LÉON CHARVE

De la réduction des formes quadratiques ternaires positives et de son application aux irrationnelles du troisième degré

Annales scientifiques de l'É.N.S. 2e série, tome 9 (1880), p. 3-156 (supplément)

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1880_2_9__S3_0>

DE LA RÉDUCTION

DES

FORMES QUADRATIQUES TERNAIRES POSITIVES

ET DE SON APPLICATION

AUX IRRATIONNELLES DU TROISIÈME DEGRÉ,

PAR M. LÉON CHARVE,

CHARGÉ DE COURS A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE MARSEILLE,
ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE.

INTRODUCTION.

Le but final du présent travail est de développer les recherches de M. Hermite relatives aux irrationnelles du troisième degré et contenues dans ses Lettres à Jacobi. Ces Lettres ont été publiées dans le *Journal de Crelle*, t. 40, et dans les *Œuvres de Jacobi*, t. 2. Notre travail portera principalement sur la dernière partie de la deuxième Lettre.

La théorie de M. Hermite exigeant la réduction de certaines formes ternaires, nous avons été conduit à exposer une méthode de réduction, et, bien que les Lettres à Jacobi renfermassent des méthodes de réduction, nous leur avons préféré, sur le conseil de M. Hermite, la méthode récemment donnée par M. Selling dans le *Journal de M. Resal*.

Nous avons été amené par là à disposer notre travail de la manière suivante.

Après avoir rappelé les divers travaux relatifs à la théorie des formes quadratiques ternaires positives, nous exposons la méthode de

M. Selling; nous étudions spécialement les substitutions auxquelles conduit l'emploi de cette méthode dans la réduction continue d'une forme à coefficients variables et nous réduisons ces substitutions à deux.

Nous exposons ensuite la théorie de M. Hermite sur les irrationnelles du troisième degré; de cette théorie ressort, pour les irrationnelles du troisième degré, cette propriété très remarquable de conduire à un algorithme périodique entièrement analogue à celui des fractions continues dans leur application aux irrationnelles du second degré.

On applique ensuite cette théorie à divers exemples.

On termine par quelques brèves considérations sur les unités complexes, dont on renvoie l'étude approfondie à un autre travail.

I.

DE LA RÉDUCTION DES FORMES QUADRATIQUES.

---

1. J'appelle *forme quadratique ternaire* une fonction du second degré homogène à trois variables dont l'expression générale est

$$f = ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2byz + 2b'zx + 2b''xy,$$

dans laquelle les quantités a, a', a'', b, b', b'' sont des nombres quelconques donnés et x, y, z trois variables arbitraires.

Si la forme f reste toujours positive quelles que soient les valeurs attribuées à x, y, z, nous dirons que la forme f est une forme *positive*.

Si la forme f était constamment négative quelles que fussent les variables x, y, z, la forme f serait dite *négative;* l'étude des formes négatives se ramène évidemment à celle des formes positives en changeant le signe des six coefficients a, a', a'', b, b', b''.

Les formes positives ou négatives sont encore appelées des *formes définies;* les formes qui prennent des valeurs tantôt positives et tantôt négatives lorsque x, y, z parcourent la série des valeurs de $-\infty$ à $+\infty$ sont appelées des *formes indéfinies.*

Dans ce qui suit, on ne s'occupera que des *formes définies*.

Ces formes, égalées à ± 1, représentent en coordonnées rectilignes des ellipsoïdes. Un changement convenable de variables permettrait donc de ramener une forme positive donnée f à la forme

$$A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2,$$

où A, B, C seraient trois constantes positives et ξ, η, ζ trois variables arbitraires.

Nous supposerons que les quantités a, a', a'', b, b', b'' sont des nombres quelconques entiers ou fractionnaires, rationnels ou irrationnels; mais nous n'attribuerons à x, y, z que des valeurs entières.

Nous dirons que les nombres qui peuvent être représentés par la forme f en attribuant à x, y, z des valeurs entières *appartiennent à la forme f*.

2. Soient trois variables X, Y, Z liées à x, y, z par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} x &= \alpha X + \alpha' Y + \alpha'' Z, \\ y &= \beta X + \beta' Y + \beta'' Z, \\ z &= \gamma X + \gamma' Y + \gamma'' Z, \end{aligned}$$

où $\alpha, \alpha', \alpha'', \beta, \beta', \beta'', \gamma, \gamma', \gamma''$ sont des nombres entiers.

Si dans f on remplace x, y, z par les expressions précédentes, la forme f se changera en une forme F qui peut s'écrire ainsi :

$$F = AX^2 + A'Y^2 + A''Z^2 + 2BYZ + 2B'ZX + 2B''XY,$$

où A, A', A'', B, B', B'' sont de nouveaux nombres constants dont les relations avec les premiers sont bien faciles à établir.

Si l'on attribue à X, Y, Z des valeurs entières, il en résultera pour x, y, z des valeurs entières, de sorte que tous les nombres qui appartiennent à la forme F appartiennent aussi à la forme f.

Si le déterminant

$$\begin{vmatrix} \alpha & \alpha' & \alpha'' \\ \beta & \beta' & \beta'' \\ \gamma & \gamma' & \gamma'' \end{vmatrix}$$

est égal à ± 1, à des valeurs entières de x, y, z correspondent des valeurs entières de X, Y, Z, de sorte que tous les nombres appartenant à la forme f appartiennent aussi à la forme F.

Donc, dans le cas où le déterminant précédent est égal à ± 1, tout nombre appartenant à f appartient à F, et réciproquement.

Et lorsqu'on attribue à x, y, z toutes les valeurs entières de $-\infty$ à $+\infty$, la série des valeurs obtenues pour f est identique à la série des valeurs obtenues pour F lorsque X, Y, Z varient de $-\infty$ à $+\infty$.

Les deux formes f et F sont alors appelées *deux formes équivalentes.*

3. Il existe entre les coefficients de ces deux formes une relation remarquable: si l'on prend les demi-dérivées de f par rapport aux trois variables x, y, z, le déterminant formé avec les coefficients de x, y, z dans ces trois demi-dérivées, à savoir

$$\begin{vmatrix} a & b'' & b' \\ b'' & a' & b \\ b' & b & a'' \end{vmatrix},$$

est égal au déterminant obtenu en opérant de la même manière sur la forme F.

Ce déterminant, qui a la même valeur dans toutes les formes équivalentes à f, s'appelle le *déterminant de la forme f.*

4. Si toutes les formes équivalentes ont le même déterminant, il n'est pas vrai que, réciproquement, toutes les formes de même déterminant soient équivalentes.

Au contraire, si nous groupons en une seule *classe* toutes les formes équivalentes à une forme donnée, en général à un déterminant donné correspond un certain nombre de classes.

5. Puisqu'aux formes équivalentes qui composent une classe correspondent identiquement les mêmes nombres, il suffit, pour étudier ces formes, d'étudier l'une d'entre elles.

Et deux formes étant données, il sera important, avant de commencer leur étude, d'examiner si elles sont équivalentes ou non, puisque, dans le cas où elles seraient équivalentes, il suffirait d'étudier l'une des deux.

Or, si, parmi les formes d'une classe, on en choisit une entre toutes les autres pour représenter cette classe, et si cette forme est choisie de manière que ses coefficients vérifient certaines relations à l'exclusion de toutes les autres formes de la même classe, si de plus, une forme de la classe étant donnée, on sait en déduire la forme spéciale précédente, il sera toujours facile de voir si deux formes sont équivalentes ou non. Il suffira, en effet, de voir si elles correspondent toutes deux à la même forme spéciale ou à deux formes spéciales distinctes.

Cette forme spéciale, choisie entre toutes les formes d'une même classe, s'appelle une *forme réduite*.

Par conséquent, la théorie de la *réduction* des formes ternaires, c'est-à-dire la recherche de la forme réduite d'une classe donnée, doit précéder toute autre étude sur ces formes.

6. Gauss (1) a le premier abordé cette théorie, et il a montré que, pour les formes à coefficients entiers, le nombre des classes répondant à un déterminant donné était fini; mais il n'a pas donné de définition précise de la forme réduite.

Seeber (2) a donné le premier une définition précise de la forme réduite en assujettissant ses coefficients à des conditions qui sont remplies par une seule forme parmi toutes les formes d'une classe donnée et en montrant comment, une forme étant donnée, on peut calculer la réduite correspondante.

La démonstration de Seeber est excessivement compliquée; elle occupe plus de la moitié d'un livre de deux cents pages in-4°; elle consiste à montrer que, étant donnée une forme satisfaisant aux conditions de réduction, les formes équivalentes qu'on en peut déduire ne satisfont pas à ces conditions, et Seeber y parvient en faisant l'énumération de tous les cas qui peuvent se présenter. Cette énorme énumération n'est pas même tout à fait complète, ainsi que l'a fait voir Eisenstein.

Eisenstein a remarqué ensuite que les conditions données par Seeber pouvaient se simplifier. Les conditions de Seeber contenaient, dans

---

(1) *Disquisitiones arithmeticæ*, n° 276 et suiv.

(2) *Untersuchungen über die Eigenschaften der positiven ternären quadratischen Formen* (Fribourg, 1831).

certains cas, les coefficients au second degré. Eisenstein a montré et il est facile de voir que ces conditions se réduisent au premier degré.

7. Les relations, simplifiées par Eisenstein, que doivent vérifier les coefficients d'une forme réduite sont les suivantes :

Les trois coefficients b, b', b'' doivent être de même signe, et les conditions se divisent en deux séries, selon que b, b', b'' sont positifs ou négatifs.

1° Si b, b', b'' sont positifs, il faut :

$$\text{Conditions générales......}\left\{\begin{array}{l} a \leqq a' \leqq a'', \\ 2b \leqq a', \quad 2b' \leqq a, \quad 2b'' \leqq a. \end{array}\right.$$

$$\text{Conditions particulières.....}\left\{\begin{array}{llll} \text{Si} & a = a' & \text{il faut} & b \leqq b', \\ & a' = a'' & & b' \leqq b'', \\ & 2b = a' & & b'' \leqq 2b', \\ & 2b' = a & & b'' \leqq 2b, \\ & 2b'' = a & & b' \leqq 2b. \end{array}\right.$$

2° Si b, b', b'' sont négatifs, il faut :

$$\text{Conditions générales.....}\left\{\begin{array}{l} a \leqq a' \leqq a'', \\ 2b \leqq a', \quad 2b' \leqq a, \quad 2b'' \leqq a, \quad 2(b + b' + b'') \leqq a + a'. \end{array}\right.$$

$$\text{Conditions particulières..}\left\{\begin{array}{llll} \text{Si} & a = a' & \text{il faut} & b < b', \\ & a' = a'' & & b' < b'', \\ & 2b = a' & & b'' = 0, \\ & 2b' = a & & b'' = 0, \\ & 2b'' = a & & b' = 0, \\ & 2(b + b' + b'') = a + a' & & a \leqq 2b' + b''. \end{array}\right.$$

8. Dans ses Lettres à Jacobi, où sont exposés tant de beaux résultats, M. Hermite est revenu plusieurs fois sur la théorie de la réduction, en l'étendant, du reste, aux formes quadratiques composées d'un nombre quelconque de variables.

Mais, quoique les conditions auxquelles il assujettit les réduites ne puissent être satisfaites que par un nombre fini de formes dans chaque classe, il n'est pas démontré qu'une seule forme les vérifie, et la réduite manque ainsi de son caractère d'être unique dans chaque classe.

9. Gauss, à propos du travail de Seeber, fit (*Journal de Crelle*, t. 20) sur la représentation géométrique des formes ternaires quelques remarques qui ont conduit Lejeune-Dirichlet à faire la théorie de la réduction des formes ternaires à l'aide de considérations purement géométriques. Lejeune-Dirichlet a ainsi substitué au long exposé de Seeber une démonstration très simple.

M. Selling [1] a dernièrement repris ce sujet. Dans la première Partie d'un Mémoire publié dans le *Journal de M. Borchardt* et dans le *Journal de M. Resal*, il a cherché à traduire algébriquement le procédé géométrique de Dirichlet, et il est parvenu à une excellente méthode de réduction que nous allons exposer.

II.

MÉTHODE DE RÉDUCTION DE M. SELLING.

---

10. A cause de la symétrie des calculs, nous remplacerons les coefficients a, a', a'', b, b', b'' par d'autres coefficients, et nous prendrons avec M. Selling, pour type d'une forme quadratique ternaire, la forme suivante :

$$f = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2gyz + 2hzx + 2kxy.$$

Aux coefficients g, h, k nous adjoindrons trois autres coefficients désignés par l, m, n, et aux coefficients a, b, c nous adjoindrons un quatrième coefficient désigné par d.

Les nouveaux coefficients seront liés aux coefficients primitifs par les

---

(1) *Journal de M. Borchardt*, t. 77, et *Journal de M. Resal*, 3e série, t. III.

relations suivantes :

$$\begin{aligned} a+h+k+l&=0,\\ b+g+k+m&=0,\\ c+g+h+n&=0,\\ d+l+m+n&=0. \end{aligned}$$

Si, introduisant une quatrième variable t, nous changeons x, y, z respectivement en $x-t$, $y-t$, $z-t$, la forme f pourra s'écrire de la manière suivante :

$$\varphi=-g(y-z)^2-h(z-x)^2-k(x-y)^2-l(x-t)^2-m(y-t)^2-n(z-t)^2.$$

Cette forme à quatre variables est identique à la forme proposée si l'on y fait $t=0$; mais cette restriction est même inutile, car à des valeurs entières de x, y, z, t dans la forme φ correspondent des valeurs entières dans la forme f pour x, y, z, de sorte que les mêmes nombres peuvent être représentés par l'une ou l'autre forme.

Si une substitution [1]

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} x&=\alpha X+\alpha' Y+\alpha'' Z,\\ y&=\beta X+\beta' Y+\beta'' Z,\\ z&=\gamma X+\gamma' Y+\gamma'' Z \end{aligned}\right.$$

transforme la forme f en une forme équivalente F, la substitution

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} x&=\alpha(X-T)+\alpha'(Y-T)+\alpha''(Z-T),\\ y&=\beta(X-T)+\beta'(Y-T)+\beta''(Z-T),\\ z&=\gamma(X-T)+\gamma'(Y-T)+\gamma''(Z-T), \end{aligned}\right.$$

qu'on peut écrire

$$(2\ bis)\qquad \left\{\begin{aligned} x&=\alpha X+\alpha' Y+\alpha'' Z+\alpha''' T,\\ y&=\beta X+\beta' Y+\beta'' Z+\beta''' T,\\ z&=\gamma X+\gamma' Y+\gamma'' Z+\gamma''' T, \end{aligned}\right.$$

---

[1] Nous ne considérerons jamais que des substitutions au déterminant 1, c'est-à-dire telles, que le déterminant $\begin{vmatrix} \alpha & \alpha' & \alpha'' \\ \beta & \beta' & \beta'' \\ \gamma & \gamma' & \gamma'' \end{vmatrix}$ soit égal à 1. Quant aux substitutions de déterminant -1, elles se ramènent aux précédentes en changeant les signes de tous les coefficients, ce qui ne change pas le résultat de la substitution. Il n'y a donc pas à distinguer entre les substitutions de déterminant $+1$ ou -1.

où les quantités α''', β''', γ''' vérifient les relations suivantes,

$$\begin{aligned}\alpha + \alpha' + \alpha'' + \alpha''' &= 0,\\ \beta + \beta' + \beta'' + \beta''' &= 0,\\ \gamma + \gamma' + \gamma'' + \gamma''' &= 0,\end{aligned}$$

cette substitution (2 *bis*), dis-je, transformera f en une orme Φ qui sera identique à F, qui contiendra quatre variables et qu'on peut déduire de φ au moyen de la substitution

$$\begin{aligned}x &= \alpha X + \alpha' Y + \alpha'' Z + \alpha''' T,\\ y &= \beta X + \beta' Y + \beta'' Z + \beta''' T,\\ z &= \gamma X + \gamma' Y + \gamma'' Z + \gamma''' T,\\ t &= 0;\end{aligned}$$

et, comme dans φ n'entrent que les différences $x - t$, $y - t$, $z - t$, on pourra remplacer cette substitution par la suivante,

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned}x &= \alpha_1 X + \alpha_2 Y + \alpha_3 Z + \alpha_4 T,\\ y &= \beta_1 X + \beta_2 Y + \beta_3 Z + \beta_4 T,\\ z &= \gamma_1 X + \gamma_2 Y + \gamma_3 Z + \gamma_4 T,\\ t &= \delta_1 X + \delta_2 Y + \delta_3 Z + \delta_4 T,\end{aligned}\right.$$

où les coefficients $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1, \ldots$ sont liés à $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ par les relations

$$\alpha = \alpha_1 - \delta_1, \quad \alpha' = \alpha_2 - \delta_2, \quad \ldots, \quad \beta = \beta_1 - \delta_1, \quad \ldots.$$

Ces substitutions (1) et (3), qui sont identiques l'une à l'autre, seront représentées par l'une ou l'autre des deux notations suivantes,

$$\begin{vmatrix}\alpha & \alpha' & \alpha''\\ \beta & \beta' & \beta''\\ \gamma & \gamma' & \gamma''\end{vmatrix}$$

ou

$$\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4\\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4\\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \gamma_4\\ \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 & \delta_4\end{vmatrix},$$

et l'on remarquera, sur la deuxième représentation, qu'on peut augmenter ou diminuer d'un même nombre tous les éléments d'une même colonne verticale, sans changer le résultat de la substitution.

11. Nous dirons que *la forme φ est réduite lorsque tous ses coefficients g, h, k, l, m, n sont négatifs ou nuls.*

Pour que cette définition soit acceptable, il faut démontrer :

1° Qu'à une forme donnée correspond toujours une forme équivalente, dans laquelle les coefficients g, h, k, l, m, n sont négatifs ou nuls;

2° Que parmi toutes les formes d'une classe il n'y en a qu'une seule dont les coefficients soient négatifs ou nuls.

12. Je commence par démontrer qu'à une forme donnée correspond toujours une forme équivalente dont tous les coefficients sont négatifs ou nuls.

Supposons en effet que dans la forme φ le coefficient g soit positif; je fais dans cette forme la substitution

$$\begin{aligned} x &= -x + t, \\ y &= -y + t, \\ z &= -x + z, \\ t &= 0. \end{aligned}$$

J'obtiens ainsi la transformée

$$\begin{aligned} \psi = &- g(x - y - z + t)^2 - h(z - t)^2 \\ &- k(x - y)^2 - l(x - t)^2 - m(y - t)^2 - n(z - t)^2, \end{aligned}$$

et, si l'on remarque que l'on a

$$\begin{aligned} (x - y - z + t)^2 = &-(y - z)^2 + (z - x)^2 + (x - y)^2 \\ &- (x - t)^2 + (y - t)^2 + (z - t)^2, \end{aligned}$$

on en conclut

$$\begin{aligned} \psi = g(y - z)^2 &- (g + n)(z - x)^2 - (g + k)(x - y)^2 \\ &+ (g - l)(x - t)^2 - (g + m)(y - t)^2 - (g + h)(z - t)^2. \end{aligned}$$

Or la somme des coefficients de ψ est

$$-(2g + h + k + l + m + n),$$

et, comme g est positif, on voit qu'elle est inférieure de g à la somme des coefficients de φ.

Si un autre coefficient était positif, on pourrait de même diminuer de ce coefficient la somme $-(g+h+k+l+m+n)$: il suffirait, par exemple, de faire une permutation des variables x, y, z, t qui amenât ce coefficient à la première place et d'appliquer ensuite la substitution précédente.

Cela posé, remarquons que la somme $-(g+h+k+l+m+n)$ est positive, car, en se reportant à la définition de l, m, n, on voit que la somme précédente est égale à $\frac{a+b+c+d}{2}$, c'est-à-dire à la demi-somme des valeurs que prend φ quand on y fait successivement x, y, z, t égaux respectivement à 1000, 0100, 0010, 0001. Cette somme ne peut donc pas être inférieure à une certaine limite, et si, parmi toutes les formes équivalentes à la forme f, on considère la forme ou les formes qui fournissent une somme plus petite que dans toutes les autres formes, cette forme ou ces formes ont nécessairement des coefficients g, h, k, l, m, n dont aucun n'est positif.

Il existe donc au moins une forme équivalente à une forme donnée et dont tous les coefficients g, h, k, l, m, n sont négatifs ou nuls. Cette forme se déduira de la forme donnée en appliquant la méthode précédente tant qu'un des coefficients sera négatif; mais il convient de *remarquer que la série des opérations ne se prolongera pas indéfiniment*.

13. En effet, supposons que nous soyons parvenus à la forme

$$\begin{aligned}\Phi = & -G(Y-Z)^2 - H(Z-X)^2 - K(X-Y)^2 \\ & - L(X-T)^2 - M(Y-T)^2 - N(Z-T)^2;\end{aligned}$$

en appliquant à φ et aux formes suivantes les substitutions qui ont pour résultat de diminuer la somme des coefficients. La série des substitutions employées pourra se ramener à une substitution unique,

$$\begin{aligned} x &= \alpha X + \alpha' Y + \alpha'' Z + \alpha''' T, \\ y &= \beta X + \beta' Y + \beta'' Z + \beta''' T, \\ z &= \gamma X + \gamma' Y + \gamma'' Z + \gamma''' T, \\ t &= 0, \end{aligned}$$

permettant de déduire directement Φ de φ.

Or on a certainement

$$-(G+H+K+L+M+N)<-(g+h+k+l+m+n),$$

et d'un autre côté $-(G+H+K+L+M+N)$ est la demi-somme des valeurs que prend Φ quand on remplace successivement l'une des quantités X, Y, Z, T par l'unité et les autres par zéro. Mais remplacer, par exemple, X par l'unité dans Φ et les autres variables par zéro revient à remplacer, dans φ, x, y, z, t respectivement par α, β, γ, o. Il en résulte que α, β, γ ne peuvent croître indéfiniment, sans quoi la valeur correspondante de φ, et par suite de Φ, serait elle-même indéfiniment grande.

On voit par là que les coefficients α, β, γ, α', β', ... sont limités.

Donc, si la série des substitutions qui d'une forme donnée conduisent à une forme dont les coefficients soient tous négatifs se prolongeait indéfiniment, il faudrait que deux formes Φ et Φ_1 se déduisissent de φ par la même substitution; mais ces deux formes offriraient alors la même valeur de $-(G+H+K+L+M+N)$, et cette supposition est impossible, puisque dans la suite des opérations cette somme va constamment en décroissant.

Donc, *étant donnée une forme*

$$\varphi=-g(y-z)^2-h(z-x)^2-k(x-y)^2-l(x-t)^2-m(y-t)^2-n(z-t)^2,$$

par un nombre fini d'opérations on transformera cette forme en une autre dont tous les coefficients g, h, k, l, m, n soient négatifs ou nuls.

14. Je veux maintenant démontrer que, parmi toutes les formes d'une classe, il n'y en a qu'une seule dont tous les coefficients g, h, k, l, m, n soient négatifs ou nuls.

Pour y parvenir, on démontrera que, si une forme a tous ses coefficients g, h, k, l, m, n négatifs ou nuls, toute forme équivalente présentera pour la somme $-(g+h+k+l+m+n)$ une valeur supérieure à la valeur correspondante obtenue par les coefficients de la forme donnée, d'où résultera que les coefficients de deux formes équivalentes ne peuvent être tous négatifs ou nuls.

Je supposerai d'abord une forme dont tous les coefficients soient négatifs; j'examinerai ensuite le cas où un ou plusieurs de ces coefficients seraient nuls.

Soit donc une forme

$$\varphi = -g(y-z)^2 - h(z-x)^2 - k(x-y)^2 - l(x-t)^2 - m(y-t)^2 - n(z-t)^2,$$

dans laquelle g, h, k, l, m, n sont tous négatifs, et supposons que de cette forme on déduise une forme équivalente Φ au moyen de la substitution

$$\begin{aligned}
x &= \alpha_1 X + \alpha_2 Y + \alpha_3 Z + \alpha_4 T,\\
y &= \beta_1 X + \beta_2 Y + \beta_3 Z + \beta_4 T,\\
z &= \gamma_1 X + \gamma_2 Y + \gamma_3 Z + \gamma_4 T,\\
t &= \delta_1 X + \delta_2 Y + \delta_3 Z + \delta_4 T.
\end{aligned}$$

Si l'on désigne par A, B, C, D, G, H, K, L, M, N les coefficients qui pour Φ sont analogues aux coefficients $a, b, c, d, g, h, k, l, m, n$ de la forme f ou φ, on aura, en remarquant que A est le coefficient de X^2,

$$\begin{aligned}
A = {} & g(\beta_1-\gamma_1)^2 - h(\gamma_1-\alpha_1)^2 - k(\alpha_1-\beta_1)^2\\
& - l(\alpha_1-\delta_1)^2 - m(\beta_1-\delta_1)^2 - n(\gamma_1-\delta_1)^2,
\end{aligned}$$

et l'on aura pour B, C, D des valeurs analogues déduites de la précédente en affectant les lettres α, β, γ des indices 2, 3, 4.

Si l'on fait alors la somme $A+B+C+D$, on trouvera que dans cette somme le coefficient de g est

$$-[(\beta_1-\gamma_1)^2 + (\beta_2-\gamma_2)^2 + (\beta_3-\gamma_3)^2 + (\beta_4-\gamma_4)^2].$$

Or trois des différences contenues dans le crochet ne peuvent être simultanément nulles, sans quoi la quatrième serait nulle aussi; mais, dans ce cas, le déterminant de la substitution serait nul contrairement à l'hypothèse. Donc, dans la somme $A+B+C+D$, le coefficient $-g$ est au moins multiplié par la somme des carrés de deux nombres entiers, c'est-à-dire au moins par 2; il en est de même des autres coefficients, ce qui prouve que la somme $-(G+H+K+L+M+N)$, qui est égale à $\frac{A+B+C+D}{2}$, est supérieure ou au moins égale à

$$-(g+h+k+l+m+n).$$

15. Je dis qu'elle est nécessairement supérieure, car, pour que la somme des coefficients fût invariable lorsque l'on passe de φ à Φ, il faudrait que les différences des coefficients de la substitution fussent nulles ou égales à l'unité; et même, si l'on prend les quatre différences entre les éléments correspondants de deux lignes dans la substitution

$$S \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \gamma_4 \\ \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 & \delta_4 \end{vmatrix},$$

il faudrait que de ces quatre différences deux fussent nulles et les deux autres égales à l'unité en valeur absolue, et, comme la somme de ces quatre différences est nulle, nous voyons que de ces quatre différences deux devraient être nulles et, des deux autres, l'une égale à $+1$, l'autre égale à -1.

Examinons la forme

$$\varphi = -g(y-z)^2 - h(z-x)^2 - k(x-y)^2 - l(x-t)^2 - m(y-t)^2 - n(z-t)^2,$$

et remplaçons x, y, z, t par les valeurs suivantes:

$$\begin{aligned} x &= \alpha_1 X + \alpha_2 Y + \alpha_3 Z + \alpha_4 T, \\ y &= \beta_1 X + \beta_2 Y + \beta_3 Z + \beta_4 T, \\ z &= \gamma_1 X + \gamma_2 Y + \gamma_3 Z + \gamma_4 T, \\ t &= \delta_1 X + \delta_2 Y + \delta_3 Z + \delta_4 T. \end{aligned}$$

La différence $y - z$ est

$$y - z = (\beta_1 - \gamma_1)X + (\beta_2 - \gamma_2)Y + (\beta_3 - \gamma_3)Z + (\beta_4 - \gamma_4)T.$$

Or nous venons de voir que des quatre différences

$$\beta_1 - \gamma_1, \quad \beta_2 - \gamma_2, \quad \beta_3 - \gamma_3, \quad \beta_4 - \gamma_4$$

deux sont nulles, une autre égale à $+1$ et la dernière à -1. La différence $y - z$ sera donc égale en valeur absolue à l'une des six différences

$$Y - Z, \; Z - X, \; X - Y, \; X - T, \; Y - T, \; Z - T,$$

et ce qui vient d'être dit de $y - z$ est vrai pour $z - x$, $x - y$, $x - t$, $y - t$, $z - t$.

D'ailleurs, il ne pourrait arriver qu'à deux différences telles que

$y-z$ et $z-x$ correspondît une même différence, $Y-Z$ par exemple, car, dans ce cas, le déterminant de la substitution serait nul.

Donc la substitution précédente, appliquée à la forme φ, n'a d'autre effet que de permuter les variables x, y, z, t.

Donc, abstraction faite de l'ordre des termes, la substitution S, appliquée à la forme φ, reproduit identiquement cette forme.

16. Le raisonnement précédent suppose qu'aucun des coefficients g, h, k, l, m, n n'est nul, car, si g par exemple était nul, le coefficient qu'aurait g dans la somme $A+B+C+D$ n'intervenant pas dans la formation de cette somme, les différences

$$\beta_1-\gamma_1,\ \beta_2-\gamma_2,\ \beta_3-\gamma_3,\ \beta_4-\gamma_4$$

ne seraient assujetties à aucune condition.

Supposons donc qu'un ou plusieurs coefficients soient nuls; comme ils ne peuvent tous être nuls, admettons que g soit différent de zéro.

Pour que la substitution S ne produise aucune variation dans la somme des coefficients $-(g+h+k+l+m+n)$, il faudra encore que des quatre différences

$$\beta_1-\gamma_1,\ \beta_2-\gamma_2,\ \beta_3-\gamma_3,\ \beta_4-\gamma_4$$

deux soient nulles et, des deux autres, l'une égale à $+1$ et l'autre à -1; et les différences relatives à quelqu'une des quantités g, h, k, l, m, n qui ne s'annule pas seront assujetties aux mêmes conditions. Au contraire, les différences relatives aux coefficients qui s'annulent ne sont assujetties à aucune condition.

Cela posé, on voit que la différence $y-z$ sera égale en valeur absolue à l'une des six différences

$$Y-Z,\ Z-X,\ X-Y,\ X-T,\ Y-T,\ Z-T,$$

et il en sera de même de celles des différences $z-x$, $x-y$, ... qui multiplient des coefficients différents de zéro.

Ainsi, après la substitution, les coefficients g, h, k, ... qui ne s'annulent pas ne seront multipliés que par de simples différences $Y-Z$, $Z-X$, ... Quant à celles des quantités g, h, ... qui sont nulles, il n'y a pas à s'occuper des polynômes par lesquels elles seront multipliées, puisque ces polynômes disparaissent, et l'on voit que la substitution S n'aura encore d'autre effet que de reproduire identiquement la forme φ, abstraction faite des permutations possibles entre les variables.

Donc, si dans une forme φ les coefficients g, h, k, l, m, n sont négatifs ou nuls, dans toute forme équivalente et non identique à φ, abstraction faite de l'ordre des coefficients, la somme $-(g+h+k+l+m+n)$ surpassera la valeur de la même somme dans la forme φ.

Nous en conclurons donc que, *parmi les formes d'une classe donnée, il y en a une et une seule dont tous les coefficients g, h, k, l, m, n sont négatifs ou nuls, pourvu qu'on fasse abstraction de l'ordre des coefficients.*

17. Les coefficients d'une forme réduite jouissent d'une propriété remarquable, dont l'importance ressortira dans les applications qui suivront.

Nous voulons démontrer que le produit des trois plus petites valeurs dont est susceptible une forme donnée pour des valeurs entières de x, y, z, t est limité par le déterminant D de cette forme.

Ce déterminant est, d'ailleurs,

$$\begin{aligned} D = & -gl(h+k+m+n) - hm(k+g+n+l) - kn(g+h+l+m) \\ & - ghn - gkm - hkl - lmn. \end{aligned}$$

Considérons une forme réduite

$$\varphi = -g(y-z)^2 - h(z-x)^2 - k(x-y)^2 - l(x-t)^2 - m(y-t)^2 - n(z-t)^2,$$

dans laquelle g, h, k, l, m, n sont négatifs ou nuls; il est facile de voir que les trois plus petites valeurs de cette forme sont comprises parmi les sept suivantes,

$$\begin{gathered} -(h+k+l), \quad -(k+g+m), \quad -(g+h+n), \quad -(l+m+n), \\ -(g+h+l+m), \quad -(g+k+l+n), \quad -(h+k+m+n), \end{gathered}$$

qu'on obtient en remplaçant dans φ les variables x, y, z, t respectivement par l'un des systèmes de valeurs suivants :

$$\begin{gathered} 1, 0, 0, 0, \quad 0, 1, 0, 0, \quad 0, 0, 1, 0, \quad 0, 0, 0, 1, \\ 1, 1, 0, 0, \quad 1, 0, 1, 0, \quad 1, 0, 0, 1. \end{gathered}$$

Or, toutes les suppositions qu'on peut faire sur les grandeurs relatives de g, h, k, l, m, n peuvent, par des permutations des lettres x, y, z, t, être ramenées aux trois suivantes :

1° Les trois plus petits coefficients sont g, h, k en valeur absolue.

2° Les trois plus petits coefficients sont, en valeur absolue, l, m, n.

3° Les trois plus petits coefficients sont, en valeur absolue, g, h, l.

On voit immédiatement que dans toutes les hypothèses le produit de trois des sept valeurs de φ écrites plus haut est inférieur à $27\,\mathrm{D}$.

Par exemple, si les trois plus petits coefficients sont g, h, k, et par conséquent si l, m, n sont les trois plus grands, le produit

$$-(h+k+l)(k+g+m)(g+h+n)$$

est évidemment inférieur à $-27lmn$; d'ailleurs, on a évidemment

$$\mathrm{D} > -lmn.$$

Donc le produit précédent est inférieur à $27\,\mathrm{D}$.

Et l'on trouverait sans plus de difficultés, pour toutes les hypothèses, un produit inférieur à $27\,\mathrm{D}$.

Quoi qu'il soit suffisant, pour les applications ultérieures, de prouver que $27\,\mathrm{D}$ est la limite supérieure du produit des trois valeurs minima de φ, cependant nous abaisserons cette limite et nous démontrerons la proposition suivante, énoncée d'abord par Gauss :

Le produit des trois valeurs minima d'une forme donnée est inférieur au double du déterminant.

Notre démonstration comprendra trois parties correspondant aux trois relations de grandeur posées plus haut entre les coefficients g, h, k, l, m, n.

1° g, h, k sont inférieurs en valeur absolue à l, m, n; dans ce cas, le produit suivant est inférieur à $2\,\mathrm{D}$:

$$\pi_1 = -(h+k+l)(k+g+m)(g+h+n).$$

En effet, ce produit π_1 contient vingt-sept termes, dont seize sont les seize termes de D, de sorte qu'on a

$$\pi_1 - \mathrm{D} = -g^2(h+k+l) - h^2(k+g+m) - k^2(g+h+n) - 2ghk.$$

Or le second membre est inférieur à D, comme on le voit facilement en écrivant D de la manière suivante :

$$\begin{aligned}D = &-gm(h+k+l) - hn(k+g+m) - kl(g+h+n),\\ &-gl(h+n) - hm(k+l) - kn(g+m) - lmn.\end{aligned}$$

2° l, m, n sont tous trois inférieurs en valeur absolue à g, h, k; dans ce cas, nous remarquerons d'abord qu'on peut toujours supposer $-g < -k$, car une permutation de x et z permute les coefficients g et k; de même on peut supposer $-g < -h$, car une permutation de x et y permute les coefficients g et h.

Cela posé, nous partagerons le cas présent en quatre parties auxquelles correspondront des produits inférieurs à $2D$, indiqués par le Tableau suivant :

$$\begin{array}{lll}
-m < -l \ldots\ldots\ldots\ldots & & \pi_2 = -(k+g+m)(g+h+n)(l+m+n) < 2D \\
-m > -l. \left\{\begin{array}{l} -h > -k \left\{\begin{array}{l} -l > -n. \\ -l < -n. \end{array}\right. \\ -h < -k \ldots\ldots\ldots \end{array}\right. & & \begin{array}{l} \pi_3 = -(k+g+m)(g+h+n)(l+m+n) < 2D \\ \pi_4 = -(h+k+l)(k+g+m)(l+m+n) < 2D \\ \pi_5 = -(g+h+n)(h+k+l)(l+m+n) < 2D. \end{array}
\end{array}$$

Pour démontrer ces inégalités, nous observons que chacun des produits π_2, π_3, π_4, π_5 contient vingt-sept termes, dont seize sont précisément les seize termes du déterminant D, de sorte qu'on peut écrire

$$\begin{aligned}
\pi_2 - D &= -g^2(l+m+n) - m^2(g+h+n) - n^2(g+k+m) - 2gmn,\\
\pi_3 - D &= -g^2(l+m+n) - m^2(g+h+n) - n^2(g+k+m) - 2gmn,\\
\pi_4 - D &= -k^2(l+m+n) - l^2(k+g+m) - m^2(h+k+l) - 2klm,\\
\pi_5 - D &= -h^2(l+m+n) - l^2(g+h+n) - n^2(h+k+l) - 2hln,
\end{aligned}$$

Cela posé, il est facile de voir que, dans chacune de ces égalités, les termes qui suivent D ont une somme inférieure à D; il suffit pour cela de donner à D les quatre formes suivantes,

$$\begin{array}{ll}
1^{\circ} & \left\{\begin{array}{l} -gk(l+m+n) - ml(g+h+n) - nh(g+k+m), \\ -lg(h+n) - hm(g+k) - kn(m+l) - lhk, \end{array}\right. \\
2^{\circ} & \left\{\begin{array}{l} -gh(l+m+n) - mk(g+h+n) - nl(g+k+m), \\ -gl(k+m) - hm(n+l) - kn(g+h) - hkl, \end{array}\right. \\
3^{\circ} & \left\{\begin{array}{l} -kh(l+m+n) - ln(k+g+m) - mg(h+k+l), \\ -gl(h+k) - hm(n+l) - kn(g+m) - ghl, \end{array}\right. \\
4^{\circ} & \left\{\begin{array}{l} -hk(l+m+n) - lm(g+h+n) - ng(h+k+l), \\ -gl(h+k) - hm(g+n) - kn(l+m) - gkm, \end{array}\right.
\end{array}$$

et, en comparant ces quatre expressions de D respectivement avec les quatre différences $\pi_2 - D$, $\pi_3 - D$, $\pi_4 - D$, $\pi_5 - D$, on voit facilement que D surpasse ces différences si l'on tient compte des hypothèses faites sur les coefficients g, h, k, l, m, n pour chacun des produits π_2, π_3, π_4, π_5.

3° Reste à examiner le cas où g, h, l sont inférieurs en valeur absolue à k, m, n. Nous supposerons d'ailleurs $g < l$, ce qui est toujours possible par une substitution convenable.

Dans ce cas, il peut arriver que k soit inférieur ou supérieur à $m+g$.

Si k est inférieur à $m+g$, le produit suivant est inférieur à 2 D :

$$\pi_6 = -(h+k+l)(k+g+m)(g+h+n).$$

On a, en effet,

$$\begin{aligned}\pi_6 - D = &- g^2 h - g^2 k - g^2 l - h^2 k - h^2 g - h^2 m \\ &- k^2 g - k^2 h - k^2 n - ghk - ghk,\end{aligned}$$

et les termes du second membre sont chacun respectivement inférieurs aux termes de D écrit ainsi :

$$\begin{aligned}D = &- glh - ln(m+g) - gml - hnk - hng - hnm - k(l+m)g \\ &- k(l+m)h - k(g+m)n - lmk - h(gm+lm).\end{aligned}$$

Si, au contraire, k est supérieur à $(m+g)$, on prendra

$$-(g+l+h+m)(m+g+k)(g+h+n).$$

Ce produit est égal à D augmenté des termes suivants :

$$\begin{aligned}&kg^2 + kgh + kgh + kh^2 + (g+m)gn + (g+m)gm + (g+m)mh \\ &+ (g+m)mn + g^3 + g^2 h + g^2 h + g^2 l + gh^2 + g^2 m + ghm + mh^2,\end{aligned}$$

et ces termes sont chacun respectivement inférieurs aux termes de D écrit de la manière suivante :

$$\begin{aligned}&kgl + klh + kln + khn + kgn + kgm + kmh + kmn \\ &+ lmn + lmh + glh + gnl + ghn + glm + ghm + mhn.\end{aligned}$$

Il est ainsi démontré qu'il y a toujours trois valeurs de φ dont le produit est inférieur à 2D, et, par conséquent, le produit des trois valeurs minima est inférieur à 2D.

De ce qui précède il résulte que ces trois valeurs, dont le produit est inférieur à 2D, peuvent être obtenues en faisant, dans φ, x, y, z, t égaux respectivement à l'un des systèmes de valeurs suivants :

$$1, 0, 0, 0, \quad 0, 1, 0, 0, \quad 0, 0, 1, 0, \quad 0, 0, 0, 1, \quad 1, 1, 0, 0.$$

Pour le dernier système de valeurs, on le ramène au second en remplaçant x par $x+y$; mais alors la nouvelle forme n'est pas réduite.

Mais on peut dire que, étant donnée une forme, on obtiendra trois valeurs dont le produit est inférieur à 2D lorsque, après avoir fait des substitutions convenables, on prendra trois nombres parmi les coefficients de x^2, y^2, z^2, t^2, ou même, en permutant x, y, z, t, on peut dire que les trois nombres cherchés sont les coefficients de x^2, y^2, z^2.

III.

ÉTUDE DES SUBSTITUTIONS CAPABLES DE RÉDUIRE UNE FORME.

