $a = \alpha + \beta i$, telle que $\alpha > 0$, $\Gamma(a)$ est défini par

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty e^{-z} z^{a-1}\,dz,$$

cette fonction jouissant de la propriété fondamentale suivante :

$$\Gamma(a+1) = a\Gamma(a). \tag{1}$$

Pour les autres valeurs de la variable, la fonction $\Gamma(a)$ est définie par la condition de satisfaire à la relation (1), au moyen de laquelle on peut toujours ramener la variable à avoir une partie réelle positive, et même plus petite que 1.

Dans le cas où la partie réelle de la variable est comprise entre 0 et 1, on a encore la relation fondamentale

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin\pi a}, \tag{2}$$

qui, au moyen de la relation (1), s'étend à toutes les valeurs de la variable.

De la relation (2) on tire, mais seulement pour le cas où la partie réelle de a est plus petite que 1,

$$G(a) = \frac{\sin \pi a}{\pi} \int_0^\infty e^{-z} z^{-a} dz.$$

Ainsi $G(a)$ jouit des trois propriétés suivantes, correspondant aux propriétés de $\Gamma(a)$, savoir :

$$G(a) = aG(a+1),$$

$$G(a)G(1-a) = \frac{\sin \pi a}{\pi},$$

$$G(a) = \frac{\sin \pi a}{\pi} \Gamma(1-a).$$

M. Heine (*Journal de Crelle,* t. 89) a donné à $G(a)$ une forme que je vais faire connaître et qui nous sera utile, savoir

$$(3) \qquad G(a) = \frac{1}{2\pi i} \int e^{z} z^{-a} dz,$$

l'intégrale étant prise le long du contour suivant : l'axe des x depuis $-\infty$ jusqu'à une petite distance $-\eta$ de l'origine, un cercle ayant pour centre l'origine, de rayon η, et l'axe des x depuis $-\eta$ jusqu'à $-\infty$.

On a

$$z = \rho(\cos\omega + i \sin\omega),$$

$$dz = \rho(-\sin\omega + i\cos\omega)\, d\omega + (\cos\omega + i\sin\omega)\, d\rho,$$

$$z^{-a} = \rho^{-a}(\cos a\pi + i \sin a\pi).$$

Dans la première partie,

$$\omega = -\pi, \quad z = -\rho, \quad dz = -d\rho, \quad z^{-a} = \rho^{-a}(\cos a\pi + i \sin a\pi);$$

dans la troisième partie,

$$\omega = \pi, \quad z = -\rho, \quad dz = -d\rho, \quad z^{-a} = \rho^{-a}(\cos a\pi - i \sin a\pi);$$

dans la deuxième partie,

$$z = \eta e^{\omega i}, \quad dz = i\eta e^{\omega i} d\omega, \quad z^{-a} = \eta^{-a} e^{-a\omega i}.$$

Les trois parties de l'intégrale, ajoutées ensemble, donnent

$$\int e^z z^{-a}\,dz = 2i\sin a\pi \int_\eta^\infty \rho^{-a} e^{-\rho}\,d\rho + i\eta^{1-a}\int_{-\pi}^{\pi} e^{(1-a)\omega i} e^{\eta e^{\omega i}}\,d\omega,$$

d'où, en supposant la partie réelle de a comprise entre o et 1,

$$\int e^z z^{-a}\,dz = 2i\sin a\pi\,\Gamma(1-a), \quad \text{d'où} \quad G(a) = \frac{1}{2\pi i}\int z^{-a}e^z\,dz.$$

L'intégration par parties donne

$$\int z^{-a}e^z\,dz = e^z z^{-a} + a\int z^{-(a+1)}e^z\,dz = a\int z^{-(a+1)}e^z\,dz.$$

Si donc la formule (3) est vraie pour a, on tirera de la relation précédente

$$\frac{1}{a}G(a) = G(a+1) = \frac{1}{2\pi i}\int z^{-(a+1)}e^z\,dz,$$

et dès lors la formule (3) sera vraie pour $(a+1)$; de même, si elle est vraie pour $a+1$, elle le sera pour a. Ainsi la formule (3) est vraie pour toutes les valeurs de a.

Reprenons l'intégrale $\int z^{-a}e^z dz$ sur le même contour, en agrandissant la circonférence et lui donnant pour rayon 1 au lieu de η; l'intégrale reprendra la même valeur, puisque les deux contours ne comprennent point entre eux de point critique. Donc

$$\begin{aligned}
G(a) &= \frac{1}{2\pi i}\left(2i\sin a\pi\int_1^\infty e^{-\rho}\rho^{-a}\,d\rho + i\int_{-\pi}^{\pi} e^{(\cos\omega + i\sin\omega)+(1-a)\omega i}\,d\omega\right)\\
&= \frac{1}{2\pi}\left[2\sin a\pi\int_1^\infty e^{-\rho}\rho^{-a}\,d\rho + \int_0^\pi e^{\cos\omega}\left(e^{-[(1-a)\omega+\sin\omega]i} + e^{[(1-a)\omega+\sin\omega]i}\right)d\omega\right]\\
&= \frac{\sin a\pi}{\pi}\int_1^\infty e^{-\rho}\rho^{-a}\,d\rho + \frac{1}{\pi}\int_0^\pi e^{\cos\omega}\cos[(1-a)\omega+\sin\omega]\,d\omega\\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_1^\infty e^{-\rho}\left(e^{a(\pi i - l\rho)} - e^{-a(\pi i + l\rho)}\right)d\rho\\
&\quad + \frac{1}{\pi}\int_0^\pi e^{\cos\omega}\cos[(1-a)\omega+\sin\omega]\,d\omega.
\end{aligned}$$

Étudions le développement de chacune des deux parties suivant les puissances croissantes de a.

Pour la première partie le coefficient de a^n sera

$$\gamma_n = \frac{(-1)^n}{2\pi i\Gamma(n+1)} \int_1^\infty e^{-\rho}[(l\rho - \pi i)^n - (l\rho + \pi i)^n]\,d\rho,$$

et pour la seconde

$$\delta_n = \frac{(-1)^{n+1}}{\pi\Gamma(n+1)} \int_0^\pi e^{\cos\omega} \frac{\sin}{\cos}(\omega + \sin\omega)\,\omega^n\,d\omega.$$

Nous calculerons plus loin la valeur exacte de ces coefficients; je me propose, pour le moment, d'en déterminer une valeur approchée.

Pour δ_n, on a une première valeur approchée en faisant

$$e^{\cos\omega}\frac{\sin}{\cos}(\omega + \sin\omega) = e,$$

ce qui donnera

$$\delta_n = \frac{(-1)^{n+1}}{\pi\Gamma(n+1)} \frac{e\pi^{n+1}}{(n+1)}.$$

On pourrait obtenir une valeur plus approchée en partageant cette intégrale en deux parties; mais cela n'est pas nécessaire, attendu que δ_n disparaît rapidement devant γ_n.

Pour calculer la valeur approchée de γ_n, nous allons dégager son expression des imaginaires, et pour cela nous poserons

$$l\rho = r\cos\omega, \qquad \pi = r\sin\omega,$$

$$\operatorname{tang}\omega = \frac{\pi}{l\rho}, \qquad d\rho = -\frac{r^2\rho\,d\omega}{\pi};$$

il viendra

$$\gamma_n = \frac{(-1)^n}{\pi^2\Gamma(n+1)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\rho}\rho[(l\rho)^2 + \pi^2]^{\frac{n+2}{2}} \sin n\omega\,d\omega.$$

Étudions d'abord les variations du facteur

$$e^{-\rho}\rho[(l\rho)^2 + \pi^2]^{\frac{n+2}{2}}.$$

La dérivée est

$$\left\{e^{-\rho}(1-\rho)[(l\rho)^2+\pi^2]+(n+2)l\rho e^{-\rho}\right\}[(l\rho)^2+\pi^2]^{\frac{n}{2}}$$
$$=e^{-\rho}(1-\rho)[(l\rho)^2+\pi^2]^{\frac{n}{2}}\left[(l\rho)^2-\frac{n+2}{\rho-1}l\rho+\pi^2\right].$$

Lorsque ρ varie de 1 à ∞, le deuxième facteur reste négatif; la dérivée sera donc positive ou négative suivant que

$$(l\rho)^2-\frac{n+2}{\rho-1}l\rho+\pi^2$$

sera négatif ou positif. D'ailleurs ce facteur ne peut passer qu'une fois par zéro, car, à mesure que ρ augmente, la partie positive augmente et la partie négative diminue.