18. J'aurai besoin, dans l'étude des irrationnelles du troisième degré, de considérer des formes quadratiques ternaires positives dont les coefficients dépendent de quantités arbitraires. Les variations de ces arbitraires sont d'ailleurs telles que les formes considérées restent positives quelles que soient ces variations.

Si pour certaines valeurs de ces quantités arbitraires la forme quadratique qui les contient est réduite, il faut imaginer que les coefficients $g, h, k, \ldots$ sont tous négatifs pour des valeurs données des arbitraires dont les coefficients sont fonctions. Les arbitraires variant, les coefficients g, h, k, l, m, n varieront simultanément, et, si l'un d'eux devient positif, la forme cessera d'être réduite. On sera à la limite de réduction lorsque l'un des coefficients passera par zéro.

Nous appellerons *forme ambiguë* une forme dans laquelle l'un des coefficients g, h, k, l, m, n passe par zéro.

19. Lorsque les coefficients g, h, k, l, m, n sont tous inférieurs à zéro, il y a, si l'on tient compte de l'ordre des coefficients, vingt-quatre formes réduites qui se déduisent les unes des autres en permutant les lettres x, y, z, t. On obtient ces vingt-quatre formes en appliquant à l'une d'elles la substitution fournie par la triple combinaison d'une des substitutions

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

avec une des trois suivantes :

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

et une des quatre suivantes :

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Ces substitutions ne font que permuter les lettres x, y, z, t, et ce sont, comme on l'a vu, les seules qui laissent inférieurs ou égaux à zéro les coefficients g, h, k, l, m, n.

20. Mais, si l'un des coefficients est nul, les formes réduites sont en plus grand nombre.

Supposons que g soit nul; toute substitution qui, dans le cas général, n'altérera que de g les coefficients h, k, l, m, n laissera, dans le cas actuel, ces coefficients invariables, et ne fera, par conséquent, que reproduire dans un autre ordre les coefficients de la forme réduite.

Ces substitutions, qui, dans le cas général, augmentent ou diminuent de g les coefficients h, k, l, m, n, s'obtiennent par la combinaison de la substitution

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

avec l'une des vingt-quatre précédentes.

Et, en général, si l'une des quantités g, h, k, l, m, n est nulle, les substitutions qui n'altèrent que l'ordre des coefficients sont, outre les vingt-quatre substitutions du cas général, celles qui s'obtiennent par la combinaison des vingt-quatre substitutions possibles dans le cas général avec l'une des substitutions comprises dans le Tableau suivant :

$$g = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$h = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$k = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$l = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$m = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$n = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Au lieu des substitutions précédentes, on peut employer des substitutions à quatre colonnes et à quatre lignes; la quatrième ligne ne se composera que de zéros, et la quatrième colonne s'écrira de façon que la somme des éléments d'une même ligne soit nulle.

Ainsi la dernière substitution, qui est relative à $n = 0$, pourra s'écrire

$$\begin{vmatrix} 0 & +1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

et l'on pourra encore augmenter d'une même quantité tous les éléments d'une même colonne et écrire, par exemple,

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Si deux ou trois des coefficients g, h, k, l, m, n étaient nuls, un plus grand nombre de substitutions seraient possibles, qui ne produiraient que des permutations des variables; mais, leur étude n'étant pas nécessaire à l'objet final du présent travail, je ne m'y arrêterai pas.

21. Ce qui précède suffira, en effet, pour opérer la réduction continuelle d'une forme dont les coefficients dépendraient de certaines arbitraires variables.

Supposons que pour des valeurs données de ces arbitraires les coefficients g, h, k, l, m, n soient tous négatifs : la forme sera réduite.

Changeons les valeurs données aux arbitraires, et supposons que g devienne nul, puis positif, les autres coefficients restant négatifs.

Si l'on applique à la forme

$$\varphi = -g(y-z)^2 - h(z-x)^2 - k(x-y)^2 - l(x-t)^2 - m(y-t)^2 - n(z-t)^2$$

la substitution

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix},$$

c'est-à-dire si l'on fait

$$\begin{aligned} x &= x - t, \\ y &= x - z, \\ z &= y - t, \\ t &= 0, \end{aligned}$$

on obtient

$$\begin{aligned} \Phi = &-g(x-y-z+t)^2 - h(x-y)^2 - k(z-t)^2 \\ &- l(x-t)^2 - m(z-x)^2 - n(y-t)^2, \end{aligned}$$

et, comme

$$\begin{aligned} (x-y-z+t)^2 = &-(y-z)^2 + (z-x)^2 + (x-y)^2 \\ &-(x-t)^2 + (y-t)^2 + (z-t)^2, \end{aligned}$$

on trouvera, en effectuant,

$$\begin{aligned}\Phi = &-(-g)(y-z)^2-(m+g)(z-x)^2-(h+g)(x-y)^2\\ &-(l-g)(x-t)^2-(n+g)(y-t)^2-(k+g)(z-t)^2.\end{aligned}$$

Au moment où g deviendra positif, cette nouvelle forme sera réduite; en effet, le coefficient g de $(y-z)^2$ est changé en $-g$, et les coefficients h, k, l, m, n, qui restent négatifs, ne sont altérés que de la quantité g, laquelle est aussi petite que l'on voudra.

Les arbitraires dont dépendent g, h, k, l, m, n continuant à varier, la forme Φ restera réduite tant que tous les coefficients resteront négatifs; il y aura donc pour les arbitraires un certain intervalle dans lequel la forme Φ est réduite, et si les arbitraires franchissent cet intervalle, la forme Φ cesse d'être réduite.

Alors, l'un des coefficients s'annulant de nouveau pour devenir ensuite positif, l'une des substitutions, relative au cas où la forme devient ambiguë par suite de l'évanouissement de ce coefficient, permettra d'obtenir une nouvelle forme réduite, et ainsi de suite indéfiniment.

22. Ce qui précède suppose que deux des coefficients g, h, k, l, m, n ne s'annulent pas en même temps.

Ces deux coefficients peuvent porter sur quatre variables différentes, comme g et l, ou sur trois variables seulement, comme g et h.

Dans le cas où g et l passeraient en même temps par zéro, la forme Φ est réduite si $l-g$ est négatif; mais, si $g-l$ est négatif, Φ n'est pas réduit. Dans ce cas, la substitution

$$\begin{aligned}x &= x-y-z+t,\\ y &= x-y,\\ z &= -y+t,\\ t &= 0,\end{aligned}$$

appliquée à la forme φ, donne la forme

$$\begin{aligned}\Phi_1 = &-g(x-t)^2-h(z-x)^2-k(z-t)^2\\ &-l(x-y-z+t)^2-m(x-y)^2-n(y-t)^2\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}\Phi_1 = &-(-l)(y-z)^2-(h+l)(z-x)^2-(m+l)(x-y)^2\\ &-(g-l)(x-t)^2-(n+l)(y-t)^2-(k+l)(z-t)^2,\end{aligned}$$

qui est réduite dans l'hypothèse où, g et l passant par zéro et devenant positifs, $g-l$ serait négatif.

Supposons maintenant que les deux coefficients qui passent simultanément par zéro soient g et h.

Si g et h, passant par zéro, ne devenaient pas tous deux positifs, l'un d'eux resterait négatif, et l'on peut toujours supposer que ce soit h.

Dans ce cas, si $h+g$ est négatif, Φ est une forme réduite.

Si $h+g$ est positif, nous ferons la substitution relative au cas où le coefficient de $(x-y)^2$ est nul, c'est-à-dire la substitution qui est placée plus haut vis-à-vis de $k=0$.

Faisons donc dans Φ la substitution

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} x &= x-z, \\ y &= y-t, \\ z &= x-t; \end{aligned}$$

on obtient la forme

$$\begin{aligned}\chi = &-(-g)(y-z)^2-(m+g)(z-t)^2-(h+g)(x-y-z+t)^2\\ &-(l-g)(z-x)^2-(n+g)(y-t)^2-(k+g)(x-t)^2,\end{aligned}$$

et, comme

$$\begin{aligned}(x-y-z+t)^2 = &-(y-z)^2+(z-x)^2+(x-y)^2\\ &-(x-t)^2+(y-t)^2+(z-t)^2,\end{aligned}$$

on obtient

$$\begin{aligned}\chi = &(h+g)(y-z)^2-(l+h)(z-x)^2-h(x-y)^2\\ &-(k-h)(x-t)^2-(n+h+2g)(y-t)^2-(m+h+2g)(z-t)^2.\end{aligned}$$

Cette forme est réduite si h reste négatif, $h+g$ étant positif; mais, si h devient aussi positif, nous emploierons encore une fois la même substitution

$$\begin{aligned} x &= x - z, \\ y &= y - t, \\ z &= x - t, \end{aligned}$$

qui donne

$$\begin{aligned} \Psi = {} & (h+g)(x-y)^2 - (h+l)(z-t)^2 - h(x-y-z+t)^2 \\ & -(k-h)(z-x)^2 - (n+h+2g)(y-t)^2 - (m+h+2g)(x-t)^2 \end{aligned}$$

ou bien

$$\begin{aligned} \Psi = {} & h(y-z)^2 - k(z-x)^2 + g(x-y)^2 - (m+2g)(x-t)^2 \\ & -(n+2g+2h)(y-t)^2 - (l+2h)(z-t)^2, \end{aligned}$$

et cette forme est réduite si g et h sont positifs et voisins de zéro, les autres quantités k, l, m, n étant négatives.

23. Admettons qu'enfin trois coefficients portant sur trois variables seulement, tels que g, h, k, soient simultanément nuls, et que l'un d'eux au moins, g par exemple, devienne positif après s'être annulé.

Si h et k restent négatifs, et si en même temps $g+h$ et $g+k$ sont négatifs, la forme Φ est réduite.

Si h et k restent négatifs et si $g+h$ est positif, ainsi que $h-k$ (1), la forme χ est réduite.

Si g et h deviennent tous deux positifs (2), k restant négatif, la forme Ψ est réduite.

Si g, h, k ne vérifient aucune des hypothèses précédentes, il faudra considérer les cas suivants (où l'on suppose toujours que g passe du négatif au positif) :

1° h et k restent négatifs, mais $g+k$ devient positif, ainsi que $k-h$.

2° g, h, k deviennent tous trois positifs.

Dans le premier cas, nous appliquerons à Φ la substitution placée

---

(1) $h-k$ sera toujours positif si, $g+h$ étant positif, $g+k$ est négatif; si donc $h-k$ est négatif, il faut supposer $g+k$ positif.

(2) Si deux seulement des quantités g, h, k deviennent positives, on peut toujours supposer que ce soit g et h.

vis-à-vis de $n = 0$, à savoir

$$\begin{vmatrix} 0 & +1 & 0 \\ -1 & +1 & 0 \\ -1 & +1 & +1 \end{vmatrix},$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} x &= y - t, \\ y &= -x + y, \\ z &= -x + y + z - t, \end{aligned}$$

qui donne

$$\begin{aligned} \chi_1 = g(z-t)^2 - (m+g)(z-x)^2 - (h+g)(x-t)^2 - (l-g)(y-t)^2 \\ - (n+g)(x-y)^2 - (k+g)(x-y-z+t)^2 \end{aligned}$$

ou bien

$$\begin{aligned} \chi_1 = (k+g)(y-z)^2 - (m+k+2g)(z-x)^2 - (m+k+2g)(x-y)^2 \\ - (h-k)(x-t)^2 - (l+k)(y-t)^2 - k(z-t)^2, \end{aligned}$$

et cette forme est réduite dans les hypothèses du premier cas [1].

Dans le second cas, nous appliquerons à la forme Ψ la substitution placée en face de $h = 0$, à savoir

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix},$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} x &= -x + z, \\ y &= -x + t, \\ z &= -y + t, \end{aligned}$$

qui donne

$$\begin{aligned} \Omega = h(y-x)^2 - k(x-y-z+t)^2 + g(z-t)^2 - (m+2g)(z-x)^2 \\ - (n+2g+2h)(x-t)^2 - (l+2h)(y-t)^2 \end{aligned}$$

ou bien

$$\begin{aligned} \Omega = k(y-z)^2 - (m+2g+k)(z-x)^2 + (h-k)(x-y)^2 \\ - (n+2g+2h-k)(x-t)^2 - (l+2h+k)(y-t)^2 + (g-k)(z-t)^2, \end{aligned}$$

---

[1] Si, avec $g+k>0$, on a $g+h<0$, on a toujours $k-h>0$; si donc la condition $k-h>0$ n'était pas vérifiée, il faudrait supposer $g+h>0$, et ce cas a été examiné plus haut.

et cette forme est réduite dans les hypothèses du second cas si l'on a, en outre,

$$h-k>0 \quad \text{et} \quad g-k>0.$$

Mais, dans le cas où g, h, k deviennent tous trois négatifs, on peut toujours supposer que $h-k$ et $g-k$ deviennent positifs; la supposition contraire n'apporterait qu'une permutation des lettres g, h, k, c'est-à-dire une simple permutation des lettres x, y, z, t.

Dans le cas que nous venons d'étudier rentre, par la substitution relative à $h=0$, le cas où g, h, l s'annuleraient ensemble, c'est-à-dire le cas où les trois coefficients qui s'annulent portent sur les quatre variables dont aucune n'entre plus de deux fois dans les trois différences relatives à ces trois coefficients.

Enfin il n'y a pas lieu d'examiner le cas dans lequel trois coefficients portant sur les quatre variables, tels que l, m, n, s'annuleraient, c'est-à-dire le cas où l'une des quatre variables entre dans chacune des différences relatives aux trois coefficients qui s'annulent, ou encore le cas dans lequel plus de trois coefficients s'annuleraient, car alors la forme donnée ne serait plus une forme constamment positive et elle pourrait s'annuler pour d'autres valeurs que $x=y=z=0$.

24. De ce qui précède il résulte que, lorsqu'une forme, devenant d'abord ambiguë, cesse ensuite d'être réduite, il suffit, pour réduire la nouvelle forme, d'employer soit une, soit plusieurs des six substitutions du n° **20**.

Six substitutions suffisent donc à la réduction continue d'une forme dont les coefficients dépendent de certaines arbitraires.

Outre les six substitutions précédentes, on peut évidemment appliquer celles qui ne font que changer l'ordre des coefficients.

Mais je dis que ces six substitutions, jointes à celles qui ne font que permuter les variables, sont les seules qui donnent la réduction continuelle de la forme, c'est-à-dire que toute substitution opérant la réduction de la forme ne peut être qu'une des précédentes ou la combinaison de quelques-unes des précédentes.

Supposons, en effet, qu'une forme Θ équivalente à la forme φ soit réduite pour certaines valeurs des arbitraires dont dépendent les coefficients, et soit Θ_1 la forme réduite que l'on eût déduite de φ par la méthode précédente, qui n'emploie que les substitutions du n° **20**; les deux formes Θ et Θ_1, étant équivalentes et toutes deux réduites, ne peuvent différer que par l'ordre des coefficients, et l'on passera toujours de l'une à l'autre par l'une des vingt-quatre substitutions du n° 19.

Ainsi les seules substitutions qui donnent la réduction continuelle d'une forme se ramènent à trente substitutions, à savoir : les vingt-quatre substitutions du n° 19 et les six substitutions du n° **20**. Toute substitution opérant la réduction ne peut être qu'une combinaison de ces trente substitutions.

Et même, puisque les vingt-quatre substitutions du n° 19 se forment avec la combinaison de six substitutions distinctes, que l'on peut même réduire à cinq en négligeant la substitution identique $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$, on voit que, pour opérer la réduction continue d'une forme ternaire, il suffit déjà de onze substitutions distinctes.

Mais ce nombre peut être réduit.

25. En effet, les substitutions du n° 20 peuvent s'obtenir par la combinaison d'une seule d'entre elles et d'une des combinaisons du n° 19, à savoir :

1° La substitution relative à $h = 0$ s'obtient en opérant d'abord la substitution

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix},$$

puis la substitution relative à $g = 0$.

2° La substitution relative à $k = 0$ s'obtient en opérant d'abord la substitution

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

puis la substitution relative à $g = 0$.

3° La substitution relative à $l = 0$ s'obtient en opérant d'abord la substitution

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

puis la substitution relative à $h = 0$, laquelle on sait déjà obtenir au moyen d'une des substitutions du n° 19 et de la substitution relative à $g = 0$.

4° La substitution relative à $m = 0$ s'obtient en opérant d'abord la substitution

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

puis la substitution relative à $g = 0$.

5° Enfin la substitution relative à $n = 0$ s'obtient en opérant d'abord la substitution

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix},$$

puis la substitution relative à $m = 0$, qui s'obtient d'ailleurs au moyen d'une des substitutions du n° 19 et de la substitution relative à $g = 0$.

Donc, de toutes les substitutions du n° **20**, on peut ne garder que la substitution relative à $g = 0$, à savoir,

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

26. Enfin les substitutions du n° 19, en excluant d'ailleurs la substitution identique

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

ne comprennent que deux substitutions distinctes, dont les autres ne sont que des combinaisons.

On reconnaît en effet que, parmi les substitutions du n° 19, la substitution

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

s'obtient en répétant deux fois la substitution

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

La substitution

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

s'obtient en opérant successivement les trois substitutions

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

Enfin la substitution

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

s'obtient en opérant successivement les quatre substitutions

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Toutes les substitutions du n° 19 sont donc actuellement réduites aux trois suivantes :

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

Si l'on désigne la première par A, la deuxième par B, la troisième par C, on trouve que la première A résulte des deux autres par la combinaison suivante,

$$\mathrm{C\ B\ B\ C\ B\ C\ B}$$

en indiquant par là qu'on fait successivement les substitutions indiquées par les lettres correspondantes, en commençant par la gauche.

Il ne reste donc, de toutes les substitutions du n° 19, que les deux suivantes :

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

27. De sorte que toutes les substitutions capables d'opérer la réduction continue d'une forme ternaire sont ramenées aux deux précédentes et à la substitution relative à $g = 0$, savoir

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Mais cette dernière substitution, répétée deux fois, reproduit la seconde des deux précédentes.

Donc, *toutes les substitutions capables d'opérer la réduction continue d'une forme ternaire résultent de certaines combinaisons des deux substitutions que nous désignerons par* S *et* T :

$$S = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix},$$

$$T = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

28. Ces deux substitutions sont les éléments de toute réduction, car on ne pourrait ramener les deux substitutions précédentes à une seule.

En effet, les deux substitutions précédentes présentent le caractère indiqué par les égalités suivantes,

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}^3 = 1, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}^4 = 1,$$

par quoi j'entends que la première substitution, répétée trois fois, donne la substitution identique

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

et cette substitution identique est aussi obtenue en répétant quatre fois la seconde substitution.

Si donc ces deux substitutions S et T pouvaient s'obtenir par la répétition d'une même substitution U, la substitution

$$S = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

serait, par exemple, une certaine puissance i de U, de sorte qu'on aurait

$$U^i = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix},$$

et par conséquent

$$U^{3i} = 1.$$

Donc la série indéfinie des puissances de U ne donnerait qu'un nombre fini de substitutions distinctes, et par conséquent, appliquées à une forme ternaire, elles ramèneraient au bout d'un certain temps la série des formes déjà obtenues, lesquelles ne sont évidemment pas réduites, quelles que soient les valeurs des arbitraires dont dépendent les coefficients.

29. Il faut bien remarquer :

1° Que les substitutions S et T suffisent, par leurs combinaisons, à toute réduction d'une forme ternaire;

2° Que ces deux substitutions élémentaires sont nécessaires et ne pourraient se ramener à une seule;

3° Que toute substitution opérant une réduction se ramène nécessairement à une combinaison des deux précédentes (*voir,* à la fin de ce travail, une Note sur les substitutions).

D'où il faut conclure que les deux substitutions S et T sont *les éléments et les seuls éléments* de toute réduction.

IV.

ÉTUDE DES IRRATIONNELLES DU TROISIÈME DEGRÉ. MÉTHODE DE M. HERMITE.

1° Équations du troisième degré dont une seule racine est réelle.

30. J'appelle *irrationnelle du $n^{ième}$ degré* la racine d'une équation de degré n à coefficients entiers.

On sait que, si l'on développe en fraction continue une irrationnelle du second degré, le calcul est périodique. Cette périodicité constitue une propriété très remarquable des racines des équations du second degré, et elle peut même servir de définition à ces irrationnelles.

Or la théorie des fractions continues est liée étroitement à la théorie des formes quadratiques binaires, de sorte que le développement en fraction continue d'une racine α d'une équation du second degré est identique à la recherche des minima successifs de l'expression

$$(x-\alpha y)^2+\Delta(x-\beta y)^2,$$

où β désigne la deuxième racine de l'équation considérée, et Δ une quantité qu'on fait croître positivement de o à ∞.

D'un autre côté, la recherche de ces minima revient à la réduction de la forme binaire

$$f=(x-\alpha y)^2+\Delta(x-\beta y)^2$$

pour toute valeur de Δ.

En opérant cette réduction, on trouve alors que la suite des formes réduites équivalentes à f pour toute valeur de Δ s'obtient par un calcul périodique.

On est alors conduit à se demander si quelque mode d'approximation des quantités ne donnerait pas une périodicité analogue pour les irrationnelles d'un degré supérieur au second.

C'est la considération des formes quadratiques qui conduit à cette extension de la théorie des fractions continues, et donne ces nouvelles méthodes d'approximation. En particulier, pour les irrationnelles du troisième degré, on trouve que, si α, β, γ désignent les trois racines réelles d'une équation du troisième degré, la réduction pour toutes les valeurs positives de A et B, de la forme

$$(x+\alpha y+\alpha^2 z)^2+\mathrm{A}(x+\beta y+\beta^2 z)^2+\mathrm{B}(x+\gamma y+\gamma^2 z)^2,$$

conduit à un calcul périodique, et, dans le cas où α, β, γ ne sont pas tous trois réels, on est conduit à un calcul périodique par la réduction continuelle de la forme

$$(x+\alpha y+\alpha^2 z)^2+\Delta(x+\beta y+\beta^2 z)(x+\gamma y+\gamma^2 z),$$

α étant la racine réelle et Δ une arbitraire positive.

C'est ce que nous allons exposer d'après M. Hermite.

31. Soient α, β, γ les trois racines d'une équation du troisième degré dont nous supposerons le premier coefficient égal à l'unité [1], et admettons d'abord que α soit seul réel.

Considérons la forme quadratique

$$f=(x+\alpha y+\alpha^2 z)^2+2\Delta(x+\beta y+\beta^2 z)(x+\gamma y+\gamma^2 z),$$

où nous supposerons que Δ est un nombre positif quelconque.

Le déterminant D de cette forme est

$$\mathrm{D}=-\Delta^2(\beta-\gamma)^2(\gamma-\alpha)^2(\alpha-\beta)^2;$$

nous poserons

$$(\beta-\gamma)^2(\gamma-\alpha)^2(\alpha-\beta)^2=-\mathrm{A}^2,$$

---

[1] Je suppose le premier coefficient égal à l'unité, uniquement pour simplifier l'exposition ; les résultats, comme il est facile de le voir, ne seraient pas changés par une supposition contraire.

et nous aurons, par conséquent,

$$D = \Delta^2 A^2.$$

Nous nous proposons de donner à Δ toutes les valeurs possibles de o à $+\infty$ et de chercher pour chaque valeur de Δ la réduite correspondante et équivalente à f.

Je remarquerai d'abord que la série de ces réduites est illimitée.

Supposons en effet que, ayant remplacé dans f les variables x, y, z par $x - t$, $y - t$, $z - t$, le calcul de réduction de f pour une certaine valeur de Δ ait conduit à une forme

$$\varphi = -g(y-z)^2 - h(z-x)^2 - k(x-y)^2 - l(x-t)^2 - m(y-t)^2 - n(z-t)^2,$$

dans laquelle les coefficients g, h, k, l, m, n sont évidemment de la forme $A + B\Delta$, où A et B sont deux nombres quelconques.

Or nous avons remarqué au n° 17 que la plus petite valeur que peut prendre une forme φ s'obtenait par la somme de trois ou de quatre des coefficients de φ, de sorte que cette valeur peut s'écrire

$$M + N\Delta,$$

et l'on a vu, en outre, que cette valeur minima était à choisir entre sept valeurs différentes seulement.

De plus, en se reportant à l'expression de f, il est évident que M et N ne peuvent être nuls ni l'un ni l'autre.

Cela posé, nous avons démontré au n° 17 que le produit des trois valeurs minima d'une forme donnée était inférieur au double du déterminant, et, par conséquent, le cube de la valeur minima est inférieur au double du déterminant.

On a donc

$$(M + N\Delta)^3 < 2D \quad \text{ou bien} \quad (M + N\Delta)^3 < 2\Delta^2 A^2,$$

et cette inégalité ne peut subsister ni pour des valeurs très grandes ni pour des valeurs très petites de Δ.

Donc une forme réduite φ équivalente à f ne peut être réduite que lorsque Δ reste compris entre deux nombres A et B, et, si Δ devient supérieur à B ou inférieur à A, la forme φ cesse d'être réduite.

Donc la série des formes φ réduites et équivalentes à f pour toute valeur de Δ est doublement infinie, soit que Δ tende vers zéro, soit que Δ tende vers ∞.

Mais nous allons montrer que les substitutions au moyen desquelles s'obtient la suite des formes réduites se reproduisent périodiquement.

32. On a vu à la fin du nº 17 que, en faisant dans f une substitution convenable, le produit des trois coefficients de x^2, y^2, z^2 était inférieur au double du déterminant de la forme f.

Supposons que pour une valeur donnée de Δ cette substitution soit

$$\begin{aligned} x &= m\,X + n\,Y + pZ,\\ y &= m'X + n'Y + p'Z,\\ z &= m''X + n''Y + p''Z. \end{aligned}$$

Si nous posons

$$\begin{aligned} &M(\alpha) = m + m'\alpha + m''\alpha^2, \quad M(\beta) = m + m'\beta + m''\beta^2, \quad M(\gamma) = m + m'\gamma + m''\gamma^2,\\ &N(\alpha) = n + n'\alpha + n''\alpha^2, \quad N(\beta) = n + n'\beta + n''\beta^2, \quad N(\gamma) = n + n'\gamma + n''\gamma^2,\\ &P(\alpha) = p + p'\alpha + p''\alpha^2, \quad P(\beta) = p + p'\beta + p''\beta^2, \quad P(\gamma) = p + p'\gamma + p''\gamma^2, \end{aligned}$$

la forme

$$f = (x + \alpha y + \alpha^2 z)^2 + 2\Delta(x + \beta y + \beta^2 z)(x + \gamma y + \gamma^2 z)$$

deviendra, par cette substitution,

$$\begin{aligned} F = {} & [X\,M(\alpha) + Y\,N(\alpha) + Z\,P(\alpha)]^2\\ & + 2\Delta[X\,M(\beta) + Y\,N(\beta) + Z\,P(\beta)][X\,M(\gamma) + Y\,N(\gamma) + Z\,P(\gamma)]. \end{aligned}$$

Faisons alors

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{M} &= M^2(\alpha) + 2\Delta\,M(\beta)\,M(\gamma),\\ \mathfrak{N} &= N^2(\alpha) + 2\Delta\,N(\beta)\,N(\gamma),\\ \mathfrak{P} &= P^2(\alpha) + 2\Delta\,P(\beta)\,P(\gamma). \end{aligned}\right.$$

Une permutation des variables X, Y, Z permet toujours de supposer

$$\mathfrak{M} < \mathfrak{N} < \mathfrak{P}.$$

On sait que le produit $\mathfrak{M}\mathfrak{N}\mathfrak{P}$ est alors inférieur au double du déterminant, de manière que l'on a

$$\mathcal{M}\mathcal{N}\mathcal{P} < 2\Delta^2 A^2,$$

et, comme $\mathcal{M}$ est inférieur à $\mathcal{N}$ et à $\mathcal{P}$, on en conclut *a fortiori*

$$\mathcal{M} < \sqrt[3]{2\Delta^2 A^2},$$
$$\mathcal{M}^2 \mathcal{N} < 2\Delta^2 A^2,$$
$$\mathcal{M}^2 \mathcal{P} < 2\Delta^2 A^2.$$

De là résultent les propriétés suivantes.

D'abord le nombre entier

$$\Omega = \mathrm{M}(\alpha)\,\mathrm{M}(\beta)\,\mathrm{M}(\gamma)$$

reste fini, car le produit de $\mathrm{M}(\alpha)$ par $2\Delta\,\mathrm{M}(\beta)\,\mathrm{M}(\gamma)$ ne peut dépasser son maximum

$$\tfrac{2}{3}\mathcal{M}\sqrt{\tfrac{1}{3}\mathcal{M}}.$$

On a donc

$$2\Delta\,\mathrm{M}(\alpha)\,\mathrm{M}(\beta)\,\mathrm{M}(\gamma) < \sqrt{\tfrac{8}{27}\Delta^2 A^2},$$

c'est-à-dire

$$\mathrm{M}(\alpha)\,\mathrm{M}(\beta)\,\mathrm{M}(\gamma) < \left(\tfrac{2}{27}\right)^{\frac{1}{2}} A.$$

Considérons maintenant les deux expressions

$$\mathrm{N}(\alpha)\,\mathrm{M}(\beta)\,\mathrm{M}(\gamma), \quad \mathrm{P}(\alpha)\,\mathrm{M}(\beta)\,\mathrm{M}(\gamma).$$

Ce sont deux polynômes entiers en α, qui peuvent s'écrire

$$\Phi(\alpha) = \mathrm{N}(\alpha)\,\mathrm{M}(\beta)\,\mathrm{M}(\gamma), \quad \Psi(\alpha) = \mathrm{P}(\alpha)\,\mathrm{M}(\beta)\,\mathrm{M}(\gamma),$$

où $\Phi(\alpha)$ et $\Psi(\alpha)$ sont de la forme

$$\Phi(\alpha) = \varphi + \alpha\varphi' + \alpha^2\varphi'', \quad \Psi(\alpha) = \psi + \alpha\psi' + \alpha^2\psi'',$$

φ, φ', φ'', ψ, ψ', ψ'' étant des coefficients entiers.

Je veux démontrer que les coefficients φ, φ', φ'', ψ, ψ', ψ'' de ces deux polynômes sont limités.

En effet, d'après la définition de $\mathcal{N}$, on voit que

$$\mathrm{N}(\alpha) < \sqrt{\mathcal{N}}, \quad 2\Delta\,\mathrm{M}(\beta)\,\mathrm{M}(\gamma) < \mathcal{M},$$

et, par conséquent,

$$2\Delta\,\Phi(\alpha) < \mathcal{M}\sqrt{\mathcal{N}},$$

et, comme on a vu que

$$\mathfrak{M}^2 \mathfrak{N} < 2\Delta^2 A^2,$$

on voit que

$$\Phi(\alpha) < \frac{1}{\sqrt{2}} A;$$

on aurait de même

$$\Psi(\alpha) < \frac{1}{\sqrt{2}} A.$$

Cela posé, puisque β et γ sont tous deux imaginaires conjugués, nous écrirons

$$\Phi(\beta) = \rho e^{\theta\sqrt{-1}}, \quad \Phi(\gamma) = \rho e^{-\theta\sqrt{-1}},$$

et par conséquent

$$\rho^2 = \Phi(\beta)\Phi(\gamma) = \mathrm{N}(\beta)\mathrm{N}(\gamma)\mathrm{M}^2(\alpha)\mathrm{M}(\beta)\mathrm{M}(\gamma).$$

Mais la seconde des équations (1) donne

$$2\Delta\,\mathrm{N}(\beta)\mathrm{N}(\gamma) < \mathfrak{N},$$

et la première

$$2\Delta\,\mathrm{M}^2(\alpha)\mathrm{M}(\beta)\mathrm{M}(\gamma) < \tfrac{1}{4}\mathfrak{M}^2,$$

d'où résulte

$$4\Delta^2\rho^2 < \tfrac{1}{4}\mathfrak{M}^2\mathfrak{N},$$

et par conséquent

$$\rho^2 < \tfrac{1}{8}A^2 \quad \text{ou} \quad \rho < \frac{1}{2\sqrt{2}} A.$$

Désignant alors par ε et η des quantités comprises entre $\frac{-1}{\sqrt{2}}$ et $\frac{+1}{\sqrt{2}}$, on posera

$$\begin{aligned}
\Phi(\alpha) &= \varphi + \alpha\varphi' + \alpha^2\varphi'' = A\varepsilon,\\
\Phi(\beta) &= \varphi + \beta\varphi' + \beta^2\varphi'' = \tfrac{1}{2}A\eta\, e^{\theta\sqrt{-1}},\\
\Phi(\gamma) &= \varphi + \gamma\varphi' + \gamma^2\varphi'' = \tfrac{1}{2}A\eta\, e^{-\theta\sqrt{-1}},
\end{aligned}$$

et ces trois équations, considérées comme trois équations à trois inconnues φ, φ', φ'', donnent pour les valeurs de ces trois nombres entiers des valeurs ayant pour dénominateur commun le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \beta & \beta^2 \\ 1 & \gamma & \gamma^2 \end{vmatrix},$$

lequel est égal à $(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)(\alpha-\beta)$, qui est différent de zéro. Quant aux trois numérateurs des valeurs de φ, φ', φ'', ils sont évidemment finis, et par conséquent les nombres entiers φ, φ', φ'' sont limités.

Il en est évidemment de même des nombres ψ, ψ', ψ''.

34. Voici ce que l'on conclut de là :

Posons

$$\frac{F}{M^2(\alpha)}=\mathfrak{F};$$

on aura

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}=&\left[X+Y\frac{N(\alpha)}{M(\alpha)}+Z\frac{P(\alpha)}{M(\alpha)}\right]^2\\&+\frac{2\Delta M(\beta)M(\gamma)}{M^2(\alpha)}\left[X+Y\frac{N(\beta)}{M(\beta)}+Z\frac{P(\beta)}{M(\beta)}\right]\left[X+Y\frac{N(\gamma)}{M(\gamma)}+Z\frac{P(\gamma)}{M(\gamma)}\right],\end{aligned}$$

que l'on peut écrire

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}=&\left[X+Y\frac{\Phi(\alpha)}{\Omega}+Z\frac{\Psi(\alpha)}{\Omega}\right]^2\\&+2\Delta\frac{\Omega}{M^3(\alpha)}\left[X+Y\frac{\Phi(\beta)}{\Omega}+Z\frac{\Psi(\beta)}{\Omega}\right]\left[X+Y\frac{\Phi(\gamma)}{\Omega}+Z\frac{\Psi(\gamma)}{\Omega}\right].\end{aligned}$$

Faisons croître indéfiniment Δ; à la suite indéfinie des valeurs de Δ correspondent diverses formes $\mathfrak{F}$ qui ne pourront offrir un nombre illimité de quantités différentes pour le nombre entier Ω et pour les coefficients entiers des polynômes Φ et Ψ. Il devra donc arriver que pour deux valeurs de Δ, dont la différence soit d'ailleurs aussi grande que l'on voudra, on retrouve le même nombre Ω et les mêmes polynômes Φ et Ψ; mais la quantité $M(\alpha)$ sera certainement différente.

En effet, on a

$$\mathfrak{M}^3<2\Delta^2A^2,$$

c'est-à-dire

$$[M^2(\alpha)+2\Delta M(\beta)M(\gamma)]<2\Delta^2A^2,$$

et cette inégalité ne saurait avoir lieu pour deux valeurs de Δ suffisamment différentes l'une de l'autre.

Donc il y aura deux valeurs de Δ auxquelles correspondront des formes $\mathfrak{F}_i$ et $\mathfrak{F}_j$, que nous écrirons ainsi :

$$\mathfrak{F}_i = \left[X + Y\frac{\Phi(\alpha)}{\Omega} + Z\frac{\Psi(\alpha)}{\Omega}\right]^2 + 2\Delta_i \frac{\Omega}{M_i^2(\alpha)}\left[X + Y\frac{\Phi(\beta)}{\Omega} + Z\frac{\Psi(\beta)}{\Omega}\right]\left[X + Y\frac{\Phi(\gamma)}{\Omega} + Z\frac{\Psi(\gamma)}{\Omega}\right],$$

$$\mathfrak{F}_j = \left[X + Y\frac{\Phi(\alpha)}{\Omega} + Z\frac{\Psi(\alpha)}{\Omega}\right]^2 + 2\Delta_j \frac{\Omega}{M_j^2(\alpha)}\left[X + Y\frac{\Phi(\beta)}{\Omega} + Z\frac{\Psi(\beta)}{\Omega}\right]\left[X + Y\frac{\Phi(\gamma)}{\Omega} + Z\frac{\Psi(\gamma)}{\Omega}\right].$$

Supposons que la forme $\mathfrak{F}_i$ corresponde à une certaine valeur H de Δ_i et, après avoir introduit dans $\mathfrak{F}_i$ une quatrième variable T, cherchons la réduite équivalente à $\mathfrak{F}_i$ lorsque $\Delta_i = \mathrm{H}$. On aura ainsi une certaine forme φ_i dont les coefficients g, h, k, l, m, n seront de la forme $a + b\dfrac{\Delta_i}{M_i^2(\alpha)}$.

Introduisons de même une quatrième variable T dans $\mathfrak{F}_j$ et appliquons à $\mathfrak{F}_j$ la substitution qui transforme $\mathfrak{F}_i$ en φ_i; nous aurons une forme φ_j équivalente à $\mathfrak{F}_j$ et dont les coefficients g, h, k, l, m, n seront de la forme $a + b\dfrac{\Delta_j}{M_j^2(\alpha)}$, et les quantités a et b de cette nouvelle forme φ_j seront identiques aux quantités a et b de la forme φ_i.

Si donc φ_i est réduit pour $\Delta_i = \mathrm{H}$, c'est-à-dire si tous les coefficients de φ_i sont négatifs pour $\Delta_i = \mathrm{H}$, on voit que φ_j sera réduit si l'on attribue à Δ_j la valeur définie par l'équation

$$\frac{\Delta_j}{M_j^2(\alpha)} = \frac{\mathrm{H}}{M_i^2(\alpha)}.$$

Enfin, au lieu de φ_i et φ_j, on peut considérer les formes $\varphi_i M_i^2(\alpha)$ et $\varphi_j M_j^2(\alpha)$, qui sont réduites en même temps que φ_i et φ_j et qui sont l'une et l'autre équivalentes à f, et par conséquent équivalentes entre elles.

Pour simplifier, nous désignerons simplement par φ_i et φ_j les produits $\varphi_i M_i^2(\alpha)$ et $\varphi_j M_j^2(\alpha)$.

Cela posé, φ_i est réduit non seulement pour $\Delta_i = \mathrm{H}$, mais en général pour toute valeur de Δ_i comprise entre deux nombres A_0 et A_1 ; φ_j sera donc réduit non seulement pour la valeur $H\frac{M_j^3(\alpha)}{M_i^3(\alpha)}$ de Δ_j, mais pour toute valeur de Δ_j comprise entre $A_0\frac{M_j^3(\alpha)}{M_i^3(\alpha)}$ et $A_1\frac{M_j^3(\alpha)}{M_i^3(\alpha)}$.

Supposons $A_0 < A_1$; si Δ_i devient supérieur à A_1, φ_i cesse d'être réduit; alors une certaine substitution donnera une forme φ_{i+1} équivalente à φ_i et réduite lorsque Δ_i reste compris entre A_1 et un autre nombre A_2. La même substitution appliquée à φ_j donnera une forme φ_{j+1}, qui sera évidemment réduite lorsque Δ_j reste compris entre $A_1\frac{M_j^3(\alpha)}{M_i^3(\alpha)}$ et $A_2\frac{M_j^3(\alpha)}{M_i^3(\alpha)}$.

Supposons $\frac{M_j(\alpha)}{M_i(\alpha)} > 1$; alors on finira par trouver un nombre h tel que φ_{i+h} soit identique à φ_j; alors la substitution qui conduirait de φ_{i+h} à φ_{i+h+1} sera celle qui conduit de φ_j à φ_{j+1}, c'est-à-dire celle qui conduit de φ_i à φ_{i+1}. On voit donc qu'à partir de là les substitutions se reproduisent périodiquement, à mesure que Δ croîtra jusqu'à ∞.

Si, au contraire, Δ va en diminuant, la forme φ_i est précédée d'une forme φ_{i-1} qui se déduira de φ_i par la même substitution qui conduit de φ_j à φ_{j-1}, c'est-à-dire de φ_{i+h} à φ_{i+h-1}. Les mêmes substitutions se reproduisent donc pour les formes réduites correspondant aux valeurs de Δ inférieures à A_0.

35. Donc, si l'on forme les réduites de f pour une suite de valeurs de Δ croissant d'une manière continue, on finira par employer périodiquement les mêmes substitutions pour déduire une réduite de la précédente.

Il sera facile de reconnaître à quel moment finit une période de substitutions. En effet, les premières formes φ_i et φ_j, c'est-à-dire les formes déduites de $\mathcal{F}_i$ et $\mathcal{F}_j$ et non multipliées par $M_i^2(\alpha)$ et $M_j^2(\alpha)$, avaient des coefficients g, h, k, l, m, n de la forme $a + b\frac{\Delta_i}{M_i^3(\alpha)}$ et $a + b\frac{\Delta_j}{M_j^3(\alpha)}$, les quantités a et b de l'une des formes étant identiques aux quantités a et b de l'autre.

Mais, en prenant pour φ_i et φ_j les quantités désignées d'abord par φ_i, φ_j et multipliées ensuite par $M_i^2(\alpha)$ et $M_j^2(\alpha)$, les coefficients sont devenus de la forme $A_i + \frac{B_i\Delta_i}{M_i^3(\alpha)}$ et $A_j + \frac{B_j\Delta_i}{M_j^3(\alpha)}$, où l'on a $A_i = aM_i^2(\alpha)$ et

$A_j = aM_j^2(\alpha)$ avec $B_i = bM_i^2(\alpha)$ et $B_j = bM_j^2(\alpha)$, c'est-à-dire que les coefficients de deux formes correspondantes auront des valeurs proportionnelles, et par là j'entends que, si l'on désigne les coefficients g, h, k, l, m, n de l'une des formes par

$$A_1 + B_1\Delta,\ A_2 + B_2\Delta,\ A_3 + B_3\Delta,\ A_4 + B_4\Delta,\ A_5 + B_5\Delta,\ A_6 + B_6\Delta$$

et ceux de la forme correspondante par

$$A'_1 + B'_1\Delta,\ A'_2 + B'_2\Delta,\ A'_3 + B'_3\Delta,\ A'_4 + B'_4\Delta,\ A'_5 + B'_5\Delta,\ A'_6 + B'_6\Delta,$$

on doit avoir

$$\frac{A_1}{A'_1} = \frac{A_2}{A'_2} = \frac{A_3}{A'_3} = \frac{A_4}{A'_4} = \frac{A_5}{A'_5} = \frac{A_6}{A'_6}, \quad \frac{B_1}{B'_1} = \frac{B_2}{B'_2} = \frac{B_3}{B'_3} = \frac{B_4}{B'_4} = \frac{B_5}{B'_5} = \frac{B_6}{B'_6}.$$

Ainsi, lorsque l'on sera parvenu à deux formes pour lesquelles une telle proportionnalité a lieu, la série des substitutions par lesquelles on passe de la première forme à la seconde formera la période de substitutions qui se reproduit indéfiniment pour donner toutes les réduites.

Remarquons enfin que, l'ordre des coefficients d'une réduite étant indéterminé, il faudra comparer les coefficients g, h, k, l, m, n de l'une des réduites aux coefficients de l'autre, non pas dans l'ordre arbitraire où ils se présentent, mais en les rangeant, par exemple, d'après la grandeur croissante des multiplicateurs de Δ.

C'est ce que nous allons éclaircir par des exemples.

---

36. Soit, en premier lieu,

$$x^3 = 2.$$

Nous considérerons la forme

$$(x + y\sqrt[3]{2} + z\sqrt[3]{4})^2 + 2\Delta(x + y\lambda\sqrt[3]{2} + z\lambda^2\sqrt[3]{4})(x + y\lambda^2\sqrt[3]{2} + z\lambda\sqrt[3]{4}),$$

où λ et λ^2 désignent les racines cubiques imaginaires de l'unité.

Si l'on change x en $x - t$, y en $y - t$, z en $z - t$, on obtient

$$\begin{aligned} 2(\Delta - 1)(y - z)^2 &+ \sqrt[3]{4}(\Delta - 1)(z - x)^2 + \sqrt[3]{2}(\Delta - 1)(x - y)^2 \\ &+ [1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4} + \Delta(2 - \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4})](x - t)^2 \\ &+ [2 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4} + \Delta(-2 - \sqrt[3]{2} + 2\sqrt[3]{4})](y - t)^2 \\ &+ [2 + 2\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4} + \Delta(-2 + 4\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4})](z - t)^2. \end{aligned}$$

Pour faciliter le calcul, en rendant plus simple la comparaison des coefficients, nous remplacerons $\sqrt[3]{2}$ et $\sqrt[3]{4}$ par leurs valeurs approchées, qui sont

$$\sqrt[3]{2} = 1{,}26,$$
$$\sqrt[3]{4} = 1{,}59.$$

On obtient ainsi pour la forme précédente, que nous désignerons par F_0,

$$\begin{aligned}&2(\Delta - 1)(y-z)^2 + 1{,}59(\Delta - 1)(z-x)^2 + 1{,}26(\Delta - 1)(x-y)^2 \\ &\quad + (3{,}85 - 0{,}85\Delta)(x-t)^2 + (4{,}85 - 0{,}08\Delta)(y-t)^2 + (6{,}11 + 1{,}45\Delta)(z-t)^2,\end{aligned}$$

ou encore, en multipliant par 100, ce qui ne change pas les conditions de réduction, nous aurons, pour F_0,

$$\begin{aligned}&(-200+200\Delta)(y-z)^2 + (-159+159\Delta)(z-x)^2 + (-126+126\Delta)(x-y)^2 \\ &+ (385 - 85\Delta)(x-t)^2 + (485 - 8\Delta)(y-t)^2 + (611 + 145\Delta)(z-t)^2.\end{aligned}$$

Cette forme est réduite si Δ reste compris entre 1 et $\frac{385}{85}$; mais, si Δ devient supérieur à $\frac{385}{85}$, le coefficient de $(x-t)^2$ cesse de satisfaire aux conditions de réduction.

Nous ferons alors la substitution

$$\begin{aligned} x &= x - y - z + t, \\ y &= -z + t, \\ z &= x - z. \end{aligned}$$

Mais, auparavant, nous remarquerons que cette substitution a pour effet d'augmenter de

$$385 - 85\Delta,$$

qui est le coefficient de $(x-t)^2$, la somme des coefficients; nous aurons donc là un élément précieux pour la vérification des calculs. Désignant par S_i la somme des coefficients de la forme de rang i, nous aurons, pour la forme F_0,

$$S_0 = 996 + 537\Delta.$$

37. Opérons maintenant la substitution indiquée; elle nous conduira à une forme F_1,

$$(-385+85\Delta)(y-z)^2+(996+60\Delta)(z-x)^2+(259+41\Delta)(x-y)^2$$
$$+(-585+285\Delta)(x-t)^2+(226+74\Delta)(y-t)^2+(870-93\Delta)(z-t)^2,$$

et la somme des coefficients est

$$S_1=1381+452\Delta,$$

qui est bien égale à $S_0+385-85\Delta$.

La nouvelle forme F_1 est réduite, tant que Δ ne dépasse pas la valeur $\frac{870}{93}$; mais, si l'on a

$$\Delta>\frac{870}{93},$$

alors le coefficient de $(z-t)^2$ cesse de satisfaire aux conditions de réduction.

Il n'y a pas lieu, du reste, d'examiner si la période se termine à la forme F_1, car les coefficients de F_1, n'offrant pour Δ qu'un seul multiplicateur négatif, ne sauraient offrir, dans leur comparaison avec les coefficients de F_0, les caractères qu'offrent deux formes correspondantes de deux périodes différentes.

38. Supposant donc que Δ dépasse $\frac{870}{93}$, nous ferons la substitution

$$\begin{aligned} x&=-x+y,\\ y&=y-t,\\ z&=-x+y+z-t, \end{aligned}$$

qui conduit à la forme F_2,

$$(-870+93\Delta)(y-z)^2+(485-8\Delta)(z-x)^2+(285+192\Delta)(x-y)^2$$
$$+(-611+134\Delta)(x-t)^2+(1096-19\Delta)(y-t)^2+(1866-33\Delta)(z-t)^2.$$

La seule inspection des signes dont sont affectés les coefficients de cette forme montre qu'il est inutile de la comparer à la forme F_0.

Comme vérification, nous trouvons que la somme S_2 des coefficients est

$$S_2=2251+359\Delta,$$

qui est bien égale à

$$S_1 + 870 - 93\Delta.$$

La forme F_2 cesse d'être réduite si

$$\Delta > \frac{1866}{33},$$

ou, en faisant le calcul plus exactement, lorsque Δ dépasse la valeur qui annule simultanément les trois coefficients de $(z - x)^2$, $(y - t)^2$, $(z - t)^2$.

39. Dans ce cas, nous ferons la substitution

$$\begin{aligned} x &= -x + t, \\ y &= -x - z + 2t, \\ z &= -x - y - z + 3t, \end{aligned}$$

qui donne la forme F_3,

$$\begin{aligned} &(-2351 + 41\Delta)(y - z)^2 + (-2962 + 52\Delta)(z - x)^2 + (-1866 + 33\Delta)(x - y)^2 \\ &+ (\;7179 - \;3\Delta)(x - t)^2 + (\;5698 - 22\Delta)(y - t)^2 + (\;9045 + 39\Delta)(z - t)^2. \end{aligned}$$

La somme des coefficients est

$$S_3 = 14743 + 140\Delta;$$

il est facile de voir qu'elle doit être égale à

$$S_2 + 2(485 - 8\Delta) + 2(1096 - 19\Delta) + 5(1866 - 33\Delta),$$

et l'on trouve en effet que cette somme est égale à S_3.

Si l'on considère la forme F_3, on voit que les coefficients présentent les mêmes combinaisons de signes que ceux de la forme F_0; nous allons donc les comparer à ceux de F_0 et voir s'ils présentent la proportionnalité qui indique la fin d'une période.

40. Nous allons écrire les coefficients de F_0 sur une première colonne et ceux de F_1 sur une deuxième, en les rangeant par ordre de

grandeur croissante pour les coefficients de Δ :

F_0.	F_1.
$485 - 8\Delta,$	$7179 - 3\Delta,$
$385 - 85\Delta,$	$5698 - 22\Delta,$
$-126 + 126\Delta,$	$-1866 + 33\Delta,$
$611 + 145\Delta,$	$9045 + 39\Delta,$
$-159 + 159\Delta,$	$-2351 + 41\Delta,$
$-200 + 200\Delta,$	$-2962 + 52\Delta.$

Les rapports des multiplicateurs de Δ dans les coefficients d'une même ligne horizontale sont

$$\frac{8}{3}, \quad \frac{85}{22}, \quad \frac{126}{33}, \quad \frac{145}{39}, \quad \frac{159}{41}, \quad \frac{200}{52}$$

ou, en effectuant,

$$2,6, \quad 3,8, \quad 3,8, \quad 3,9, \quad 3,8, \quad 3,8.$$

Ces rapports sont tous sensiblement égaux à l'exception du premier; mais, les deux termes de ce premier rapport n'ayant qu'un chiffre, ce rapport est assez douteux, à cause des valeurs qu'on a prises pour $\sqrt[3]{2}$ et $\sqrt[3]{4}$, lesquelles ne sont que peu approchées et peuvent donner des erreurs dans le dernier chiffre des nombres qui forment les coefficients de la forme ternaire.

Prenons maintenant les rapports des termes indépendants de A, en faisant correspondre les termes d'une même ligne horizontale.

On trouve

$$\frac{7179}{485}, \quad \frac{5698}{385}, \quad \frac{1866}{126}, \quad \frac{9045}{611}, \quad \frac{2351}{159}, \quad \frac{2962}{200}$$

ou, en effectuant,

$$14, \quad 14, \quad 14, \quad 14, \quad 14, \quad 14;$$

ces rapports sont donc sensiblement égaux.

La période semble donc bien se terminer à F_3.

41. Nous allons calculer exactement cette forme pour voir si cette prévision se réalise.

Les substitutions successivement employées sont

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix};$$

nous joindrons à ces substitutions la substitution

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix},$$

qui change x en y et y en x, et qui dans F_3 placera les termes dans l'ordre où sont dans F_0 les termes correspondants.

Ces cinq substitutions peuvent être remplacées par la substitution unique

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Cette substitution, appliquée à la forme F_0, savoir

$$F_0 = (x + y\sqrt[3]{2} + z\sqrt[3]{4})^2 + 2\Delta\,(x + \lambda y\sqrt[3]{2} + \lambda^2 z\sqrt[3]{4})(x + \lambda^2 y\sqrt[3]{2} + \lambda z\sqrt[3]{4}),$$

donne

$$\begin{aligned} F_3 = {} & [(1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4})x + (2 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4})y + (2 + 2\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4})z]^2 \\ & + 2\Delta[(1+\lambda\sqrt[3]{2}+\lambda^2\sqrt[3]{4})x + (2+\lambda\sqrt[3]{2}+\lambda^2\sqrt[3]{4})y + (2+2\lambda\sqrt[3]{2}+\lambda^2\sqrt[3]{4})z] \\ & \quad \times [(1+\lambda^2\sqrt[3]{2}+\lambda\sqrt[3]{4})x + (2+\lambda^2\sqrt[3]{2}+\lambda\sqrt[3]{4})y + (2+2\lambda^2\sqrt[3]{2}+\lambda\sqrt[3]{4})z], \end{aligned}$$

et cette forme F_3 peut évidemment s'écrire ainsi :

$$\begin{aligned} & (1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4})^2(x + y\sqrt[3]{2} + z\sqrt[3]{4})^2 + 2\Delta(1 + \lambda\sqrt[3]{2} + \lambda^2\sqrt[3]{4})(1 + \lambda^2\sqrt[3]{2} + \lambda\sqrt[3]{4}) \\ & \quad \times (x + \lambda y\sqrt[3]{2} + \lambda^2 z\sqrt[3]{4})(x + \lambda^2 y\sqrt[3]{2} + \lambda z\sqrt[3]{4}) \end{aligned}$$

ou encore

$$(1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})^2[(x+y\sqrt[3]{2}+z\sqrt[3]{4})^2+2\Delta(\sqrt[3]{2}-1)^3(x+\lambda y\sqrt[3]{2}+\lambda^2 z\sqrt[3]{4})(x+\lambda^2 y\sqrt[3]{2}+\lambda z\sqrt[3]{4})].$$

Ainsi, on passe de F_0 à F_3 en multipliant F_0 par

$$(1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})^2,$$

et changeant en même temps Δ en

$$\Delta(\sqrt[3]{2}-1)^3.$$

Si maintenant on continue à faire croître Δ, on déduira de F_3 de nouvelles formes réduites qui s'obtiendront par les mêmes substitutions qui ont permis de passer de F_0 à F_3, et, si Δ' et Δ'' sont les deux limites entre lesquelles doit rester Δ pour qu'une des premières formes soit réduite, à cette forme correspondra, parmi les nouvelles formes, une forme qui sera réduite lorsque Δ restera compris entre

$$\frac{\Delta'}{(\sqrt[3]{2}-1)^3} \quad \text{et} \quad \frac{\Delta''}{(\sqrt[3]{2}-1)^3},$$

ou, si l'on veut, entre

$$\Delta'(1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})^3 \quad \text{et} \quad \Delta''(1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})^3.$$

On parviendra ainsi à une forme F_6 à laquelle se terminera la deuxième période, et qui se déduira de F_3 comme F_3 se déduit de F_0; et ainsi de suite indéfiniment.

42. Les intervalles dans lesquels chaque forme est réduite sont indiqués par le Tableau suivant :

$$F_0 \text{ est réduit si} \quad 1<\Delta<\frac{385}{85},$$

$$F_1 \quad \text{»} \quad \frac{385}{85}<\Delta<\frac{870}{93},$$

$$F_2 \quad \text{»} \quad \frac{870}{93}<\Delta<\frac{1866}{33},$$

ou, exactement,

$$F_0 \text{ est réduit si} \quad 1<\Delta<\frac{16+12\sqrt[3]{2}+9\sqrt[3]{4}}{10},$$

$$F_1 \quad \text{»} \quad \frac{16+12\sqrt[3]{2}+9\sqrt[3]{4}}{10}<\Delta<\frac{6+5\sqrt[3]{2}+4\sqrt[3]{4}}{2},$$

$$F_2 \quad \text{»} \quad \frac{6+5\sqrt[3]{2}+4\sqrt[3]{4}}{2}<\Delta<(1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})^3.$$

Les limites de Δ pour F_3 se déduisent des limites relatives à F_0 en multipliant celles-ci par $(1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})^3$.

Puis les limites pour F_4 se déduisent des limites de F_1 en multipliant celles-ci par la même quantité, et ainsi de suite, de sorte que

F_3 est réduit si $$(1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})^3 < \Delta < \frac{16+12\sqrt[3]{2}+9\sqrt[3]{4}}{10}(1+\ \ 2+\ 4)^3,$$

F_4 » $$(1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})^3\,\frac{16+12\sqrt[3]{2}+9\sqrt[3]{4}}{10} < \Delta < \frac{6+5\sqrt[3]{2}+4\sqrt[3]{4}}{2}(1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})^3,$$

F_5 » $$(1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})^3\,\frac{6+5\sqrt[3]{2}+4\sqrt[3]{4}}{2} < \Delta < (1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})^6,$$

F_6 » $$(1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})^6 < \Delta < \frac{16+12\sqrt[3]{2}+9\sqrt[3]{4}}{10}(1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})^6,$$

F_7 » $$(1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})^6\,\frac{16+12\sqrt[3]{2}+9\sqrt[3]{4}}{10} < \Delta < \frac{6+5\sqrt[3]{2}+4\sqrt[3]{4}}{2}(1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})^6,$$

. . . .

Si l'on désigne par $F_{-1}, F_{-2}, \ldots$ les formes réduites qui précèdent F_0, et qui sont relatives à des valeurs de Δ inférieures à l'unité, elles se déduisent également des formes F_0, F_1, F_2, à savoir :

F_{-1} se déduira de F_2 en divisant F_2 par $(1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})^2$ et changeant Δ en $\dfrac{\Delta}{(\sqrt[3]{2}-1)^3}$, ou, si l'on veut, en multipliant F_2 par $(\sqrt[3]{2}-1)^2$ et changeant Δ en $\Delta(1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})^3$.

La même opération donnera F_{-2} au moyen de F_1, F_{-3} au moyen de F_0, puis F_{-4} au moyen de F_{-1}, et ainsi de suite indéfiniment, et les limites de Δ seront les suivantes :

F_{-1} sera réduit si $$\frac{6+5\sqrt[3]{2}+4\sqrt[3]{4}}{2}(\sqrt[3]{2}-1)^3 < \Delta < 1,$$

F_{-2} » $$\frac{16+12\sqrt[3]{2}+9\sqrt[3]{4}}{10}(\sqrt[3]{2}-1)^3 < \Delta < \frac{6+5\sqrt[3]{2}+4\sqrt[3]{4}}{2}(\sqrt[3]{2}-1)^3,$$

F_{-3} » $$(\sqrt[3]{2}-1)^3 < \Delta < \frac{16+12\sqrt[3]{2}+9\sqrt[3]{4}}{10}(\sqrt[3]{2}-1)^3,$$

F_{-4} » $$\frac{6+5\sqrt[3]{2}+4\sqrt[3]{4}}{2}(\sqrt[3]{2}-1)^6 < \Delta < (\sqrt[3]{2}-1)^3,$$

43. On voit ainsi comment la série des formes réduites peut se poursuivre indéfiniment dans les deux sens.

Lorsque Δ croît à partir de 1, on obtient les formes réduites en appliquant périodiquement et successivement les quatre substitutions

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix},$$

ou plutôt, comme la dernière ne fait que permuter les lettres x et y dans la forme F_3, nous n'avons qu'à employer les trois substitutions

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Pour les valeurs de Δ inférieures à 1, il faut appliquer à partir de F_0, successivement et périodiquement, les substitutions inverses des précédentes, en commençant par la dernière, c'est-à-dire appliquer successivement et périodiquement les substitutions suivantes :

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}.$$

44. J'ai appliqué la même méthode à la racine cubique du nombre 3. Voici le calcul :

Je prends la forme

$$F_0 = (x + y\sqrt[3]{3} + z\sqrt[3]{9})^2 + 2\Delta(x + \lambda y\sqrt[3]{3} + \lambda^2 z\sqrt[3]{9})(x + \lambda^2 y\sqrt[3]{3} + \lambda z\sqrt[3]{9}),$$

ou, en changeant x, y, z en $x - t$, $y - t$, $z - t$,

$$\begin{aligned} F_0 = {} & (-3 + 3\Delta)(y - z)^2 + (-\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{9}\Delta)(z - x)^2 \\ & + (-\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{3}\Delta)(x - y)^2 + [1 + \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9} + (2 - \sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{9})\Delta](x - t)^2 \\ & + [3 + \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9} + \Delta(-3 - \sqrt[3]{3} + 2\sqrt[3]{9})](y - t)^2 \\ & + [3 + 3\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9} + \Delta(-3 + 6\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{9})](z - t)^2, \end{aligned}$$

ou, en faisant, pour simplifier les calculs,

$$\sqrt[3]{3} = 1{,}442,$$
$$\sqrt[3]{9} = 2{,}080,$$

et multipliant par 1000, on a pour la forme F_0

$$(-3000 + 3000\Delta)(y-z)^2 + (-2080 + 2080\Delta)(z-x)^2 + (-1442 + 1442\Delta)(x-y)^2$$
$$+(\ 4522 - 1522\Delta)(x-t)^2 + (\ 6522 - \ 282\Delta)(y-t)^2 + (\ 9406 + 3572\Delta)(z-t)^2.$$

Cette forme est réduite si Δ est supérieur à 1 et inférieur à $\frac{4522}{1522}$.

45. Si Δ dépasse $\frac{4522}{1522}$, la forme cesse d'être réduite, et, pour la réduire, nous emploierons la substitution

$$x = x - y - z + t,$$
$$y = -z + t,$$
$$z = x - z,$$

qui produit la forme F_1,

$$(-4522 + 1522\Delta)(y-z)^2 + (13928 + 1050\Delta)(z-x)^2 + (\ 3080 - \ 80\Delta)(x-y)^2$$
$$+(-7522 + 4522\Delta)(x-t)^2 + (\ 2442 + \ 558\Delta)(y-t)^2 + (11044 - 1804\Delta)(z-t)^2,$$

qui est réduite tant que Δ, restant supérieur à $\frac{4522}{1522}$, ne dépasse pas $\frac{11044}{1804}$.

D'ailleurs, il est inutile d'examiner si les coefficients de F_1 présentent, par rapport à ceux de F_0, la proportionnalité qui indiquerait la fin d'une période, car F_1 présente deux coefficients dont les deux termes sont positifs, tandis que F_0 n'a qu'un seul coefficient dont les deux termes sont positifs.

46. Supposant alors que Δ dépasse $\frac{11044}{1804}$, la forme F_1 cessant d'être réduite, la substitution

$$x = x - y,$$
$$y = -y + t,$$
$$z = x - y - z + t$$

donnera la forme F_2,

$$\begin{aligned}&(-11044+1804\Delta)(y-z)^2+(6522-282\Delta)(z-x)^2+(3522+2718\Delta)(x-y)^2\\+&(-7964+1724\Delta)(x-t)^2+(13486-1246\Delta)(y-t)^2+(24972+246\Delta)(z-t)^2,\end{aligned}$$

qui est réduite tant que Δ, restant supérieur à $\frac{11044}{1804}$, ne dépasse pas $\frac{13486}{1246}$.

La seule inspection des coefficients de cette forme indique que la période n'est pas encore à son terme.

47. Supposant donc que Δ dépasse la valeur $\frac{13486}{1246}$, nous obtiendrons, par la substitution

$$\begin{aligned}x&=z-t,\\y&=-x+y+z-t,\\z&=-x+z,\end{aligned}$$

la forme F_3,

$$\begin{aligned}&(-13486+1246\Delta)(y-z)^2+(384458-1000\Delta)(z-x)^2+(170008+1472\Delta)(x-y)^2\\+&(-6964+964\Delta)(x-t)^2+(2442+558\Delta)(y-t)^2+(5522+478\Delta)(z-t)^2,\end{aligned}$$

et cette forme est réduite si Δ, restant supérieur à $\frac{13486}{1246}$, ne dépasse pas $\frac{38471}{1000}$.

D'ailleurs, la composition des coefficients indique que la période n'est pas terminée.

48. Si Δ dépasse $\frac{38471}{1000}$, nous ferons la substitution

$$\begin{aligned}x&=y-t,\\y&=x-t,\\z&=x-z,\end{aligned}$$

d'où résulte la forme F_4,

$$\begin{aligned}&(-38458+1000\Delta)(y-z)^2+(43980-522\Delta)(z-x)^2+(55466+472\Delta)(x-y)^2\\+&(-36026+1558\Delta)(x-t)^2+(31494-36\Delta)(y-t)^2+(24972+246\Delta)(z-t)^2,\end{aligned}$$

qui est réduite si Δ, restant supérieur à $\frac{38471}{1000}$, reste en même temps inférieur à $\frac{42993}{522}$.

Cette forme ne termine pas encore la période.

49. Δ continuant à croître, la substitution

$$x = y - t,$$
$$y = x - t,$$
$$z = x - z$$

donne la forme F_5,

$$(-43580 + 522\Delta)(y-z)^2 + (68952 - 276\Delta)(z-x)^2 + (99446 - 50\Delta)(x-y)^2$$
$$+(-12486 + 486\Delta)(x-t)^2 + (7964 + 1036\Delta)(y-t)^2 + (5522 + 478\Delta)(z-t)^2,$$

qui est réduite tant que Δ reste compris entre $\frac{42993}{522}$ et $\frac{68952}{276}$, et à laquelle ne se termine pas la période, comme on le voit facilement par la comparaison des signes des termes des coefficients avec les signes des termes de F_0.

50. Si Δ devient supérieur à $\frac{68952}{276}$, nous ferons la substitution

$$x = y - t,$$
$$y = x - t,$$
$$z = x - z,$$

qui donne la forme F_6,

$$(-68952 + 276\Delta)(y-z)^2 + (74474 + 202\Delta)(z-x)^2 + (168398 - 326\Delta)(x-y)^2$$
$$+(-60988 + 1312\Delta)(x-t)^2 + (56466 + 210\Delta)(y-t)^2 + (24972 + 246\Delta)(z-t)^2;$$

cette forme est réduite lorsque Δ reste compris entre $\frac{68952}{276}$ et $\frac{168398}{326}$, et la combinaison des signes des coefficients montre encore que la période n'est pas terminée.

51. Δ dépassant $\frac{168398}{326}$, la substitution

$$\begin{aligned} x &= x - z, \\ y &= y - t, \\ z &= x - t \end{aligned}$$

conduit à la forme F_7

$$\begin{aligned} &(-168398 + 326\Delta)(y-z)^2 + (107410 + 986\Delta)(z-x)^2 + (99446 - 50\Delta)(x-y)^2 \\ +&(-143426 + 572\Delta)(x-t)^2 + (224864 - 116\Delta)(y-t)^2 + (242872 - 124\Delta)(z-t)^2. \end{aligned}$$

L'inspection des coefficients de cette forme montre que la fin de la période n'est pas encore atteinte. Cette forme est réduite tant que Δ reste supérieur à $\frac{168398}{326}$ sans dépasser $\frac{224864}{116}$, et, en calculant plus exactement, on trouve que cette forme est réduite jusqu'à ce que Δ atteigne la valeur qui annule simultanément les trois coefficients de $(x-y)^2$, $(y-t)^2$, $(z-t)^2$.

52. Si donc Δ dépasse cette valeur, nous ferons la substitution

$$\begin{aligned} x &= x - t, \\ y &= x + y + z - 3t, \\ z &= x + z - 2t, \end{aligned}$$

qui conduit à la forme F_8,

$$\begin{aligned} &(-324310 + 166\Delta)(y-z)^2 + (-467736 + 240\Delta)(z-x)^2 + (-224864 + 116\Delta)(x-y)^2 \\ +&(1016910 - 24\Delta)(x-t)^2 + (705086 - 122\Delta)(y-t)^2 + (1466638 + 290\Delta)(z-t)^2, \end{aligned}$$

et, si l'on compare les coefficients de cette forme à ceux de F_0, on voit qu'en faisant abstraction de leur ordre ils présentent les mêmes combinaisons de signes. Nous sommes donc conduits à examiner s'ils présentent avec ceux de F_0 la proportionnalité qui indiquerait la fin d'une période.

53. Nous placerons donc les coefficients de F_0 et de F_8 sur deux colonnes verticales, en les rangeant d'après la grandeur croissante des multiplicateurs de Δ :

$$
\begin{array}{rr}
F_0. & F_8. \\
6522 - 282\Delta, & 1016910 - 24\Delta, \\
-1442 + 1442\Delta, & -224864 + 116\Delta, \\
4522 - 1522\Delta, & 705086 - 122\Delta, \\
-2080 + 2080\Delta, & -324310 + 166\Delta, \\
-3000 + 3000\Delta, & -467736 + 240\Delta, \\
9406 + 3572\Delta, & 1466638 + 290\Delta.
\end{array}
$$

Les rapports des multiplicateurs de Δ dans F_0 à ceux de Δ dans F_8 sont

$$\frac{282}{24},\quad \frac{1442}{116},\quad \frac{1522}{122},\quad \frac{2080}{166},\quad \frac{3000}{240},\quad \frac{3572}{290},$$

ou bien

$$11,\quad 12,\quad 12,\quad 12,\quad 12,\quad 12;$$

ces rapports sont donc sensiblement égaux.

De même les rapports des termes constants dans F_0 aux termes constants correspondants dans F_8 sont

$$\frac{1016910}{6522},\quad \frac{224864}{1442},\quad \frac{705086}{4522},\quad \frac{324310}{2080},\quad \frac{467736}{3000},\quad \frac{1466638}{9406}$$

ou bien

$$155,\quad 155,\quad 155,\quad 155,\quad 155,\quad 155,$$

qui sont aussi sensiblement égaux.

Il y a donc lieu de calculer exactement la forme F_8 et de voir si les rapports précédents présentent une égalité absolue.

Mais, auparavant, nous ferons dans F_8 la substitution

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix},$$

qui mettra les termes de F_8 dans le même ordre que les termes correspondants de F_0.

Or, les substitutions employées pour passer de F_0 à F_8 sont, en remarquant que la substitution $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$, à laquelle on adjoint $\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$, peut être remplacée par $\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix}$, ces substitutions, dis-je, sont

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix},$$

et ces substitutions, appliquées successivement, sont équivalentes à la substitution unique

$$\begin{vmatrix} 4 & 6 & 9 \\ 3 & 4 & 6 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}.$$

Cette substitution, appliquée à la forme

$$F_0 = (x + y\sqrt[3]{3} + z\sqrt[3]{9})^2 + 2\Delta(x + \lambda y\sqrt[3]{3} + \lambda^2 z\sqrt[3]{9})(x + \lambda^2 y\sqrt[3]{3} + \lambda y\sqrt[3]{9}),$$

donne la forme F_8,

$$\begin{aligned}&[(4 + 3\sqrt[3]{3} + 2\sqrt[3]{9})x + (6 + 4\sqrt[3]{3} + 3\sqrt[3]{9})y + (9 + 6\sqrt[3]{3} + 4\sqrt[3]{9})z]^2\\ &\quad + 2\Delta[(4 + 3\lambda\sqrt[3]{3} + 2\lambda^2\sqrt[3]{9})x + (6 + 4\lambda\sqrt[3]{3} + 3\lambda^2\sqrt[3]{9})y + (9 + 6\lambda\sqrt[3]{3} + 4\lambda^2\sqrt[3]{9})z]\\ &\qquad \times [(4 + 3\lambda^2\sqrt[3]{3} + 2\lambda\sqrt[3]{9})x + (6 + 4\lambda^2\sqrt[3]{3} + 3\lambda\sqrt[3]{9})y + (9 + 6\lambda^2\sqrt[3]{3} + 4\lambda\sqrt[3]{9})z],\end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned}&(4 + 3\sqrt[3]{3} + 2\sqrt[3]{9})^2[(x + y\sqrt[3]{3} + z\sqrt[3]{9})^2\\ &\qquad + 2\Delta(\sqrt[3]{9} - 2)^3(x + y\lambda\sqrt[3]{3} + z\lambda^2\sqrt[3]{9})(x + y\lambda^2\sqrt[3]{3} + z\lambda\sqrt[3]{9})],\end{aligned}$$

c'est-à-dire qu'on obtient F_8 en multipliant F_0 par

$$(4 + 3\sqrt[3]{3} + 2\sqrt[3]{9})^2$$

et remplaçant Δ par

$$\Delta(\sqrt[3]{9}-2)^3.$$

54. A partir de F_8, les substitutions se reproduisent périodiquement, et toute forme F_{8n+k} se déduit de la forme F_k en multipliant cette forme par $(4+3\sqrt[3]{3}+2\sqrt[3]{9})^{2n}$ et changeant Δ en $\Delta(\sqrt[3]{9}-2)^{3n}$.

Si l'on considère au contraire les formes qui précèdent F_0 et si on les désigne par des indices négatifs, on voit que la forme F_{-8n+k} se déduit de la forme F_k en divisant cette forme par $(4+3\sqrt[3]{3}+2\sqrt[3]{9})^{2n}$ et changeant Δ en $\dfrac{\Delta}{(\sqrt[3]{9}-2)^{3n}}$, ou, en d'autres termes, en multipliant F_k par $(\sqrt[3]{9}-2)^{2n}$ et changeant Δ en $\Delta(4+3\sqrt[3]{3}+2\sqrt[3]{9})^{3n}$.

On déduirait d'ailleurs les formes d'indices négatifs de la forme F_0 en appliquant à F_0 les substitutions qui permettent de trouver les formes d'indices positifs; mais il faudrait renverser l'ordre de ces substitutions et remplacer ces substitutions elles-mêmes par les substitutions inverses.

55. Voici enfin un exemple du calcul appliqué non plus à des racines cubiques, mais aux racines d'une équation du type

$$x^3+px+q=0.$$

Je prendrai l'équation

$$x^3-2x-5=0,$$

qui a servi d'exemple à Newton et à Lagrange dans leurs recherches sur les équations.

Cette équation a une racine réelle et deux racines imaginaires. Nous désignerons la racine réelle par α et les racines imaginaires par β et γ.

Je donnerai seulement le Tableau du calcul; les explications données sur les deux exemples précédents permettront facilement de le comprendre.

Dans le commencement du calcul, j'ai pris α avec deux décimales seulement, et j'ai posé

$$\alpha=2,09,$$
$$\alpha^2=4,36.$$

Mais, à partir de la onzième forme, cette approximation devenant insuffisante, on a pris quatre décimales et posé

$$\alpha = 2,0946,$$
$$\alpha^2 = 4,3873.$$

56. On part de la forme

$$\Phi = (x + \alpha y + \alpha^2 z)^2 + 2\Delta(x + \beta y + \beta^2 z)(x + \gamma y + \gamma^2 z),$$

qui peut s'écrire, en changeant x, y, z en $x - t, y - t, z - t$,

$$\begin{aligned}(-5 - 2\alpha + 5\Delta)(y - z)^2 &+ [-\alpha^2 + (\alpha^2 - 4)\Delta](z - x)^2 \\ &+ (-\alpha + \alpha\Delta)(x - y)^2 + [1 + \alpha + \alpha^2 + (6 - \alpha - \alpha^2)\Delta](x - t)^2 \\ &+ [5 + 3\alpha + \alpha^2 + (-9 - \alpha + 2\alpha^2)\Delta](y - t)^2 \\ &+ [5 + 7\alpha + 3\alpha^2 + (7 + 10\alpha - 5\alpha^2)\Delta](z - t)^2,\end{aligned}$$

et, remplaçant α par sa valeur numérique, c'est-à-dire faisant

$$\alpha = 2,09,$$
$$\alpha^2 = 4,36,$$

on obtient, après avoir multiplié par 100,

$$\begin{aligned}&(-918 + 500\Delta)(y - z)^2 + (-436 + 36\Delta)(z - x)^2 + (-209 + 209\Delta)(x - y)^2 \\ &+ (745 - 45\Delta)(x - t)^2 + (1563 - 237\Delta)(y - t)^2 + (3271 + 610\Delta)(z - t)^2.\end{aligned}$$

Cette forme n'est réduite pour aucune valeur de Δ; mais, si l'on emploie la substitution

$$x = z - t,$$
$$y = -x + y + z - t,$$
$$z = -x + z,$$

on obtient la forme F_0,

$$\begin{aligned}&(-1563 + 237\Delta)(y - z)^2 + (4834 + 373\Delta)(z - x)^2 + (1354 - 28\Delta)(x - y)^2 \\ &+ (-1999 + 273\Delta)(x - t)^2 + (645 + 263\Delta)(y - t)^2 + (2308 - 282\Delta)(z - t)^2,\end{aligned}$$

et cette forme est réduite si Δ vérifie la double inégalité

$$\frac{1999}{273} < \Delta < \frac{2308}{282}.$$

57. Nous partirons donc de cette forme F_0, qui sera la première de la suite périodique de formes réduites que nous allons chercher, et qui forment le Tableau suivant, dans lequel les substitutions placées entre deux formes sont celles par lesquelles on passe d'une forme à la suivante; au-dessous de chaque forme sont les valeurs limites de Δ entre lesquelles cette forme est réduite.

F_0.

$$\begin{aligned}&(-1563+237\Delta)(y-z)^2+(4834+373\Delta)(z-x)^2+(1354-28\Delta)(x-y)^2\\&+(-1999+273\Delta)(x-t)^2+(645+263\Delta)(y-t)^2+(2308-282\Delta)(z-t)^2,\end{aligned}$$

$$\frac{1999}{273}<\Delta<\frac{2308}{282},$$

$$\begin{aligned}x&=x-y,\\ y&=-y+t,\\ z&=x-y-z+t.\end{aligned}$$

F_1.

$$\begin{aligned}&(-2308+282\Delta)(y-z)^2+(745-45\Delta)(z-x)^2+(309-9\Delta)(x-y)^2\\&+(-954+254\Delta)(x-t)^2+(2953-19\Delta)(y-t)^2+(7142+91\Delta)(z-t)^2,\end{aligned}$$

$$\frac{2308}{282}<\Delta<\frac{745}{45},$$

$$\begin{aligned}x&=y-t,\\ y&=x-t,\\ z&=x-z.\end{aligned}$$

F_2.

$$\begin{aligned}&(-745+45\Delta)(y-z)^2+(7887+46\Delta)(z-x)^2+(1054-54\Delta)(x-y)^2\\&+(2208+26\Delta)(x-t)^2+(-209+209\Delta)(y-t)^2+(-1563+237\Delta)(z-t)^2,\end{aligned}$$

$$\frac{745}{45}<\Delta<\frac{1054}{54},$$

$$\begin{aligned}x&=x-z,\\ y&=y-t,\\ z&=x-t.\end{aligned}$$

F₃.

$$(-1054+54\Delta)(y-z)^2+(3262-28\Delta)(z-x)^2+(309-9\Delta)(x-y)^2$$
$$+(-2617+291\Delta)(x-t)^2+(845+155\Delta)(y-t)^2+(8941-8\Delta)(z-t)^2,$$

$$\frac{1054}{54}<\Delta<\frac{309}{9},$$

$$x=x-z,$$
$$y=y-t,$$
$$z=x-t.$$

F₄.

$$(-309+9\Delta)(y-z)^2+(-2308+282\Delta)(z-x)^2+(-745+45\Delta)(x-y)^2$$
$$+(8632+\Delta)(x-t)^2+(1154+146\Delta)(y-t)^2+(3571-37\Delta)(z-t)^2$$

$$\frac{309}{9}<\Delta<\frac{3571}{37},$$

$$x=x-y,$$
$$y=-y+t,$$
$$z=x-y-z+t.$$

F₅.

$$(-3571+37\Delta)(y-z)^2+(3262-28\Delta)(z-x)^2+(12203-36\Delta)(x-y)^2$$
$$+(-4316+82\Delta)(x-t)^2+(4725+109\Delta)(y-t)^2+(1263+245\Delta)(z-t)^2,$$

$$\frac{3571}{37}<\Delta<\frac{3262}{28},$$

$$x=y-t,$$
$$y=x-t,$$
$$z=x-z.$$

F_6.

$$(-3262+28\Delta)(y-z)^2+(4525+217\Delta)(z-x)^2+(15465-64\Delta)(x-y)^2$$
$$+(1463+137\Delta)(x-t)^2+(-1054+54\Delta)(y-t)^2+(-309+9\Delta)(z-t)^2,$$

$$\frac{3262}{28}<\Delta<\frac{15465}{64},$$

$$x=x-z,$$
$$y=y-t,$$
$$z=x-t.$$

F_7.

$$(-15465+64\Delta)(y-z)^2+(16928+73\Delta)(z-x)^2+(12203-36\Delta)(x-y)^2$$
$$+(-15774+73\Delta)(x-t)^2+(14411-10\Delta)(y-t)^2+(19990+153\Delta)(z-t)^2,$$

$$\frac{15465}{64}<\Delta<\frac{12203}{36},$$

$$x=x-z,$$
$$y=y-t,$$
$$z=x-t.$$

F_8.

$$(-12203+36\Delta)(y-z)^2+(-3571+37\Delta)(z-x)^2+(-3262+28\Delta)(x-y)^2$$
$$+(7787+189\Delta)(x-t)^2+(26614-46\Delta)(y-t)^2+(29131+37\Delta)(z-t)^2,$$

$$\frac{12203}{36}<\Delta<\frac{26614}{46},$$

$$x=z-t,$$
$$y=-x+y+z-t,$$
$$z=-x+z.$$

F_9.

$$(-26614+46\Delta)(y-z)^2+(55745-\ \ 9\Delta)(z-x)^2+(23352-\ 18\Delta)(x-y)^2$$
$$+(-30185+83\Delta)(x-t)^2+(14411-10\Delta)(y-t)^2+(34401+143\Delta)(z-t)^2,$$

$$\frac{26614}{46}<\Delta<\frac{23352}{18},$$

$$\begin{aligned} x &= x-z,\\ y &= y-t,\\ z &= x-t. \end{aligned}$$

F_{10}.

$$(-23352+18\Delta)(y-z)^2+(-\ 6833+65\Delta)(z-x)^2+(-\ 3262+28\Delta)(x-y)^2$$
$$+(\ \ 11049+161\Delta)(x-t)^2+(\ \ 37763-28\Delta)(y-t)^2+(\ \ 79097-27\Delta)(z-t)^2,$$

$$\frac{23352}{18}<\Delta<\frac{37763}{28},$$

$$\begin{aligned} x &= z-t,\\ y &= -x+y+z-t,\\ z &= -x+z. \end{aligned}$$

F_{11} (1).

$$(-3788848+2254\Delta)(y-z)^2+(11724785-5003\Delta)(z-x)^2+(3461553-\ \ 89\Delta)(x-y)^2$$
$$+(-4474384+7530\Delta)(x-t)^2+(\ 1445891-\ \ 273\Delta)(y-t)^2+(4897444+16159\Delta)(z-t)^2,$$

$$\frac{37763}{28}\quad \text{ou}\quad \frac{3788848}{2254}<\Delta<\frac{11724785}{5003},$$

$$\begin{aligned} x &= y-t,\\ y &= x-t,\\ z &= x-z. \end{aligned}$$

---

(1) On a employé à partir d'ici

$$\alpha = 2,0946,\quad \alpha^2 = 4,3873.$$

F_{12}.

$$(-11724785+5003\Delta)(y-z)^2+(16622229+11156\Delta)(z-x)^2+(15186338-5092\Delta)(x-y)^2$$
$$+(-10278894+4730\Delta)(x-t)^2+(\ 7250401+\ 2527\Delta)(y-t)^2+(\ 7935937-2749\Delta)(z-t)^2,$$

$$\frac{11724785}{5003}<\Delta<\frac{7935937}{2749},$$

$$x=x-y,$$
$$y=-y+t,$$
$$z=x-y-z+t.$$

F_{13}.

$$(-7935937+2749\Delta)(y-z)^2+(-\ 3788848+2254\Delta)(z-x)^2+(-\ 2342957+1981\Delta)(x-y)^2$$
$$-(\ 7250401-2343\Delta)(x-t)^2+(\ 15186338-\ 222\Delta)(y-t)^2+(\ 24558166+8407\Delta)(z-t)^2,$$

$$\frac{7935937}{2749}<\Delta<\frac{7250401}{2343},$$

$$x=x-y-z+t,$$
$$y=-z+t,$$
$$z=x-z.$$

F_{14}.

$$(-\ 7250401+2343\Delta)(y-z)^2+(31808567+6064\Delta)(z-x)^2+(\ 4907444-\ 362\Delta)(x-y)^2$$
$$+(-15186338+5092\Delta)(x-t)^2+(\ 3461553-\ 89\Delta)(y-t)^2+(22436739-2565\Delta)(z-t)^2,$$

$$\frac{7250401}{2343}<\Delta<\frac{22436731}{2565},$$

$$x=x-y,$$
$$y=-y+t,$$
$$z=x-y-z+t.$$

F_{15}.

$$(-22436739+2565\Delta)(y-z)^2+(15186338-\ 222\Delta)(z-x)^2+(\ 7250401+2527\Delta)(x-y)^2$$
$$+(-17529295+2203\Delta)(x-t)^2+(25898292-2654\Delta)(y-t)^2+(54245306+3499\Delta)(z-t)^2,$$

$$\frac{22436731}{2565}<\Delta<\frac{25898292}{2654}.$$

58. Parmi les formes qui précèdent F_{15}, il y en a trois, à savoir F_5, F_7, F_{12}, qui présentent dans leurs coefficients les mêmes combinaisons de signes que la forme F_0; mais on voit sans calcul et à la simple inspection de ces formes que leurs coefficients ne sont pas proportionnels à ceux de F_0.