La valeur qui annule ce facteur va aussi en augmentant à mesure que n augmente. D'après ces considérations, le facteur $e^{-\rho}\rho[(l\rho)^2+\pi^2]^{\frac{n+2}{2}}$ commence par augmenter, passe par un maximum, puis va sans cesse en diminuant et tend vers zéro. Le maximum correspond à la racine de l'équation

$$(l\rho)^2-\frac{n+2}{\rho-1}l\rho+\pi^2=0.$$

Pour évaluer

$$\gamma_n=\frac{(-1)^n}{\pi^2\Gamma(n+1)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-\rho}\rho[(l\rho)^2+\pi^2]^{\frac{n+2}{2}}\sin n\omega\,d\omega,$$

nous partagerons l'intégrale en $\frac{n}{2}$ parties égales, de telle sorte que dans chacune de ces parties l'argument $n\omega$ varie de π, $\sin n\omega$ conservant le même signe dans toute l'étendue de chaque partie, sauf à laisser incomplète la dernière partie si n est impair.

Soient

$$a,\ b,\ c,\ \ldots,\ f,\ i,\ k,\ l,\ m,\ n,\ \ldots,\ x,\ y,\ z$$

les valeurs absolues des intégrales partielles et k la plus grande. Il est clair, puisque le facteur $e^{-\rho}\rho[(l\rho)^2+\pi^2]^{\frac{n+2}{2}}$ va en augmentant et puis en diminuant, que ces intégrales sont dans le même cas. Le doute ne peut exister que pour celle qui contient le maximum du facteur, celle qui la précède et celle qui la suit. C'est l'une des trois qui est la plus grande. Supposons d'abord que k contienne ce maximum ; on aura

$$\begin{aligned} A &= (k-l)+(m-n)+\ldots = k-(l-m)\ldots, \\ B &= (k-j)+(i-f)+\ldots = k-(j-i)\ldots. \end{aligned}$$

Toutes les parenthèses étant positives, il résulte

$$0 < A < k \quad \text{et} \quad 0 < B < k,$$

d'où

$$-k < A+B-k < k.$$

Ainsi l'intégrale totale sera plus petite, en valeur absolue, que la plus grande des intégrales partielles.

Si le maximum du facteur se trouve dans l, on aura de même

$$\begin{aligned} A &= (k-l)+(m-n)+\ldots = (k-l+m)-(n-p)\ldots, \\ B &= (k-j)+(i-f)+\ldots = k-(j-i)\ldots, \end{aligned}$$

les parenthèses étant encore positives, d'où

$$\begin{gathered} 0 < A < k-l+m, \quad 0 < B < k, \\ -k < A+B-k < k-l+m; \end{gathered}$$

et comme, dans le voisinage de maximum, la fonction varie peu, on a sensiblement $l=m$, et l'on tire la même conclusion que précédemment. Dans tous les cas, on peut poser avec certitude

$$-k < A+B-k < 2k.$$

Soit μ le maximum de $e^{-\rho}\rho\left[(l\rho)^2+\pi^2\right]^{\frac{n+2}{2}}$; on aura

$$\gamma_n < \frac{\mu}{\pi^2\Gamma(n+1)n}\int_0^\pi \sin\omega\, d\omega = \frac{2\mu}{n\pi^2\Gamma(n+1)}.$$

Soient μ, μ' les valeurs correspondant à n et $n+1$:

$$\frac{\mu'}{\mu} = \frac{e^{-\rho}\rho'}{e^{-\rho}\rho}\left(1+\frac{1}{n+2}\right)^{\frac{n+2}{2}}\left(\frac{l\rho'}{\rho'-1} : \frac{l\rho}{\rho-1}\right)^{\frac{n+2}{2}}\left[\frac{l\rho'}{\rho'-1}(n+3)\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Le premier et le troisième facteurs sont plus petits que 1, puisque, à mesure que n augmente, la racine ρ de $(l\rho)^2 - \frac{n+2}{\rho-1} l\rho + \pi^2 = 0$ va en augmentant; le second est plus petit que $e^{\frac{1}{2}}$; donc

$$\frac{\mu'}{\mu} < \left[e \frac{l\rho'}{\rho'-1}(n+3)\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Pour $n = 20$, $\left(e \frac{l\rho'}{\rho'-1}\right)^{\frac{1}{2}}$ est sensiblement égal à 1, et pour les valeurs supérieures il est plus petit que 1. Donc, pour $n = 20$ ou supérieur à 20, on a

$$\frac{\mu'}{\mu} < \sqrt{n+3}.$$

De plus, pour $n = 20$, on a

$$\mu_{20} < 2\sqrt{1.2\ldots 22}.$$

Donc, pour $n > 20$,

$$\mu_n < 2\sqrt{1.2\ldots n+2}.$$

Donc

$$\gamma_n < \frac{4\sqrt{\Gamma(n+3)}}{\pi^2 n \Gamma(n+1)} = \frac{4(n+1)(n+2)}{\pi^2 n \sqrt{\Gamma(n+3)}},$$

ce qui est sensiblement égal à $\frac{4}{\pi^2\sqrt{\Gamma(n+1)}}$.

Par conséquent,

$$\gamma_n < \frac{4}{\pi^2\sqrt{\Gamma(n+1)}}.$$

On voit par là que les quantités δ_n disparaissent rapidement devant γ_n.

Cette expression des coefficients prouve encore que le développement de $G(a)$ est convergent pour toutes les valeurs de a, comme nous le savions d'avance.

Ces coefficients sont de l'ordre de $\sqrt{}$ des coefficients de l'exponentielle.

Comme application, faisons $n = 19$.

La racine de $(l\rho)^2 - \frac{n+2}{\rho - 1} l\rho + \pi^2 = 0$ est $\rho = 3,25$.

$$\begin{aligned} l\rho &= 1,163, \\ (l\rho)^2 &= 1,353, \\ \pi^2 + (l\rho)^2 &= 11,223. \end{aligned}$$

Calcul de $\mu_{19} = e^{-3,2} \times 3,25(11,22)^{10,5}$.

$$\begin{aligned} \operatorname{colog} e^{3,2} &= \bar{2},588 \\ \log 3,25 &= 0,512 \\ 10,5 \log 11,22 &= 11,025 \\ \hline \log \mu_{19} &= 10,125 \end{aligned}$$

Calcul de $\gamma_{19} = \dfrac{2\mu_{19}}{\pi^2\, 19 . \Gamma(20)}$.

$$\begin{aligned} \log 2 &= 0,301 \\ \log \mu_{19} &= 10,125 \\ \operatorname{colog} \pi^2 &= \bar{1},006 \\ \log \frac{1}{\Gamma(20)} &= \overline{18},914 \\ \operatorname{colog} 19 &= \bar{2},721 \\ \hline \log \gamma_{19} &= \bar{9},067 \\ \gamma_{19} &= 0,0000\,0000\,1167 \end{aligned}$$

Pour avoir δ_{19} avec une plus grande approximation, nous partagerons l'intégrale en deux parties, soit

$$\pi \Gamma(20) \delta_{19} = \int_0^{\frac{3\pi}{4}} e^{\cos\omega} \sin(\omega + \sin\omega)\, \omega^{19}\, d\omega + \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} e^{\cos\omega} \sin(\omega + \sin\omega)\, \omega^{19}\, d\omega.$$

La première partie est évidemment plus petite que $\frac{e}{20}\left(\frac{3}{4}\pi\right)^{20}$, et la seconde plus petite que $\frac{e^{-0,707} \times 0,078}{20}\left[\pi^{20} - \left(\frac{3}{4}\pi\right)^{20}\right]$.

Donc

$$\delta_{19} < \left[\frac{e}{20}\left(\tfrac{3}{4}\pi\right)^{20} + \frac{e^{-0,707} \times 0,078}{20}\pi^{20}\right]\frac{1}{\pi\Gamma(20)}$$
$$= [e(\tfrac{3}{4})^{20} + e^{-0,707}.0,078]\frac{\pi^{19}}{20\Gamma(20)}.$$

Calcul de $u = e(\frac{3}{4})^{20}$. *Calcul de* $v = 0,078.e^{-0,707}$.

$$\begin{array}{rlrl} \log e = & 0,434 & \log e^{-0,707} = & \bar{1},714 \\ 20\,l\tfrac{3}{4} = & \bar{3},500 & \log 0,078 = & \bar{2},892 \\ \log u = & \bar{3},934 & \log v = & \bar{2},606 \\ u = & 0,009 & v = & 0,041 \end{array}$$
$$u + v = 0,050.$$

$$\textit{Calcul de } \delta_{19} = 0,050\,\frac{\pi^{19}}{20\Gamma(20)}.$$

$$\begin{aligned} \log(u+v) &= \bar{2},699 \\ 19\log\pi &= 9,550 \\ \operatorname{colog} 20 &= \bar{2},699 \\ \log\frac{1}{\Gamma(20)} &= \overline{18},914 \\ \log\delta_{19} &= \overline{11},862 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_{19} &= 0,0000\,0000\,0073 \\ \gamma_{19} &= 0,0000\,0000\,1167 \\ \gamma_{19} + \delta_{19} &= 0,0000\,0000\,1240 \end{aligned}$$

Ainsi nous obtenons, pour limite du coefficient de a^n, 0,0000 0000 1240. Nous trouverons plus loin, pour la vraie valeur, 0,0000 0000 0104, c'est-à-dire une valeur douze fois plus petite.

Nous avons calculé γ_{19} en nous servant de μ_{19}; si l'on calculait au moyen de la formule $\gamma_{19} = \frac{4}{\pi^2\sqrt{\Gamma(20)}}$, on trouverait exactement la même valeur.

On voit par ce calcul que, pour $n = 19$, δ_{19} est négligeable devant γ_{19}, au degré d'approximation que nous pouvons attendre.

Les limites que nous venons de calculer pourront servir à obtenir une limite du reste de la série.

La transcendante $G(a)$ est partagée en deux parties,

$$\frac{\sin a\pi}{\pi}\int_1^\infty e^{-\rho}\rho^{-a}d\rho + \frac{1}{\pi}\int_0^\pi e^{\cos\omega}\cos[(1-a)\omega + \sin\omega]\,d\omega$$
$$= \frac{\sin a\pi}{\pi}[P(1-a) + Q(1-a)],$$

$P(1-a)$ et $Q(1-a)$ étant deux transcendantes dont nous ferons connaître un peu plus loin quelques propriétés.

Occupons-nous à présent de la détermination exacte des coefficients du développement de $\frac{1}{\Gamma(a)} = G(a)$:

$$G(a) = n^{-a}a(1+a)\left(1+\frac{a}{2}\right)\left(1+\frac{a}{3}\right)+\ldots\left(1+\frac{a}{n}\right).$$

Le facteur

$$\left(1+\frac{a}{2}\right)\left(1+\frac{a}{3}\right)\cdot\;\cdot\left(1+\frac{a}{n}\right) = 1 + A_1 a + A_2 a^2 + \ldots + A_{n-1}a^{n-1}.$$

Le coefficient A_i s'obtient en faisant la somme des combinaisons i à i des quantités $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \;.\;.\;, \frac{1}{n}$. Il est facile de déduire ces coefficients les uns des autres.

En effet,

$$i\Sigma a_1 a_2\ldots a_i = \Sigma a_1 \Sigma a_1 a_2 \ldots a_{i-1} - \Sigma a_1^2 \Sigma a_1 a_2 \ldots a_{i-2} + \Sigma a_1^3 \Sigma a_1 a_2 \ldots a_{i-3} \ldots \pm \Sigma a_i^i,$$

d'où

$$iA_i = S_1 A_{i-1} - S_2 A_{i-2} + S_3 A_{i-3} - \ldots \pm S_i.$$

Ces coefficients ne dépendent donc que de $S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n$.

Nous avons ensuite

$$n^{-a} = 1 - \frac{a\,ln}{1} + \frac{a^2(ln)^2}{1.2} - \frac{a^3(ln)^3}{1.2.3} + \ldots;$$

donc

$$\frac{G(a)}{a(1+a)} = \left[1 - \frac{a\,ln}{1} + \frac{a^2(ln)^2}{1.2} - \frac{a^3(ln)^3}{1.2.3} + \ldots\right]$$
$$\times\left[1 + A_1 a + A_2 a^2 + A_3 a^3 + \ldots + A_n a^\nu\right]$$
$$= 1 + A'_1 a + A'_2 a^2 + A'_3 a^3 + \ldots,$$

où

$$A'_i = A_i - A_{i-1}\frac{ln}{1} + A_{i-2}\frac{(ln)^2}{1.2} - \ldots \pm \frac{(ln)^i}{1.2\ldots i}.$$

Posons $C = -S_1 + ln$, ou $C = 1 - C'$, C' étant la constante d'Euler, et remplaçons, dans l'expression de $A'_1, A'_2, \ldots, A'_n$, S_1 par $-C + ln$; il est clair, puisque ces coefficients ont une valeur finie, qu'ils seront indépendants de ln et que l'on peut donner à ln telle valeur que l'on voudra, et par exemple faire $ln = 0$. Mais alors A'_i est égal à ce que devient A_i lorsqu'on y remplace S_1 par $-C$.

Dès lors les coefficients se forment de la manière suivante.

On multiplie les coefficients déjà obtenus $A_{i-1}, A_{i-2}, A_{i-3}, \ldots, A_1 . 1$ respectivement par $-C, -S_2, +S_3, -S_4, \ldots, \pm S_i$; on ajoute tous les produits : on divise la somme par i, et l'on a A_i,

$$A_1 = -C.$$

Il est à remarquer que l'erreur de $A_1, A_2, A_3, \ldots$ sera du même ordre que celle de $C, S_1, S_2, S_3, \ldots$. Supposons, en effet, que $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{i-1}$ aient été calculés avec la même approximation que C, $S_1, S_2, S_3, \ldots$; les produits $A_1 S_{i-1}, A_2 S_{i-2}, \ldots, A_{i-1} S_1$ pourront se calculer avec la même approximation, et la somme aura une erreur au plus de i unités de cet ordre, et, en divisant par i, l'erreur du résultat sera au plus d'une unité de cet ordre.

Le nombre de multiplications, dans le calcul de chaque coefficient, pourra être diminué de 1, en remarquant que CA_{i-1} et $A_1 S_{i-1}$ ont un facteur commun.

Dans ce calcul j'ai mis en dehors le facteur $(1+a)$, pour que les facteurs $S_2, S_3, \ldots$ ne contiennent pas 1, ce qui fait que le calcul des coefficients est un peu plus court. Mais il serait facile de faire entrer $(1+a)$ dans le développement si on le jugeait convenable. Dans ce cas, on obtiendrait les coefficients du nouveau développement par l'addition de deux coefficients consécutifs.

Ces calculs seraient impossibles si l'on ne prenait la précaution de faire les neuf premiers multiples de C, S_2, S_3, S_4, ... Il est bon aussi de faire également les multiples de A_1, A_2, A_3, ..., à mesure qu'on les trouve, de manière à pouvoir faire la preuve de chaque multiplication par le renversement des facteurs. Dans une si longue suite d'opérations dépendant les unes des autres, il ne faut rien négliger pour être sûr du résultat.

Les multiplications se font par la méthode abrégée. Chaque produit partiel doit être écrit avec un chiffre de plus que l'approximation demandée et à une demi-unité de cet ordre.

Voici un exemple de ce calcul; soit $A_4 \times S_6$:

$$
\begin{array}{r}
S_6 = 0,0173\;4306\;1984\;4491 \\
A_4 = 0,0245\;5249\;0005\;4000 \\
\hline
3\;4686\;1239\;6889\;8 \\
6937\;2247\;9378\;0 \\
867\;1530\;9922\;2 \\
86\;7153\;0992\;2 \\
3\;4686\;1239\;7 \\
6937\;2247\;9 \\
1560\;8755\;8 \\
867\;2 \\
69\;4 \\
\hline
4\;2581\;5356\;0362
\end{array}
$$

(*voir*, p. 223 et 224, le Tableau des vingt-deux premiers coefficients).

La somme de ces coefficients étant égale à

$$\frac{1}{2\Gamma(1)} = \frac{1}{2} = 0,5000\;0000\;0000,$$

on obtiendra une vérification en faisant cette somme. Cette vérification donne une erreur du quinzième ordre, qui provient soit des termes négligés, soit de la somme des erreurs des divers coefficients.