Il n'en est pas de même de la forme F_{15}, qui présente dans ses coefficients les mêmes combinaisons de signes que la forme F_0.

Si l'on range en effet sur deux colonnes les coefficients de F_{15} et ceux de F_0, en les disposant de manière que les coefficients de Δ aillent en décroissant, on formera le Tableau suivant :

F_0.	F_{15}.
$4834+373\Delta$,	$54245306+3499\Delta$,
$2308-282\Delta$,	$25898292-2654\Delta$,
$-1999+273\Delta$,	$-22436739+2565\Delta$,
$645+263\Delta$,	$7250401+2527\Delta$,
$-1563+237\Delta$,	$-17529295+2203\Delta$,
$1354-\ 28\Delta$,	$15186338-\ 222\Delta$.

Si l'on prend les rapports des termes constants dans les coefficients correspondants, on trouve

$$\frac{54245306}{4834},\quad \frac{25898292}{2308},\quad \frac{22436739}{1999},\quad \frac{7250401}{645},\quad \frac{17529295}{1563},\quad \frac{15186338}{1354},$$

dont les valeurs approchées à une unité près sont

$$11221,\qquad 11225,\qquad 11223,\qquad 11240,\qquad 11215,\qquad 11215,$$

et ces valeurs sont sensiblement égales.

De même, les rapports des coefficients de Δ sont

$$\frac{3499}{373}, \quad \frac{2654}{282}, \quad \frac{2565}{273}, \quad \frac{2527}{263}, \quad \frac{2203}{237}, \quad \frac{222}{28},$$

dont les valeurs approchées à $\frac{1}{10}$ près sont

$$9,3, \quad 9,4, \quad 9,3, \quad 9,6, \quad 9,3, \quad 7,9.$$

Ces valeurs sont sensiblement égales, à l'exception de la dernière, qui provient d'un rapport dont le dénominateur est trop petit pour donner un résultat bien exact.

Il semble donc que la période commencée par F_0 se termine par F_{14} et que F_{15} est le premier terme d'une nouvelle période.

Pour voir s'il en est bien ainsi, nous ferons d'abord dans F_{15} la substitution

$$x = y, \quad y = t, \quad z = x, \quad t = z,$$

qui a pour effet de mettre les termes de F_{15} dans le même ordre que les termes correspondants de F_0.

Nous remarquerons ensuite que les substitutions successives qui permettent de passer de la forme Φ à la forme F_{15} ainsi transformée peuvent se ramener à la substitution unique

$$\begin{aligned} x &= -15x + 5y + 17z, \\ y &= -13x + 4y + 15z, \\ z &= -\ \ 6x + 2y + \ \ 7z, \end{aligned}$$

et, en se reportant à la substitution

$$\begin{aligned} x &= z, \\ y &= -x + y + z, \\ z &= -x + z, \end{aligned}$$

par laquelle on passe de Φ à F_0, on voit que les formes F_0 et F_{15} peuvent s'écrire ainsi :

$$\begin{aligned} F_0 = {} & [-(\alpha + \alpha^2)x + \alpha y + (1 + \alpha + \alpha^2)z]^2 \\ & + 2\Delta[-(\beta + \beta^2)x + \beta y + (1 + \beta + \beta^2)z][-(\gamma + \gamma^2)x + \gamma y + (1 + \gamma + \gamma^2)z], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_{15} = {} & -(15 + 13\alpha + 6\alpha^2)x + (5 + 4\alpha + 2\alpha^2)y + (17 + 15\alpha + 7\alpha^2)z]^2 \\ & + 2\Delta[-(15 + 13\beta + 6\beta^2)x + (5 + 4\beta + 2\beta^2)y + (17 + 15\beta + 7\beta^2)z] \\ & \times[-(15 + 13\gamma + 6\gamma^2)x + (5 + 4\gamma + 2\gamma^2)y + (17 + 15\gamma + 7\gamma^2)]. \end{aligned}$$

D'ailleurs, F_{15} peut aussi s'écrire ainsi,

$$\begin{aligned}F_{15} = (\alpha^2+2\alpha+2)^2\big\{&[-(\alpha+\alpha^2)x+\alpha y+(1+\alpha+\alpha^2)z]^2\\ &+2\Delta(\alpha-2)^3[-(\beta+\beta^2)x+\beta y+(1+\beta+\beta^2)z]\\ &\times[-(\gamma+\gamma^2)x+\gamma y+(1+\gamma+\gamma^2)z]\big\},\end{aligned}$$

c'est-à-dire que l'on passe de F_0 à F_{15} en multipliant F_0 par $(\alpha^2+2\alpha+2)^2$ et en changeant Δ en

$$\Delta(\alpha-2)^3,$$

et, si Δ_1 et Δ_2 sont les limites de Δ pour lesquelles la forme F_0 est réduite, on en conclut que F_{15} est réduit lorsque Δ reste compris entre

$$\frac{\Delta_1}{(\alpha-2)^3} \quad \text{et} \quad \frac{\Delta_2}{(\alpha-2)^3},$$

que l'on peut écrire

$$\Delta_1(\alpha^2+2\alpha+2)^3 \quad \text{et} \quad \Delta_2(\alpha^2+2\alpha+2)^3.$$

59. Si l'on applique ensuite à la forme F_{15} la série des substitutions qui ont permis de déduire F_{15} de F_0, on déduira une nouvelle série de formes réduites d'indice supérieur à 15, et ces formes correspondront à des valeurs de Δ que l'on déduit des valeurs de Δ relatives aux formes comprises entre F_0 et F_{15}, en les multipliant par $(\alpha^2+2\alpha+2)^3$.

On obtiendrait la série des formes qui précèdent F_0 en faisant les mêmes opérations dans l'ordre inverse, c'est-à-dire en remplaçant les substitutions par les substitutions inverses et commençant par appliquer à F_0 la dernière des substitutions, puis la précédente, et remontant ainsi jusqu'à la première; et l'on déterminerait les valeurs de Δ au moyen des valeurs relatives aux formes comprises entre F_0 et F_{15} divisées par $(\alpha^2+2\alpha+2)^3$, c'est-à-dire multipliées par $(\alpha-2)^3$.

2° Équations du troisième degré dont les trois racines sont réelles.

60. Soient α, β, γ les trois racines supposées réelles d'une équation du troisième degré, dont nous supposons, pour simplifier l'exposition, le premier coefficient égal à l'unité.

Nous considérerons la forme

$$f = (x + \alpha y + \alpha^2 z)^2 + A(x + \beta y + \beta^2 z)^2 + B(x + \gamma y + \gamma^2 z)^2,$$

où A et B sont deux constantes arbitraires positives.

Le déterminant D de cette forme est

$$D = AB(\beta - \gamma)^2(\gamma - \alpha)^2(\alpha - \beta)^2,$$

qui peut s'écrire

$$D = ABH^2,$$

en posant

$$H^2 = (\beta - \gamma)^2(\gamma - \alpha)^2(\alpha - \beta)^2.$$

Nous nous proposons de donner à A et B toutes les valeurs possibles de o à ∞ et de chercher, pour chaque système de valeurs de A et B, la réduite équivalente à f.

Je remarquerai d'abord que le nombre de ces formes réduites équivalentes à f est infini.

Supposons en effet que, ayant remplacé dans f les variables x, y, z par $x - t$, $y - t$, $z - t$ le calcul de réduction de f pour des valeurs données de A et B ait conduit à une forme

$$\varphi = -g(y - z)^2 - h(z - x)^2 - k(x - y)^2 - l(x - t)^2 - m(y - t)^2 - n(z - t)^2,$$

dans laquelle les coefficients g, h, k, l, m, n sont évidemment de la forme

$$\lambda + \mu A + \nu B.$$

Nous avons remarqué (n° 17) que la plus petite valeur que peut prendre une forme réduite φ s'obtenait par la somme de trois ou de quatre des coefficients de φ, de sorte que cette valeur minima peut s'écrire

$$L + MA + NB,$$

et, si φ reste réduit pour diverses valeurs de A et B, cette valeur minima ne comportera que sept systèmes de valeurs différents pour L, M, N.

De plus, en se reportant à l'expression de f, il est évident que les nombres L, M, N sont toujours positifs et ne peuvent être nuls ni ensemble ni séparément.

Cela posé, le produit des trois plus petites valeurs de f étant inférieur au double du déterminant, le cube de la valeur minima sera *a fortiori* inférieur au double du déterminant. On aura donc

$$(\mathrm{L}+\mathrm{MA}+\mathrm{NB})^3<\mathrm{ABH}^2,$$

et cette inégalité ne saurait avoir lieu ni pour de très grandes valeurs ni pour de très petites valeurs de A et B.

Le nombre des formes réduites est donc infini.

Mais nous allons démontrer que les substitutions au moyen desquelles s'obtiennent les formes réduites se reproduisent périodiquement.

61. On a vu, à la fin du n° **17**, qu'en faisant dans f une substitution convenable, le produit des trois coefficients de x^2, y^2, z^2 était inférieur au double du déterminant de la forme f.

Supposons que pour des valeurs données de A et B cette substitution soit

$$\begin{aligned} x &= m\,\mathrm{X}+n\,\mathrm{Y}+p\,\mathrm{Z},\\ y &= m'\mathrm{X}+n'\mathrm{Y}+p'\mathrm{Z},\\ z &= m''\mathrm{X}+n''\mathrm{Y}+p''\mathrm{Z}. \end{aligned}$$

Si nous posons

$$\begin{array}{lll} \mathrm{M}(\alpha)=m+m'\alpha+m''\alpha^2, & \mathrm{M}(\beta)=m+m'\beta+m''\beta^2, & \mathrm{M}(\gamma)=m+m'\gamma+m''\gamma^2,\\ \mathrm{N}(\alpha)=n+n'\alpha+n''\alpha^2, & \mathrm{N}(\beta)=n+n'\beta+n''\beta^2, & \mathrm{N}(\gamma)=n+n'\gamma+n''\gamma^2,\\ \mathrm{P}(\alpha)=p+p'\alpha+p''\alpha^2, & \mathrm{P}(\beta)=p+p'\beta+p''\beta^2, & \mathrm{P}(\gamma)=p+p'\gamma+p''\gamma^2, \end{array}$$

la forme f deviendra, par la substitution précédente,

$$\begin{aligned} \mathrm{F}=&[\mathrm{XM}(\alpha)+\mathrm{YN}(\alpha)+\mathrm{ZP}(\alpha)]^2\\ &+\mathrm{A}[\mathrm{XM}(\beta)+\mathrm{YN}(\beta)+\mathrm{ZP}(\beta)]^2+\mathrm{B}[\mathrm{XM}(\gamma)+\mathrm{YN}(\gamma)+\mathrm{ZP}(\gamma)]^2. \end{aligned}$$

Faisons maintenant

$$\begin{aligned} \mathfrak{M} &= [\mathrm{M}(\alpha)]^2+\mathrm{A}[\mathrm{M}(\beta)]^2+\mathrm{B}[\mathrm{M}(\gamma)]^2,\\ \mathfrak{N} &= [\mathrm{N}(\alpha)]^2+\mathrm{A}[\mathrm{N}(\beta)]^2+\mathrm{B}[\mathrm{N}(\gamma)]^2,\\ \mathfrak{P} &= [\mathrm{P}(\alpha)]^2+\mathrm{A}[\mathrm{P}(\beta)]^2+\mathrm{B}[\mathrm{P}(\gamma)]^2. \end{aligned}$$

On peut toujours, en permutant au besoin les lettres X, Y, Z, supposer

$$\mathfrak{M}<\mathfrak{N}<\mathfrak{P}.$$

Comme le produit $\mathfrak{M}\mathfrak{N}\mathfrak{P}$ reste toujours inférieur au double du déterminant D, on aura

$$\mathfrak{M}\mathfrak{N}\mathfrak{P} < 2\,\mathrm{ABH}^2,$$

et par conséquent

$$\mathfrak{M} < \sqrt[3]{2\,\mathrm{ABH}^2},$$
$$\mathfrak{M}^2\mathfrak{N} < 2\,\mathrm{ABH}^2,$$
$$\mathfrak{M}^2\,\mathfrak{P} < 2\,\mathrm{ABH}^2.$$

62. De là résultent les propriétés suivantes.

D'abord le produit

$$\mathrm{AB}\,[\mathrm{M}(\alpha)\,\mathrm{M}(\beta)\,\mathrm{M}(\gamma)]^2,$$

qui est toujours inférieur à son maximum $\left(\dfrac{\mathfrak{M}}{3}\right)^3$, fournit la relation suivante,

$$\mathrm{AB}\,[\mathrm{M}(\alpha)\,\mathrm{M}(\beta)\,\mathrm{M}(\gamma)]^2 < \frac{2\,\mathrm{ABH}^2}{27},$$

c'est-à-dire

$$\mathrm{M}(\alpha)\,\mathrm{M}(\beta)\,\mathrm{M}(\gamma) < \frac{\mathrm{H}}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Ainsi le nombre entier

$$\Omega = \mathrm{M}(\alpha)\,\mathrm{M}(\beta)\,\mathrm{M}(\gamma)$$

est limité, quels que soient d'ailleurs A et B.

Considérons maintenant les deux expressions

$$\Phi(\alpha) = \mathrm{N}(\alpha)\,\mathrm{M}(\beta)\,\mathrm{M}(\gamma), \quad \Psi(\alpha) = \mathrm{P}(\alpha)\,\mathrm{M}(\beta)\,\mathrm{M}(\gamma),$$

qui sont deux polynômes entiers par rapport à α, de la forme suivante :

$$\Phi(\alpha) = \varphi + \alpha\varphi' + \alpha^2\varphi'', \quad \Psi(\alpha) = \psi + \alpha\psi' + \alpha^2\psi''.$$

Je vais démontrer que les coefficients entiers $\varphi, \varphi', \varphi'', \psi, \psi', \psi''$ de ces deux polynômes sont limités.

En effet, par la définition de $\mathfrak{N}$, on a

$$[\mathrm{N}(\alpha)]^2 < \mathfrak{N}.$$

On a en outre, par la définition de $\mathfrak{M}$,

$$\mathrm{A}\,[\mathrm{M}(\beta)]^2 + \mathrm{B}\,[\mathrm{M}(\gamma)]^2 < \mathfrak{M},$$

et par conséquent

$$AB[M(\beta)M(\gamma)]^2 < \tfrac{1}{4}\mathfrak{M}^2.$$

On aura donc

$$AB[N(\alpha)M(\beta)M(\gamma)]^2 < \tfrac{1}{4}\mathfrak{M}^2\mathfrak{N}.$$

D'ailleurs, on a vu que

$$\mathfrak{M}^2\mathfrak{N} < 2ABH^2,$$

d'où l'on conclura

$$N(\alpha)M(\beta)M(\gamma) < \frac{H}{\sqrt{2}}.$$

On aurait évidemment de même

$$P(\alpha)M(\beta)M(\gamma) < \frac{H}{\sqrt{2}}.$$

Ainsi, quels que soient A et B, les polynômes en α

$$\varphi + \alpha\varphi' + \alpha^2\varphi'',$$
$$\psi + \alpha\psi' + \alpha^2\psi''$$

sont toujours, en valeur absolue, inférieurs à $\frac{H}{\sqrt{2}}$.

63. Considérons maintenant l'expression

$$\Phi(\beta) = N(\beta)M(\gamma)M(\alpha).$$

Des relations

$$A[N(\beta)]^2 < \mathfrak{N},$$
$$B[M(\alpha)M(\gamma)]^2 < \tfrac{1}{4}\mathfrak{M}^2$$

on conclut

$$AB[N(\beta)M(\gamma)M(\alpha)]^2 < \tfrac{1}{4}\mathfrak{M}^2\mathfrak{N},$$

et la limite trouvée plus haut pour $\mathfrak{M}^2\mathfrak{N}$ fournit la relation

$$N(\beta)M(\gamma)M(\alpha) < \frac{H}{\sqrt{2}}.$$

On trouverait évidemment de même

$$\Phi(\gamma) = N(\gamma)M(\alpha)M(\beta) < \frac{H}{\sqrt{2}}.$$

Ainsi les trois polynômes $\Phi(\alpha)$, $\Phi(\beta)$, $\Phi(\gamma)$ sont inférieurs à $\frac{H}{\sqrt{2}}$ en valeur absolue; on peut donc, en désignant par ε, ε_1, ε_2 des quantités comprises entre $+\frac{1}{\sqrt{2}}$ et $-\frac{1}{\sqrt{2}}$, écrire les trois relations suivantes :

$$\begin{aligned}
\varphi + \alpha\varphi' + \alpha^2\varphi'' &= \varepsilon\, H,\\
\varphi + \beta\varphi' + \beta^2\varphi'' &= \varepsilon_1 H,\\
\varphi + \gamma\varphi' + \gamma^2\varphi'' &= \varepsilon_2 H.
\end{aligned}$$

On en déduit, pour les nombres entiers φ, φ', φ'', des expressions sous forme de fractions dont les numérateurs sont évidemment finis et dont le dénominateur commun est le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \beta & \beta^2 \\ 1 & \gamma & \gamma^2 \end{vmatrix},$$

qui est égal au produit des différences des racines et qui est, par conséquent, différent de zéro.

Les nombres φ, φ', φ'' sont donc limités, et il en est évidemment de même des nombres entiers ψ, ψ', ψ''.

64. Cela posé, faisons

$$\mathfrak{F} = \frac{F}{M^2(\alpha)};$$

on aura

$$\begin{aligned}
\mathfrak{F} = {} & \left[X + Y\frac{N(\alpha)}{M(\alpha)} + Z\frac{P(\alpha)}{M(\alpha)}\right]^2 \\
& + A\frac{M^2(\beta)}{M^2(\alpha)}\left[X + Y\frac{N(\beta)}{M(\beta)} + Z\frac{P(\beta)}{M(\beta)}\right]^2 + B\frac{M^2(\gamma)}{M^2(\alpha)}\left[X + Y\frac{N(\gamma)}{M(\gamma)} + Z\frac{P(\gamma)}{M(\gamma)}\right]^2,
\end{aligned}$$

qu'on peut écrire ainsi :

$$\begin{aligned}
\mathfrak{F} = {} & \left[X + Y\frac{\Phi(\alpha)}{\Omega} + Z\frac{\Psi(\alpha)}{\Omega}\right]^2 \\
& + A\frac{M^2(\beta)}{M^2(\alpha)}\left[X + Y\frac{\Phi(\beta)}{\Omega} + Z\frac{\Psi(\beta)}{\Omega}\right]^2 + B\frac{M^2(\gamma)}{M^2(\alpha)}\left[X + Y\frac{\Phi(\gamma)}{\Omega} + Z\frac{\Psi(\gamma)}{\Omega}\right]^2.
\end{aligned}$$

Si l'on donne à A et B toutes les valeurs possibles de o à ∞, on ne peut trouver qu'un nombre fini de combinaisons pour les nombres entiers Ω, φ, φ', φ'', ψ, ψ', ψ'', de sorte que les formes $\mathcal{F}$ relatives à toutes les valeurs positives de A et B ne peuvent présenter, quelles que soient ces valeurs, qu'un nombre fini de polynômes Φ et Ψ, et par suite qu'un nombre fini de combinaisons de ces polynômes et du nombre Ω.

Il existe donc certainement deux systèmes de valeurs pour A et B dans lesquels les deux valeurs de A et les deux valeurs de B ont une différence aussi grande que l'on voudra, et tels que les formes $\mathcal{F}$ correspondantes contiennent le même nombre entier Ω et les mêmes polynômes Φ et Ψ, mais non pas le même polynôme M, car on doit avoir

$$\mathfrak{M}^3 < 2ABH^2,$$

c'est-à-dire

$$[M^2(\alpha) + A\,M^2(\beta) + B\,M^2(\gamma)]^3 < 2ABH^2,$$

et cette inégalité ne saurait avoir lieu pour deux systèmes de valeurs de A et B dans lesquels les deux valeurs de A et les deux valeurs de B auraient une différence suffisamment grande.

Donc il y aura deux systèmes de valeurs de A et B auxquels correspondront deux formes $\mathcal{F}_i$ et $\mathcal{F}_j$ contenant le même nombre Ω et les mêmes polynômes Φ et Ψ, mais contenant des polynômes M différents et des systèmes différents de valeurs de A et B; nous écrirons ces formes ainsi, en affectant d'indices les quantités qui varient d'une forme à l'autre :

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_i = {} & \left[X + Y\frac{\Phi(\alpha)}{\Omega} + Z\frac{\Psi(\alpha)}{\Omega}\right]^2 \\ & + A_i\frac{M_i^2(\beta)}{M_i^2(\alpha)}\left[X + Y\frac{\Phi(\beta)}{\Omega} + Z\frac{\Psi(\beta)}{\Omega}\right]^2 + B_i\frac{M_i^2(\gamma)}{M_i^2(\alpha)}\left[X + Y\frac{\Phi(\gamma)}{\Omega} + Z\frac{\Psi(\gamma)}{\Omega}\right]^2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_j = {} & \left[X + Y\frac{\Phi(\alpha)}{\Omega} + Z\frac{\Psi(\alpha)}{\Omega}\right]^2 \\ & + A_j\frac{M_j^2(\beta)}{M_j^2(\alpha)}\left[X + Y\frac{\Phi(\beta)}{\Omega} + Z\frac{\Psi(\beta)}{\Omega}\right]^2 + B_j\frac{M_j^2(\gamma)}{M_j^2(\alpha)}\left[X + Y\frac{\Phi(\gamma)}{\Omega} + Z\frac{\Psi(\gamma)}{\Omega}\right]^2.\end{aligned}$$

Introduisons dans $\mathcal{F}_i$ une quatrième variable T, et cherchons la réduite équivalente à $\mathcal{F}_i$ pour des valeurs données R et S de A_i et B_i. On obtiendra ainsi une certaine forme φ_i dont les coefficients g, h, k, l, m, n

sont de la forme

$$\lambda + \mu A_i \frac{M_i^2(\beta)}{M_i^2(\alpha)} + \nu B_i \frac{M_i^2(\gamma)}{M_i^2(\alpha)}.$$

Introduisons de même une quatrième variable T dans F_j, puis faisons dans F_j la substitution qui a transformé $\mathcal{F}_i$ en φ_i; on déduira ainsi de $\mathcal{F}_j$ une forme φ_j dont les coefficients seront de la forme

$$\lambda + \mu A_j \frac{M_j^2(\beta)}{M_j^2(\alpha)} + \nu B_j \frac{M_j^2(\gamma)}{M_j^2(\alpha)},$$

les quantités λ, μ, ν ayant identiquement les mêmes valeurs que dans la forme φ_i.

Donc, si φ_i est réduit lorsque A_i et B_i sont respectivement égaux à R et S, φ_j sera évidemment réduit lorsque A_j et B_j auront les valeurs définies par les équations suivantes :

$$A_j \frac{M_j^2(\beta)}{M_j^2(\alpha)} = R \frac{M_i^2(\beta)}{M_i^2(\alpha)}, \quad B_j \frac{M_j^2(\gamma)}{M_j^2(\alpha)} = S \frac{M_i^2(\gamma)}{M_i^2(\alpha)}.$$

Mais φ_i sera réduit non seulement lorsque A_i et B_i seront égaux à R et S, mais généralement lorsque A_i et B_i resteront compris entre certaines limites qu'on peut définir par des inégalités de la forme

$$\theta(A_i, B_i) > 0,$$

où $\theta(A_i, B_i)$ désigne une fonction de A_i et B_i.

On voit immédiatement que φ_j sera de même réduit lorsque A_j et B_j seront compris entre certaines limites définies par des inégalités correspondantes :

$$\theta\left[A_j \frac{M_j^2(\beta)}{M_j^2(\alpha)} \frac{M_i^2(\alpha)}{M_i^2(\beta)}, B_j \frac{M_j^2(\gamma)}{M_j^2(\alpha)} \frac{M_i^2(\alpha)}{M_i^2(\gamma)}\right] > 0.$$

Mais, les formes φ_i et φ_j n'étant pas équivalentes, nous les remplacerons par les formes $M_i^2(\alpha)\varphi_i$ et $M_j^2(\alpha)\cdot\varphi_j$, qui sont évidemment réduites lorsque φ_i et φ_j le sont, et qui, étant l'une et l'autre équivalentes à f, sont équivalentes entre elles. Changeant alors le sens des lettres φ_i et φ_j, je désignerai les nouvelles formes $M_i^2(\alpha)\varphi_i$ et $M_j^2(\alpha)\varphi_j$ simplement par φ_i et φ_j.

Cela posé, si A_i et B_i varient de façon que φ_i cesse d'être réduit, et qu'on transforme la forme φ_i en une forme réduite équivalente φ_{i+1}, la même substitution transformera φ_j en une forme équivalente φ_{j+1}, réduite pour des valeurs de A_j et B_j liées aux nouvelles valeurs de A_i et B_i par les conditions indiquées plus haut.

Si, continuant à faire varier A_i et B_i, et cherchant chaque fois la forme réduite correspondante ainsi que la forme qu'on déduit de φ_j par la même substitution, si, dis-je, on amène après h opérations, d'une manière continue, A_i à devenir égal à A_j et B_i à B_j, la forme φ_{i+h} sera identique à φ_j; puis, faisant varier convenablement A_i et B_i, la forme φ_{i+h+1} sera identique à φ_{j+1}, et ainsi de suite. Mais en même temps correspondront à φ_{i+h} et φ_{i+h+1}, c'est-à-dire à φ_j, φ_{j+1}, ..., des formes φ_{j+h}, φ_{j+h+1}, ..., se déduisant les unes des autres par les substitutions déjà employées, et qui se reproduiront à l'infini périodiquement.

Et de même, marchant en sens inverse et revenant de φ_j à φ_i, on aura des formes φ_{j-1}, φ_{j-2}, ..., c'est-à-dire φ_{i+h-1}, φ_{i+h-2}, ..., auxquelles correspondront des formes φ_{i-1}, φ_{i-2}, ..., pour lesquelles on verra se reproduire la même période de substitution.

Mais il y a ici une différence avec le cas des équations du troisième degré qui n'ont qu'une racine réelle : c'est qu'en faisant varier A_i et B_i on peut se dispenser de passer par les valeurs primitives de A_j et B_j. Alors on verrait apparaître une nouvelle période de substitutions, comme on le montrera au n° 68.

Remarquons enfin que pour faire le calcul il est inutile de passer par les formes intermédiaires $\mathcal{F}$ et qu'en réduisant indéfiniment la forme f on est assuré de trouver deux formes réduites correspondantes φ_i et φ_j.

65. On pourra procéder plus symétriquement en remarquant qu'une forme ne cesse pas d'être réduite si l'on multiplie tous ses coefficients par un même nombre.

Si donc nous prenons la forme f de la manière suivante,

$$f = A(x+\alpha y+\alpha^2 z)^2 + B(x+\beta y+\beta^2 z)^2 + C(x+\gamma y+\gamma^2 z)^2,$$

nous pourrons, au lieu de la forme $\mathcal{F}$, considérer la forme suivante,

$$\begin{aligned} &AM^2(\alpha)\left[X+\frac{\Phi(\alpha)}{\Omega}Y+\frac{\Psi(\alpha)}{\Omega}Z\right]^2 \\ &\quad + BM^2(\beta)\left[X+\frac{\Phi(\beta)}{\Omega}Y+\frac{\Psi(\beta)}{\Omega}Z\right]^2 + CM^2(\gamma)\left[X+\frac{\Phi(\gamma)}{\Omega}Y+\frac{\Psi(\gamma)}{\Omega}Z\right]^2. \end{aligned}$$

et alors, si A_i, B_i, C_i désignent des valeurs de A, B, C pour lesquelles la forme φ_i est réduite, les valeurs A_j, B_j, C_j correspondant dans φ_j à A_i, B_i, C_i seront fournies par les relations suivantes,

$$A_i M_i^2(\alpha) = A_j M_j^2(\alpha), \quad B_i M_i^2(\beta) = B_j M_j^2(\beta), \quad C_i M_i^2(\gamma) = C_j M_j^2(\gamma),$$

ou, plus simplement, appelant A_0, B_0, C_0 les quantités

$$A_i M_i^2(\alpha), \; B_i M_i^2(\beta), \; C_i M_i^2(\gamma)$$

relatives à la forme initiale, on voit qu'on passera de la forme φ_i à la forme φ_j en changeant A_0, B_0, C_0 en

$$A_j M_j^2(\alpha), \; B_j M_j^2(\beta), \; C_j M_j^2(\gamma),$$

et que, si φ_i est réduit quand on fait A, B, C égaux respectivement à A_0, B_0, C_0, φ_j sera réduit quand A, B, C sont respectivement égaux à

$$\frac{A_0}{M_j^2(\alpha)}, \; \frac{B_0}{M_j^2(\beta)}, \; \frac{C_0}{M_j^2(\gamma)}.$$

66. On peut rendre cette théorie plus claire par des considérations géométriques.

Je prendrai d'abord l'expression f sous sa première forme,

$$f = (x + \alpha y + \alpha^2 z)^2 + A(x + \beta y + \beta^2 z)^2 + B(x + \gamma y + \gamma^2 z)^2,$$

et je supposerai qu'après avoir remplacé x, y, z par $x - t$, $y - t$, $z - t$ on cherche la réduite équivalente à f pour des valeurs données de A et de B.

On aura alors une forme qu'on peut écrire

$$-g(y-z)^2 - h(z-x)^2 - k(x-y)^2 - l(x-t)^2 - m(y-t)^2 - n(z-t)^2,$$

dans laquelle g, h, k, l, m, n sont des fonctions linéaires de A et de B.

Si l'on regarde A et B comme des coordonnées courantes par rapport à deux axes tracés dans un plan, les équations

$$g = 0, \quad h = 0, \quad k = 0, \quad l = 0, \quad m = 0, \quad n = 0$$

représenteront six droites de ce plan, et les inégalités

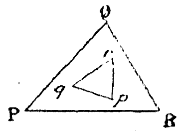
$$g < 0, \quad h < 0, \quad k < 0, \quad l < 0, \quad m < 0, \quad n < 0,$$

qui sont les conditions pour que la forme soit réduite, indiqueront que le point de coordonnées (A, B) doit être d'un certain côté par rapport à chacune de ces droites.

Ces six droites détermineront généralement un hexagone, à l'intérieur duquel devra se trouver le point (A, B).

Il pourra arriver, d'ailleurs, que cet hexagone se réduise à un polygone d'un moindre nombre de côtés. Tel serait, en particulier, le cas où, les six droites formant deux triangles PQR, *pqr* (*fig.* 1) intérieurs

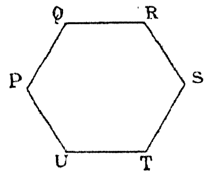
Fig. 1.



l'un à l'autre, le point (A, B) devrait rester à l'intérieur du petit triangle ; alors il serait inutile de faire intervenir le triangle extérieur PQR.

67. Mais restons dans le cas général. Supposons donc que nous ayons une forme $\mathcal{F}_0$ réduite quand (A, B) reste à l'intérieur de l'hexagone

Fig. 2.



PQRSTU (*fig.* 2), dont les côtés PQ, QR, RS, ST, TU, UP ont respectivement pour équations

$$g = 0, \quad h = 0, \quad k = 0, \quad l = 0, \quad m = 0, \quad n = 0.$$

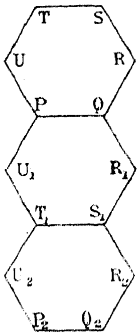
Supposons que le point (A, B) vienne à traverser un côté, par exemple le côté PQ ; alors le coefficient g changera de signe et la forme $\mathcal{F}_0$ cessera d'être réduite.

Si l'on cherche la forme $\mathcal{F}_1$ qui est réduite lorsque le point (A, B) reste très voisin de PQ extérieurement à l'hexagone, on trouvera que cette forme est réduite lorsque le point (A, B) reste à l'intérieur d'un nouvel hexagone dont PQ est l'un des côtés.

Soit $PQR_1S_1T_1U_1$ ce nouvel hexagone.

Si le point (A, B) sort de ce nouvel hexagone en traversant par exemple le côté S_1T_1 (*fig.* 3), la forme $\mathcal{F}_1$ cessera d'être réduite et l'on traversera

Fig. 3.



une forme $\mathcal{F}_2$ qui est réduite lorsque le point (A, B) est très voisin de S_1T_1, mais en dehors de l'hexagone $PQR_1S_1T_1U_1$.

Cette forme $\mathcal{F}_2$ sera réduite à l'intérieur d'un nouvel hexagone $T_1S_1R_2Q_2P_2U_2$.

On aura ensuite un quatrième hexagone, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on arrive à une forme $\mathcal{F}_i$ que l'on déduise de $\mathcal{F}_0$ par le simple changement de A et B.

Alors l'hexagone relatif à la forme $\mathcal{F}_i$ se déduira immédiatement de l'hexagone relatif à la forme $\mathcal{F}_0$, et, si l'on applique à $\mathcal{F}_i$ périodiquement et successivement les substitutions qui ont conduit de $\mathcal{F}_0$ à $\mathcal{F}_i$, on obtiendra une suite d'hexagones qui se déduisent périodiquement les uns des autres, et cette série d'hexagones s'étendra indéfiniment dans les deux sens à partir de $\mathcal{F}_0$, si l'on applique aussi à $\mathcal{F}_0$ périodiquement et successivement les substitutions qui ramèneraient de $\mathcal{F}_i$ à $\mathcal{F}_0$.

68. On voit, de plus, qu'on ne formera ainsi qu'une chaîne d'hexagones et non pas un réseau couvrant entièrement le plan. On pourra prendre en dehors de cette chaîne des points (A, B) pour lesquels n'existe aucune forme correspondante réduite dans la série précédente.

Si donc, dans le polygone relatif à $\mathcal{F}_0$, nous partons d'un côté n'appartenant pas à la chaîne précédente, nous traçons une ligne indéfinie qui ne rencontre pas cette chaîne, et, si l'on suppose que le point AB se meuve sur cette ligne, on obtiendra une nouvelle suite de formes réduites déduites les unes des autres au moyen de substitutions qui finiront par se reproduire périodiquement.

On aura donc une nouvelle chaîne d'hexagones se déduisant les uns des autres comme les précédents.

On voit que le calcul de réduction engendre ici une double périodicité. De chaque hexagone partiront ainsi deux chaînes indéfinies qui se croisent sur cet hexagone. Cette double série de chaînes couvrira ainsi le plan d'un réseau; cependant ce réseau peut présenter des lacunes, qu'il faudra remplir par des formes convenables. Le deuxième et le troisième des exemples qui suivent feront bien comprendre cette singularité.

Pour construire tous les polygones qui couvrent le plan et servent de limite aux valeurs de A et de B pour lesquelles une forme est réduite, il suffira, comme on le verra clairement par les exemples qui suivent, d'avoir construit autour du polygone relatif à la forme initiale $\mathcal{F}_0$ un certain nombre de polygones formant les éléments du réseau qui couvre le plan. Tous les autres polygones se déduiront des précédents en changeant les valeurs A et B des coordonnées des sommets, soit pour une première série en

$$Ah^2 \text{ et } Bk^2,$$

h et k désignant les multiplicateurs de A et B, soit pour une seconde série en

$$Ah^4 \text{ et } Bk^4.$$

Les multiplicateurs h et k sont supposés provenir de la première chaîne; si h' et k' désignent ceux de la seconde chaîne, le changement général consistera à remplacer A et B par

$$Ah^{2p}h'^{2p'} \text{ et } Bk^{2p}k'^{2p'}.$$

Les coordonnées des sommets vont ainsi en variant en progression géométrique; elles croissent ou décroissent, par conséquent, très rapidement.

Dans la pratique, la construction des polygones limitatifs devient ainsi rapidement impossible.

69. On obtiendrait un résultat un peu meilleur en considérant des formes avec trois arbitraires homogènes,

$$A(x+\alpha y+\alpha^2 z)^2+B(x+\beta y+\beta^2 z)^2+C(x+\gamma y+\gamma^2 z)^2,$$

et prenant pour A, B, C les coordonnées trilatères d'un point; mais les divers polygones limitatifs deviennent encore rapidement trop petits ou trop grands, car les coordonnées des sommets croissent encore en progression géométrique.

70. On peut cependant échapper à cette difficulté de la manière suivante.

Soient i l'indice auquel se termine la première période de substitutions sur l'une des chaînes de polygones et i' l'indice auquel se termine la première période de substitutions sur la deuxième chaîne de polygones.

Supposons que, lorsqu'on passe de F_0 à F_i et de F_0 à $F_{i'}$, les multiplicateurs de A, B, C soient respectivement égaux à

$$\begin{array}{ccc} e^a, & e^b, & e^c, \\ e^{a'}, & e^{b'}, & e^{c'}, \end{array}$$

où e désigne la base des logarithmes népériens ou plutôt la base d'un système de logarithmes quelconques.

Nous poserons

$$A=e^{au+a'v},\quad B=e^{bu+b'v},\quad C=e^{cu+c'v},$$

et nous regarderons u et v comme des coordonnées courantes.

On voit alors que multiplier A, B, C respectivement par

$$e^a,\ e^b,\ e^c$$

revient à changer u en $u+1$, et de même le changement de v en $v+1$ revient à la multiplication de A, B, C respectivement par

Si l'on considère u et v comme des coordonnées courantes, aux droites qui limitaient précédemment les valeurs de A, B, C correspondront maintenant des courbes, et l'on voit que, si l'on partage le plan des coordonnées u, v en carrés dont les côtés soient égaux à l'unité, et si l'on construit les courbes limitatives qui se trouvent à l'intérieur de l'un de ces carrés, ces courbes dessineront à l'intérieur de ce carré une certaine figure qui se reproduira identiquement dans tous les carrés suivants.

L'inconvénient de cette représentation est d'exiger la construction de courbes assez compliquées; mais, si l'on n'emploie la construction géométrique que pour étudier la succession des formes, on pourra procéder ainsi : on cherchera exactement les sommets des polygones curvilignes que donne la méthode dont nous nous occupons, et il suffira de tracer grossièrement les côtés curvilignes de ces polygones; on pourra même remplacer ces côtés par des lignes droites.