On obtiendra une autre vérification en faisant $a = -1$. Le résultat sera égal à $\frac{1}{\Gamma(1)} = 1$. L'erreur est encore du même ordre que précédemment.

En examinant ces coefficients, on voit qu'ils varient d'une manière très irrégulière et par soubresauts. Les signes eux-mêmes ne présentent aucune régularité dans leur succession. Les termes vont toujours en diminuant; un seul fait exception à cette règle : A_{14}, qui, après s'être éloigné brusquement de A_{13}, est suivi d'un coefficient A_{15} quarante fois plus grand. Jusqu'à A_{16}, tous les coefficients de rang multiple de 3 sont positifs et tous les autres négatifs; A_{17} est le premier qui fait exception à cette règle, et, après cela, la régularité est complètement rompue.

Quelle est la loi de succession des signes? Je l'ai vainement cherchée. On s'attendait à voir ces coefficients diminuer avec une plus grande rapidité, vu la rapidité avec laquelle la fonction tend vers zéro. Ce fait est produit par le changement de signe, et nous trouvons un fait analogue dans l'exponentielle e^x, qui a une valeur très grande pour de grandes valeurs positives de x et des valeurs très petites pour des valeurs de x très grandes, mais négatives, et cependant les deux séries ne diffèrent que par les signes des coefficients.

On peut encore obtenir un autre développement de $G(a)$. Au lieu de remplacer S_1 par $-C+ln$, remplaçons au contraire ln par $C+S_1$; les coefficients du développement seront indépendants de S_1, et l'on peut, par conséquent, faire $S_1=0$; alors on aura

$$\frac{1}{a(a+1)}G(a)=e^{-Ca}(1+A_1a+A_2a^2+\ldots).$$

Les coefficients se déduisent les uns des autres de la même manière que précédemment, en faisant $S_1=A_1=0$.

On remarquera qu'ils ont une figure de moins que les premiers et que celui de la première puissance est nul (*voir*, p. 225, le Tableau des vingt et un premiers coefficients).

Cherchons le développement de $\Gamma(a)$:

$$\Gamma(a)=\frac{1}{a(1+a)(1+A_1a+A_2a^2+\ldots)}.$$

Or, le facteur

$$\frac{1}{1+A_1a+A_2a^2+\ldots}$$

ne devient infini pour aucune valeur de a de module moindre que 2;

donc on peut le développer dans un cercle de rayon égal à 2 et écrire

$$\Gamma(a) = \frac{1}{a(1+a)(1+A_1 a + A_2 a^2 + \ldots)} = \frac{1}{a(1+a)}(1 + B_1 a + B_2 a^2 + \ldots),$$

d'où

$$1 = (1 + B_1 a + B_2 a^2 + \ldots)(1 + A_1 a + A_2 a^2 + \ldots).$$

On obtiendra les coefficients B_1, B_2, B_3, ... en identifiant les deux membres :

$$B_i + B_{i-1} A_1 + B_{i-2} A_2 + \ldots + A_i = 0.$$

Les multiples déjà formés pour le calcul de A_1, A_2, A_3, ... serviront pour le calcul de B_1, B_2, B_3, ... (*voir*, p. 226, le Tableau des dix-huit premiers coefficients).

On remarque qu'à partir du cinquième les coefficients des puissances impaires sont négatifs et ceux des puissances paires positifs. On remarquera aussi qu'ils diminuent beaucoup moins rapidement que ceux calculés précédemment et enfin qu'ils se rapprochent de plus en plus de S_2, S_3, S_4, ..., ou plutôt de $\frac{1}{2^2}$, $\frac{1}{2^3}$, $\frac{1}{2^4}$, ..., $\frac{1}{2^n}$, en sorte que B_{18} ne diffère de $\frac{1}{2^{19}}$ que de quelques unités du dixième ordre. On verra, un peu plus loin, la raison de tous ces faits.

La régularité des coefficients B_1, B_2, B_3, ... témoigne de l'exactitude des coefficients A_1, A_2, A_3, ...

Le développement de $\Gamma(a)$ que nous venons d'obtenir n'est convergent que pour des valeurs de a dont le module est moindre que 2. On peut partager $\Gamma(a)$ en deux parties, donnant lieu à deux séries convergentes pour toutes les valeurs de a.

C'est M. Prym qui a donné à $\Gamma(a)$ cette nouvelle forme (*Journal de Crelle*) :

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty x^{a-1} e^{-x}\,dx = \int_0^1 x^{a-1} e^{-x}\,dx + \int_1^\infty x^{a-1} e^{-x}\,dx$$

$$= \frac{1}{a} - \frac{1}{1}\frac{1}{a+1} + \frac{1}{1.2}\frac{1}{a+2} - \frac{1}{1.2.3}\frac{1}{a+3} + \ldots + \int_1^\infty x^{a-1} e^{-x}\,dx.$$

La première partie est une série qui définit une fonction uniforme ayant pour pôles seulement $0, -1, -2, \ldots$, qui sont aussi les pôles de $\Gamma(a)$.

Et la seconde est aussi finie; soit $a = \alpha + i\beta$:

$$\int_1^\infty x^{a-1} e^{-x} dx = \int_1^\infty e^{-x} x^{\alpha-1} \cos(lx^\beta)\, dx + i \int_1^\infty e^{-x} x^{\alpha-1} \sin(lx^\beta)\, dx,$$

quantité finie et déterminée, quels que soient α et β, et par conséquent développable suivant les puissances de a, quel que soit a. $\Gamma(a)$ est donc une fonction uniforme qui n'a pas d'autres pôles que $0, -1, -2, \ldots$. Il résulte de là que dans le produit

$$\sin a\pi \Gamma(a)$$

tous les pôles disparaissent.

Posons

$$P(z) = \frac{1}{z} - \frac{1}{1}\frac{1}{z+1} + \frac{1}{1.2}\frac{1}{z+2} - \ldots = \int_0^1 e^{-x} x^{z-1} dx;$$

on aura

$$P(z+1) - zP(z) = -1 + \frac{1}{1} - \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} - \ldots = -\frac{1}{e};$$

et ainsi la transcendante $P(z)$ jouit de la propriété

$$P(z+1) = zP(z) - \frac{1}{e},$$

analogue à la propriété fondamentale de la fonction $\Gamma(z)$.

On tire de là, avec M. Prym,

$$eP(z) = \frac{e}{z} P(z+1) + \frac{1}{z},$$

$$eP(z+1) = \frac{e}{z+1} P(z+2) + \frac{1}{z+1},$$

$$eP(z+2) = \frac{e}{z+2} P(z+3) + \frac{1}{z+2},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$eP(z+n-1) = \frac{e}{z+n-1} P(z+n) + \frac{1}{z+n-1},$$

$$eP(z+n) = \frac{e}{z+n} P(z+n+1) + \frac{1}{z+n}.$$

Multiplions ces égalités respectivement par

$$1, \quad \frac{1}{z}, \quad \frac{1}{z(z+1)}, \quad \frac{1}{z(z+1)(z+2)}, \quad \ldots, \quad \frac{1}{z(z+1)\ldots(z+n-1)},$$

et ajoutons les résultats; il viendra

$$e\mathrm{P}(z) = \frac{e\mathrm{P}(z+n)}{z(z+1)\ldots(z+n)} + \left[\frac{1}{z} + \frac{1}{z(z+1)} + \frac{1}{z(z+1)(z+2)} + \ldots\right].$$

Or $\lim \mathrm{P}(z+n)$, pour $n = \infty$, égale 0; donc

$$e\mathrm{P}(z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{z(z+1)} + \frac{1}{z(z+1)(z+2)} + \ldots.$$

La transcendante $\mathrm{P}(z)$, comme $\Gamma(z)$, admet pour pôles les nombres entiers et négatifs, ainsi que 0, et elle jouit aussi de la propriété

$$\lim \mathrm{P}(z)(z+\nu) = \frac{(-1)^\nu}{1.2\ldots\nu}.$$

M. Prym conclut de là que $\mathrm{P}(z) - \Gamma(z)$ ne devient infini pour aucune valeur de z et peut, par conséquent, être développé en série convergente pour toutes les valeurs de z, suivant les puissances ascendantes de cette variable. Donc

$$\int_1^\infty e^{-x} x^{z-1}\, dx = \mathrm{Q}(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots.$$

La transcendante $\mathrm{Q}(z)$ est une fonction de la même nature que $\mathrm{G}(z)$, jouissant de la propriété des fonctions entières, de n'avoir qu'un point essentiel à l'infini.

Nous calculerons, un peu plus loin, la valeur des coefficients c_0, c_1, c_2, ...; nous allons chercher, tout d'abord, une limite approchée.

$$1.2.3\ldots n c_n = \int_1^\infty e^{-x} (lx)^n \frac{dx}{x} = \int_1^\infty x^{\frac{n}{2}-1} e^{-x} \left(\frac{lx}{\sqrt{x}}\right)^n dx.$$

Or, le maximum du facteur $\left(\frac{lx}{\sqrt{x}}\right)^n$ est $\left(\frac{2}{e}\right)^n$; donc

$$1.2\ldots n c_n < \left(\frac{2}{e}\right)^n \int_1^\infty x^{\frac{n}{2}-1} e^{-x}\, dx < \left(\frac{2}{e}\right)^n \Gamma\left(\frac{n}{2}\right).$$

Donc

$$c_n < \left(\frac{2}{e}\right)^n \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma(n+1)} = \frac{2}{n}\left(\frac{2}{e}\right)^n \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}{\Gamma(n+1)} = \frac{2}{n}\left(\frac{2}{e}\right)^n \frac{\sqrt{\pi}}{2^n} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)},$$

et, en remplaçant $\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)$ par sa valeur approchée, ce qui augmente encore la valeur,

$$c_n < \frac{\sqrt{2e}}{n} \frac{1}{\left[\frac{e}{2}(n+1)\right]^{\frac{n}{2}}}.$$

Appliquons ceci à c_{17}, qui est le dernier coefficient calculé.

$$\begin{array}{rl} \log 2 = & 0,30103 \\ \log e = & 0,43427 \\ \hline & 0,73530 \\ \hline \log\sqrt{2e} = & 0,36765 \\ \operatorname{colog} 17 = & \bar{2},76955 \\ \operatorname{colog}\left[\frac{e}{2}(n+1)\right]^{\frac{n}{2}} = & \overline{12},19758 \\ \hline \log c_n = & \overline{13},33478 \end{array} \qquad \begin{array}{rr} \log e = & 0,43428 \\ \operatorname{col} 2 = & \bar{1},69897 \\ \log 18 = & 1,25527 \\ \hline & 1,38852 \\ & 8,5 \\ \hline & 694260 \\ & 1110816 \\ \hline & 11,802420 \end{array}$$

$$c_n = 0,0000\ 0000\ 0000\ 2163.$$

Le calcul direct donnera, un peu plus loin,

$$c_{17} = 0,0000\ 0000\ 0000\ 1814.$$

La valeur approchée et la valeur exacte diffèrent donc d'environ trois unités et demie du quatorzième ordre.

La fonction $Q(z)$, comme la fonction $P(z)$, jouit d'une propriété analogue à la propriété fondamentale de $\Gamma(z)$:

$$Q(z+1) = \Gamma(z+1) - P(z+1);$$

donc

$$Q(z+1) = z\Gamma(z) - zP(z) + \frac{1}{e} = zQ(z) + \frac{1}{e}.$$

De même,

$$\frac{Q(z+n)}{\Gamma(n)n^z} = \frac{\Gamma(z+n)}{\Gamma(n)n^z} - \frac{P(z+n)}{\Gamma(n)n^z},$$

et par conséquent, pour $n = \infty$,

$$\lim \frac{Q(z+n)}{\Gamma(n)n^z} = 1.$$

Cherchons d'une manière plus générale la fonction $S(z)$, qui satisfait aux deux relations

$$S(z+1) = zS(z) + l,$$

$$\lim \frac{S(z+n)}{\Gamma(n)n^z} = k.$$

En vertu de la première relation, on a

$$\begin{aligned}
S(z) &= \frac{1}{z}\,S(z+1) - \frac{l}{z},\\
S(z+1) &= \frac{1}{z+1}\,S(z+2) - \frac{l}{z+1},\\
S(z+2) &= \frac{1}{z+2}\,S(z+3) - \frac{l}{z+2},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\\
S(z+n) &= \frac{1}{z+n}\,S(z+n+1) - \frac{l}{z+n}.
\end{aligned}$$

Multiplions ces égalités respectivement par

$$1,\quad \frac{1}{z},\quad \frac{1}{z(z+1)},\quad \frac{1}{z(z+1)(z+2)},\quad \cdots,\quad \frac{1}{z(z+1)\ldots(z+n-1)},$$

et ajoutons les résultats; il viendra

$$\begin{aligned}
S(z) &= \frac{S(z+n+1)}{z(z+1)\ldots(z+n)} - l\left[\frac{1}{z} + \frac{1}{z(z+1)} + \cdots\right]\\
&= n^z \frac{1.2\ldots n}{z(z+1)\ldots(z+n)}\,\frac{S(z+n+1)}{n^z\Gamma(n+1)} - l\left[\frac{1}{z} + \frac{1}{z(z+1)} + \cdots\right]\\
&= k\Gamma(z) - le\,P(z) = (k-le)\,P(z) + k\,Q(z).
\end{aligned}$$

Telle est l'expression générale de la fonction jouissant des propriétés énoncées.

En faisant $k=0$ et $le=-1$,

$$S(z)=P(z);$$

pour $k=1$, $l=0$,

$$S(z)=\Gamma(z);$$

pour $k=1$, $le=1$,

$$S(z)=Q(z).$$

La transcendante $P(z)$ peut se mettre sous une autre forme, qui pourra être utile :

$$G(z)=\frac{\sin\pi z}{\pi}Q(1-z)+\frac{\sin\pi z}{\pi}P(1-z).$$

D'un autre côté, nous avons trouvé

$$G(z)=\frac{\sin\pi z}{\pi}Q(1-z)+\frac{1}{\pi}\int_0^\pi e^{\cos\omega}\cos[(1-z)\omega+\sin\omega]\,d\omega;$$

donc

$$\sin\pi z\,P(1-z)=\int_0^\pi e^{\cos\omega}\cos[(1-z)\omega+\sin\omega]\,d\omega,$$

ou bien, en remplaçant $1-z$ par z et z par $1-z$, il viendra

$$\sin\pi z\,P(z)=\int_0^\pi e^{\cos\omega}\cos(z\omega+\sin\omega)\,d\omega.$$

En représentant cette nouvelle transcendante par $R(z)$, on a donc

$$R(z)=\sin\pi z\,P(z).$$

De la propriété fondamentale de $P(z)$, il résulte, pour $R(z)$,

$$R(z+1)=\sin\pi z\,P(z+1)=-z\,R(z)+\frac{\sin\pi z}{e},$$

ou bien

$$R(z+1) + z\,R(z) = \frac{\sin \pi z}{e}.$$

Cette propriété peut se déduire aussi directement de l'intégrale qui définit $R(z)$. En effet,

$$\begin{aligned}
R(z+1) + z\,R(z) = & \int_0^{\pi} e^{\cos\omega} \cos[(z+1)\omega + \sin\omega]\, d\omega \\
& + z\int_0^{\pi} e^{\cos\omega} \cos(z\omega + \sin\omega)\, d\omega \\
= & \int_0^{\pi} e^{\cos\omega} (z + \cos\omega) \cos(z\omega + \sin\omega)\, d\omega \\
& - \int_0^{\pi} e^{\cos\omega} \sin\omega . \sin(z\omega + \sin\omega)\, d\omega,
\end{aligned}$$

et, en intégrant le second terme par parties,

$$R(z+1) + R(z) = \left[e^{\cos\omega} \sin(z\omega + \sin\omega)\right]_0^{\pi} = \frac{\sin \pi z}{e}.$$

D'après la nature des quantités placées sous le signe d'intégration, on voit sur-le-champ que $R(z)$ est une fonction uniforme et holomorphe dans tout le plan.

Pour n entier et positif,

$$R(n) = 0.$$

Pour n entier et négatif,

$$R(-n) = \lim \sin \pi(-n + \varepsilon)\, \frac{1}{1.2\ldots n}\, \frac{1}{\varepsilon} = \frac{(-1)^n \pi}{1.2\ldots n}.$$

Occupons-nous à présent du calcul des coefficients de

$$Q(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots,$$

dont nous avons trouvé la valeur sous forme d'intégrale définie et dont nous avons donné une valeur approchée.