71. Enfin, on peut se dispenser de toute construction géométrique par le procédé suivant.

Nous appellerons *formes contiguës par un côté* des formes dont les polygones limitatifs ont un côté commun; des *formes contiguës par un sommet* seront deux formes dont les polygones limitatifs ont un sommet commun.

Nous représenterons une forme par un point, et nous joindrons ce point par des lignes droites aux points correspondants à des formes contiguës par un côté à la forme que représente ce point.

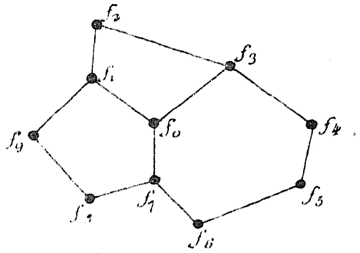
Les droites ainsi tracées formeront des polygones dans le plan où elles seront menées; les sommets d'un même polygone correspondront à des formes contiguës par un sommet.

Ainsi, dans la représentation suivante (*fig.* 4), la forme f_0 est contiguë par un côté aux formes f_1, f_3, f_7; comme elle n'est contiguë par un côté à aucune autre forme, on voit que, dans la représentation géométrique, elle serait limitée par un triangle.

Cette forme f_0 est contiguë par un sommet aux formes f_1, f_2, f_3, par un autre sommet aux formes f_3, f_4, f_5, f_6, f_7 et par son troisième sommet aux formes f_7, f_8, f_9, f_1.

Ainsi, autour d'un des sommets sont les quatre formes f_0, f_1, f_2, f_3, autour du deuxième sommet, les six formes $f_0, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7$, et enfin autour du troisième sommet les cinq formes f_0, f_7, f_9, f_1.

Fig. 4.



On voit aussi que les formes f_1 et f_2 sont contiguës par un côté, $_1$ et f_3 par un sommet, etc.

72. Avant de passer aux exemples, nous remarquerons que, au lieu de considérer la forme

$$(x + \alpha y + \alpha^2 z)^2 + \mathrm{A}(x + \beta y + \beta^2 z)^2 + \mathrm{B}(x + \gamma y + \gamma^2 z)^2,$$

on peut prendre une forme

$$\begin{aligned}&[x\varphi(\alpha, \beta, \gamma) + y\psi(\alpha, \beta, \gamma) + z\chi(\alpha, \beta, \gamma)]^2\\ &\quad + \mathrm{A}[x\varphi(\beta, \gamma, \alpha) + y\psi(\beta, \gamma, \alpha) + z\chi(\beta, \gamma, \alpha)]^2\\ &\quad + \mathrm{B}[x\varphi(\gamma, \alpha, \beta) + y\psi(\gamma, \alpha, \beta) + z\psi(\gamma, \alpha, \beta)]^2,\end{aligned}$$

et l'on arriverait sur cette dernière forme aux mêmes conclusions que sur la première; le seul changement à introduire consisterait à prendre pour déterminant D de la forme considérée l'expression suivante :

$$\mathrm{D} = \mathrm{AB}\begin{vmatrix} \varphi(\alpha, \beta, \gamma) & \psi(\alpha, \beta, \gamma) & \chi(\alpha, \beta, \gamma) \\ \varphi(\beta, \gamma, \alpha) & \psi(\beta, \gamma, \alpha) & \chi(\beta, \gamma, \alpha) \\ \varphi(\gamma, \alpha, \beta) & \psi(\gamma, \alpha, \beta) & \chi(\gamma, \alpha, \beta) \end{vmatrix}^2.$$

73. J'étudierai d'abord les racines de l'équation

$$x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0,$$

qu'on déduit de l'équation

$$z^7 - 1 = 0$$

en supprimant la racine $z = 1$ et posant $x = z + \frac{1}{z}$.

Soient α, β, γ les trois racines de cette équation, lesquelles sont approximativement

$$\begin{aligned} \alpha &= 1,247, \\ \beta &= -0,445, \\ \gamma &= -1,802, \end{aligned}$$

et entre lesquelles existent les relations suivantes

$$\begin{aligned} \alpha + \beta + \gamma &= -1, \\ \beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta &= -2, \\ \alpha\beta\gamma &= 1. \end{aligned}$$

$$\beta\gamma = \alpha + \beta, \quad \gamma\alpha = \beta + \gamma, \quad \alpha\beta = \gamma + \alpha,$$
$$\alpha^2 = 2 + \beta, \quad \beta^2 = 2 + \gamma, \quad \gamma^2 = 2 + \alpha.$$

74. Je considère la forme

$$\alpha x + \beta y + \gamma z)^2 + A(\beta x + \gamma y + \alpha z)^2 + B(\gamma x + \alpha y + \beta z)^2,$$

dans laquelle A et B sont des arbitraires.

Si je remplace x, y, z respectivement par $x - t, y - t, z - t$, cette forme peut s'écrire ainsi :

$$\begin{aligned} &-[\alpha + \beta + A(\beta + \gamma) + B(\gamma + \alpha)](y - z)^2 - [\beta + \gamma + A(\gamma + \alpha) + B(\alpha + \beta)](z - x)^2 \\ &\quad - [\gamma + \alpha + A(\alpha + \beta) + B(\beta + \gamma)](x - y)^2 - [\alpha + A\beta + B\gamma](x - t)^2 \\ &\quad - [\beta + A\gamma + B\alpha](y - t)^2 - (\gamma + A\alpha + B\beta)(z - t)^2. \end{aligned}$$

Je désigne cette forme par F_0.

Cette forme est réduite si les six inégalités suivantes sont vérifiées :

$$\begin{aligned} \alpha + \beta + A(\beta + \gamma) + B(\gamma + \alpha) &< 0, \\ \beta + \gamma + A(\gamma + \alpha) + B(\alpha + \beta) &< 0, \\ \gamma + \alpha + A(\alpha + \beta) + B(\beta + \gamma) &< 0, \end{aligned}$$

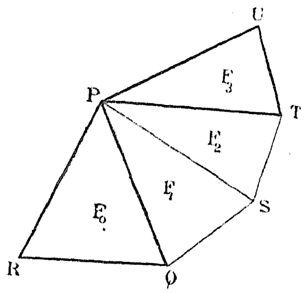
$$\begin{aligned} \alpha + A\beta + B\gamma &< 0, \\ \beta + A\gamma + B\alpha &< 0, \\ \gamma + A\alpha + B\beta &< 0. \end{aligned}$$

Si l'on égale à zéro les premiers membres de ces six inégalités, et si l'on regarde A et B comme des coordonnées courantes, on aura ainsi les équations de six droites.

Ces six droites forment deux triangles dont l'un, à savoir celui formé par les trois dernières, est inscrit dans l'autre, formé par les trois premières.

Et l'on trouve que la forme F_0 (*fig.* 5) est réduite si le point de coor-

Fig. 5.



données (A, B) est à l'intérieur du triangle PQR formé par les trois dernières droites, c'est-à-dire par les droites dont les équations sont

$$\alpha + A\beta + B\gamma = 0 \quad (QR),$$
$$\beta + A\gamma + B\alpha = 0 \quad (RP),$$
$$\gamma + A\alpha + B\beta = 0 \quad (PQ).$$

Je dirai, pour simplifier le langage, que la forme F_0 est réduite à l'intérieur du triangle PQR.

75. Si le point (A, B) traverse l'un des côtés de ce triangle, la forme cesse d'être réduite.

Supposons qu'il traverse le côté PQ; alors le coefficient de $(z - t)^2$ devenant négatif, je fais la substitution

$$x = -x + y,$$
$$y = y - t,$$
$$z = -x + y + z - t,$$

qui nous donne la forme F_1 :

$$\begin{aligned}(\gamma + A\alpha + B\beta)(y - z)^2 &- [\alpha + \beta + \gamma + A(\beta + \gamma + \alpha) + B(\gamma + \alpha + \beta)](z - x)^2 \\ &- [\gamma + \alpha + A(\alpha + \beta) + B(\beta + \gamma)](x - y)^2 - (\alpha + A\beta + B\gamma)(x - t)^2 \\ &- [\beta + \gamma + A(\gamma + \alpha) + B(\alpha + \beta)](y - t)^2 \\ &- [\beta + 2\gamma + A(\gamma + 2\alpha) + B(\alpha + 2\beta)](z - t)^2.\end{aligned}$$

Cette forme est réduite si

$$\begin{aligned}&\gamma + A\alpha + B\beta > 0, \\ &\alpha + \beta + \gamma + A(\beta + \gamma + \alpha) + B(\gamma + \alpha + \beta) < 0. \\ &\gamma + \alpha + A(\alpha + \beta) + B(\beta + \gamma) < 0, \\ &\alpha + A\beta + B\gamma < 0, \\ &\beta + \gamma + A(\gamma + \alpha) + B(\alpha + \beta) < 0, \\ &\beta + 2\gamma + A(\gamma + 2\alpha) + B(\alpha + 2\beta) < 0,\end{aligned}$$

et il est facile de voir que ces inégalités sont vérifiées si le point (A, B) reste à l'intérieur du triangle PQS, dont les trois côtés ont pour équations

$$\begin{aligned}\gamma + A\alpha + B\beta &= 0 \quad (PQ), \\ \gamma + \alpha + A(\alpha + \beta) + B(\beta + \gamma) &= 0 \quad (QS), \\ \beta + 2\gamma + A(\gamma + 2\alpha) + B(\alpha + 2\beta) &= 0 \quad (PS).\end{aligned}$$

La forme F_1 est réduite à l'intérieur du triangle PQS.

76. Si le point (A, B) traverse la droite PS, la forme F_1 cesse d'être réduite, car le coefficient de $(z - t)^2$ devient négatif; nous ferons alors la substitution

$$\begin{aligned}x &= -x + y, \\ y &= y - t, \\ z &= -x + y + z - t,\end{aligned}$$

qui fournit la forme F_2 :

$$\begin{aligned}[\beta + 2\gamma + A(\gamma + 2\alpha) + B(\alpha + 2\beta)](y - z)^2 &- [\beta + \gamma + A(\gamma + \alpha) + B(\alpha + \beta)](z - x)^2 \\ &- [\alpha + \beta + 2\gamma + A(\beta + \gamma + 2\alpha) + B(\gamma + \alpha + 2\beta)](x - y)^2 \\ &+ [\beta + \gamma - \alpha + A(\gamma + \alpha - \beta) + B(\alpha + \beta - \gamma)](x - t)^2 \\ &- [2\beta + 3\gamma + A(2\gamma + 3\alpha) + B(2\alpha + 3\beta)](y - t)^2 \\ &- [\alpha + 2\beta + 3\gamma + A(\beta + 2\gamma + 3\alpha) + B(\gamma + 2\alpha + 3\beta)](z - t)^2.\end{aligned}$$

Cette forme est réduite si

$$\begin{aligned}
&\beta + 2\gamma + A(\gamma + 2\alpha) + B(\alpha + 2\beta) > 0,\\
&\beta + \gamma + A(\gamma + \alpha) + B(\alpha + \beta) < 0,\\
&\alpha + \beta + 2\gamma + A(\beta + \gamma + 2\alpha) + B(\gamma + \alpha + 2\beta) < 0,\\
&\beta + \gamma - \alpha + A(\gamma + \alpha - \beta) + B(\alpha + \beta - \gamma) > 0,\\
&2\beta + 3\gamma + A(2\gamma + 3\alpha) + B(2\alpha + 3\beta) < 0,\\
&\alpha + 2\beta + 3\gamma + A(\beta + 2\gamma + 3\alpha) + B(\gamma + 2\alpha + 3\beta) < 0,
\end{aligned}$$

et ces six inégalités sont vérifiées, pourvu que le point (A, B) reste à l'intérieur du triangle PST, dont les côtés sont définis par les trois équations suivantes,

$$\begin{aligned}
\beta + 2\gamma + A(\gamma + 2\alpha) + B(\alpha + 2\beta) &= 0 \quad (\mathrm{PS}),\\
\beta + \gamma - \alpha + A(\gamma + \alpha - \beta) + B(\alpha + \beta - \gamma) &= 0 \quad (\mathrm{ST}),\\
2\beta + 3\gamma + A(2\gamma + 3\alpha) + B(2\alpha + 3\beta) &= 0 \quad (\mathrm{PT}),
\end{aligned}$$

et la forme F_2 est réduite à l'intérieur du triangle PST.

77. Si le point (A, B) traverse la droite PT, la forme F_2 cessera d'être réduite, car le coefficient de $(y - t)^2$ devient négatif.

Je fais la substitution

$$\begin{aligned}
x &= -x + y,\\
y &= -x + y + z - t,\\
z &= -x + z,
\end{aligned}$$

qui me conduit à la forme F_3,

$$\begin{aligned}
&[\beta + 2\gamma + A(\gamma + 2\alpha) + B(\alpha + 2\beta)](y - z)^2\\
&\quad - [\alpha + 4\beta + 6\gamma + A(\beta + 4\gamma + 6\alpha) + B(\gamma + 4\alpha + 6\beta)](z - x)^2\\
&\quad - [\alpha + \beta + 2\gamma + A(\beta + \gamma + 2\alpha) + B(\gamma + \alpha + 2\beta)](x - y)^2\\
&\quad + [2\beta + 3\gamma + A(2\gamma + 3\alpha) + B(2\alpha + 3\beta)](x - t)^2\\
&\quad - [(\beta + \gamma) + A(\gamma + \alpha) + B(\alpha + \beta)](y - t)^2\\
&\quad - [\alpha + 3\beta + 5\gamma + A(\beta + 3\gamma + 5\alpha) + B(\gamma + 3\alpha + 5\beta)](z - t)^2,
\end{aligned}$$

et cette forme est réduite si l'on a

$$\begin{aligned}
&\beta + 2\gamma + A(\gamma + 2\alpha) + B(\alpha + 2\beta) > 0,\\
&\alpha + 4\beta + 6\gamma + A(\beta + 4\gamma + 6\alpha) + B(\gamma + 4\alpha + 6\beta) < 0,\\
&\alpha + \beta + 2\gamma + A(\beta + \gamma + 2\alpha) + B(\gamma + \alpha + 2\beta) < 0,\\
&2\beta + 3\gamma + A(2\gamma + 3\alpha) + B(2\alpha + 3\beta) > 0,\\
&\beta + \gamma + A(\gamma + \alpha) + B(\alpha + \beta) < 0,\\
&\alpha + 3\beta + 5\gamma + A(\beta + 3\gamma + 5\alpha) + B(\gamma + 3\alpha + 5\beta) < 0.
\end{aligned}$$

Ces six inégalités sont vérifiées si le point (A, B) reste à l'intérieur du triangle PTU, dont les côtés ont pour équations

$$\begin{aligned}
2\beta + 3\gamma + A(2\gamma + 3\alpha) + B(2\alpha + 3\beta) &= 0 \quad (\mathrm{PT}),\\
\beta + \gamma + A(\gamma + \alpha) + B(\alpha + \beta) &= 0 \quad (\mathrm{PU}),\\
\alpha + 3\beta + 5\gamma + A(\beta + 3\gamma + 5\alpha) + B(\gamma + 3\alpha + 5\beta) &= 0 \quad (\mathrm{TU}),
\end{aligned}$$

et la forme F_3 est réduite à l'intérieur du triangle PTU.

78. D'ailleurs, *la forme* F_3 *se déduit de la forme* F_0 *en multipliant* F_0 *par* $(\beta + \gamma)^2$ *ou* $\frac{1}{\beta^2}$, *et changeant auparavant* A *et* B *en* $A\frac{(\gamma + \alpha)^2}{(\beta + \gamma)^2}$ *et* $B\frac{(\alpha + \beta)^2}{(\beta + \gamma)^2}$, *ou* $A\frac{\beta^2}{\gamma^2}$ *et* $B\frac{\beta^2}{\alpha^2}$, *de sorte que l'on a*

$$\begin{aligned}
F_3 = (\beta + \gamma)^2(\alpha x + \beta y + \gamma z)^2 &+ A(\gamma + \alpha)^2(\beta x + \gamma y + \alpha z)^2\\
&+ B(\alpha + \beta)^2(\gamma x + \alpha y + \beta z)^2.
\end{aligned}$$

A partir de là, on peut donc reproduire une suite périodique de triangles à l'intérieur desquels existe une forme correspondante réduite, se déduisant d'une des trois formes F_0, F_1 ou F_2.

On y arrivera en appliquant à la forme F_3 et aux formes suivantes, successivement et périodiquement, les substitutions qui conduisent de F_0 à F_1, F_2, F_3.

Mais ces triangles ne formeraient qu'une chaîne continue dans le plan et ne couvriraient pas le plan tout entier; pour trouver le réseau complet, je vais maintenant tourner autour du point Q.

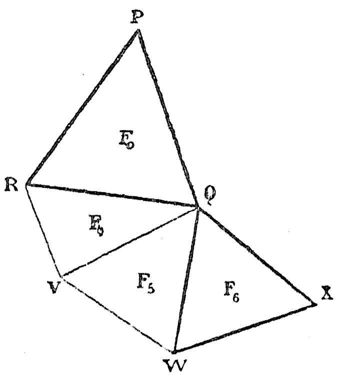
79. Je reprends la forme F_0, savoir

$$
\begin{aligned}
&-[\alpha+\beta+A(\beta+\gamma)+B(\gamma+\alpha)](y-z)^2-[\beta+\gamma+A(\gamma+\alpha)+B(\alpha+\beta)](z-x)^2\\
&\quad-[\gamma+\alpha+A(\alpha+\beta)+B(\beta+\gamma)](x-y)^2-(\alpha+A\beta+B\gamma)(x-t)^2\\
&\quad-(\beta+A\gamma+B\alpha)(y-t)^2-(\gamma+A\alpha+B\beta)(z-t)^2,
\end{aligned}
$$

qui est donc réduite à l'intérieur du triangle PQR.

Si le point (A, B) traverse le côté QR (*fig.* 6), la forme cesse d'être

Fig. 6.



réduite, puisque le coefficient de $(x-t)^2$ est négatif; je fais alors la substitution

$$
\begin{aligned}
x &= x-y-z+t,\\
y &= -z+t,\\
z &= x-z,
\end{aligned}
$$

qui me fournit la forme F_4,

$$
\begin{aligned}
&(\alpha+A\beta+B\gamma)(y-z)^2-[\gamma+\alpha+A(\alpha+\beta)+B(\beta+\gamma)](z-x)^2\\
&\quad-[\gamma+2\alpha+A(\alpha+2\beta)+B(\beta+2\gamma)](x-y)^2\\
&\quad-(\beta+A\gamma+B\alpha)(x-t)^2-[\alpha+\beta+A(\beta+\gamma)+B(\gamma+\alpha)](y-t)^2\\
&\quad-[\alpha+\beta+A(\beta+\gamma)+B(\gamma+\alpha)](z-t)^2.
\end{aligned}
$$

Cette forme est réduite si

$$\begin{aligned}
&\alpha + A\beta + B\gamma > 0,\\
&\gamma + \alpha + A(\alpha + \beta) + B(\beta + \gamma) < 0,\\
&\gamma + 2\alpha + A(\alpha + 2\beta) + B(\beta + 2\gamma) < 0,\\
&\beta + A\gamma + B\alpha < 0,\\
&\alpha + \beta + \gamma + A(\beta + \gamma + \alpha) + B(\alpha + \beta + \gamma) < 0,\\
&\alpha + \beta + A(\beta + \gamma) + B(\gamma + \alpha) < 0,
\end{aligned}$$

et ces inégalités sont vérifiées, si le point (A, B) reste à l'intérieur du triangle QRV, dont les côtés sont

$$\begin{aligned}
\alpha + A\beta + B\gamma &= 0 \quad (\mathrm{QR}),\\
\alpha + \beta + A(\beta + \gamma) + B(\gamma + \alpha) &= 0 \quad (\mathrm{RV}),\\
\gamma + 2\alpha + A(\alpha + 2\beta) + B(\beta + 2\gamma) &= 0 \quad (\mathrm{QV}).
\end{aligned}$$

Ainsi la forme F_4 est réduite à l'intérieur du triangle QRV.

80. Si le point (A, B) traverse la droite QV, le coefficient de $(x-y)^2$ devient négatif; alors je fais la substitution

$$\begin{aligned}
x &= -x + z,\\
y &= -y + t,\\
z &= -x + t,
\end{aligned}$$

qui me fournit la forme F_5 :

$$\begin{aligned}
&[\gamma + 2\alpha + A(\alpha + 2\beta) + B(\beta + 2\gamma)](y - z)^2\\
&\quad - [2\alpha + \beta + \gamma + A(2\beta + \gamma + \alpha) + B(2\gamma + \alpha + \beta)](z - x)^2\\
&\quad - [\gamma + \alpha + A(\alpha + \beta) + B(\beta + \gamma)](x - y)^2\\
&\quad + [\alpha - \beta + \gamma + A(\beta - \gamma + \alpha) + B(\gamma - \alpha + \beta)](x - t)^2\\
&\quad - [3\alpha + \beta + 2\gamma + A(3\beta + \gamma + 2\alpha) + B(3\gamma + \alpha + 2\beta)](y - t)^2\\
&\quad - [2\gamma + 3\alpha + A(2\alpha + 3\beta) + B(2\beta + 3\gamma)](z - t)^2,
\end{aligned}$$

Cette forme est réduite si

$$\gamma + 2\alpha + A(\alpha + 2\beta) + B(\beta + 2\gamma) > 0,$$
$$2\alpha + \beta + \gamma + A(2\beta + \gamma + \alpha) + B(2\gamma + \alpha + \beta) < 0,$$
$$\gamma + \alpha + A(\alpha + \beta) + B(\beta + \gamma) < 0,$$
$$\alpha - \beta + \gamma + A(\beta - \gamma + \alpha) + B(\gamma - \alpha + \beta) > 0,$$
$$3\alpha + \beta + 2\gamma + A(3\beta + \gamma + 2\alpha) + B(3\gamma + \alpha + 2\beta) < 0,$$
$$2\gamma + 3\alpha + A(2\alpha + 3\beta) + B(2\beta + 3\gamma) < 0,$$

et ces six inégalités sont vérifiées si le point (A, B) reste à l'intérieur du triangle QVW, dont les côtés ont pour équations

$$\gamma + 2\alpha + A(\alpha + 2\beta) + B(\beta + 2\gamma) = 0 \quad (QV),$$
$$\alpha - \beta + \gamma + A(\beta - \gamma + \alpha) + B(\gamma - \alpha + \beta) = 0 \quad (VW),$$
$$2\gamma + 3\alpha + A(2\alpha + 3\beta) + B(2\beta + 3\gamma) = 0 \quad (QW).$$

Ainsi F_5 est réduit à l'intérieur du triangle QVW.

81. Si le point (A, B) traverse le côté QW, le coefficient de $(z - t)^2$ devient négatif et la forme cesse d'être réduite.

Je fais alors la substitution

$$x = y - z,$$
$$y = -x + y,$$
$$z = -x + y - z + t,$$

qui me donne la forme F_6,

$$\begin{aligned}
&-[2\alpha + \beta + \gamma + A(2\beta + \gamma + \alpha) + B(2\gamma + \alpha + \beta)](y - z)^2 \\
&+[\gamma + 2\alpha + A(\alpha + 2\beta) + B(\beta + 2\gamma)](z - x)^2 \\
&-[6\alpha + \beta + 4\gamma + A(6\beta + \gamma + 4\alpha) + B(6\gamma + \alpha + 4\beta)](x - y)^2 \\
&-[5\alpha + \beta + 3\gamma + A(5\beta + \gamma + 3\alpha) + B(5\gamma + \alpha + 3\beta)](x - t)^2 \\
&+[2\gamma + 3\alpha + A(2\alpha + 3\beta) + B(2\beta + 3\gamma)](y - t)^2 \\
&-[\gamma + \alpha + A(\alpha + \beta) + B(\beta + \gamma)](z - t)^2,
\end{aligned}$$

et cette forme est réduite si

$$\begin{aligned}
&2\gamma + 3\alpha + A(2\alpha + 3\beta) + B(2\beta + 3\gamma) > 0,\\
&\gamma + \alpha + A(\alpha + \beta) + B(\beta + \gamma) < 0,\\
&2\alpha + \beta + \gamma + A(2\beta + \gamma + \alpha) + B(2\gamma + \alpha + \beta) < 0,\\
&\gamma + 2\alpha + A(\alpha + 2\beta) + B(\beta + 2\gamma) > 0,\\
&6\alpha + \beta + 4\gamma + A(6\beta + \gamma + 4\alpha) + B(6\gamma + \alpha + 4\beta) < 0,\\
&5\alpha + \beta + 3\gamma + A(5\beta + \gamma + 3\alpha) + B(5\gamma + \alpha + 3\beta) < 0,
\end{aligned}$$

c'est-à-dire si le point (A, B) reste à l'intérieur du triangle QVX, dont les trois côtés ont pour équations

$$\begin{aligned}
2\gamma + 3\alpha + A(2\alpha + 3\beta) + B(2\beta + 3\gamma) &= 0 \quad (QW),\\
\gamma + \alpha + A(\alpha + \beta) + B(\beta + \gamma) &= 0 \quad (QX),\\
5\alpha + \beta + 3\gamma + A(5\beta + \gamma + 3\alpha) + B(5\gamma + \alpha + 3\beta) &= 0 \quad (WX),
\end{aligned}$$

et la forme F_6 est réduite à l'intérieur du triangle QWX.

82. D'ailleurs, *la forme* F_6 *se déduit de la forme* F_0 *en multipliant* F_0 *par* $(\gamma + \alpha)^2$ *ou* $\frac{1}{\gamma^2}$, *après avoir changé préalablement* A *et* B *respectivement en* $A\frac{(\alpha+\beta)^2}{(\gamma+\alpha)^2}$ *et* $B\frac{(\beta+\gamma)^2}{(\gamma+\alpha)^2}$ *ou* $A\frac{\gamma^2}{\alpha^2}$ *et* $B\frac{\gamma^2}{\beta^2}$.

A partir de là on peut donc reproduire une suite périodique de triangles à l'intérieur desquels existe une forme correspondante réduite se déduisant d'une des trois formes F_0, F_4, F_5.

On y arrivera en appliquant à F_6 et aux formes suivantes, successivement et périodiquement, les substitutions qui font passer de F_0 à F_4, F_5, F_6.

On formera ainsi une deuxième série de triangles formant une chaîne continue dans le plan.

En combinant cette deuxième série de substitutions avec la série que nous avons indiquée plus haut, on couvrira, comme on va le voir, le plan d'un réseau continu de triangles. Le système élémentaire de ce réseau se composera donc des cinq triangles F_0, F_1, F_2, F_4, F_5.

83. Si donc on emploie les deux séries de substitutions qui viennent d'être obtenues, ainsi que les substitutions inverses, c'est-à-dire celles qui permettent de revenir de la forme F_3 à la forme F_0 ou de la forme F_6 à la forme primitive F_0, on couvrira le plan d'un réseau de triangles que nous allons figurer; mais, pour rendre la figure plus claire, nous *adoptons d'autres notations*.

84. Qu'on figure un carrelage composé d'hexagones et que dans chaque hexagone on inscrive un triangle : on aura ainsi à l'intérieur de chaque hexagone quatre triangles. Une fois qu'on a déterminé un de ces systèmes de quatre triangles, tous les autres s'en déduisent ([1]), comme on va le voir.

Dans la figure ci-contre, tous les triangles d'un même système élémentaire sont désignés par la même lettre, l'indice seul variant.

Les triangles désignés par des lettres différentes affectées du même indice sont des triangles correspondants, qu'on peut déduire les uns des autres.

Les triangles qui ont la même lettre accentuée ou non avec le même indice, comme φ_0 et φ'_0, φ_1 et φ'_1, ... (*fig.* 7), sont les triangles que je nommerai *inverses l'un de l'autre,* c'est-à-dire qu'ils se déduisent du triangle f_0 ou du triangle f_1, de même indice dans le système initial, en renversant pour l'un les substitutions employées pour l'autre. En d'autres termes, f_0 se déduirait de φ'_0 comme φ_0 se déduit de f_0; de même, f_1 se déduirait de φ'_1 comme φ_1 se déduit de f_1.

Les triangles désignés plus haut par F_0, F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6 sont désignés ici respectivement par f_0, f_1, φ_3, φ_0, f_3, ψ_2, ψ_0.

Voici comment se développe ce réseau.

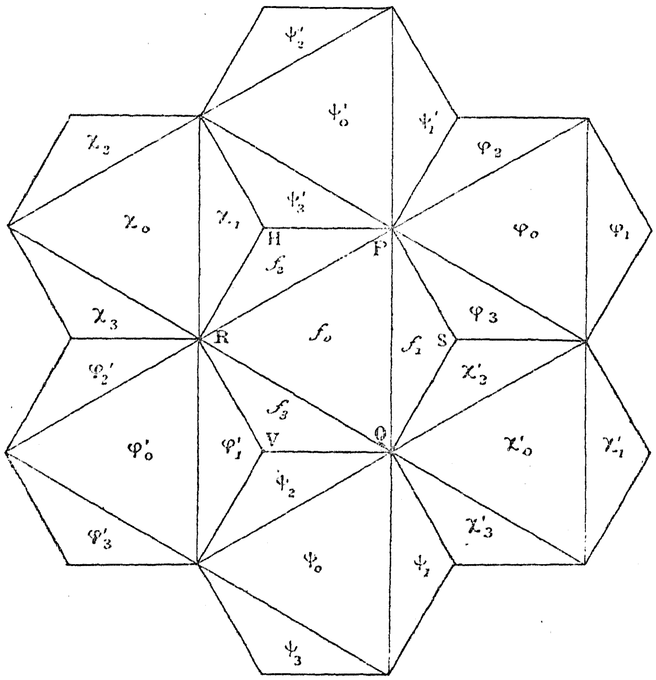
On a vu plus haut comment s'obtenaient φ_0 et ψ_0 au moyen de f_0. On vient de voir comment s'obtiendraient φ'_0 et ψ'_0, et il est facile de voir par le calcul qui est plus haut comment les formes qui portent les lettres φ et ψ avec un indice quelconque se déduiraient des formes f portant le même indice.

Quant à χ_0 et χ'_0, ces deux formes sont inverses l'une de l'autre, et il suffit de montrer comment s'obtient l'une d'elles.

([1]) De sorte que les cinq formes élémentaires F_0, F_1, F_2, F_4, F_5 peuvent être réduites à quatre, et, en effet, F_5 et F_2 sont deux formes correspondantes qui se déduisent l'une de l'autre comme F_4 se déduit de F_0.

Si l'on applique à φ_0 les substitutions qui de f_0 conduisent à ψ_0, cela reviendra à multiplier φ_0 par $(\gamma+\alpha)^2$ ou f_0 par $(\beta+\gamma)^2(\gamma+\alpha)^2$. On obtiendra donc un triangle qu'on déduira de φ_0 en passant par la forme φ_3 et une forme χ'_2; on est ainsi conduit au triangle désigné par χ'_0. Le triangle inverse χ_0 se déduira de f_0 en multipliant f_0 par $\frac{1}{(\beta+\gamma)^2(\gamma+\alpha^2)}$, c'est-à-dire par $(\alpha+\beta)^2$, et l'on voit ainsi que χ_0 est l'analogue de φ_0 et ψ_0 par rapport à f_0. Je n'insiste pas sur la manière dont les formes χ_1, χ_2, χ_3 et les formes χ'_1, χ'_2, χ'_3 se déduiraient de f_1, f_2, f_3; cette déduction est évidente.

Fig. 7.



On voit bien maintenant comment on développerait le réseau indéfiniment dans le plan.

Je dois faire remarquer que la figure précédente est très déformée; les hexagones qui sont à gauche devraient être beaucoup plus petits, ceux de droite beaucoup plus grands. Ainsi, pour φ_0, les coordonnées des sommets se déduiraient des coordonnées relatives aux sommets de f_0 en multipliant les abscisses par $\frac{(\beta+\gamma)^2}{(\gamma+\alpha)^2}=\frac{\gamma^2}{\beta^2}=20$ environ et les ordonnées par $\frac{(\beta+\gamma)^2}{(\alpha+\beta)^2}=\frac{\alpha^2}{\beta^2}=9$ environ, et, pour φ'_0, il faudrait multiplier par $\frac{1}{20}$ et $\frac{1}{9}$, de sorte que les coordonnées relatives à φ_0 sont pour les abscisses quatre cents fois plus grandes, et pour les ordonnées quatre-vingts fois plus grandes que celles de φ'_0.

J'ai donc déformé la figure, afin de la rendre plus compréhensible.

Les quatre formes élémentaires f_0, f_1, f_2, f_3, d'où toutes les autres peuvent être déduites, sont

$$f_0=\left\{\begin{array}{l}
-[\alpha+\beta+A(\beta+\gamma)+B(\gamma+\alpha)](y-z)^2\\
-[\beta+\gamma+A(\gamma+\alpha)+B(\alpha+\beta)](z-x)^2\\
-[\gamma+\alpha+A(\alpha+\beta)+B(\beta+\gamma)](x-y)^2\\
-(\alpha+A\beta+B\gamma)(x-t)^2\\
-(\beta+A\gamma+B\alpha)(y-t)^2\\
-(\gamma+A\alpha+B\beta)(z-t)^2,
\end{array}\right.$$

$$f_1=\left\{\begin{array}{l}
(\gamma+A\alpha+B\beta)(y-z)^2\\
\quad-[\alpha+\beta+\gamma+A(\beta+\gamma+\alpha)+B(\gamma+\alpha+\beta)](z-x)^2\\
\quad+[-\gamma-\alpha+A(-\alpha-\beta)+B(-\beta-\gamma)](x-y)^2\\
\quad-(\alpha+A\beta+B\gamma)(x-t)^2\\
\quad-[\beta+\gamma+A(\gamma+\alpha)+B(\alpha+\beta)](y-t)^2\\
\quad-[\beta+2\gamma+A(\gamma+2\alpha)+B(\alpha+2\beta)](z-t)^2,
\end{array}\right.$$

$$f_2=\left\{\begin{array}{l}
(\beta+A\gamma+B\alpha)(y-z)^2\\
\quad-[\beta+\gamma+A(\gamma+\alpha)+B(\alpha+\beta)](z-x)^2\\
\quad-[\alpha+\beta+\gamma+A(\beta+\gamma+\alpha)+B(\gamma+\alpha+\beta)](x-y)^2\\
\quad-(\gamma+A\alpha+B\beta)(x-t)^2\\
\quad-[\alpha+2\beta+A(\beta+2\gamma)+B(\gamma+2\alpha)](y-t)^2\\
\quad-[\alpha+\beta+A(\beta+\gamma)+B(\gamma+\alpha)](z-t)^2,
\end{array}\right.$$

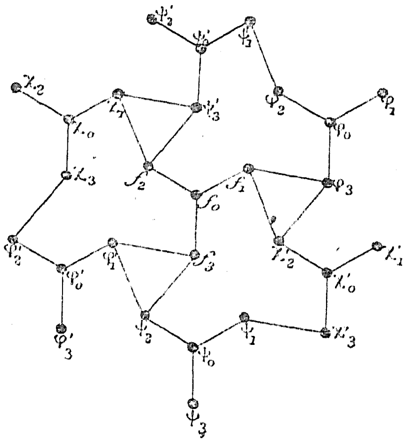
$$f_3=\left\{\begin{array}{l}
(\alpha+A\beta+B\gamma)(y-z)^2\\
\quad-[\gamma+\alpha+A(\alpha+\beta)+B(\beta+\gamma)](z-x)^2\\
\quad-[\gamma+2\alpha+A(\alpha+2\beta)+B(\beta+2\gamma)](x-y)^2\\
\quad-(\beta+A\gamma+B\alpha)(x-t)^2\\
\quad-[\alpha+\beta+\gamma+A(\beta+\gamma+\alpha)+B(\gamma+\alpha+\beta)](y-t)^2\\
\quad-[\alpha+\beta+A(\beta+\gamma)+B(\gamma+\alpha)](z-t)^2,
\end{array}\right.$$

et les substitutions par lesquelles on déduit f_1, f_2, f_3 de f_0 sont respectivement

$$\begin{array}{lll}
x = -x + y, & x = -z + t, & x = x - y - z + t, \\
y = y - t, & y = x - y - z + t, & y = -z + t, \\
z = -x + y + z - t, & z = x - z, & z = x - z.
\end{array}$$

Enfin si, au lieu de la représentation par polygones, on adopte la représentation symbolique du n° **71**, où les formes sont représentées par des points et sont jointes par des lignes droites aux formes contiguës par un côté, on aura la figure suivante (*fig.* 8), qui correspond à la figure précédente, les mêmes lettres désignant les mêmes formes.

Fig. 8.



84. Je termine les recherches relatives à cet exemple par l'emploi de la méthode indiquée au n° **70**.

Au lieu de considérer la forme

$$(\alpha x + \beta y + \gamma z)^2 + A(\beta x + \gamma y + \alpha z)^2 + B(\gamma x + \alpha y + \beta z)^2,$$

nous prendrons, avec trois constantes A, B, C, la forme suivante :

$$A(\alpha x + \beta y + \gamma z)^2 + B(\beta x + \gamma y + \alpha z)^2 + C(\gamma x + \alpha y + \beta z)^2.$$

Soient alors a, b, c trois nombres vérifiant les égalités suivantes,

$$\alpha^2 = e^a, \quad \beta^2 = e^b, \quad \gamma^2 = e^c,$$

où e désigne la base des logarithmes vulgaires; on aura

$$a = 0,191, \quad b = -0,703, \quad c = 0,511;$$

puis nous poserons

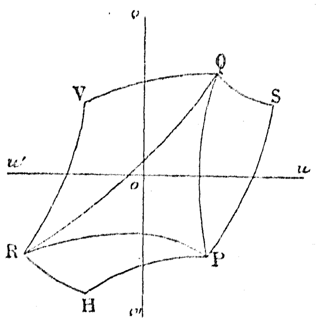
$$A = e^{bu+cv}, \quad B = e^{cu+av}, \quad C = e^{au+bv}.$$

Soient u_0 et v_0 des valeurs de u et v auxquelles correspondent des valeurs de A, B, C pour lesquelles la forme f_0 est réduite; les formes φ_0, φ'_0, ψ_0, ψ'_0, χ_0, χ'_0 seront respectivement réduites pour des valeurs de A, B, C déterminées par les valeurs suivantes de u et v:

$$\begin{array}{llllll} u = u_0 - 1, & u = u_0 + 1, & u = u_0, & u = u_0, & u = u_0 - 1, & u = u_0 + 1, \\ v = v_0, & v = v_0, & v = v_0 - 1, & v = v_0 + 1, & v = v_0 - 1, & v = v_0 + 1. \end{array}$$

Si l'on regarde u et v comme des coordonnées courantes, aux triangles rectilignes de la *fig.* 7 correspondront des triangles curvilignes; mais il suffira d'obtenir les triangles correspondant aux formes f_0, f_1, f_2, f_3 pour obtenir tous les autres. Ces quatre triangles n'ont que six sommets, qu'il suffira d'obtenir pour avoir tous les autres sommets; il serait même facile de voir que les deux sommets P et S suffisent pour avoir tous les autres.

Fig. 9.



Voici quelles sont les coordonnées des six sommets qui correspondent aux sommets P, Q, R, S, V, H de la *fig.* 7 :

$$P\begin{cases} u_1 = 0,36, \\ v_1 = -0,42, \end{cases} \quad Q\begin{cases} u_2 = 0,36 = u_1, \\ v_2 = 0,58 = v_1 + 1, \end{cases} \quad R\begin{cases} u_3 = -0,64 = u_1 - 1, \\ v_3 = -0,42 = v_1, \end{cases}$$

$$S\begin{cases} u_4 = 0,66, \\ v_4 = 0,36, \end{cases} \quad V\begin{cases} u_5 = -0,34 = u_4 - 1, \\ v_5 = 0,36 = v_4, \end{cases} \quad H\begin{cases} u_6 = -0,34 = u_4 - 1, \\ v_6 = -0,64 = v_4 - 1. \end{cases}$$

De sorte que la figure élémentaire P, Q, R, S, V, H est la précédente (*fig.* 9), et cette figure se reproduit ensuite identiquement et indéfiniment dans le plan, en augmentant alternativement les abscisses et les ordonnées d'une unité.

85. L'équation

$$x^9 - 1 = 0$$

nous fournira un deuxième exemple.

Si l'on divise $x^9 - 1$ par $x^3 - 1$, on obtient

$$\frac{x^9 - 1}{x^3 - 1} = x^6 + x^3 + 1,$$

et si, dans l'équation

$$x^6 + x^3 + 1 = 0,$$

on pose

$$x + \frac{1}{x} = z,$$

on obtient

$$z^3 - 3z + 1 = 0.$$

C'est cette deuxième équation que nous allons étudier.

Si l'on appelle α, β, γ les trois racines de l'équation

$$x^3 - 3x + 1 = 0,$$

les valeurs approchées de ces racines sont

$$\alpha = 1,53, \quad \beta = 0,34, \quad \gamma = -1,87,$$

et l'on a entre ces racines les relations suivantes :

$$\alpha+\beta+\gamma=0,$$
$$\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta=-3,$$
$$\alpha\beta\gamma=-1,$$
$$\beta\gamma=-1+\beta,\quad \gamma\alpha=-1+\gamma,\quad \alpha\beta=-1+\alpha,$$
$$\alpha^2=\quad 2+\beta,\quad \beta^2=\quad 2+\gamma,\quad \gamma^2=\quad 2+\alpha.$$

Cela posé, nous étudierons la forme

$$(x+\alpha y+\beta z)^2+A(x+\beta y+\gamma z)^2+B(x+\gamma y+\alpha z)^2.$$

Je change x en $x-t$, y en $y-t$, z en $z-t$; j'ai ainsi une forme que je désigne par F_0, savoir

$$\begin{aligned}&[1-\alpha+A(1-\beta)+B(1-\gamma)](y-z)^2+(-\beta-A\gamma-B\alpha)(z-x)^2\\&+(-\alpha-A\beta-B\gamma)(x-y)^2+[1-\gamma+A(1-\alpha)+B(1-\beta)](x-t)^2\\&+[1+\alpha-\gamma+A(1+\beta-\alpha)+B(1+\gamma-\beta)](y-t)^2+[1+A+B](z-t)^2,\end{aligned}$$

et cette forme est réduite si l'on a

$$\begin{aligned}&1-\alpha+A(1-\beta)+B(1-\gamma)>0,\\&-\beta-A\gamma-B\alpha>0,\\&-\alpha-A\beta-B\gamma>0,\\&1-\gamma+A(1-\alpha)+B(1-\beta)>0,\\&1+\alpha-\gamma+A(1+\beta-\alpha)+B(1+\gamma-\beta)>0,\\&1+A+B>0.\end{aligned}$$

Ces six inégalités sont vérifiées si le point de coordonnées (A, B) reste à l'intérieur du triangle HKL (*fig.* 10), dont les côtés ont respectivement pour équations

$$\begin{aligned}\beta+A\gamma+B\alpha&=0\quad (\mathrm{KL}),\\ \alpha+A\beta+B\gamma&=0\quad (\mathrm{HK}),\\ 1+\alpha-\gamma+A(1+\beta-\alpha)+B(1+\gamma-\beta)&=0\quad (\mathrm{KL}),\end{aligned}$$

et la forme F_0 est réduite à l'intérieur du triangle HKL.

86. Si l'on traverse LK, la forme F_0 cesse d'être réduite, et, dans ce cas, la substitution

$$x = y - t,$$
$$y = x - t,$$
$$z = x - z$$

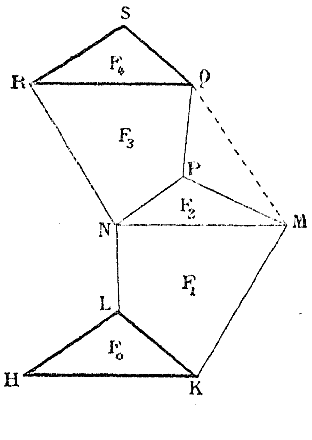
engendre la forme F_1

$$\begin{aligned}&(\beta + A\gamma + B\alpha)(y - z)^2 + [1 - \beta + A(1-\gamma) + B(1-\alpha)](z-x)^2\\ &+ (\gamma + A\alpha + B\beta)(x-y)^2 + [1 - 2\gamma + A(1-2\alpha) + B(1-2\beta)](x-t)^2\\ &+ [1 + \alpha + A(1+\beta) + B(1+\gamma)](y-t)^2 + [1+\gamma + A(1+\alpha) + B(1+\beta)](z-t)^2,\end{aligned}$$

qui est réduite si l'on a

$$\begin{aligned}&\beta + A\gamma + B\alpha > 0,\\ &1 - \beta + A(1-\gamma) + B(1-\alpha) > 0,\\ &\gamma + A\alpha + B\beta > 0,\\ &1 - 2\gamma + A(1-2\alpha) + B(1-2\beta) > 0,\\ &1 + \alpha + A(1+\beta) + B(1+\gamma) > 0,\\ &1 + \gamma + A(1+\alpha) + B(1+\beta) > 0,\end{aligned}$$

Fig. 10.



et ces six inégalités sont vérifiées si le point (A, B) reste à l'intérieur du quadrilatère KLMN, dont les côtés ont respectivement pour équations

$$\begin{array}{ll}
\beta + A\gamma + B\alpha = 0 & (\mathrm{KL}),\\
\gamma + A\alpha + B\beta = 0 & (\mathrm{KM}),\\
1 - 2\gamma + A(1 - 2\alpha) + B(1 - 2\beta) = 0 & (\mathrm{LN}),\\
1 + \alpha + A(1 + \beta) + B(1 + \gamma) = 0 & (\mathrm{MN}),
\end{array}$$

et la forme F_1 est réduite à l'intérieur du quadrilatère KLMN.

87. Cette forme cesse d'être réduite si le point (A, B) traverse le côté MN; dans ce cas, la substitution

$$\begin{aligned}
x &= z - t,\\
y &= -x + y + z - t,\\
z &= -x + z
\end{aligned}$$

conduit à la forme F_2

$$\begin{aligned}
&[-1-\alpha+A(-1-\beta)+B(-1-\gamma)](y-z)^2+[2-\beta+A(2-\gamma)+B(2-\alpha)](z-x)^2\\
&\quad+[1-\beta+A(1-\gamma)+B(1-\alpha)](x-y)^2+(\gamma+A\alpha+B\beta)(x-t)^2\\
&\quad+[1-\gamma+A(1-\alpha)+B(1-\beta)](y-t)^2\\
&\quad+[2-2\gamma+\alpha+A(2-2\alpha+\beta)+B(2-2\beta+\gamma)](z-t)^2,
\end{aligned}$$

et cette forme est réduite si l'on a

$$\begin{aligned}
-1-\alpha+A(-1-\beta)+B(-1-\gamma)&>0,\\
2-\beta+A(2-\gamma)+B(2-\alpha)&>0,\\
1-\beta+A(1-\gamma)+B(1-\alpha)&>0,\\
\gamma+A\alpha+B\beta&>0,\\
1-\gamma+A(1-\alpha)+B(1-\beta)&>0,\\
2-2\gamma+\alpha+A(2-2\alpha+\beta)+B(2-2\beta+\gamma)&>0.
\end{aligned}$$

Ces six inégalités sont vérifiées si le point (A, B) reste à l'intérieur du triangle MNP, dont les côtés ont respectivement pour équations

$$\begin{array}{ll}
1 + \alpha + A(1 + \beta) + B(1 + \gamma) = 0 & (\mathrm{MN}),\\
1 - \beta + A(1 - \gamma) + B(1 - \alpha) = 0 & (\mathrm{MP}),\\
2 - 2\gamma + A(2 - 2\alpha) + B(2 - 2\beta) = 0 & (\mathrm{NP}),
\end{array}$$

et la forme F_2 est réduite à l'intérieur du triangle MNP.

88. Cette forme cesse d'être réduite si l'on traverse NP; dans ce cas, la substitution

$$\begin{aligned} x &= x - y, \\ y &= -y + t, \\ z &= x - y - z + t \end{aligned}$$

conduit à la forme F_3

$$\begin{aligned} &[-2-\alpha+2\gamma+A(-2-\beta+2\alpha)+B(-2-\gamma+2\beta)](y-z)^2 \\ &+[1-2\gamma+A(1-2\alpha)+B(1-2\beta)](z-x)^2 \\ &+[2-\gamma+\alpha+A(2-\alpha+\beta)+B(2-\beta+\gamma)](x-y)^2 \\ &+[-1+3\gamma+A(-1+3\alpha)+B(-1+3\beta)](x-t)^2 \\ &+[3+\alpha-3\gamma+A(3+\beta-3\alpha)+B(3+\gamma-3\beta)](y-t)^2 \\ &+[4+2\alpha-\gamma+A(4+2\beta-\alpha)+B(4+2\gamma-\beta)](z-t)^2, \end{aligned}$$

et cette forme est réduite si l'on a

$$\begin{aligned} -2-\alpha+2\gamma+A(-2-\beta+2\alpha)+B(-2-\gamma+2\beta) &> 0, \\ 1-2\gamma+A(1-2\alpha)+B(1-2\beta) &> 0, \\ 2-\gamma+\alpha+A(2-\alpha+\beta)+B(2-\beta+\gamma) &> 0, \\ -1+3\gamma+A(-1+3\alpha)+B(-1+3\beta) &> 0, \\ 3+\alpha-3\gamma+A(3+\beta-3\alpha)+B(3+\gamma-3\beta) &> 0, \\ 4+2\alpha-\gamma+A(4+2\beta-\alpha)+B(4+2\gamma-\beta) &> 0. \end{aligned}$$

Ces inégalités sont vérifiées si le point (A, B) reste à l'intérieur du quadrilatère NPQR, dont les côtés ont respectivement pour équations

$$\begin{aligned} -2-\alpha+2\gamma+A(-2-\beta+2\alpha)+B(-2-\gamma+2\beta) &= 0 \quad (\mathrm{NP}), \\ 1-2\gamma+A(1-2\alpha)+B(1-2\beta) &= 0 \quad (\mathrm{NR}), \\ 2-\gamma+\alpha+A(2-\alpha+\beta)+B(2-\beta+\gamma) &= 0 \quad (\mathrm{RQ}), \\ -1+3\gamma+A(-1+3\alpha)+B(-1+3\beta) &= 0 \quad (\mathrm{PQ}), \end{aligned}$$

et la forme F_3 est réduite à l'intérieur du quadrilatère NPQR.

89. Cette forme cesse d'être réduite si le point (A, B) traverse le côté RQ; dans ce cas, la substitution

$$\begin{aligned} x &= x - z, \\ y &= y - t, \\ z &= x - t \end{aligned}$$

conduit à la forme F_4

$$\begin{aligned}
&[-2-\alpha+\gamma+A(-2-\beta+\alpha)+B(-2-\gamma+\beta)](y-z)^2\\
&+[1+\alpha+2\gamma+A(1+\beta+2\alpha)+B(1+\gamma+2\beta)](z-x)^2\\
&+(\gamma+A\alpha+B\beta)(x-y)^2+[2+\alpha+A(2+\beta)+B(2+\gamma)](x-t)^2\\
&+[5+2\alpha-4\gamma+A(5+2\beta-4\alpha)+B(5+2\gamma-4\beta)](y-t)^2\\
&+[3+\alpha-3\gamma+A(3+\beta-3\alpha)+B(3+\gamma-3\beta)](z-t)^2,
\end{aligned}$$

qui est réduite si l'on a

$$\begin{aligned}
&-2-\alpha+\gamma+A(-2-\beta+\alpha)+B(-2-\gamma+\beta)>0,\\
&1+\alpha+2\gamma+A(1+\beta+2\alpha)+B(1+\gamma+2\beta)>0,\\
&\gamma+A\alpha+B\beta>0,\\
&2+\alpha+A(2+\beta)+B(2+\gamma)>0,\\
&5+2\alpha-4\gamma+A(5+2\beta-4\alpha)+B(5+2\gamma-4\beta)>0,\\
&3+\alpha-3\gamma+A(3+\beta-3\alpha)+B(3+\gamma-3\beta)>0.
\end{aligned}$$

Ces inégalités sont vérifiées si le point (A, B) reste à l'intérieur du triangle RQS, dont les côtés ont respectivement pour équations

$$\begin{aligned}
&-2-\alpha+\gamma+A(-2-\beta+\alpha)+B(-2-\gamma+\beta)=0 \quad (\mathrm{RQ}),\\
&1+\alpha+2\gamma+A(1+\beta+2\alpha)+B(1+\gamma+2\beta)=0 \quad (\mathrm{QS}),\\
&5+2\alpha-4\gamma+A(5+2\beta-4\alpha)+B(5+2\gamma-4\beta)=0 \quad (\mathrm{RS}),
\end{aligned}$$

et la forme F_4 est réduite à l'intérieur du triangle QRS.

90. D'un autre côté, si l'on compare la forme F_4 à la forme F_0, en rangeant les coefficients des deux formes d'après l'ordre de grandeur croissante des termes indépendants de A et de B, on trouve que les termes indépendants de A et B dans l'une des formes sont proportionnels aux termes analogues de l'autre forme, de même que les multiplicateurs de A pour l'une des formes sont proportionnels aux multiplicateurs de A pour l'autre, comme aussi les multiplicateurs de B.

La forme F_4 commence donc la seconde partie d'une série périodique de formes dont la première partie se compose des formes F_0, F_1, F_2, F_3, et ces quatre dernières formes sont limitées par quatre polygones qui sont les éléments d'une chaîne indéfinie de polygones.

Maintenant, si dans F_4 on intervertit les lettres x et z de manière que les termes de F_4 soient dans le même ordre que les termes correspondants de F_0, la forme F_4 deviendra

$$\begin{aligned}
&(\gamma+A\alpha+B\beta)(y-z)^2+[1+\alpha+2\gamma+A(1+\beta+2\alpha)+B(1+\gamma+2\beta)](z-x)^2\\
&\quad+[-2-\alpha+\gamma+A(-2-\beta+\alpha)+B(-2-\gamma+\beta)](x-y)^2\\
&\quad+[3+\alpha-3\gamma+A(3+\beta-3\alpha)+B(3+\gamma-3\beta)](x-t)^2\\
&\quad+[5+2\alpha-4\gamma+A(5+2\beta-4\alpha)+B(5+2\gamma-4\beta)](y-t)^2\\
&\quad+[2+\alpha+A(2+\beta)+B(2+\gamma)](z-t)^2.
\end{aligned}$$

Cette forme, ainsi écrite, se déduit de F_0 par une série de substitutions qui peuvent se ramener à la substitution unique

$$\begin{aligned}
x&=y+z,\\
y&=x+y,\\
z&=x+y-z,
\end{aligned}$$

et, si l'on applique cette substitution à la forme F_0, savoir

$$F_0=(x+\alpha y+\beta z)^2+A(x+\beta y+\gamma z)^2+B(x+\gamma y+\alpha z)^2,$$

on obtient

$$\begin{aligned}
F_4=&[-\gamma x+(1-\gamma)y+(1-\beta)z]^2\\
&+A[-\alpha x+(1-\alpha)y+(1-\gamma)z]^2+B[-\beta+(1-\beta)y+(1-\alpha)z]^2,
\end{aligned}$$

ou

$$F_4=\gamma^2(x+\alpha y+\beta z)^2+A\alpha^2(x+\beta y+\gamma z)^2+B\beta^2(x+\gamma y+\alpha z)^2,$$

de sorte que F_4 se déduit de F_0 en multipliant F_0 par γ^2, après avoir changé préalablement A et B en $A\frac{\alpha^2}{\gamma^2}$ et $B\frac{\beta^2}{\gamma^2}$.

91. Ayant obtenu une première chaîne de polygones, je cherche les éléments de la deuxième chaîne.

Je reviens à la forme F_0, qui est réduite dans le triangle HKL; je traverse, comme plus haut, la ligne LK, ce qui me conduit encore à la forme F_1, qui est réduite dans le quadrilatère KLMN. Si je traverse le côté KM, la forme F_4 cessera d'être réduite; mais, dans ce cas, la substitution

$$x = x - z,$$
$$y = y - t,$$
$$z = x - t$$

conduit à la forme F_5

$$\begin{aligned}
&(-\gamma - A\alpha - B\beta)(y - z)^2 + [1 - \gamma + A(1 - \alpha) + B(1 - \beta)](z - x)^2 \\
&\quad + (-\alpha - A\beta - B\gamma)(x - y)^2 + (1 + A + B)(x - t)^2 \\
&\quad + [1 - \beta + A(1 - \gamma) + B(1 - \alpha)](y - t)^2 \\
&\quad + [1 - \beta + \gamma + A(1 - \gamma + \alpha) + B(1 - \alpha + \beta)](z - t)^2.
\end{aligned}$$

Cette forme est réduite si l'on a

$$\begin{gathered}
-\gamma - A\alpha - B\beta > 0, \\
1 - \gamma + A(1 - \alpha) + B(1 - \beta) > 0, \\
-\alpha - A\beta - B\gamma > 0, \\
1 + A + B > 0, \\
1 - \beta + A(1 - \gamma) + B(1 - \alpha) > 0, \\
1 - \beta + \gamma + A(1 - \gamma + \alpha) + B(1 - \alpha + \beta) > 0.
\end{gathered}$$

Ces inégalités sont vérifiées, pourvu que le point (A, B) (*fig.* 11) reste à l'intérieur du triangle KMT, dont les côtés ont respectivement pour équations

$$\begin{aligned}
\gamma + A\alpha + B\beta &= 0 \quad (\mathrm{MK}), \\
\alpha + A\beta + B\gamma &= 0 \quad (\mathrm{KT}), \\
1 - \beta + \gamma + A(1 - \gamma + \alpha) + B(1 - \alpha + \beta) &= 0 \quad (\mathrm{TM}),
\end{aligned}$$

et la forme F_5 est réduite à l'intérieur du triangle MKT.

92. Cette forme cesse d'être réduite si le point (A, B) traverse le côté KT; dans ce cas, la substitution

$$x = x - z,$$
$$y = y - t,$$
$$z = z - t$$

conduit à la forme F_6,

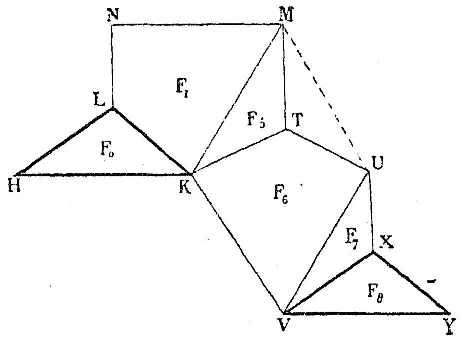
$$\begin{aligned}(\alpha+A\beta+B\gamma)(y-z)^2&+[1-\alpha+A(1-\beta)+B(1-\gamma)](z-x)^2\\ &+(\beta+A\gamma+B\alpha)(x-y)^2+[1-2\beta+A(1-2\gamma)+B(1-2\alpha)](x-t)^2\\ &+[1+\gamma+A(1+\alpha)+B(1+\beta)](y-t)^2+[1+\beta+A(1+\gamma)+B(1+\alpha)](z-t)^2,\end{aligned}$$

et cette forme est réduite si

$$\begin{gathered}\alpha+A\beta+B\gamma>0,\\ 1-\alpha+A(1-\beta)+B(1-\gamma)>0,\\ \beta+A\gamma+B\alpha>0,\\ 1-2\beta+A(1-2\gamma)+B(1-2\alpha)>0,\\ 1+\gamma+A(1+\alpha)+B(1+\beta)>0,\\ 1+\beta+A(1+\gamma)+B(1+\alpha)>0.\end{gathered}$$

Ces inégalités sont vérifiées si le point (A, B) reste à l'intérieur du

Fig. 11.



quadrilatère KTUV, dont les côtés ont respectivement pour équations

$$\begin{aligned}\alpha+A\beta+B\gamma&=0 \quad (\mathrm{KT}),\\ 1-2\beta+A(1-2\gamma)+B(1-2\alpha)&=0 \quad (\mathrm{TU}),\\ 1+\gamma+A(1+\alpha)+B(1+\beta)&=0 \quad (\mathrm{UV}),\\ \beta+A\gamma+B\alpha&=0 \quad (\mathrm{VK}),\end{aligned}$$

et la forme F_6 est réduite à l'intérieur du quadrilatère KTUV.

93. Cette forme cesse d'être réduite si le point (A, B) traverse le côté UV; dans ce cas, la substitution

$$x = z - t,$$
$$y = -x + y + z - t,$$
$$z = -x + z$$

conduit à la forme F_7

$$\begin{aligned}
&[-1-\gamma+A(-1-\alpha)+B(-1-\beta)](y-z)^2+[2-\alpha+A(2-\beta)+B(2-\gamma)](z-x)^2\\
&\quad+[1-\alpha+A(1-\beta)+B(1-\gamma)](x-y)^2+(\beta+A\gamma+B\alpha)(x-t)^2\\
&\quad+[1-\beta+A(1-\gamma)+B(1-\alpha)](y-t)^2\\
&\quad+[2-2\beta+\gamma+A(2-2\gamma+\alpha)+B(2-2\alpha+\beta)](z-t)^2,
\end{aligned}$$

et cette forme est réduite si l'on a

$$-1-\gamma+A(-1-\alpha)+B(-1-\beta)>0,$$
$$2-\alpha+A(2-\beta)+B(2-\gamma)>0,$$
$$1-\alpha+A(1-\beta)+B(1-\gamma)>0,$$
$$\beta+A\gamma+B\alpha>0,$$
$$1-\beta+A(1-\gamma)+B(1-\alpha)>0,$$
$$2-2\beta+\gamma+A(2-2\gamma+\alpha)+B(2-2\alpha+\beta)>0.$$

Ces inégalités sont vérifiées si le point (A, B) reste à l'intérieur du triangle UVX, dont les côtés ont pour équations

$$1+\gamma+A(1+\alpha)+B(1+\beta)=0 \quad (\mathrm{UV}),$$
$$1-\alpha+A(1-\beta)+B(1-\gamma)=0 \quad (\mathrm{VX}),$$
$$2-2\beta+\gamma+A(2-2\gamma+\alpha)+B(2-2\alpha+\beta)=0 \quad (\mathrm{XU}),$$

et la forme F_7 est réduite à l'intérieur du triangle UVX.

94. Mais cette forme cesse d'être réduite si l'on traverse le côté VX; dans ce cas, la substitution

$$x = x - z,$$
$$y = y - t,$$
$$z = x - t$$

conduit à la forme F_8

$$
\begin{aligned}
&[-1+\alpha+A(-1+\beta)+B(-1+\gamma)](y-z)^2 \\
&+[1-\alpha+\beta+A(1-\beta+\gamma)+A(1-\gamma+\alpha)](z-x)^2+(\beta+A\gamma+B\alpha)(x-y)^2 \\
&+[1-3\beta+A(1-3\gamma)+B(1-3\alpha)](x-t)^2 \\
&+[2+\gamma+A(2+\alpha)+B(2+\beta)](y-t)^2 \\
&+[3-2\alpha+A(3-2\beta)+B(3-2\gamma)](z-t)^2.
\end{aligned}
$$

Cette forme est réduite si l'on a

$$
\begin{gathered}
-1+\alpha+A(-1+\beta)+B(-1+\gamma)>0, \\
1-\alpha+\beta+A(1-\beta+\gamma)+B(1-\gamma+\alpha)>0, \\
\beta+A\gamma+B\alpha>0, \\
1-3\beta+A(1-3\gamma)+B(1-3\alpha)>0, \\
2+\gamma+A(2+\alpha)+B(2+\beta)>0, \\
3-2\alpha+A(3-2\beta)+B(3-2\gamma)>0.
\end{gathered}
$$

Ces inégalités sont satisfaites si le point (A, B) reste à l'intérieur du triangle VXY, dont les côtés ont respectivement pour équations

$$
\begin{aligned}
1-\alpha+A(1-\beta)+B(1-\gamma)&=0 \quad (\mathrm{XV}), \\
1-\alpha+\beta+A(1-\beta+\gamma)+B(1-\gamma+\alpha)&=0 \quad (\mathrm{VY}), \\
1-3\beta+A(1-3\gamma)+B(1-3\alpha)&=0 \quad (\mathrm{YX}),
\end{aligned}
$$

et la forme F_8 est réduite à l'intérieur du triangle VXY.

95. Si maintenant on compare la forme F_8 à la forme F_0, en rangeant les coefficients de ces deux formes d'après l'ordre de grandeur croissante des termes indépendants de A et B, on trouve que ces termes sont dans F_8 proportionnels aux termes correspondants dans F_0; on trouve aussi que les multiplicateurs de A et B sont dans F_8 proportionnels aux multiplicateurs de A et B dans F_0. On en conclut donc que F_8 commence la deuxième période d'une série périodique de formes dont la première période est formée de F_0, F_1, F_5, F_6, F_7, et les polygones correspondant à ces formes sont les éléments d'une chaîne indéfinie de polygones.

D'ailleurs, si dans F_8 on remplace x, y, z, t respectivement par x, t, y, z, de manière que les termes de F_8 soient dans le même ordre que les termes correspondants de F_0, c'est-à-dire si pour F_8 on écrit

$$\begin{aligned}&[3-2\alpha+A(3-2\beta)+B(3-2\gamma)](y-z)^2\\&\quad+[1-3\beta+A(1-3\gamma)+B(1-3\alpha)](z-x)^2\\&\quad+[1-\alpha+\beta+A(1-\beta+\gamma)+B(1-\gamma+\alpha)](x-y)^2\\&\quad+(\beta+A\gamma+B\alpha)(x-t)^2\\&\quad+[-1+\alpha+A(-1+\beta)+B(-1+\gamma)](y-t)^2\\&\quad+[2+\gamma+A(2+\alpha)+B(2+\beta)](z-t)^2,\end{aligned}$$

la forme F_8 ainsi transformée se déduit de F_0 par une série de substitutions qui peuvent se réduire à la substitution unique

$$\begin{aligned}x&=y-2z,\\y&=-y+z,\\z&=-x+z,\end{aligned}$$

de sorte que, la forme F_0 étant

$$F_0=(x+\alpha y+\beta z)^2+A(x+\beta y+\gamma z)^2+B(x+\gamma y+\alpha z)^2,$$

la forme F_8 peut s'écrire

$$\begin{aligned}F_8=&[-\beta x+(1-\alpha)y+(-2-\gamma)z]^2+A[-\gamma x+(1-\beta)y+(-2-\alpha)z]^2\\&+B[-\alpha x+(1-\gamma)y+(-2-\beta)z]^2\end{aligned}$$

ou

$$F_8=\beta^2(x+\alpha y+\beta z)^2+A\gamma^2(x+\beta y+\gamma z)^2+B\alpha^2(x+\gamma y+\alpha z)^2,$$

c'est-à-dire que F_8 s'obtient en multipliant F_0 par β^2, après avoir changé A et B respectivement en $A\dfrac{\gamma^2}{\beta^2}$ et $B\dfrac{\alpha^2}{\beta^2}$.

On déduirait de F_8 une forme F_9 qui se déduirait de F_8 comme F_1 se déduit de F_0; puis de F_9 se déduirait une forme F_{10} qu'on obtiendrait au moyen de F_9 comme on obtient F_5 au moyen de F_1, et ainsi de suite indéfiniment.

96. On a ainsi deux séries de formes auxquelles correspondent deux

chaînes de polygones; en développant ces deux chaînes, on couvrira le plan d'un réseau, mais ce réseau aura des lacunes. En particulier, le triangle MTU limite une forme qui ne pourrait être déduite d'aucune des formes déjà obtenues; il en est de même du triangle MPQ.

Mais, si l'on ajoute aux formes trouvées plus haut deux formes que je désignerai par F_9 et F_{10} et qui correspondront respectivement aux triangles MPQ et MTU, on pourra couvrir le plan tout entier de polygones qui tous se déduiront des neuf formes F_0, F_1, F_2, F_3, F_5, F_6, F_7, F_9, F_{10}; la seconde des figures qui suivent le montre d'une manière évidente.

Les formes F_9 et F_{10} s'obtiennent de la manière suivante. Pour la première, on traverse dans le triangle PMN le côté PM, ce qui conduit à appliquer à la forme F_2 la substitution

$$x = x - z,$$
$$y = y - t,$$
$$z = x - t,$$

d'où résulte la forme F_9,

$$\begin{aligned}
&[-1+\beta+A(-1+\gamma)+B(-1+\alpha)](y-z)^2\\
&\quad+[1-\beta+\gamma+A(1-\gamma+\alpha)+B(1-\alpha+\beta)](z-x)^2\\
&\quad+(\gamma+A\alpha+B\beta)(x-y)^2\\
&\quad+[1-3\gamma+A(1-3\alpha)+B(1-3\beta)](x-t)^2\\
&\quad+[2+\alpha+A(2+\beta)+B(2+\gamma)](y-t)^2\\
&\quad+[3-2\beta+A(3-2\gamma)+B(3-2\alpha)](z-t)^2,
\end{aligned}$$

qui est limitée par le triangle MPQ.

Pour la forme F_{10}, on l'obtient en traversant le côté MT du triangle KMT, ce qui conduit à appliquer à la forme F_5 la substitution

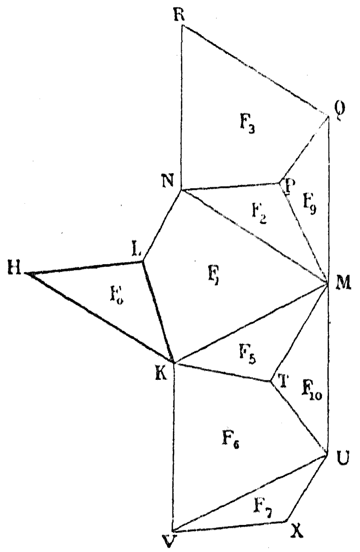
$$x = x - z,$$
$$y = y - t,$$
$$z = x - t,$$

d'où résulte la forme F_{10}:

$$\begin{aligned}
&[-1+\beta-\gamma+A(-1+\gamma-\alpha)+B(-1+\alpha-\beta)](y-z)^2\\
&\quad+[1-\beta+A(1-\gamma)+B(1-\alpha)](z-x)^2\\
&\quad+[2-\beta+\gamma+A(2-\gamma+\alpha)+B(2-\alpha+\beta)](x-y)^2\\
&\quad+[1-2\beta+A(1-2\gamma)+B(1-2\alpha)](x-t)^2\\
&\quad+[2-2\beta+\gamma+A(2-2\gamma+\alpha)+B(2-2\alpha+\beta)](y-t)^2\\
&\quad+[2-\beta+A(2-\gamma)+B(2-\alpha)](z-t)^2.
\end{aligned}$$

97. Les polygones d'où tous les autres peuvent se déduire forment donc la *fig.* 12.

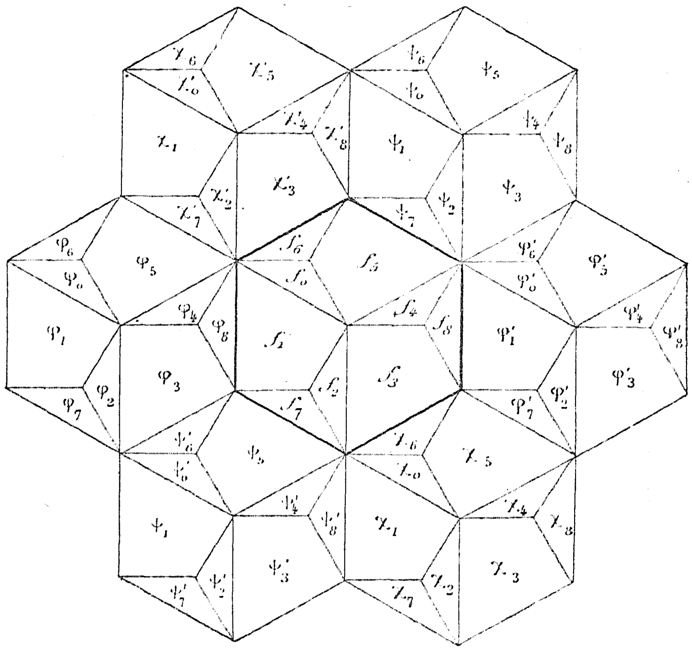
Fig. 12.



Je figure ci-contre (*fig.* 13) une partie du réseau qui couvre le plan, mais je change les notations; les formes désignées par des lettres affectées du même indice se correspondent, c'est-à-dire peuvent être déduites l'une de l'autre par la combinaison des transformations qui de F_0 font passer à F_4 ou à F_8.

Les formes désignées par les mêmes lettres accentuées sont inverses l'une de l'autre, c'est-à-dire se déduisent des formes fondamentales en renversant pour l'une les substitutions qui conduisent à l'autre. Enfin, au lieu de prendre pour formes fondamentales les formes relatives à la figure précédente, on en prend huit nouvelles, qui sont désignées ici par la lettre f affectée de différents indices. Les formes précédemment désignées par F_0, F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6, F_7, F_8, F_9, F_{10} sont désignées dans

Fig. 13.



la figure ci-dessus respectivement par f_0, f_5, ψ_7, ψ_1, ψ_0, f_4, f_3, χ_6, χ_0, ψ_2, f_8.

Je dois ajouter que, comme dans le premier exemple, la figure que je viens de tracer est très déformée.

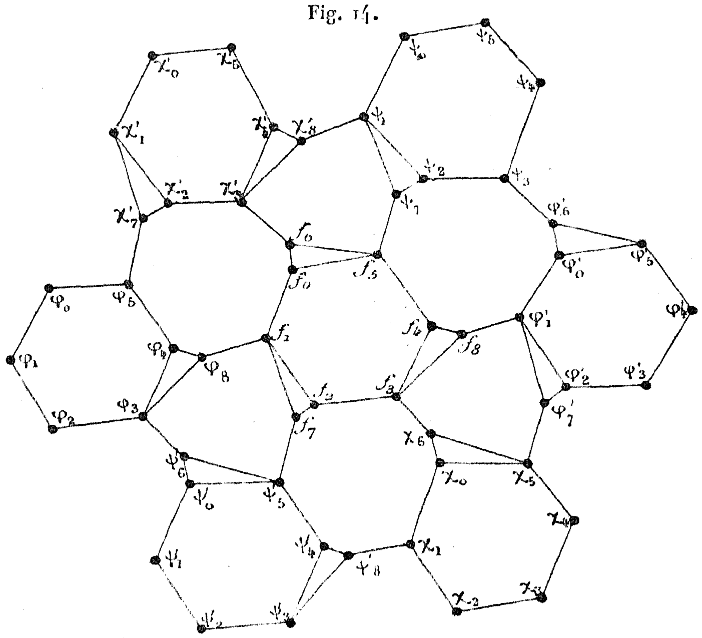
98. Si, au lieu de la représentation par polygones, on adopte la représentation symbolique du n° 71, on aura la *fig.* 14.

Dans cette figure on a employé, pour désigner les formes, les mêmes lettres que dans la figure précédente.

99. Enfin voici le Tableau des neuf formes fondamentales; les sub-

stitutions placées entre deux formes sont celles qui permettent de passer

Fig. 14.



d'une forme à la suivante :

$$f_0.$$

$$\begin{aligned}&[1-\alpha+\mathrm{A}(1-\beta)+\mathrm{B}(1-\gamma)](y-z)^2+(-\beta-\mathrm{A}\gamma-\mathrm{B}\alpha)(z-x)^2\\ &\quad+(-\alpha-\mathrm{A}\beta-\mathrm{B}\gamma)(x-y)^2+[1-\gamma+\mathrm{A}(1-\alpha)+\mathrm{B}(1-\beta)](x-t)^2\\ &\quad+[1+\alpha-\gamma+\mathrm{A}(1+\beta-\alpha)+\mathrm{B}(1+\gamma-\beta)](y-t)^2+(1+\mathrm{A}+\mathrm{B})(z-t)^2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x&=-x+z,\\ y&=-y+t,\\ z&=-x+t.\end{aligned}$$

$$f_1.$$

$$\begin{aligned}&(\alpha+\mathrm{A}\beta+\mathrm{B}\gamma)(y-z)^2+[1+\beta+\mathrm{A}(1+\gamma)+\mathrm{B}(1+\alpha)](z-x)^2\\ &\quad+[1-2\alpha+\mathrm{A}(1-2\beta)+\mathrm{B}(1-2\gamma)](x-y)^2+[1+\alpha+\mathrm{A}(1+\beta)+\mathrm{B}(1+\gamma)](x-t)^2\\ &\quad+[1-\gamma+\mathrm{A}(1-\alpha)+\mathrm{B}(1-\beta)](y-t)^2+(\gamma+\mathrm{A}\alpha+\mathrm{B}\beta)(z-t)^2.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x&=x-y,\\ y&=-y+t,\\ z&=x-y-z+t.\end{aligned}$$

f_2.

$$(-\gamma - A\alpha - B\beta)(y-z)^2 + (-\beta - A\gamma - B\alpha)(z-x)^2$$
$$+ [1 - \beta + A(1-\gamma) + B(1-\alpha)](x-y)^2$$
$$+ [1 - \alpha + \beta + A(1-\beta+\gamma) + B(1-\gamma+\alpha)](x-t)^2$$
$$+ (1 + A + B)(y-t)^2 + [1 - \alpha + A(1-\beta) + B(1-\gamma)](z-t)^2.$$

$$x = y - t,$$
$$y = x - t,$$
$$z = x - z.$$

f_3.

$$(\beta + A\gamma + B\alpha)(y-z)^2 + [1 + \gamma + A(1+\alpha) + B(1+\beta)](z-x)^2$$
$$+ [1 - 2\beta + A(1-2\gamma) + B(1-2\alpha)](x-y)^2$$
$$+ [1 + \beta + A(1+\gamma) + B(1+\alpha)](x-t)^2$$
$$+ [1 - \alpha + A(1-\beta) + B(1-\gamma)](y-t)^2 + (\alpha + A\beta + B\gamma)(z-t)^2.$$

$$x = x - y,$$
$$y = -y + t,$$
$$z = x - y - z + t.$$

f_4.

$$(-\alpha - A\beta - B\gamma)(y-z)^2 + (-\gamma - A\alpha - B\beta)(z-x)^2$$
$$+ [1 - \gamma + A(1-\alpha) + B(1-\beta)](x-y)^2$$
$$+ [1 - \beta + \gamma + A(1-\gamma+\alpha) + B(1-\alpha+\beta)](x-t)^2 + (1 + A + B)(y-t)^2$$
$$+ [1 - \beta + A(1-\gamma) + B(1-\alpha)](z-t)^2,$$

$$x = y - t,$$
$$y = x - t,$$
$$z = x - z.$$

f_5.

$$(\gamma + A\alpha + B\beta)(y - z)^2 + [1 + \alpha + A(1 + \beta) + B(1 + \gamma)](z - x)^2$$
$$+ [1 - 2\gamma + A(1 - 2\alpha) + B(1 - 2\beta)](x - y)^2$$
$$+ [1 + \gamma + A(1 + \alpha) + B(1 + \beta)](x - t)^2$$
$$+ [1 - \beta + A(1 - \gamma) + B(1 - \alpha)](y - t)^2 + (\beta + A\gamma + B\alpha)(z - t)^2,$$

$$x = x - z,$$
$$y = y - t,$$
$$z = x - t.$$

f_6.

$$[-1 + 2\gamma + A(-1 + 2\alpha) + B(-1 + 2\beta)](y - z)^2$$
$$+ [2 - \gamma + A(2 - \alpha) + B(2 - \beta)](z - x)^2$$
$$+ [1 - \gamma + A(1 - \alpha) + B(1 - \beta)](x - y)^2$$
$$+ [-1 + \gamma - \alpha + A(-1 + \alpha - \beta) + B(-1 + \beta - \gamma)](x - t)^2$$
$$+ [2 + \alpha - \gamma + A(2 + \beta - \alpha) + B(2 + \gamma - \beta)](y - t)^2$$
$$+ [2 + \alpha - 2\gamma + A(2 + \beta - 2\alpha) + B(2 + \gamma - 2\beta)](z - t)^2.$$

Enfin la substitution

$$x = -x + z,$$
$$y = -y + t,$$
$$z = -x + t,$$

appliquée à la forme f_1, donne la forme f_7,

$$[-1 + 2\alpha + A(-1 + 2\beta) + B(-1 + 2\gamma)](y - z)^2$$
$$+ [2 - \alpha + A(2 - \beta) + B(2 - \gamma)](z - x)^2 + [1 - \alpha + A(1 - \beta) + B(1 - \gamma)](x - y)^2$$
$$+ [-1 + 2\alpha + \gamma + A(-1 + 2\beta + \alpha) + B(-1 + 2\gamma + \beta)](x - t)^2$$
$$+ [2 - 2\alpha - \gamma + A(2 - 2\beta - \alpha) + B(2 - 2\gamma - \beta)](y - t)^2$$
$$+ [2 - 2\alpha + \beta + A(2 - 2\beta + \gamma) + B(2 - 2\gamma + \alpha)](z - t)^2,$$

et la substitution

$$
\begin{aligned}
x &= x - y,\\
y &= -y + t,\\
z &= x - y - z + t,
\end{aligned}
$$

appliquée à la forme f_4, donne la forme f_8,

$$
\begin{aligned}
&[-1 + \beta - \gamma + A(-1 + \gamma - \alpha) + B(-1 + \alpha - \beta)](y - z)^2\\
&\quad + [1 - \beta + A(1 - \gamma) + B(1 - \alpha)](z - x)^2\\
&\quad + [2 - \beta + \gamma + A(2 - \gamma + \alpha) + B(2 - \alpha + \beta)](x - y)^2\\
&\quad + [1 - 2\beta + A(1 - 2\gamma) + B(1 - 2\alpha)](x - t)^2\\
&\quad + [2 - 2\beta + \gamma + A(2 - 2\gamma + \alpha) + B(2 - 2\alpha + \beta)](y - t)^2\\
&\quad + [2 - \beta + A(2 - \gamma) + B(2 - \alpha)](z - t)^2.
\end{aligned}
$$

100. Je donnerai un dernier exemple tiré de l'équation

$$x^{13} - 1 = 0,$$

de laquelle on déduit l'équation

$$x^3 + x^2 - 4x + 1 = 0.$$

Soient α, β, γ les racines de cette dernière équation, lesquelles sont approximativement

$$\alpha = 0,273, \quad \beta = 1,377, \quad \gamma = -2,650$$

et entre lesquelles existent les relations suivantes :

$$
\begin{aligned}
\alpha + \beta + \gamma &= -1,\\
\beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta &= -4,\\
\alpha\beta\gamma &= -1,
\end{aligned}
$$

$$\beta\gamma = \alpha + \beta + 2\gamma = \gamma - 1, \quad \gamma\alpha = \beta + \gamma + 2\alpha = \alpha - 1, \quad \alpha\beta = \gamma + \alpha + 2\beta = \beta - 1,$$
$$\alpha^2 = \beta + 2\gamma + 4, \qquad \beta^2 = \gamma + 2\alpha + 4, \qquad \gamma^2 = \alpha + 2\beta + 4.$$

101. Je considère la forme

$$(\alpha x + \beta y + \gamma z)^2 + A(\beta x + \gamma y + \alpha z)^2 + B(\gamma x + \alpha y + \beta z)^2;$$

j'y remplace x, y, z par $x-t$, $y-t$, $z-t$, et j'obtiens ainsi la forme suivante, que je désigne par F_0 :

$$\begin{aligned}&[1-\gamma+A(1-\alpha)+B(1-\beta)](y-z)^2+[1-\alpha+A(1-\beta)+B(1-\gamma)](z-x)^2\\ &+[1-\beta+A(1-\gamma)+B(1-\alpha)](x-y)^2+(-\alpha-A\beta-B\gamma)(x-t)^2\\ &+(-\beta-A\gamma-B\alpha)(y-t)^2+(-\gamma-A\alpha-B\beta)(z-t)^2.\end{aligned}$$

Cette forme est réduite si A et B vérifient les inégalités suivantes :

$$\begin{gathered}1-\gamma+A(1-\alpha)+B(1-\beta)>0,\\ 1-\alpha+A(1-\beta)+B(1-\gamma)>0,\\ 1-\beta+A(1-\gamma)+B(1-\alpha)>0,\\ -\alpha-A\beta-B\gamma>0,\\ -\beta-A\gamma-B\alpha>0,\\ -\gamma-A\alpha-B\beta>0,\end{gathered}$$

lesquelles sont vérifiées si le point (A, B) reste (*fig.* 15) à l'intérieur du triangle PQR, dont les côtés ont respectivement pour équations

$$\begin{aligned}\alpha+A\beta+B\gamma&=0 \quad (\mathrm{QR}),\\ \beta+A\gamma+B\alpha&=0 \quad (\mathrm{RP}),\\ \gamma+A\alpha+B\beta&=0 \quad (\mathrm{PQ}).\end{aligned}$$

102. Si le point (A, B) traverse le côté PQ, la forme F_0 cesse d'être réduite, car le coefficient de $(z-t)^2$ devient négatif; nous emploierons la substitution

$$\begin{aligned}x&=x-y,\\ y&=y-t,\\ z&=x-y-z+t,\end{aligned}$$

qui conduit à la forme F_1,

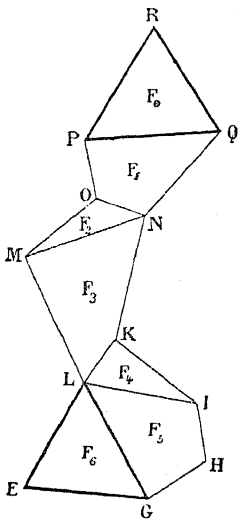
$$\begin{aligned}&(\gamma+A\alpha+B\beta)(y-z)^2+[1-2\gamma+A(1-2\alpha)+B(1-2\beta)](z-x)^2\\ &+[-\alpha-\gamma+A(-\beta-\alpha)+B(-\gamma-\beta)](x-y)^2\\ &+[1-\beta+\gamma+A(1-\gamma+\alpha)+B(1-\alpha+\beta)](x-t)^2\\ &+[-\beta-\gamma+A(-\gamma-\alpha)+B(-\alpha-\beta)](y-t)^2\\ &+[1-\alpha-\gamma+A(1-\beta-\alpha)+B(1-\gamma-\beta)](z-t)^2,\end{aligned}$$

laquelle est réduite si A et B vérifient les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned}
&\gamma + A\alpha + B\beta > 0,\\
&1 - 2\gamma + A(1 - 2\alpha) + B(1 - 2\beta) > 0,\\
&-\alpha - \gamma + A(-\beta - \alpha) + B(-\gamma - \beta) > 0,\\
&1 - \beta + \gamma + A(1 - \gamma + \alpha) + B(1 - \alpha + \beta) > 0,\\
&-\beta - \gamma + A(-\gamma - \alpha) + B(-\alpha - \beta) > 0,\\
&1 - \alpha - \gamma + A(1 - \beta - \alpha) + B(1 - \gamma - \beta) > 0.
\end{aligned}$$

Ces six inégalités sont vérifiées, pourvu que le point (A, B) reste à l'inté-

Fig. 15.



rieur du quadrilatère NOPQ, dont les côtés ont respectivement pour équations

$$\begin{aligned}
\gamma + A\alpha + B\beta &= 0 \quad (PQ),\\
1 - 2\gamma + A(1 - 2\alpha) + B(1 - 2\beta) &= 0 \quad (NO),\\
\alpha + \gamma + A(\beta + \alpha) + B(\gamma + \beta) &= 0 \quad (QN),\\
\beta + \gamma + A(\gamma + \alpha) + B(\alpha + \beta) &= 0 \quad (PO),
\end{aligned}$$

et nous dirons que F_1 est réduit à l'intérieur du quadrilatère NOPQ.