Nous avons trouvé

$$x(x+1)\Gamma(x) = 1 + B_1 x + B_2 x^2 + B_3 x^3 + \ldots;$$

or

$$\begin{aligned} x(x+1)\Gamma(x) = \Gamma(x+2) &= P(x+2) + Q(x+2) \\ &= P(x+2) + \frac{1}{e}(x+2) + x(x+1)Q(x) \\ &= P(x+2) + \frac{1}{e}(x+2) + c_0 x + \left.\begin{matrix} c_1 \\ +c_0 \end{matrix}\right| x^2 + \left.\begin{matrix} c_2 \\ +c_1 \end{matrix}\right| x^3 + \ldots \\ &= 1 + B_1 x + B_2 x^2 + B_3 x^3 + \ldots. \end{aligned}$$

Le développement de $P(x+2)$ est facile; ce développement étant fait, on trouvera les coefficients $c_0, c_1, c_2, \ldots$ en identifiant les deux membres de l'égalité précédente.

De là

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{1}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{1.2}\cdot\frac{1}{4} - \ldots + \frac{2}{e} = 1,$$

$$-\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{1}\cdot\frac{1}{3^2} + \frac{1}{1.2}\cdot\frac{1}{4^2} - \frac{1}{1.2.3}\cdot\frac{1}{5^2} + \ldots\right) + \frac{2}{e} + c_0 = B_1,$$

$$\left(\frac{1}{2^3} - \frac{1}{1}\cdot\frac{1}{3^3} + \frac{1}{1.2}\cdot\frac{1}{4^3} - \frac{1}{1.2.3}\cdot\frac{1}{5^3} + \ldots\right) + (c_0 + c_1) = B_2,$$

$$-\left(\frac{1}{2^4} - \frac{1}{1}\cdot\frac{1}{3^4} + \frac{1}{1.2}\cdot\frac{1}{4^4} - \frac{1}{1.2.3}\cdot\frac{1}{5^4} + \ldots\right) + (c_1 + c_2) = B_3,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\pm\left(\frac{1}{2^{n+2}} - \frac{1}{1}\cdot\frac{1}{3^{n+2}} + \frac{1}{1.2}\cdot\frac{1}{4^{n+2}} - \frac{1}{1.2.3}\cdot\frac{1}{5^{n+2}} + \ldots\right) + c_{n-1} + c_n = B_{n+1}.$$

Les parenthèses se calculent très facilement; après avoir formé les quantités $\frac{1}{1}, \frac{1}{1.2}, \frac{1}{1.2.3}, \ldots$, on divise successivement ces nombres par 2, 3, 4, ...; puis les nombres ainsi formés sont divisés par 2, 3, 4, .. , les nombres ainsi formés sont divisés par 2, 3, 4, ..., et ainsi de suite (*voir*, p. 227, le Tableau des dix-huit premiers coefficients c_0, c_1, c_2, c_3, ..., c_{17}. Tous ces coefficients sont positifs, comme on le savait d'avance. On remarque qu'ils sont plus petits que ceux des autres développements.)

On voit à présent pourquoi les coefficients B_1, B_2, B_3, ... se rapprochent de plus en plus de $\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \frac{1}{2^4}, \cdots$ et sont alternativement positifs et négatifs. Les coefficients c_0, c_1, c_2, ... diminuant très rapidement, B_1, B_2, B_3, ... se rapprochent aussi très rapidement des crochets

$$\pm\left(\frac{1}{2^{n+2}} - \frac{1}{1}\cdot\frac{1}{3^{n+2}} + \frac{1}{1.2}\cdot\frac{1}{4^{n+2}} - \ldots\right) = B_{n+1},$$

et le crochet lui-même se rapproche de plus en plus du premier terme $\frac{1}{2^{n+2}}$.

On trouve là une vérification de l'exactitude des coefficients B_1, B_2, B_3, ..., A_1, A_2, A_3, ... Si ces nombres avaient été fautifs, ils auraient troublé la régularité de c_0, c_1, c_2, ...; il en serait résulté, par exemple, que quelques-uns auraient été négatifs. C'est ainsi que je me suis aperçu que B_{10}, qui avait été calculé par le même procédé que les autres coefficients B, était inexact.

On peut aussi avoir une vérification des nombres c_0, c_1, c_2, c_3, ... de la manière suivante :

$$Q(1) = \frac{1}{e},$$

$$\begin{aligned} Q(1) &= c_0 + c_1 + c_2 + \ldots \\ &= 0,3678\,7944\,1171\,4142, \\ \frac{1}{e} &= 0,3678\,7944\,1171\,4423, \end{aligned}$$

$$\text{Différence} = 0,0000\,0000\,0000\,0281\,,$$

La petite différence trouvée provient soit de l'erreur des coefficients c_0, c_1, c_2, .. , soit des termes qui n'ont pas été calculés.

La concordance parfaite de tous les résultats me donne la conviction que tous ces calculs ne contiennent pas une faute, malgré leur très long développement.

M. Hermite m'a communiqué une forme de $\Gamma(x)$ très élégante et pouvant servir directement au calcul de cette fonction :

$$\Gamma(x) = \int_0^a \xi^{x-1} e^{-\xi} d\xi + \int_a^\infty \xi^{x-1} e^{-\xi} d\xi.$$

La première intégrale, en développant en série l'exponentielle, donne naissance à la fonction uniforme

$$a^x \left(\frac{1}{x} - \frac{a}{x+1} + \frac{a^2}{1.2} \frac{1}{x+2} - \cdot\ \cdot \right).$$

Représentons la seconde par $Q(x)$ et faisons

$$Q_n = \int_{a+n}^{a+n+1} \xi^{x-1} e^{-\xi} d\xi;$$

il viendra, sous forme d'une série évidemment convergente,

$$Q(x) = Q_0 + Q_1 + Q_2 + \ldots.$$

Posant ensuite $\xi = \zeta + a + n$, nous aurons

$$Q_n = \int_0^1 (a + n + \zeta)^{x-1} e^{-a-n-\zeta} d\zeta$$

ou bien

$$Q_n = e^{-a-n} \int_0^1 (a + n + \zeta)^{x-1} e^{-\zeta} d\zeta,$$

et, en développant,

$$Q_n = e^{-a-n}\int_0^1 \left[(a+n)^{x-1} + \frac{x-1}{1}(a+n)^{x-2}\zeta + \ldots\right] e^{-\zeta}\,d\zeta$$

$$= e^{-a-n}\left[P(1)(a+n)^{x-1} + P(2)\frac{(x-1)}{1}(a+n)^{x-2} + P(3)\frac{(x-1)(x-2)}{1.2}(a+n)^{x-3} + \ldots\right].$$

Soit

$$S(x) = \frac{a^x}{e^a} + \frac{(a+1)^x}{e^{a+1}} + \frac{(a+2)^x}{e^{a+2}} + \ldots,$$

nous aurons l'expression analytique suivante de $Q(x)$, savoir :

$$Q(x) = P(1)S(x-1) + P(2)\frac{x-1}{1}S(x-2) + P(3)\frac{(x-1)(x-2)}{1.2}S(x-3) + \ldots,$$

et la convergence de cette série est manifeste, pour toutes les valeurs de x, lorsqu'on suppose $a > 1$.

Effectivement on a, dans ce cas, à partir d'une certaine valeur de n, $x-n<0$, et dès lors on a sensiblement

$$S(x-n) = \frac{a^{x-n}}{e^a} \quad \text{et} \quad P(n) < \frac{1}{n}.$$

Il résulte qu'à partir de cette valeur de n les termes de la série sont plus petits que ceux du développement de $e^{-a}(a+1)^{x-1}$.

Les coefficients $P(1)$, $P(2)$, ... sont faciles à calculer, car ils se déduisent les uns des autres au moyen de la relation

$$P(z+1) = zP(z) - \frac{1}{e}.$$

La seule difficulté consistera dans le calcul des fonctions $S(x)$.

Tableau des coefficients de A.