103. Si le point (A, B) traverse le côté ON, la forme F_1 cesse d'être réduite, et la substitution

$$x = y - t,$$
$$y = x - t,$$
$$z = x - z$$

conduit à la forme F_2,

$$\begin{aligned}[& -1 + 2\gamma + A(-1 + 2\alpha) + B(-1 + 2\beta)](y - z)^2 \\ & + [2 - \alpha - 3\gamma + A(2 - \beta - 3\alpha) + B(2 - \gamma - 3\beta)](z - x)^2 \\ & + [1 - \alpha - 3\gamma + A(1 - \beta - 3\alpha) + B(1 - \gamma - 3\beta)](x - y)^2 \\ & + [-1 - \beta + \gamma + A(-1 - \gamma + \alpha) + B(-1 - \alpha + \beta)](x - t)^2 \\ & + [2 - \beta - \gamma + A(2 - \gamma - \alpha) + B(2 - \alpha - \beta)](y - t)^2 \\ & + [1 - \gamma + A(1 - \alpha + B(1 - \beta)](z - t)^2,\end{aligned}$$

laquelle est réduite si A et B vérifient les inégalités suivantes,

$$\begin{aligned} & -1 + 2\gamma + A(-1 + 2\alpha) + B(-1 + 2\beta) > 0, \\ & 2 - \alpha - 3\gamma + A(2 - \beta - 3\alpha) + B(2 - \gamma - 3\beta) > 0, \\ & 1 - \alpha - 3\gamma + A(1 - \beta - 3\alpha) + B(1 - \gamma - 3\beta) > 0, \\ & -1 - \beta + \gamma + A(-1 - \gamma + \alpha) + B(-1 - \alpha + \beta) > 0, \\ & 2 - \beta - \gamma + A(2 - \gamma - \alpha) + B(2 - \alpha - \beta) > 0, \\ & 1 - \gamma + A(1 - \alpha) + B(1 - \beta) > 0,\end{aligned}$$

Ces inégalités sont vérifiées si le point (A, B) reste à l'intérieur du triangle MNO, dont les côtés ont respectivement pour équations

$$\begin{aligned} -1 - \beta + \gamma + A(-1 - \gamma + \alpha) + B(-1 - \alpha + \beta) = 0 \quad & (\mathrm{MO}), \\ -1 + 2\gamma + A(-1 + 2\alpha) + B(-1 + 2\beta) = 0 \quad & (\mathrm{NO}), \\ 1 - \alpha - 3\gamma + A(1 - \beta - 3\alpha) + B(1 - \gamma - 3\beta) = 0 \quad & (\mathrm{MN}),\end{aligned}$$

et la forme F_2 est réduite à l'intérieur du triangle MNO.

104. Supposons maintenant que le point (A, B) traverse le côté MN; la forme F_2 cessera d'être réduite. Alors la substitution

$$x = x - z,$$
$$y = y - t,$$
$$z = x - t$$

conduit à la forme F_3,

$$
\begin{aligned}
&[-1+\alpha+3\gamma+A(-1+\beta+3\alpha)+B(-1+\gamma+3\beta)](y-z)^2\\
&\quad+[1-\gamma+A(1-\alpha)+B(1-\beta)](z-x)^2\\
&\quad+[-\alpha-\gamma+A(-\beta-\alpha)+B(-\gamma-\beta)](x-y)^2\\
&\quad+[\alpha+2\gamma+A(\beta+2\alpha)+B(\gamma+2\beta)](x-t)^2\\
&\quad+[4-3\gamma+A(4-3\alpha)+B(4-3\beta)](y-t)^2\\
&\quad+[3-2\alpha-6\gamma+A(3-2\beta-6\alpha)+B(3-2\gamma-6\beta)](z-t)^2,
\end{aligned}
$$

qui est réduite si les six inégalités suivantes sont vérifiées :

$$
\begin{aligned}
&-1+\alpha+3\gamma+A(-1+\beta+3\alpha)+B(-1+\gamma+3\beta)>0,\\
&1-\gamma+A(1-\alpha)+B(1-\beta)>0,\\
&-\alpha-\gamma+A(-\beta-\alpha)+B(-\gamma-\beta)>0,\\
&\alpha+2\gamma+A(\beta+2\alpha)+B(\gamma+2\beta)>0,\\
&4-3\gamma+A(4-3\alpha)+B(4-3\beta)>0,\\
&3-2\alpha-6\gamma+A(3-2\beta-6\alpha)+B(3-2\gamma-6\beta)>0.
\end{aligned}
$$

Il est facile de voir que ces inégalités sont vérifiées si le point (A, B) reste à l'intérieur du quadrilatère KLMN, dont les côtés ont respectivement pour équations

$$
\begin{aligned}
-1+\alpha+3\gamma+A(-1+\beta+3\alpha)+B(-1+\gamma+3\beta)&=0 \quad (\mathrm{MN}),\\
1-\gamma+A(1-\alpha)+B(1-\beta)&=0 \quad (\mathrm{ML}),\\
\alpha+\gamma+A(\beta+\alpha)+B(\gamma+\beta)&=0 \quad (\mathrm{NK}),\\
3-2\alpha-6\gamma+A(3-2\beta-6\alpha)+B(3-2\gamma-6\beta)&=0 \quad (\mathrm{KL}),
\end{aligned}
$$

et la forme F_3 est réduite à l'intérieur du quadrilatère KLMN.

105. Si le point (A, B) traverse le côté KL, nous ferons la substitution

$$
\begin{aligned}
x&=-y+t,\\
y&=-z+t,\\
z&=x-y-z+t,
\end{aligned}
$$

qui conduit à la forme F_4

$$
\begin{aligned}
&[-3+\alpha+5\gamma+A(-3+\beta+5\alpha)+B(-3+\gamma+5\beta)](y-z)^2\\
&\quad+[4-2\alpha-7\gamma+A(4-2\beta-7\alpha)+B(4-2\gamma-7\beta)](z-x)^2\\
&\quad+[2-\alpha-3\gamma+A(2-\beta-3\alpha)+B(2-\gamma-3\beta)](x-y)^2\\
&\quad+[-3+2\alpha+6\gamma+A(-3+2\beta+6\alpha)+B(-3+2\gamma+6\beta)](x-t\\
&\quad+[3-\alpha-4\gamma+A(3-\beta-4\alpha)+B(3-\gamma-4\beta)](y-t)^2\\
&\quad+[7-2\alpha-9\gamma+A(7-2\beta-9\alpha)+B(7-2\gamma-9\beta)](z-t)^2.
\end{aligned}
$$

Cette forme est réduite si les inégalités suivantes sont vérifiées,

$$
\begin{gathered}
-3+\alpha+5\gamma+A(-3+\beta+5\alpha)+B(-3+\gamma+5\beta)>0,\\
4-2\alpha-7\gamma+A(4-2\beta-7\alpha)+B(4-2\gamma-7\beta)>0,\\
2-\alpha-3\gamma+A(2-\beta-3\alpha)+B(2-\gamma-3\beta)>0,\\
-3+2\alpha+6\gamma+A(-3+2\beta+6\alpha)+B(-3+2\gamma+6\beta)>0,\\
3-\alpha-4\gamma+A(3-\beta-4\alpha)+B(3-\gamma-4\beta)>0,\\
7-2\alpha-9\gamma+A(7-2\beta-9\alpha)+B(7-2\gamma-9\beta)>0,
\end{gathered}
$$

et ces inégalités sont vérifiées, si le point (A, B) reste à l'intérieur du triangle IKL, dont les côtés ont respectivement pour équations

$$
\begin{aligned}
-3+\alpha+5\gamma+A(-3+\beta+5\alpha)+B(-3+\gamma+5\beta)&=0 \quad (\mathrm{KI}),\\
4-2\alpha-7\gamma+A(4-2\beta-7\alpha)+B(4-2\gamma-7\beta)&=0 \quad (\mathrm{LI}),\\
-3+2\alpha+6\gamma+A(-3+2\beta+6\alpha)+B(-3+2\gamma+6\beta)&=0 \quad (\mathrm{KL}).
\end{aligned}
$$

106. Si l'on traverse LI, la forme F_4 cesse d'être réduite et la substitution

$$
\begin{aligned}
x&=y-t,\\
y&=x-t,\\
z&=x-z
\end{aligned}
$$

conduit à la forme F_5,

$$
\begin{aligned}
&[-4+2\alpha+7\gamma+A(-4+2\beta+7\alpha)+B(-4+2\gamma+7\beta)](y-z)^2\\
&\quad+[11-4\alpha-16\gamma+A(11-4\beta-16\alpha)+B(11-4\gamma-16\beta)](z-x)^2\\
&\quad+[6-3\alpha-10\gamma+A(6-3\beta-10\alpha)+B(6-3\gamma-10\beta)](x-y)^2\\
&\quad+[-1+\alpha+3\gamma+A(-1+\beta+3\alpha)+B(-1+\gamma+3\beta)](x-t)^2\\
&\quad+[1-\gamma+A(1-\alpha)+B(1-\beta)](y-t)^2\\
&\quad+[1+\alpha-2\gamma+A(1+\beta-2\alpha)+B(1+\gamma-2\beta)](z-t)^2,
\end{aligned}
$$

qui est réduite si les six inégalités suivantes sont vérifiées :

$$-4+2\alpha+7\gamma+A(-4+2\beta+7\alpha)+B(-4+2\gamma+7\beta)>0,$$
$$11-4\alpha-16\gamma+A(11-4\beta-16\alpha)+B(11-4\gamma-16\beta)>0,$$
$$6-3\alpha-10\gamma+A(6-3\beta-10\alpha)+B(6-3\gamma-10\beta)>0,$$
$$-1+\alpha+3\gamma+A(-1+\beta+3\alpha)+B(-1+\gamma+3\beta)>0,$$
$$1-\gamma+A(1-\alpha)+B(1-\beta)>0,$$
$$1-\alpha-2\gamma+A(1-\beta-2\alpha)+B(1-\gamma-2\beta)>0.$$

Ces inégalités sont vérifiées si le point (A, B) reste à l'intérieur du quadrilatère GHIK, dont les côtés ont respectivement pour équations

$$-4+2\alpha+7\gamma+A(-4+2\beta+7\alpha)+B(-4+2\gamma+7\beta)=0 \quad (\mathrm{LI}),$$
$$6-3\alpha-10\gamma+A(6-3\beta-10\alpha)+B(6-3\gamma-10\beta)=0 \quad (\mathrm{GH}),$$
$$1-\gamma+A(1-\alpha)+B(1-\beta)=0 \quad (\mathrm{LG}),$$
$$1-\alpha-2\gamma+A(1-\beta-2\alpha)+B(1-\gamma-2\beta)=0 \quad (\mathrm{IH}),$$

et la forme F_5 est réduite à l'intérieur du quadrilatère GHIK.

107. Enfin, si le point (A, B) traverse le côté LG, la forme F_5 cesse d'être réduite, et la substitution

$$x=z-t,$$
$$y=-x+y+z-t,$$
$$z=-x+z$$

conduit à la forme F_6 :

$$\begin{aligned}
&[-1+\gamma+A(-1+\alpha)+B(-1+\beta)](y-z)^2\\
&\quad+[2-\alpha-3\gamma+A(2-\beta-3\alpha)+B(2-\gamma-3\beta)](z-x)^2\\
&\quad+[7-3\alpha-11\gamma+A(7-3\beta-11\alpha)+B(7-3\gamma-11\beta)](x-y)^2\\
&\quad+[10-4\alpha-15\gamma+A(10-4\beta-15\alpha)+B(10-4\gamma-15\beta)](x-t)^2\\
&\quad+[-3+2\alpha+6\gamma+A(-3+2\beta+6\alpha)+B(-3+2\gamma+6\beta)](y-t)^2\\
&\quad+[\alpha+2\gamma+A(\beta+2\alpha)+B(\gamma+2\beta)](z-t)^2.
\end{aligned}$$

Cette forme est réduite si les six inégalités suivantes sont vérifiées :

$$
\begin{gathered}
-1+\gamma+A(-1+\alpha)+B(-1+\beta)>0, \\
2-\alpha-3\gamma+A(2-\beta-3\alpha)+B(2-\gamma-3\beta)>0, \\
7-3\alpha-11\gamma+A(7-3\beta-11\alpha)+B(7-3\gamma-11\beta)>0, \\
10-4\alpha-15\gamma+A(10-4\beta-15\alpha)+B(10-4\gamma-15\beta)>0, \\
-3+2\alpha+6\gamma+A(-3+2\beta+6\alpha)+B(-3+2\gamma+6\beta)>0, \\
\alpha+2\gamma+A(\beta+2\alpha)+B(\gamma+2\beta)>0.
\end{gathered}
$$

Il est facile de voir que ces inégalités sont vérifiées si le point (A, B) est à l'intérieur du triangle EGL, dont les côtés ont respectivement pour équations

$$
\begin{aligned}
-1+\gamma+A(-1+\alpha)+B(-1+\beta)&=0 \quad (\mathrm{LG}), \\
7-3\alpha-11\gamma+A(7-3\beta-11\alpha)+B(7-3\gamma-11\beta)&=0 \quad (\mathrm{GE}), \\
-3+2\alpha+6\gamma+A(-3+2\beta+6\alpha)+B(-3+2\gamma+6\beta)&=0 \quad (\mathrm{EL}),
\end{aligned}
$$

et la forme F_6 est réduite à l'intérieur du triangle EGL.

108. D'ailleurs, si l'on calcule les valeurs numériques des coefficients de la forme F_6, on voit que les termes de ces coefficients sont proportionnels aux termes des coefficients de la forme F_0; seulement l'ordre est différent. Mais, si dans la forme F_6 on remplace les lettres x, y, z, t respectivement par z, t, x, y, cette forme F_6 devient

$$
\begin{aligned}
&[10-4\alpha-15\gamma+A(10-4\beta-15\alpha)+B(10-4\gamma-15\beta)](y-z)^2 \\
&\quad+[2-\alpha-3\gamma+A(2-\beta-3\alpha)+B(2-\gamma-3\beta)](z-x)^2 \\
&\quad+[\alpha+2\gamma+A(\beta+2\alpha)+B(\gamma+2\beta)](x-y)^2 \\
&\quad+[1-\gamma+A(1-\alpha)+B(1-\beta)](x-t)^2 \\
&\quad+[-3+2\alpha+6\gamma+A(-3+2\beta+6\alpha)+B(-3+2\gamma+6\beta)](y-t)^2 \\
&\quad+[7-3\alpha-11\gamma+A(7-3\beta-11\alpha)+B(7-3\gamma-11\beta)](z-t)^2,
\end{aligned}
$$

et les coefficients de cette forme F_6 ainsi transformée donnent des rapports égaux entre les termes constants et les multiplicateurs de A et B.

Si l'on remarque en outre que les substitutions qui de F_0 conduisent à cette dernière forme F_6 peuvent se remplacer par la substitution unique

$$\begin{aligned} x &= x + y - 3z, \\ y &= x - 2z, \\ z &= x + 2y - 5z, \end{aligned}$$

on voit que F_6 peut s'écrire ainsi,

$$[-x+(\alpha+2\gamma)y-(3\alpha+2\beta+5\gamma)z]^2+A[-x+(\beta+2\alpha)y-(3\beta+2\gamma+5\alpha)z]^2 + B[-x+(\gamma+2\beta)y-(3\gamma+2\alpha+5\beta)z]^2,$$

et cette expression peut encore s'écrire

$$(1-\gamma)^2(\alpha x+\beta y+\gamma z)^2+A(1-\alpha)^2(\beta x+\gamma y+\alpha z)^2+B(1-\beta)^2(\gamma x+\alpha y+\beta z)^2,$$

c'est-à-dire que *la forme* F_6 *se déduit de* F_0 *en multipliant* F_0 *par* $(1-\gamma)^2$, *après avoir remplacé* A *et* B *respectivement par*

$$A\left(\frac{1-\alpha}{1-\gamma}\right)^2 \quad \text{et} \quad B\left(\frac{1-\beta}{1-\gamma}\right)^2;$$

si l'on opère sur la forme F_6 périodiquement et successivement la série des substitutions qui ont conduit de F_0 à F_6, on obtiendra une suite de formes réduites à l'intérieur de triangles ou de quadrilatères qu'on déduirait facilement des triangles et quadrilatères déjà obtenus. On formera ainsi une chaîne de triangles et de quadrilatères qu'on poursuivra indéfiniment au moyen d'une suite périodique de substitutions, et cette chaîne s'étendra à partir de F_0 indéfiniment dans les deux sens si, outre les substitutions qui conduisent de F_0 à F_6, on applique périodiquement la série des substitutions inverses, c'est-à-dire la série des substitutions qui ramèneraient de F_6 à F_0.

Mais cette chaîne ne couvre pas le plan.

109. Revenant alors à la forme F_0, qui est réduite à l'intérieur du triangle PQR, je traverse le côté PQ, ce qui me conduit à la forme F_1, réduite à l'intérieur du quadrilatère PQON; puis je sors de ce quadrilatère par le côté QN, et, la forme F_1 cessant alors d'être réduite, j'ap-

plique à cette forme la substitution

$$\begin{aligned} x &= -y+t, \\ y &= x-z, \\ z &= x-y, \end{aligned}$$

qui conduit à la forme F_7,

$$\begin{aligned} &(-\alpha-A\beta-B\gamma)(y-z)^2+[1-\gamma+A(1-\alpha)+B(1-\beta)](z-x)^2 \\ &\quad+(1+A+B)(x-y)^2+[1-\alpha-3\gamma+A(1-\beta-3\alpha)+B(1-\gamma-3\beta)](x-t)^2 \\ &\quad+[1-\alpha-\beta+A(1-\beta-\gamma)+B(1-\gamma-\alpha)](y-t)^2 \\ &\quad+[\alpha+\gamma+A(\beta+\alpha)+B(\gamma+\beta)](z-t)^2, \end{aligned}$$

laquelle est réduite si les six inégalités suivantes sont vérifiées :

$$\begin{gathered} -\alpha-A\beta-B\gamma>0, \\ 1-\gamma+A(1-\alpha)+B(1-\beta)>0, \\ 1+A+B>0, \\ 1-\alpha-3\gamma+A(1-\beta-3\alpha)+B(1-\gamma-3\beta)>0, \\ 1-\alpha-\beta+A(1-\beta-\gamma)+B(1-\gamma-\alpha)>0, \\ \alpha+\gamma+A(\beta+\alpha)+B(\gamma+\beta)>0. \end{gathered}$$

Ces six inégalités sont vérifiées si le point (A, B) reste à l'intérieur du triangle NQS, dont les côtés ont pour équations

$$\begin{aligned} \alpha+A\beta+B\gamma=0 &\quad (QS), \\ 1-\alpha-3\gamma+A(1-\beta-3\alpha)+B(1-\gamma-3\beta)=0 &\quad (SN), \\ \alpha+\gamma+A(\beta+\alpha)+B(\gamma+\beta)=0 &\quad (QN), \end{aligned}$$

et la forme F_7 est réduite à l'intérieur du triangle SQN.

110. Cette forme F_7 cessera d'être réduite si le point (A,B) traverse le côté NS ; alors la substitution

$$\begin{aligned} x &= x-y-z+t, \\ y &= -z+t, \\ z &= x-z \end{aligned}$$

conduit à la forme F_8,

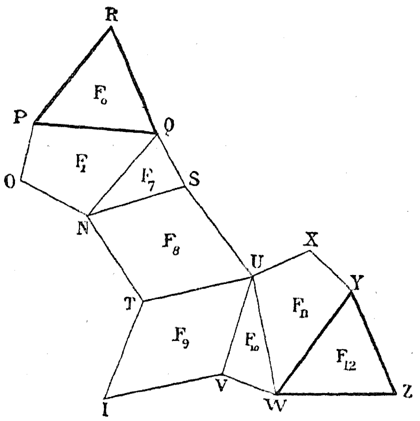
$$\begin{aligned}
&[-1+\alpha+3\gamma+A(-1+\beta+3\alpha)+B(-1+\gamma+3\beta)](y-z)^2\\
&+[1-2\gamma+A(1-2\alpha)+B(1-2\beta)](z-x)^2\\
&+[2-\alpha-3\gamma+A(2-\beta-3\alpha)+B(2-\gamma-3\beta)](x-y)^2\\
&+[-1+3\gamma+A(-1+3\alpha)+B(-1+3\beta)](x-t)^2\\
&+[2-\alpha-4\gamma+A(2-\beta-4\alpha)+B(2-\gamma-4\beta)](y-t)^2\\
&+[3-\alpha-2\gamma+A(3-\beta-2\alpha)+B(3-\gamma-2\beta)](z-t)^2,
\end{aligned}$$

et cette forme est réduite si les six inégalités suivantes sont vérifiées :

$$\begin{aligned}
&-1+\alpha+3\gamma+A(-1+\beta+3\alpha)+B(-1+\gamma+3\beta)>0,\\
&1-2\gamma+A(1-2\alpha)+B(1-2\beta)>0,\\
&2-\alpha-3\gamma+A(2-\beta-3\alpha)+B(2-\gamma-3\beta)>0,\\
&-1+3\gamma+A(-1+3\alpha)+B(-1+3\beta)>0,\\
&2-\alpha-4\gamma+A(2-\beta-4\alpha)+B(2-\gamma-4\beta)>0,\\
&3-\alpha-2\gamma+A(3-\beta-2\alpha)+B(3-\gamma-2\beta)>0.
\end{aligned}$$

Ces inégalités sont vérifiées si le point (A, B) reste à l'intérieur du

Fig. 16.



quadrilatère NSTU, dont les côtés ont respectivement pour équations

$$\begin{aligned}
-1+\alpha+3\gamma+A(-1+\beta+3\alpha)+B(-1+\gamma+3\beta)&=0 \quad \text{(NS)},\\
1-2\gamma+A(1-2\alpha)+B(1-2\beta)&=0 \quad \text{(NT)},\\
-1+3\gamma+A(-1+3\alpha)+B(-1+3\beta)&=0 \quad \text{(SU)},\\
2-\alpha-4\gamma+A(2-\beta-4\alpha)+B(2-\gamma-4\beta)&=0 \quad \text{(TU)}.
\end{aligned}$$

La forme F_8 est donc réduite à l'intérieur du quadrilatère NSTU.

111. Cette forme cesse d'être réduite si l'on traverse le côté TU, et alors la substitution

$$\begin{aligned} x &= -z+t, \\ y &= x-y-z+t, \\ z &= -y+t \end{aligned}$$

donne la forme F_9,

$$\begin{aligned} &[-1+\alpha+2\gamma+A(-1+\beta+2\alpha)+B(-1+\gamma+2\beta)](y-z)^2 \\ &\quad+[1-\gamma+A(1-\alpha)+B(1-\beta)](z-x)^2 \\ &\quad+[4-2\alpha-7\gamma+A(4-2\beta-7\alpha)+B(4-2\gamma-7\beta)](x-y)^2 \\ &\quad+[-2+\alpha+4\gamma+A(-2+\beta+4\alpha)+B(-2+\gamma+4\beta)](x-t)^2 \\ &\quad+[5-2\alpha-6\gamma+A(5-2\beta-6\alpha)+B(5-2\gamma-6\beta)](y-t)^2 \\ &\quad+[1-\alpha-\gamma+A(1-\beta-\alpha)+B(1-\gamma-\beta)](z-t)^2, \end{aligned}$$

qui est réduite si les six inégalités suivantes sont vérifiées :

$$\begin{aligned} &-1+\alpha+2\gamma+A(-1+\beta+2\alpha)+B(-1+\gamma+2\beta)>0, \\ &1-\gamma+A(1-\alpha)+B(1-\beta)>0, \\ &4-2\alpha-7\gamma+A(4-2\beta-7\alpha)+B(4-2\gamma-7\beta)>0, \\ &-2+\alpha+4\gamma+A(-2+\beta+4\alpha)+B(-2+\gamma+4\beta)>0, \\ &5-2\alpha-6\gamma+A(5-2\beta-6\alpha)+B(5-2\gamma-6\beta)>0, \\ &1-\alpha-\gamma+A(1-\beta-\alpha)+B(1-\gamma-\beta)>0. \end{aligned}$$

Ces inégalités sont vérifiées si le point (A, B) reste à l'intérieur du quadrilatère TUIV, dont les côtés ont respectivement pour équations

$$\begin{aligned} -1+\alpha+2\gamma+A(-1+\beta+2\alpha)+B(-1+\gamma+2\beta)&=0 \quad (\mathrm{TI}), \\ 4-2\alpha-7\gamma+A(4-2\beta-7\alpha)+B(4-2\gamma-7\beta)&=0 \quad (\mathrm{IV}), \\ -2+\alpha+4\gamma+A(-2+\beta+4\alpha)+B(-2+\gamma+4\beta)&=0 \quad (\mathrm{TU}), \\ 1-\alpha-\gamma+A(1-\beta-\alpha)+B(1-\gamma-\beta)&=0 \quad (\mathrm{UV}). \end{aligned}$$

La forme F_9 est réduite à l'intérieur du quadrilatère TUIV.

112. Mais cette forme F_9 cesse d'être réduite si l'on traverse le côté UV, et dans ce cas la substitution

$$\begin{aligned} x &= x - y, \\ y &= -y + t, \\ z &= x - y - z + t \end{aligned}$$

conduit à la forme F_{10},

$$\begin{aligned} &[-1+\alpha+\gamma+A(-1+\beta+\alpha)+B(-1+\gamma+\beta)](y-z)^2 \\ &+[\gamma+A\alpha+B\beta](z-x)^2 \\ &+[-1+3\gamma+A(-1+3\alpha)+B(-1+3\beta)](x-y)^2 \\ &+[3-\alpha-6\gamma+A(3-\beta-6\alpha)+B(3-\gamma-6\beta)](x-t)^2 \\ &+[6-3\alpha-7\gamma+A(6-3\beta-7\alpha)+B(6-3\gamma-7\beta)](y-t)^2 \\ &+[2-\alpha-2\gamma+A(2-\beta-2\alpha)+B(2-\gamma-2\beta)](z-t)^2, \end{aligned}$$

qui est réduite si l'on a

$$\begin{aligned} &(-1+\alpha+\gamma+A(-1+\beta+\alpha)+B(-1+\gamma+\beta)>0, \\ &\gamma+A\alpha+B\beta>0, \\ &-1+3\gamma+A(-1+3\alpha)+B(-1+3\beta)>0, \\ &3-\alpha-6\gamma+A(3-\beta-6\alpha)+B(3-\gamma-6\beta)>0, \\ &6-3\alpha-7\gamma+A(6-3\beta-7\alpha)+B(6-3\gamma-7\beta)>0, \\ &2-\alpha-2\gamma+A(2-\beta-2\alpha)+B(2-\gamma-2\beta)>0, \end{aligned}$$

et ces inégalités sont vérifiées si le point (A, B) reste à l'intérieur du triangle UVW, dont les côtés ont respectivement pour équations

$$\begin{aligned} -1+\alpha+\gamma+A(-1+\beta+\alpha)+B(-1+\gamma+\beta)&=0 \quad (\mathrm{UV}), \\ -1+3\gamma+A(-1+3\alpha)+B(-1+3\beta)&=0 \quad (\mathrm{WU}), \\ 3-\alpha-6\gamma+A(3-\beta-6\alpha)+B(3-\gamma-6\beta)&=0 \quad (\mathrm{VW}). \end{aligned}$$

La forme F_{10} est donc réduite à l'intérieur du triangle UVW.

113. Si l'on traverse UW, la forme F_{10} cesse d'être réduite, et dans ce cas la substitution

$$x = x - z,\quad y = y - t,\quad z = x - t$$

amène la forme F_{11},

$$\begin{aligned}
&[1 - 3\gamma + A(1 - 3\alpha) + B(1 - 3\beta)](y - z)^2\\
&\quad + [2 - \alpha - 3\gamma + A(2 - \beta - 3\alpha) + B(2 - \gamma - 3\beta)](z - x)^2\\
&\quad + [-2 + \alpha + 4\gamma + A(-2 + \beta + 4\alpha) + B(-2 + \gamma + 4\beta)](x - y)^2\\
&\quad + [3 - \alpha - 5\gamma + A(3 - \beta - 5\alpha) + B(3 - \gamma - 5\beta)](x - t)^2\\
&\quad + [5 - 3\alpha - 4\gamma + A(5 - 3\beta - 4\alpha) + B(5 - 3\gamma - 4\beta)](y - t)^2\\
&\quad + [-1 + 4\gamma + A(-1 + 4\alpha) + B(-1 + 4\beta)](z - t)^2,
\end{aligned}$$

qui est réduite si l'on a

$$\begin{aligned}
&1 - 3\gamma + A(1 - 3\alpha) + B(1 - 3\beta) > 0,\\
&2 - \alpha - 3\gamma + A(2 - \beta - 3\alpha) + B(2 - \gamma - 3\beta) > 0,\\
&-2 + \alpha + 4\gamma + A(-2 + \beta + 4\alpha) + B(-2 + \gamma + 4\beta) > 0,\\
&3 - \alpha - 5\gamma + A(3 - \beta - 5\alpha) + B(3 - \gamma - 5\beta) > 0,\\
&5 - 3\alpha - 4\gamma + A(5 - 3\beta - 4\alpha) + B(5 - 3\gamma - 4\beta) > 0,\\
&-1 + 4\gamma + A(-1 + 4\alpha) + B(-1 + 4\beta) > 0,
\end{aligned}$$

et, pour que ces inégalités soient vérifiées, il faut que le point (A, B) reste à l'intérieur du quadrilatère UWXY, dont les côtés ont respectivement pour équations

$$\begin{aligned}
1 - 3\gamma + A(1 - 3\alpha) + B(1 - 3\beta) &= 0 \quad (\mathrm{UW}),\\
2 - \alpha - 3\gamma + A(2 - \beta - 3\alpha) + B(2 - \gamma - 3\beta) &= 0 \quad (\mathrm{WY}),\\
-2 + \alpha + 4\gamma + A(-2 + \beta + 4\alpha) + B(-2 + \gamma + 4\beta) &= 0 \quad (\mathrm{UX}),\\
1 - 4\gamma + A(1 - 4\alpha) + B(1 - 4\beta) &= 0 \quad (\mathrm{XY}).
\end{aligned}$$

La forme F_{11} est donc réduite dans le quadrilatère UWXY.

114. Enfin, si l'on traverse le côté WY, la forme F_{11} cesse d'être réduite et la substitution

$$x = y - t,\quad y = x - t,\quad z = x - z$$

conduit à la forme F_{12},

$$\begin{aligned}
&[-2+\alpha+3\gamma+A(-2+\beta+3\alpha)+B(-2+\gamma+3\beta)](y-z)^2\\
&\quad+[1-\alpha+\gamma+A(1-\beta+\alpha)+B(1-\gamma+\beta)](z-x)^2\\
&\quad+(\gamma+A\alpha+B\beta)(x-y)^2\\
&\quad+[3-4\alpha-\gamma+A(3-4\beta-\alpha)+B(3-4\gamma-\beta)](x-t)^2\\
&\quad+[5-2\alpha-8\gamma+A(5-2\beta-8\alpha)+B(5-2\gamma-8\beta)](y-t)^2\\
&\quad+[3-\alpha-6\gamma+A(3-\beta-6\alpha)+B(3-\gamma-6\beta)](z-t)^2,
\end{aligned}$$

qui est réduite si l'on a

$$\begin{aligned}
-2+\alpha+3\gamma+A(-2+\beta+3\alpha)+B(-2+\gamma+3\beta)&>0,\\
1-\alpha+\gamma+A(1-\beta+\alpha)+B(1-\gamma+\beta)&>0,\\
\gamma+A\alpha+B\beta&>0,\\
3-4\alpha-\gamma+A(3-4\beta-\alpha)+B(3-4\gamma-\beta)&>0,\\
5-2\alpha-8\gamma+A(5-2\beta-8\alpha)+B(5-2\gamma-8\beta)&>0,\\
3-\alpha-6\gamma+A(3-\beta-6\alpha)+B(3-\gamma-6\beta)&>0,
\end{aligned}$$

et ces inégalités sont vérifiées si le point (A, B) reste à l'intérieur du triangle WYZ, dont les côtés vérifient respectivement les trois équations

$$\begin{aligned}
-2+\alpha+3\gamma+A(-2+\beta+3\alpha)+B(-2+\gamma+3\beta)&=0 \quad (\mathrm{WY}),\\
1-\alpha+\gamma+A(1-\beta+\alpha)+B(1-\gamma+\beta)&=0 \quad (\mathrm{YZ}),\\
3-\alpha-6\gamma+A(3-\beta-6\alpha)+B(3-\gamma-6\beta)&=0 \quad (\mathrm{ZW}).
\end{aligned}$$

La forme F_{12} est donc réduite dans le triangle WYZ.

115. D'ailleurs, si l'on compare les coefficients de la forme F_{12} à ceux de la forme F_0, on voit qu'en les disposant dans un certain ordre ils leur sont proportionnels, et, si l'on fait dans F_{12} une permutation des lettres x, y, z, t d'après la substitution

$$x=-x,\quad y=-y,\quad z=-t,\quad t=-z,$$

cette forme F_{12} devient

$$\begin{aligned}
&[5-2\alpha-8\gamma+A(5-2\beta-8\alpha)+B(5-2\gamma-8\beta)](y-z)^2\\
&\quad+[3-4\alpha-\gamma+A(3-4\beta-\alpha)+B(3-4\gamma-\beta)](z-x)^2\\
&\quad+(\gamma+A\alpha+B\beta)(x-y)^2\\
&\quad+[1-\alpha+\gamma+A(1-\beta+\alpha)+B(1-\gamma+\beta)](x-t)^2\\
&\quad+[-2+\alpha+3\gamma+A(-2+\beta+3\alpha)+B(-2+\gamma+3\beta)](y-t)^2\\
&\quad+[3-\alpha-6\gamma+A(3-\beta-6\alpha)+B(3-\gamma-6\beta)](z-t)^2,
\end{aligned}$$

et les coefficients de cette forme ainsi transformée, comparés aux coefficients correspondants de la forme F_0, donnent des rapports égaux entre les termes constants comme entre les multiplicateurs de A et B.

D'un autre côté, les substitutions successives qui de F_0 conduisent à F_{12} se ramènent à la substitution unique

$$\begin{aligned}
x &= -2x - y + 3z,\\
y &= -x - y + 2z,\\
z &= -x - 2y + 4z,
\end{aligned}$$

de sorte que F_{12} peut s'écrire

$$\begin{aligned}
&[-(2\alpha+\beta+\gamma)x-(\alpha+\beta+2\gamma)y+(3\alpha+2\beta+4\gamma)z]^2\\
&\quad+A[-(2\beta+\gamma+\alpha)x-(\beta+\gamma+2\alpha)y+(3\beta+2\gamma+4\alpha)z]^2\\
&\quad+B[-(2\gamma+\alpha+\beta)x-(\gamma+\alpha+2\beta)y+(3\gamma+2\alpha+4\beta)z]^2
\end{aligned}$$

ou encore

$$\gamma^2(\alpha x+\beta y+\gamma z)^2+A\alpha^2(\beta x+\gamma y+\alpha z)^2+B\beta^2(\gamma x+\alpha y+\beta z)^2,$$

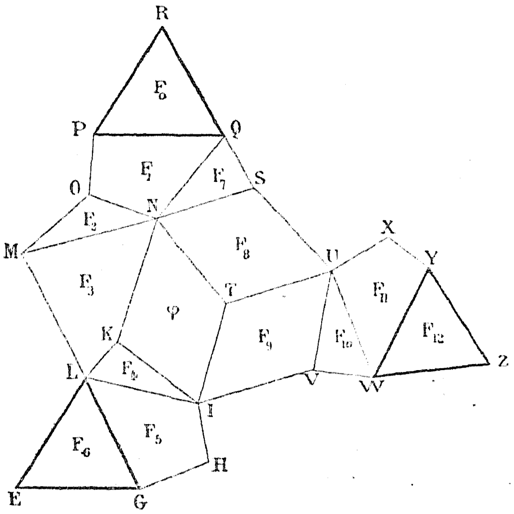
et, par conséquent, F_{12} se déduit de F_0 en multipliant F_0 par γ^2, après avoir changé A et B respectivement en $A\dfrac{\alpha^2}{\gamma^2}$ et $B\dfrac{\beta^2}{\gamma^2}$.

Si donc on applique à F_{12} périodiquement et successivement les substitutions qui ont conduit de F_0 à F_{12}, on obtiendra une nouvelle chaîne de formes qui se déduiront des formes comprises entre F_0 et F_{12}.