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = x(x+1)(1 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots).$$

$A_1 = -\ 0,4227\ 8433\ 5098\ 4671$

$A_2 = -\ 0,2330\ 9373\ 6421\ 7867$

$A_3 = +\ 0,1910\ 9110\ 1387\ 6915$

$A_4 = -\ 0,0245\ 5249\ 0005\ 4000$

$A_5 = -\ 0,0176\ 4524\ 4550\ 1443$

$A_6 = +\ 0,0080\ 2327\ 3022\ 2673$

$A_7 = -\ 0,0008\ 0432\ 9775\ 6044$

$A_8 = -\ 0,0003\ 6083\ 7816\ 2548$

$A_9 = +\ 0,0001\ 4559\ 6142\ 1399$

$A_{10} = -\ 0,0000\ 1754\ 5859\ 7517$

$A_{11} = -\ 0,0000\ 0258\ 8995\ 0224$

$A_{12} = +\ 0,0000\ 0133\ 8501\ 5466$

$A_{13} = -\ 0,0000\ 0020\ 5474\ 3152$

$A_{14} = -\ 0,0000\ 0000\ 0159\ 5268$

$A_{15} = +\ 0,0000\ 0000\ 6275\ 6218$

$A_{16} = -\ 0,0000\ 0000\ 1273\ 6143$

$A_{17} = +\ 0,0000\ 0000\ 0092\ 3397$

$A_{18} = +\ 0,0000\ 0000\ 0012\ 0028$

$A_{19} = -\ 0,0000\ 0000\ 0004\ 2202$

$A_{20} = +\ 0,0000\ 0000\ 0000\ 5240$

$A_{21} = -\ 0,0000\ 0000\ 0000\ 0140$

$A_{22} = -\ 0,0000\ 0000\ 0000\ 0067$

Tableau des coefficients de a.

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + .$$

$a_1 = + 1,0000\ 0000\ 0000\ 0000$

$a_2 = + 0,5772\ 1566\ 4901\ 5329$

$a_3 = - 0,6558\ 7807\ 1520\ 2538$

$a_4 = - 0,0420\ 0263\ 5034\ 0952$

$a_5 = + 0,1665\ 3861\ 1382\ 2915$

$a_6 = - 0,0421\ 9773\ 4555\ 5443$

$a_7 = - 0,0096\ 2197\ 1527\ 8770$

$a_8 = + 0,0072\ 1894\ 3246\ 6630$

$a_9 = - 0,0011\ 6516\ 7591\ 8591$

$a_{10} = - 0,0002\ 1524\ 1674\ 1149$

$a_{11} = + 0,0001\ 2805\ 0282\ 3882$

$a_{12} = - 0,0000\ 2013\ 4854\ 7741$

$a_{13} = - 0,0000\ 0125\ 0493\ 4758$

$a_{14} = + 0,0000\ 0113\ 3027\ 2314$

$a_{15} = - 0,0000\ 0020\ 5633\ 8420$

$a_{16} = + 0,0000\ 0000\ 6116\ 0950$

$a_{17} = + 0,0000\ 0000\ 5002\ 0075$

$a_{18} = - 0,0000\ 0000\ 1181\ 2746$

$a_{19} = + 0,0000\ 0000\ 0104\ 3425$

$a_{20} = + 0,0000\ 0000\ 0007\ 7826$

$a_{21} = - 0,0000\ 0000\ 0003\ 6962$

$a_{22} = + 0,0000\ 0000\ 0000\ 5100$

$a_{23} = - 0,0000\ 0000\ 0000\ 0207$

Tableau des coefficients du développement

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = e^{-Cx} x(x+1)(1 + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \dots).$$

$$
\begin{aligned}
C &= 0,4227\ 8433\ 5098\ 4671\\
A_2 &= -0,3224\ 6703\ 3424\ 1132\\
A_3 &= +0,0673\ 5230\ 1053\ 1981\\
A_4 &= +0,0314\ 1168\ 5394\ 9022\\
A_5 &= -0,0143\ 3334\ 5686\ 2387\\
A_6 &= +0,0004\ 2566\ 6389\ 5753\\
A_7 &= +0,0009\ 2680\ 6472\ 5897\\
A_8 &= -0,0002\ 1927\ 6360\ 3432\\
A_9 &= -0,0000\ 0265\ 0983\ 9844\\
A_{10} &= +0,0000\ 1021\ 5199\ 3474\\
A_{11} &= -0,0000\ 0185\ 4328\ 3265\\
A_{12} &= -0,0000\ 0000\ 6534\ 1544\\
A_{13} &= +0,0000\ 0005\ 8247\ 6956\\
A_{14} &= -0,0000\ 0001\ 0048\ 4862\\
A_{15} &= +0,0000\ 0000\ 0251\ 4687\\
A_{16} &= +0,0000\ 0000\ 0188\ 6871\\
A_{17} &= -0,0000\ 0000\ 0035\ 7806\\
A_{18} &= +0,0000\ 0000\ 0002\ 0025\\
A_{19} &= +0,0000\ 0000\ 0000\ 3314\\
A_{20} &= -0,0000\ 0000\ 0000\ 0878\\
A_{21} &= +0,0000\ 0000\ 0000\ 0069
\end{aligned}
$$

Tableau des coefficients du développement

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x(x+1)}(1 + B_1 x + B_2 x^2 + \ldots).$$

$$B_1 = +0,4227\,8433\,5098\,4671$$
$$B_2 = +0,4118\,4033\,0426\,4396$$
$$B_3 = +0,0815\,7691\,9247\,0863$$
$$B_4 = +0,0742\,4901\,0753\,5137$$
$$B_5 = -0,0002\,6698\,2068\,7450$$
$$B_6 = +0,0111\,5404\,5718\,1309$$
$$B_7 = -0,0028\,5264\,5821\,1553$$
$$B_8 = +0,0021\,0393\,3340\,6975$$
$$B_9 = -0,0009\,1957\,3838\,8259$$
$$B_{10} = +0,0004\,9038\,8450\,8226$$
$$B_{11} = -0,0002\,4094\,1435\,8311$$
$$B_{12} = +0,0001\,2167\,3806\,5265$$
$$B_{13} = -0,0000\,6079\,2891\,3175$$
$$B_{14} = +0,0000\,3045\,3557\,0349$$
$$B_{15} = -0,0000\,1523\,4935\,8969$$
$$B_{16} = +0,0000\,0762\,1779\,6964$$
$$B_{17} = -0,0000\,0381\,2110\,4003$$
$$B_{18} = +0,0000\,0190\,6491\,6577$$

Tableau des coefficients du développement

$$\Gamma(x) = \mathrm{P}(x) + c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots .$$

$$
\begin{aligned}
C_0 &= 0,2193\ 8393\ 4395\ 5203\\
C_1 &= 0,0978\ 4319\ 7216\ 6725\\
C_2 &= 0,0356\ 0349\ 1928\ 4726\\
C_3 &= 0,0110\ 7089\ 5446\ 0110\\
C_4 &= 0,0030\ 2761\ 1195\ 8767\\
C_5 &= 0,0007\ 4265\ 8300\ 4889\\
C_6 &= 0,0001\ 6575\ 6256\ 0585\\
C_7 &= 0,0000\ 3403\ 1394\ 8701\\
C_8 &= 0,0000\ 0648\ 2609\ 8154\\
C_9 &= 0,0000\ 0115\ 3713\ 5309\\
C_{10} &= 0,0000\ 0019\ 2937\ 4300\\
C_{11} &= 0,0000\ 0003\ 0464\ 9169\\
C_{12} &= 0,0000\ 0000\ 4560\ 7157\\
C_{13} &= 0,0000\ 0000\ 0649\ 6268\\
C_{14} &= 0,0000\ 0000\ 0088\ 3033\\
C_{15} &= 0,0000\ 0000\ 0011\ 4985\\
C_{16} &= 0,0000\ 0000\ 0001\ 4247\\
C_{17} &= 0,0000\ 0000\ 0000\ 1814
\end{aligned}
$$

Tableau des coefficients du développement

$$(a+1)(a+2)(a+3)\dots(a+n).$$

$A^{(1)}$....	1	1											
$A^{(2)}$....	1	3	2										
$A^{(3)}$....	1	6	11	6									
$A^{(4)}$....	1	10	35	50	24								
$A^{(5)}$....	1	15	85	225	274	120							
$A^{(6)}$....	1	21	175	735	1624	1764	720						
$A^{(7)}$....	1	28	322	1960	6769	13132	13068	5040					
$A^{(8)}$....	1	36	546	4536	22449	67284	118124	109584	40320				
$A^{(9)}$....	1	45	870	9450	63273	269325	723680	1172700	1026576	362880			
$A^{(10)}$...	1	55	1320	18150	157773	902055	3416930	8409500	12753576	10628640	3628800		
$A^{(11)}$...	1	66	1925	32670	357423	2637558	13339535	45995730	105258076	150917976	120543840	39916800	
$A^{(12)}$...	1	78	2717	55770	749463	6926634	44990231	206070150	657206836	1414014888	1931559552	1486442880	479001600

Tableau des coefficients du développement de Binet.

I_0	$\frac{1}{6}$	I_6	$\frac{280361}{360}$
I_1	$\frac{1}{3}$	I_7	$\frac{277244}{45}$
I_2	$\frac{59}{60}$	I_8	$\frac{36889359}{660}$
I_3	$\frac{58}{15}$	I_9	$\frac{71769745}{132}$
I_4	$\frac{533}{28}$	I_{10}	$\frac{2163229640 1}{364}$
I_5	$\frac{1577}{14}$		

La connaissance des coefficients que nous avons calculés pourra être utile dans beaucoup de cas. On pourra s'en servir pour calculer commodément les dérivées, et même les intégrales successives des fonctions $G(x)$, $\Gamma(x)$, $Q(x)$ et les intégrales définies qui en dépendent.

Comme application, je vais calculer $\int_0^1 \frac{dx}{\Gamma(x+2)}$, $\int_{-1}^0 \frac{dx}{\Gamma(x+2)}$, $\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\Gamma(x+2)}$:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\Gamma(x+2)} = 1 + \tfrac{1}{2}A_1 + \tfrac{1}{3}A_2 + \tfrac{1}{4}A_3 + \ldots,$$

$$\int_{-1}^0 \frac{dx}{\Gamma(x+2)} = 1 - \tfrac{1}{2}A_1 + \tfrac{1}{3}A_2 - \tfrac{1}{4}A_3 + \ldots,$$

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{\Gamma(x+2)} = \int_{-1}^0 \frac{dx}{\Gamma(x+2)} + \int_0^1 \frac{dx}{\Gamma(x+2)}.$$

$$
\begin{aligned}
A_0 &= 1{,}0000\ 0000\ 0000\ 0000\\
\tfrac{1}{4}A_3 &= 0{,}0477\ 7277\ 5346\ 9229\\
\tfrac{1}{7}A_6 &= 0{,}0011\ 4618\ 1860\ 3239\\
\tfrac{1}{10}A_9 &= 0{,}0000\ 1455\ 9614\ 2140\\
\tfrac{1}{13}A_{12} &= 0{,}0000\ 0010\ 2961\ 6574\\
\tfrac{1}{16}A_{15} &= 0{,}0000\ 0000\ 0392\ 2264\\
\tfrac{1}{18}A_{17} &= 0{,}0000\ 0000\ 0005\ 1300\\
\tfrac{1}{19}A_{18} &= 0{,}0000\ 0000\ 0000\ 6317\\
\tfrac{1}{21}A_{20} &= 0{,}0000\ 0000\ 0000\ 0250\\
\hline
& \ 1{,}0489\ 3362\ 0181\ 1313
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}A_1 &= 0{,}2113\ 9216\ 7549\ 2335\\
\tfrac{1}{3}A_2 &= 0{,}0776\ 9791\ 2140\ 5956\\
\tfrac{1}{5}A_4 &= 0{,}0049\ 1049\ 8001\ 0800\\
\tfrac{1}{6}A_5 &= 0{,}0029\ 4087\ 4091\ 6907\\
\tfrac{1}{8}A_7 &= 0{,}0001\ 0054\ 1221\ 9505\\
\tfrac{1}{9}A_8 &= 0{,}0000\ 4009\ 3090\ 6950\\
\tfrac{1}{11}A_{10} &= 0{,}0000\ 0159\ 5078\ 1593\\
\tfrac{1}{12}A_{11} &= 0{,}0000\ 0021\ 5749\ 5852\\
\tfrac{1}{14}A_{13} &= 0{,}0000\ 0001\ 4676\ 7368\\
\tfrac{1}{15}A_{14} &= 0{,}0000\ 0000\ 0010\ 6351\\
\tfrac{1}{17}A_{16} &= 0{,}0000\ 0000\ 0074\ 9185\\
\tfrac{1}{20}A_{19} &= 0{,}0000\ 0000\ 0000\ 2110\\
\tfrac{1}{21}A_{20} &= 0{,}0000\ 0000\ 0000\ 0010\\
\hline
& \ 0{,}2973\ 8391\ 1685\ 4922
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& 1{,}0489\ 3362\ 0181\ 1313\\
& 0{,}2970\ 8391\ 1685\ 4922\\
\hline
\int_0^1 \frac{dx}{\Gamma(x+2)} &= 0{,}7518\ 4970\ 8495\ 6391
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A_0 &= 1{,}0000\ 0000\ 0000\ 0000\\
\tfrac{1}{2}A_1 &= 0{,}2113\ 9216\ 7549\ 2335\\
\tfrac{1}{6}A_5 &= 0{,}0029\ 4087\ 4091\ 6907\\
\tfrac{1}{7}A_6 &= 0{,}0011\ 4618\ 1860\ 3239\\
\tfrac{1}{8}A_7 &= 0{,}0001\ 0054\ 1221\ 9505\\
\tfrac{1}{12}A_{11} &= 0{,}0000\ 0021\ 5749\ 5852\\
\tfrac{1}{13}A_{12} &= 0{,}0000\ 0010\ 2961\ 6574\\
\tfrac{1}{14}A_{13} &= 0{,}0000\ 0001\ 4676\ 7368\\
\tfrac{1}{19}A_{18} &= 0{,}0000\ 0000\ 0000\ 6317\\
\tfrac{1}{20}A_{19} &= 0{,}0000\ 0000\ 0000\ 2110\\
\tfrac{1}{21}A_{20} &= 0{,}0000\ 0000\ 0000\ 0250\\
\tfrac{1}{22}A_{21} &= 0{,}0000\ 0000\ 0000\ 0007\\
\hline
& \ 1{,}2155\ 8009\ 8112\ 0464
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\tfrac{1}{3}A_2 &= 0{,}0776\ 9791\ 2140\ 5956\\
\tfrac{1}{4}A_3 &= 0{,}0477\ 7277\ 5346\ 9229\\
\tfrac{1}{5}A_4 &= 0{,}0049\ 1049\ 8001\ 0800\\
\tfrac{1}{9}A_8 &= 0{,}0000\ 4009\ 3090\ 6950\\
\tfrac{1}{10}A_9 &= 0{,}0000\ 1455\ 9614\ 2140\\
\tfrac{1}{11}A_{10} &= 0{,}0000\ 0159\ 5078\ 1593\\
\tfrac{1}{15}A_{14} &= 0{,}0000\ 0000\ 0010\ 6351\\
\tfrac{1}{16}A_{15} &= 0{,}0000\ 0000\ 0392\ 2264\\
\tfrac{1}{17}A_{16} &= 0{,}0000\ 0000\ 0074\ 9185\\
\tfrac{1}{18}A_{17} &= 0{,}0000\ 0000\ 0005\ 1300\\
\tfrac{1}{23}A_{22} &= 0{,}0000\ 0000\ 0000\ 0003\\
\hline
& \ 0{,}1304\ 3743\ 3754\ 5771\\
& \ 1{,}2155\ 8009\ 8112\ 0464
\end{aligned}
$$

$$\int_1^2 \frac{dx}{\Gamma(x)} = \int_{-1}^0 \frac{dx}{\Gamma(x+2)} = 1{,}0851\ 4266\ 4357\ 4693$$

$$\int_2^3 \frac{dx}{\Gamma(x)} = \int_0^1 \frac{dx}{\Gamma(x+2)} = 0{,}7518\ 4970\ 8495\ 6391$$

$$\int_1^3 \frac{dx}{\Gamma(x)} = \int_{-1}^1 \frac{dx}{\Gamma(x+2)} = 1{,}8369\ 9237\ 2853\ 1084$$

On trouverait, de la même manière,

$$\int_0^1 \frac{dx}{\Gamma(x)} = 0,5412\ 3573\ 9587\ 6182,$$

$$\int_0^{-1} \frac{dx}{\Gamma(x)} = 0,1837\ 2070\ 6646\ 1288.$$