116. L'ensemble des deux éléments de chaînes obtenus ci-dessus est représenté par la *fig.* 17, où il faut remarquer que le quadrilatère NKIT correspond à une forme φ qui n'appartient à aucune des deux séries de formes obtenues ci-dessus.

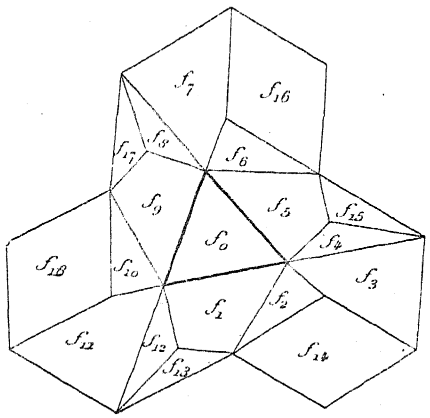
Si l'on combine la série des substitutions par lesquelles on passe de F_0 à F_6 avec la série des substitutions qui conduisent de F_0 à F_{12}, on

Fig. 17.



formera un réseau qui couvrira le plan; mais ce réseau aura des lacunes. Ainsi la forme φ ne pourrait jamais être obtenue par les sub-

Fig. 18.

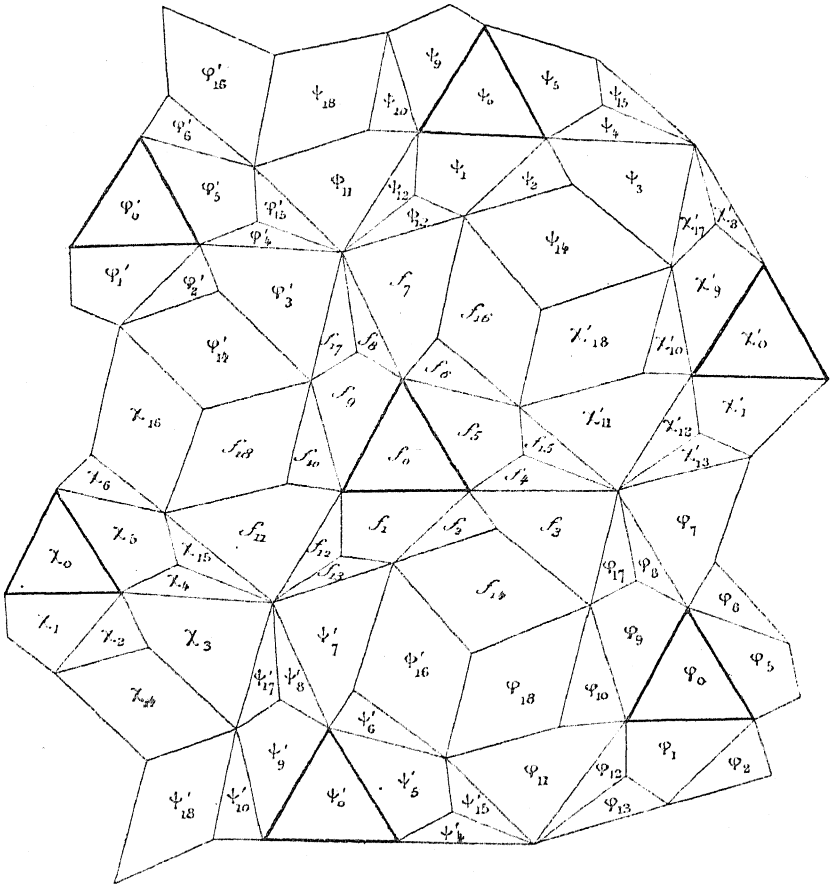


stitutions précédentes, et il serait facile de voir que d'autres formes manqueraient encore.

Pour avoir un réseau complet, nous tournerons autour de F_0, et, sans répéter ici la série des calculs, on verrait facilement que les formes élémentaires d'où toutes les autres peuvent être déduites sont au nombre de dix-neuf; nous donnons ci-dessus la figure élémentaire (*fig.* 18) qui comprend ces dix-neuf formes. En même temps nous changeons la notation; la forme primitive F_0 sera désignée par f_0.

Toute forme réduite peut se déduire d'une de ces dix-neuf formes, soit en multipliant celle-ci par γ^2 ou $(1-\gamma)^2$ après avoir changé A et B

Fig. 19.



respectivement en $A\frac{\alpha^2}{\gamma^2}$ et $B\frac{\beta^2}{\gamma^2}$ ou en $A\frac{(1-\alpha)^2}{(1-\gamma)^2}$ et $B\frac{(1-\beta)^2}{(1-\gamma)^2}$, soit par une combinaison de ces deux opérations et des opérations inverses, et, comme l'inverse de $1-\gamma$ est α, on peut dire que toute forme peut se déduire de l'une des dix-neuf formes fondamentales en multipliant celle-ci par $\alpha^{2h}\beta^{2k}\gamma^{2i}$, après avoir changé A et B respectivement en

$$A\frac{\beta^{2h}\gamma^{2k}\alpha^{2i}}{\alpha^{2h}\beta^{2k}\gamma^{2i}} \quad \text{et} \quad B\frac{\gamma^{2h}\alpha^{2k}\beta^{2i}}{\alpha^{2h}\beta^{2k}\gamma^{2i}};$$

si nous figurons une portion du réseau complet, nous obtiendrons la représentation précédente (*fig.* 19), dans laquelle les lettres affectées des mêmes indices représentent des formes correspondantes, et les formes accentuées s'obtiennent par des substitutions inverses de celles qui fournissent les formes non accentuées.

Cette figure, comme les précédentes, est très déformée ; cette déformation a pour but d'en restreindre l'étendue et de la rendre ainsi plus intelligible.

117. Les dix-neuf formes élémentaires d'où toutes les autres peuvent se déduire sont fournies par le Tableau suivant; les substitutions qui séparent deux formes sont celles qui permettent de déduire chaque forme de la précédente, à moins d'indications contraires.

f_0.

$$\begin{aligned}&[1-\gamma+A(1-\alpha)+B(1-\beta)](y-z)^2+[1-\alpha+A(1-\beta)+B(1-\gamma)](z-x)^2\\&+[1-\beta+A(1-\gamma)+B(1-\alpha)](x-y)^2+(-\alpha-A\beta-B\gamma)(x-t)^2\\&+(-\beta-A\gamma-B\alpha)(y-t)^2+(-\gamma-A\alpha-B\beta)(z-t)^2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x&=-x+y,\\y&=y-t,\\z&=-x+y+z-t.\end{aligned}$$

$f_1.$

$$(\gamma + A\alpha + B\beta)(y - z)^2 + [1 - 2\gamma + A(1 - 2\alpha) + B(1 - 2\beta)(z - x)^2$$
$$+ [-\alpha - \gamma + A(-\beta - \alpha) + B(-\gamma - \beta)](x - y)^2$$
$$+ [1 - \beta + \gamma + A(1 - \gamma + \alpha) + B(1 - \alpha + \beta)](x - t)^2$$
$$+ [-\beta - \gamma + A(-\gamma - \alpha) + B(-\alpha - \beta)](y - t)^2$$
$$+ [1 - \alpha - \gamma + A(1 - \beta - \alpha) + B(1 - \gamma - \beta)](z - t)^2,$$

$$x = -z + t,$$
$$y = x - y - z + t,$$
$$z = x - z.$$

$f_{12}.$

$$[\beta + \gamma + A(\gamma + \alpha) + B(\alpha + \beta)](y - z)^2 + [2 - \gamma + A(2 - \alpha) + B(2 - \beta)](z - x)^2$$
$$+ [1 - \gamma + A(1 - \alpha) + B(1 - \beta)](x - y)^2$$
$$+ [1 + \beta - \gamma + A(1 + \gamma - \alpha) + B(1 + \alpha - \beta)](x - t)^2$$
$$+ (-\beta - A\gamma - B\alpha)(y - t)^2 + [1 - 2\beta + A(1 - 2\gamma) + B(1 - 2\alpha)](z - t)^2,$$

$$x = -z + t,$$
$$y = x - y - z + t,$$
$$z = x - z.$$

$f_{11}.$

$$(\beta + A\gamma + B\alpha)(y - z)^2 + [1 - 3\beta + A(1 - 3\gamma) + B(1 - 3\alpha)](z - x)^2$$
$$+ [2 + \alpha + A(2 + \beta) + B(2 + \gamma)](x - y)^2$$
$$+ [1 - \alpha - 2\gamma + A(1 - \beta - 2\alpha) + B(1 - \gamma - 2\beta)](x - t)^2$$
$$+ (\gamma + A\alpha + B\beta)(y - t)^2 + (\alpha + A\beta + B\gamma)(z - t)^2,$$

$$x = -z + t,$$
$$y = x - y - z + t,$$
$$z = x - z.$$

f_{10}.

$$
\begin{aligned}
&(-\gamma - A\alpha - B\beta)(y-z)^2 + (1 + A + B)(z-x)^2 \\
&\quad + [1 - \beta + A(1-\gamma) + B(1-\alpha)](x-y)^2 \\
&\quad + [1 - 3\beta - \gamma + A(1 - 3\gamma - \alpha) + B(1 - 3\alpha - \beta)](x-t)^2 \\
&\quad + [\beta + \gamma + A(\gamma + \alpha) + B(\alpha + \beta)](y-t)^2 \\
&\quad + [1 - \alpha - \gamma + A(1 - \beta - \alpha) + B(1 - \gamma - \beta)](z-t)^2,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x &= -z + t, \\
y &= x - y - z + t, \\
z &= x - z.
\end{aligned}
$$

f_9.

$$
\begin{aligned}
&[-(\beta+\gamma) + A(-\gamma-\alpha) + B(-\alpha-\beta)](y-z)^2 \\
&\quad + [1 - \alpha + \beta + A(1 - \beta + \gamma) + B(1 - \gamma + \alpha)](z-x)^2 \\
&\quad + [1 + \gamma + A(1+\alpha) + B(1+\beta)](x-y)^2 \\
&\quad + [1 - \beta - \gamma + A(1 - \gamma - \alpha) + B(1 - \alpha - \beta)](x-t)^2 \\
&\quad + (\beta + A\gamma + B\alpha)(y-t)^2 + [1 - 2\beta + A(1-2\gamma) + B(1-2\alpha)](z-t)^2,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x &= x - t, \\
y &= y - z, \\
z &= y - t.
\end{aligned}
$$

f_8.

$$
\begin{aligned}
&(-\alpha - A\beta - B\gamma)(y-z)^2 + [\alpha + \beta + A(\beta+\gamma) + B(\gamma+\alpha)](z-x)^2 \\
&\quad + [1 - 2\alpha + A(1-2\beta) + B(1-2\gamma)](x-y)^2 \\
&\quad + [2 - \beta + A(2-\gamma) + B(2-\alpha)](x-t)^2 \\
&\quad + [1 + \alpha - \beta + A(1 + \beta - \gamma) + B(1 + \gamma - \alpha)](y-t)^2 \\
&\quad + [1 - \beta + A(1-\gamma) + B(1-\alpha)](z-t)^2,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x &= x - y, \\
y &= -y + t, \\
z &= x - z.
\end{aligned}
$$

f_7.

$$(\beta + A\gamma + B\alpha)(y-z)^2 + [1-\alpha-\beta+A(1-\beta-\gamma)+B(1-\gamma-\alpha)](z-x)^2$$
$$+[1-2\beta-\gamma+A(1-2\gamma-\alpha)+B(1-2\alpha-\beta)](x-y)^2$$
$$+[1-3\alpha+A(1-3\beta)+B(1-3\gamma)](x-t)^2$$
$$+[1-\beta+A(1-\gamma)+B(1-\alpha)](y-t)^2+(\alpha+A\beta+B\gamma)(z-t)^2,$$

$$x = y - t,$$
$$y = x - t,$$
$$z = y - z.$$

f_6.

$$[\alpha+\beta+A(\beta+\gamma)+B(\gamma+\alpha)](y-z)^2+(-\beta-A\gamma-B\alpha)(z-x)^2$$
$$+[2+\alpha+A(2+\beta)+B(2+\gamma)](x-y)^2+(1+A+B)(x-t)^2$$
$$+[1-3\alpha-\beta+A(1-3\beta-\gamma)+B(1-3\gamma-\alpha)](y-t)^2$$
$$+[1-\alpha+A(1-\beta)+B(1-\gamma)](z-t)^2,$$

$$x = x - y,$$
$$y = -y + t,$$
$$z = x - z.$$

f_5.

$$(\alpha+A\beta+B\gamma)(y-z)^2+[-\alpha-\gamma+A(-\beta-\alpha)+B(-\gamma-\beta)](z-x)^2$$
$$+[2+\gamma+A(2+\alpha)+B(2+\beta)](x-y)^2$$
$$+[1+\alpha-\gamma+A(1+\beta-\alpha)+B(1+\gamma-\beta)](x-t)^2$$
$$+[1-2\alpha+A(1-2\beta)+B(1-2\gamma)](y-t)^2$$
$$+[1+\gamma+A(1+\alpha)+B(1+\beta)](z-t)^2,$$

$$x = y - t,$$
$$y = x - t,$$
$$z = x - z.$$

f_4.

$$\begin{aligned}
&[\alpha + \gamma + A(\beta + \alpha) + B(\gamma + \beta)](y - z)^2 \\
&\quad + [1 - \alpha + A(1 - \beta) + B(1 - \gamma)](z - x)^2 \\
&\quad + [2 - \alpha + A(2 - \beta) + B(2 - \gamma)](x - y)^2 \\
&\quad + [1 - \alpha + \gamma + A(1 - \beta + \alpha) + B(1 - \gamma + \beta)](x - t)^2 \\
&\quad + [1 - 2\gamma + A(1 - 2\alpha) + B(1 - 2\beta)](y - t)^2 + (-\gamma - A\alpha - B\beta)(z - t)^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x &= x - y, \\
y &= -y + t, \\
z &= x - y - z + t.
\end{aligned}$$

f_3.

$$\begin{aligned}
&(\gamma + A\alpha + B\beta)(y - z)^2 + (\alpha + A\beta + B\gamma)(z - x)^2 \\
&\quad + [1 - \alpha + A(1 - \beta) + B(1 - \gamma)](x - y)^2 \\
&\quad + [1 - 2\alpha - \beta + A(1 - 2\beta - \gamma) + B(1 - 2\gamma - \alpha)](x - t)^2 \\
&\quad + [1 - 3\gamma + A(1 - 3\alpha) + B(1 - 3\beta)](y - t)^2 \\
&\quad + [2 + \beta + A(2 + \gamma) + B(2 + \alpha)](z - t)^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x &= y - t, \\
y &= x - t, \\
z &= x - z.
\end{aligned}$$

f_2.

$$\begin{aligned}
&(-\alpha - A\beta - B\gamma)(y - z)^2 + [1 - \gamma + A(1 - \alpha) + B(1 - \beta)](z - x)^2 \\
&\quad + (1 + A + B)(x - y)^2 \\
&\quad + [1 - \alpha - 3\gamma + A(1 - \beta - 3\alpha) + B(1 - \gamma - 3\beta)](x - t)^2 \\
&\quad + [2 + \gamma + A(2 + \alpha) + B(2 + \beta)](y - t)^2 \\
&\quad + [\alpha + \gamma + A(\beta + \alpha) + B(\gamma + \beta)](z - t)^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x &= x - y - z + t, \\
y &= -z + t, \\
z &= x - z.
\end{aligned}$$

$$f_{14}.$$

$$\begin{aligned}
&[-1+\alpha+3\gamma+A(-1+\beta+3\alpha)+B(-1+\gamma+3\beta)](y-z)^2\\
&\quad+[1-2\gamma+A(1-2\alpha)+B(1-2\beta)](z-x)^2\\
&\quad+[2-\alpha-3\gamma+A(2-\beta-3\alpha)+B(2-\gamma-3\beta)](x-y)^2\\
&\quad+[-1+3\gamma+A(-1+3\alpha)+B(-1+3\beta)](x-t)^2\\
&\quad+[2-\alpha-4\gamma+A(2-\beta-4\alpha)+B(2-\gamma-4\beta)](y-t)^2\\
&\quad+[3-\alpha-2\gamma+A(3-\beta-2\alpha)+B(3-\gamma-2\beta)](z-t)^2.
\end{aligned}$$

Dans f_{12}, la substitution

$$\begin{aligned}
x&=-x+y+z-t,\\
y&=z-t,\\
z&=y-t
\end{aligned}$$

conduit à la forme

$$f_{13}.$$

$$\begin{aligned}
&[-1+2\gamma+A(-1+2\alpha)+B(-1+2\beta)](y-z)^2\\
&\quad+[2-\alpha-3\gamma+A(2-\beta-3\alpha)+B(2-\gamma-3\beta)](z-x)^2\\
&\quad+[1-\alpha-3\gamma+A(1-\beta-3\alpha)+B(1-\gamma-3\beta)](x-y)^2\\
&\quad+[\alpha+2\gamma+A(\beta+2\alpha)+B(\gamma+2\beta)](x-t)^2\\
&\quad+[3+\alpha+A(3+\beta)+B(3+\gamma)](y-t)^2\\
&\quad+[1-\gamma+A(1-\alpha)+B(1-\beta)](z-t)^2.
\end{aligned}$$

Dans f_5, la substitution

$$\begin{aligned}
x&=-z+t,\\
y&=x-y-z+t,\\
z&=x-z
\end{aligned}$$

conduit à la forme

$$f_{15}.$$

$$\begin{aligned}
&[-1+2\alpha+A(-1+2\beta)+B(-1+2\gamma)](y-z)^2\\
&\quad+[2-2\alpha+\gamma+A(2-2\beta+\alpha)+B(2-2\gamma+\beta)](z-x)^2\\
&\quad+[3-2\alpha+\gamma+A(3-2\beta+\alpha)+B(3-2\gamma+\beta)](x-y)^2\\
&\quad+[\beta+2\alpha+A(\gamma+2\beta)+B(\alpha+2\gamma)](x-t)^2\\
&\quad+[1-\alpha+A(1-\beta)+B(1-\gamma)](y-t)^2\\
&\quad+[3+\beta+A(3+\gamma)+B(3+\alpha)](z-t)^2.
\end{aligned}$$

Dans f_6, la substitution

$$\begin{aligned} x &= -z+t, \\ y &= x-y-z+t, \\ z &= x-z \end{aligned}$$

conduit à la forme

$$f_{16}.$$

$$\begin{aligned} &[-1+3\alpha+\beta+A(-1+3\beta+\gamma)+B(-1+3\gamma+\alpha)](y-z)^2 \\ &\quad+[2-4\alpha-\beta+A(2-4\beta-\gamma)+B(2-4\gamma-\alpha)](z-x)^2 \\ &\quad+[3-2\alpha-\beta+A(3-2\beta-\gamma)+B(3-2\gamma-\alpha)](x-y)^2 \\ &\quad+[-1+3\alpha+A(-1+3\beta)+B(-1+3\gamma)](x-t)^2 \\ &\quad+[1-2\alpha+A(1-2\beta)+B(1-2\gamma)](y-t)^2 \\ &\quad+[2-3\alpha-\beta+A(2-3\beta-\gamma)+B(2-3\gamma-\alpha)](z-t)^2. \end{aligned}$$

Dans f_9, la substitution

$$\begin{aligned} x &= x-y-z+t, \\ y &= -z+t, \\ z &= x-z \end{aligned}$$

conduit à la forme

$$f_{17}.$$

$$\begin{aligned} &[-1+2\beta+A(-1+2\gamma)+B(-1+2\alpha)](y-z)^2 \\ &\quad+[1-3\beta-\gamma+A(1-3\gamma-\alpha)+B(1-3\alpha-\beta)](z-x)^2 \\ &\quad+[3-2\beta+\alpha+A(3-2\gamma+\beta)+B(3-2\alpha+\gamma)](x-y)^2 \\ &\quad+[2\beta+\gamma+A(2\gamma+\alpha)+B(2\alpha+\beta)](x-t)^2 \\ &\quad+[1-\beta+A(1-\gamma)+B(1-\alpha)](y-t)^2 \\ &\quad+[3+\gamma+A(3+\alpha)+B(3+\beta)](z-t)^2. \end{aligned}$$

Enfin, dans f_{10}, la substitution

$$\begin{aligned} x &= x-y-z+t, \\ y &= -z+t, \\ z &= x-z \end{aligned}$$

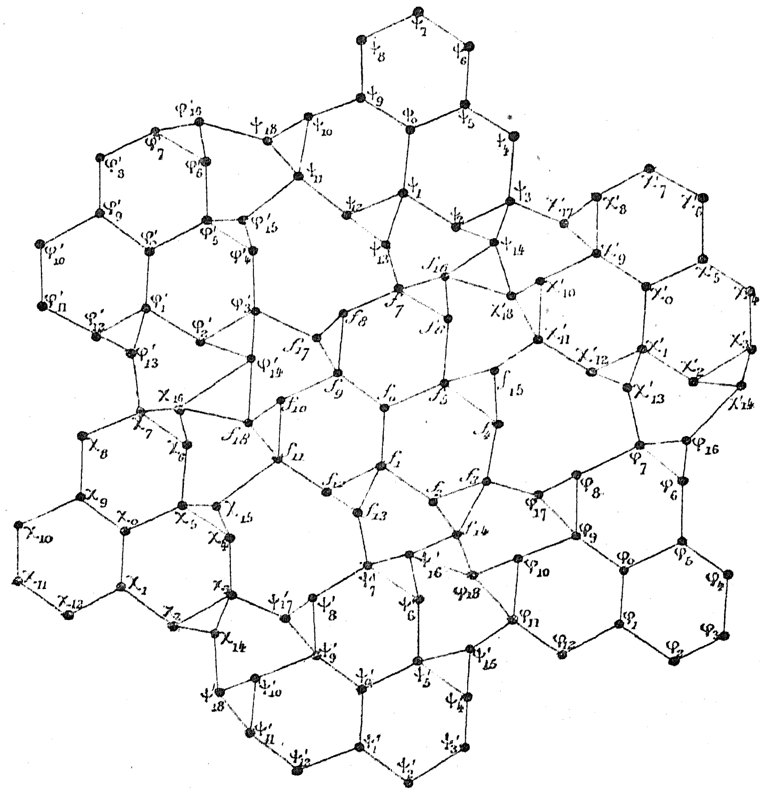
conduit à la forme

$$f_{18}.$$

$$\begin{aligned}
&[-1+3\beta+\gamma+A(-1+3\gamma+\alpha)+B(-1+3\alpha+\beta)](y-z)^2\\
&\quad+[3-2\beta-\gamma+A(3-2\gamma-\alpha)+B(3-2\alpha-\beta)](z-x)^2\\
&\quad+[2-4\beta-\gamma+A(2-4\gamma-\alpha)+B(2-4\alpha-\beta)](x-y)^2\\
&\quad+[2-3\beta-\gamma+A(2-3\gamma-\alpha)+B(2-3\alpha-\beta)](y-t)^2\\
&\quad+[-1+3\beta+A(-1+3\gamma)+B(-1+3\alpha)](x-t)^2\\
&\quad+[1-2\beta+A(1-2\gamma)+B(1-2\alpha)](z-t)^2.
\end{aligned}$$

Tel est l'ensemble des dix-neuf formes élémentaires $f_0, f_1, \ldots, f_{17}, f_{18}$, d'où l'on peut déduire toutes les autres formes équivalentes à la forme f_0 et réduites pour des valeurs données de A et B.

Fig. 20.



118. Enfin, la représentation symbolique, où chaque forme est

représentée par un point et est reliée par une droite aux formes qui lui sont contiguës par un côté, fournit la *fig.* 20, qui correspond à la figure générale du n° **116** (*fig.* 19), les mêmes lettres désignant les mêmes formes dans les deux figures.

V.

DES UNITÉS COMPLEXES FORMÉES AVEC LES IRRATIONNELLES DU TROISIÈME DEGRÉ.

---

119. Soit une équation du troisième degré à coefficients entiers

$$f(x)=0,$$

et soient α, β, γ les trois racines de cette équation.

Soit $\varphi(\alpha)$ un polynôme en α à coefficients entiers; nous dirons que $\varphi(\alpha)$ est une unité complexe si la *norme* de $\varphi(\alpha)$ est égale à l'unité, c'est-à-dire si

$$\varphi(\alpha)\varphi(\beta)\varphi(\gamma)=1.$$

La recherche des unités complexes est liée à la réduction des formes ternaires : c'est ce que nous montrerons brièvement, réservant pour un autre travail une étude plus approfondie sur ce sujet.

120. Pour le montrer sur un exemple, soit l'équation

$$x^3=2,$$

dont nous désignerons les racines par α, β, γ, et soit, s'il est possible,

$$\varphi(\alpha)=a+b\alpha+c\alpha^2$$

une unité complexe formée avec α.

Le produit $\varphi(\alpha)\,\varphi(\beta)\,\varphi(\gamma)$ est égal au déterminant

$$\begin{vmatrix} a & 2c & 2b \\ b & a & 2c \\ c & b & a \end{vmatrix}.$$

Considérons la forme

$$f=(x+\alpha y+\alpha^2 z)^2+2\Delta(x+\beta y+\beta^2 z)(x+\gamma y+\gamma^2 z),$$

qui est réduite (n° 36) si Δ reste compris entre 1 et $\frac{385}{85}$.

Multiplions cette forme par $[\varphi(\alpha)]^2$; on aura une nouvelle forme f,

$$\begin{aligned} F=f\varphi(\alpha)^2=&[x(a+b\alpha+c\alpha^2)+y(a\alpha+b\alpha^2+2c)+z(a\alpha^2+2b+2c\alpha)]^2\\ &+2\Delta_1[x(a+b\beta+c\beta^2)+y(a\beta+b\beta^2+2c)+z(a\beta^2+2b+2c\beta)]\\ &\times[x(a+b\gamma+c\gamma^2)+y(a\gamma+b\gamma^2+2c)+z(a\gamma^2+2b+2c\gamma)], \end{aligned}$$

où Δ_1 désigne le produit $\Delta\frac{\varphi^2(\alpha)}{\varphi(\beta)\,\varphi(\gamma)}$.

On peut encore écrire cette forme F de la manière suivante :

$$\begin{aligned} F=&[ax+2cy+2bz+\alpha(bx+ay+2cz)+\alpha^2(cx+by+az)]^2\\ &+2\Delta_1[ax+2cy+2bz+\beta(bx+ay+2cz)+\beta^2(cx+by+az)]\\ &\times[ax+2cy+2bz+\gamma(bx+ay+2cz)+\gamma^2(cx+by+az)]. \end{aligned}$$

Mais cette forme F se déduit de f en changeant Δ en Δ_1, puis faisant la substitution

$$\begin{aligned} x&=ax+2cy+2bz,\\ y&=bx+\ \ ay+2cz,\\ z&=cx+\ \ by+\ \ az. \end{aligned}$$

Le déterminant de cette substitution est précisément égal à $\varphi(\alpha)\,\varphi(\beta)\,\varphi(\gamma)$, qui, par hypothèse, est égal à l'unité; donc la forme F est équivalente à f.

Les deux formes f et F sont donc deux formes équivalentes, et, la première étant réduite si Δ reste compris entre 1 et $\frac{385}{85}$, la seconde est réduite si Δ reste compris entre les mêmes limites, multipliées l'une et l'autre par $\frac{\varphi^2(\alpha)}{\varphi(\beta)\,\varphi(\gamma)}$. Les deux formes f et F sont donc deux formes équivalentes réduites, et les coefficients de la seconde sont évidemment proportionnels aux coefficients de la première, c'est-à-dire que, si l'on considère la série périodique des formes réduites auxquelles nous a conduit la réduction de f, nous voyons que f et F sont deux formes correspondantes, c'est-à-dire occupant le même rang dans la période à laquelle elles appartiennent, et les mêmes substitutions fournissent les formes contiguës à f et les formes contiguës à F.

Donc toute unité complexe $\varphi(\alpha)$ formée avec la racine réelle α de $\sqrt[3]{2}$, permet d'obtenir une forme réduite F correspondant à f.

121. Inversement, deux formes réduites correspondantes fournissent une unité complexe.

En effet, soit F une forme correspondante de f; on a vu que dans deux formes correspondantes les coefficients qui sont de la forme $a + b\Delta$ ont des valeurs proportionnelles pour a et b, c'est-à-dire qu'après un changement convenable de Δ la forme F peut se déduire de f en multipliant f par un facteur qui est d'ailleurs un carré, désigné dans le cas général par $M^2(\alpha)$.

Ainsi, la substitution qui fait passer de f à F revient à changer convenablement Δ, puis à multiplier f par le carré d'un polynôme entier en α,

$$A + B\alpha + C\alpha^2,$$

et je dis que ce polynôme est une unité complexe. En effet, multiplier par un tel polynôme revient à faire la substitution

$$\begin{aligned} x &= Ax + 2Cy + 2Bz, \\ y &= Bx + \ \ Ay + 2Cz, \\ z &= Cx + \ \ By + \ \ Az. \end{aligned}$$

Le déterminant de cette substitution est égal à 1, puisque les formes F et f sont équivalentes; de plus, ce déterminant,

$$\begin{vmatrix} A & 2C & 2B \\ B & A & 2C \\ C & B & A \end{vmatrix},$$

est égal au produit $(A + B\alpha + C\alpha^2)(A + B\beta + C\beta^2)(A + B\gamma + C\gamma^2)$. Donc la quantité $A + B\alpha + C\alpha^2$ est une unité complexe.

122. Ainsi, toutes les unités complexes et les seules unités complexes qui peuvent être formées avec α sont les racines carrées des multiplicateurs qui donnent les formes F correspondantes à f. Mais on a vu que tous ces multiplicateurs étaient des puissances d'un seul d'entre eux; donc toutes les unités sont les puissances d'une seule d'entre elles, qui est

$$1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4} = \frac{1}{\sqrt[3]{2} - 1}.$$

Donc toutes les unités complexes de la forme

$$a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}$$

sont des puissances positives ou négatives de $\sqrt[3]{2} - 1$, et l'on peut écrire

$$(a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}) = (\sqrt[3]{2} - 1)^n,$$

où n désigne un nombre entier positif ou négatif.

123. Ce qui vient d'être démontré est vrai pour toute équation du troisième degré

$$\psi(x) = x^3 + px^2 + qx + r = 0$$

à coefficients entiers et n'ayant qu'une racine réelle α, les deux racines imaginaires étant désignées par β et γ.

Soit

$$\varphi(\alpha) = a + b\alpha + c\alpha^2$$

une unité complexe formée avec cette racine réelle.

Pour former la *norme* de $\varphi(\alpha)$, savoir

$$\varphi(\alpha)\varphi(\beta)\varphi(\gamma),$$

remarquons que cette quantité, égalée à zéro, exprimerait que les deux équations $\psi(x) = 0$ et $\varphi(x) = 0$ ont une racine commune. La norme de $\varphi(\alpha)$ est donc le résultant des deux équations $\psi(x) = 0$ et $\varphi(x) = 0$.

Ce résultant peut être formé ainsi.

Les produits $x\varphi(x)$ et $x^2\varphi(x)$ peuvent, en tenant compte de l'équation $\psi(x)=0$, s'écrire de la manière suivante,

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= a + bx + cx^2, \\ x\varphi(x) &= a' + b'x + c'x^2, \\ x^2\varphi(x) &= a'' + b''x + c''x^2, \end{aligned}$$

où a', b', c', a'', b'', c'' sont des nombres entiers, et le résultant sera le déterminant

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}.$$

Si $\varphi(\alpha)$ est une unité complexe, ce déterminant sera égal à 1.

D'un autre côté, soient β et γ les racines imaginaires de $\psi(x)=0$, et considérons la forme

$$f = (x+\alpha y+\alpha^2 z)^2 + 2\Delta(x+\beta y+\beta^2 z)(x+\gamma y+\gamma^2 z).$$

Si nous multiplions cette forme par $\varphi^2(\alpha)$ et si nous posons, pour abréger,

$$\begin{aligned} \varphi^2(\alpha) f &= \mathrm{F}, \\ \varphi(\alpha) &= \varphi(\alpha), \\ \alpha\varphi(\alpha) &= \varphi_1(\alpha), \\ \alpha^2\varphi(\alpha) &= \varphi_2(\alpha), \end{aligned}$$

nous pourrons écrire

$$\begin{aligned} \mathrm{F} = {} & [x\varphi(\alpha)+y\varphi_1(\alpha)+z\varphi_2(\alpha)]^2 \\ & + 2\Delta\frac{\varphi^2(\alpha)}{\varphi(\beta)\varphi(\gamma)}[x\varphi(\beta)+y\varphi_1(\beta)+z\varphi_2(\beta)][x\varphi(\gamma)+y\varphi_1(\gamma)+z\varphi_2(\gamma)], \end{aligned}$$

ou, en posant $\Delta_1 = \Delta\dfrac{\varphi^2(\alpha)}{\varphi(\beta)\varphi(\gamma)}$,

$$\begin{aligned} \mathrm{F} = {} & [ax+a'y+a''z+\alpha(bx+b'y+b''z)+\alpha^2(cx+c'y+c''z)]^2 \\ & + 2\Delta_1[ax+a'y+a''z+\beta(bx+b'y+b''z)+\beta^2(cx+c'y+c''z)] \\ & \times[ax+a'y+a''z+\gamma(bx+b'y+b''z)+\gamma^2(cx+c'y+c''z)], \end{aligned}$$

ce qui montre qu'on passe de f à F en changeant Δ en Δ_1, puis faisant la substitution

$$\begin{aligned} x &= ax+a'y+a''z, \\ y &= bx+b'y+b''z, \\ z &= cx+c'y+c''z, \end{aligned}$$

dont le déterminant est, comme on l'a vu, égal à l'unité si $\varphi(\alpha)$ est une unité complexe.

Donc les formes f et F sont équivalentes.

Supposons que f soit réduit pour certaines valeurs de Δ; F sera aussi réduit pour des valeurs de Δ_1 faciles à établir. De plus, les coefficients de f et F sont évidemment proportionnels, et, par conséquent, dans la suite périodique des formes réduites, les deux formes f et F sont correspondantes, c'est-à-dire occupent, chacune dans sa période, la même place.

Donc, au moyen d'une unité complexe, on peut déduire une forme F correspondante de la forme f.

124. Inversement, deux formes réduites correspondantes fournissent une unité complexe.

En effet, soit F une forme réduite correspondante de f; on a vu (n° 34) que l'on pouvait passer de f à F en changeant convenablement Δ et multipliant f par un facteur carré $M^2(\alpha)$. Donc la substitution qui permet de passer de f à F revient à la multiplication de f par ce facteur carré $M^2(\alpha)$.

Soit donc

$$M(\alpha) = A + B\alpha + C\alpha^2,$$

et posons

$$\alpha M(\alpha) = A' + B'\alpha + C'\alpha^2,$$
$$\alpha^2 M(\alpha) = A'' + B''\alpha + C''\alpha^2,$$

où A, B, C, A', B', C', A'', B'', C'' sont des nombres entiers.

Le déterminant de la substitution qui fait passer de f à F sera donc

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{vmatrix},$$

et, les deux formes étant équivalentes, ce déterminant est égal à 1; ce déterminant n'est d'ailleurs autre chose que la norme de $M(\alpha)$. Donc $M(\alpha)$ est une unité complexe.

Ainsi, les seules unités complexes et toutes les unités complexes que l'on peut former avec α sont les racines carrées des multiplicateurs qui fournissent les formes correspondantes à f, et, comme ces multiplicateurs sont tous des puissances de l'un d'entre eux, on voit que toutes les unités complexes formées avec α sont des puissances de l'une d'entre elles.

J'ai supposé que f était réduit pour certaines valeurs de Δ; il pourrait arriver que f ne fût réduit pour aucune valeur de Δ, mais on verrait facilement que ce cas se ramène au précédent.

125. J'examine enfin le cas où une équation du troisième degré aurait ses trois racines réelles.

Soit donc

$$\psi(x) = x^3 + px^2 + qx + r = 0$$

une équation du troisième degré à coefficients entiers dont les trois racines α, β, γ sont toutes les trois réelles.

Soit $\varphi(\alpha)$ une unité complexe, et posons

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha) &= a + b\alpha + c\alpha^2, \\ \alpha\varphi(\alpha) &= a' + b'\alpha + c'\alpha^2, \\ \alpha^2\varphi(\alpha) &= a'' + b''\alpha + c''\alpha^2, \end{aligned}$$

où a, b, c, a', b', c', a'', b'', c'' sont des nombres entiers.

On a

$$\varphi(\alpha)\varphi(\beta)\varphi(\gamma) = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = 1.$$

Considérons la forme

$$f = (x + \alpha y + \alpha^2 z)^2 + A(x + \beta y + \beta^2 z)^2 + B(x + \gamma y + \gamma^2 z)^2.$$

Je multiplie cette forme par $\varphi^2(\alpha)$ et je pose

$$f\varphi^2(\alpha) = F, \quad \alpha\varphi(\alpha) = \varphi_1(\alpha), \quad \alpha^2\varphi(\alpha) = \varphi_2(\alpha).$$

J'ai ainsi

$$\begin{aligned} F = {}& [x\varphi(\alpha) + y\varphi_1(\alpha) + z\varphi_2(\alpha)]^2 + A\frac{\varphi^2(\alpha)}{\varphi^2(\beta)}[x\varphi(\beta) + y\varphi_1(\beta) + z\varphi_2(\beta)]^2 \\ & + B\frac{\varphi^2(\alpha)}{\varphi^2(\gamma)}[x\varphi(\gamma) + y\varphi_1(\gamma) + z\varphi_2(\gamma)]^2, \end{aligned}$$

qu'on peut encore écrire, après avoir posé $A_1 = A\frac{\varphi^2(\alpha)}{\varphi^2(\beta)}$ et $B_1 = B\frac{\varphi^2(\alpha)}{\varphi^2(\gamma)}$,

$$\begin{aligned}F = \quad & [ax + a'y + a''z + \alpha(bx + b'y + b''z) + \alpha^2(cx + c'y + c''z)]^2 \\ + A_1 & [ax + a'y + a''z + \beta(bx + b'y + b''z) + \beta^2(cx + c'y + c''z)]^2 \\ + B_1 & [ax + a'y + a''z + \gamma(bx + b'y + b''z) + \gamma^2(cx + c'y + c''z)]^2,\end{aligned}$$

et cette forme pourrait se déduire de f en changeant A en A_1, B en B_1, et faisant la substitution

$$\begin{aligned}x &= ax + a'y + a''z,\\ y &= bx + b'y + b''z,\\ z &= cx + c'y + c''z,\end{aligned}$$

dont le déterminant est par hypothèse égal à 1.

La forme F est donc équivalente à f, et si f est réduit pour certaines valeurs de A et B, F sera également réduit pour certaines valeurs de A_1 et B_1, faciles à déduire de celles qui conviennent à f.

La forme F et la forme f sont donc deux formes réduites équivalentes, dont les coefficients vérifient évidemment les conditions de proportionnalité nécessaires pour que ces deux formes fassent partie d'une chaîne périodique de formes où chacune occupe une place analogue.

Donc une unité complexe permet d'obtenir une forme F occupant dans une chaîne périodique de formes une place correspondante à la place qu'occupe f.

126. Inversement, deux formes correspondantes f et F fournissent une unité complexe.

En effet, on a vu (n° 64) qu'une forme F correspondante d'une forme f pouvait se déduire de f en changeant convenablement A et B et multipliant f par un facteur carré $M^2(\alpha)$, tel que

$$M(\alpha) = A + B\alpha + C\alpha^2,$$

et si l'on pose

$$\begin{aligned}\alpha M(\alpha) &= A' + B'\alpha + C'\alpha^2,\\ \alpha^2 M(\alpha) &= A'' + B''\alpha + C''\alpha^2,\end{aligned}$$

le déterminant de la substitution par laquelle on peut passer de f à F sera

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{vmatrix}.$$

Or ce déterminant est égal à 1, puisque f et F sont équivalents; donc $M(\alpha)$ est une unité complexe.

Il résulte de là que des formes correspondantes de f on peut tirer toutes les unités complexes.

Mais on a vu, dans la représentation des formes par l'introduction d'exponentielles (n° **70**), que, connaissant toutes les formes réduites dans un carré dont les côtés sont égaux à l'unité, on obtient des formes réduites correspondant à un point quelconque du plan, en augmentant u et v de nombres entiers, c'est-à-dire que, si $M^2(\alpha)$ et $N^2(\alpha)$ sont les multiplicateurs par lesquels on déduit de f deux formes correspondantes de deux séries différentes, on obtiendra toutes les formes correspondantes de f en multipliant f par $M^{2i}(\alpha)N^{2j}(\alpha)$, i et j étant deux entiers positifs ou négatifs.

Donc, toutes les unités complexes $\varphi(\alpha)$ sont de la forme

$$M^i(\alpha)N^j(\alpha),$$

c'est-à-dire sont les produits des puissances de deux unités complexes.

Il n'y a donc que deux unités distinctes; toutes les autres sont des produits des puissances de ces deux unités fondamentales.

J'ai supposé que f pouvait être une forme réduite pour certaines valeurs de A et B; l'examen du cas contraire se ramènerait facilement au précédent, et je n'en parlerai pas.

127. Je veux seulement faire remarquer encore que, si α, β, γ sont liés entre eux de telle façon que les produits et les puissances de ces quantités puissent s'exprimer par des polynômes en α à coefficients entiers, il n'est pas nécessaire de considérer la forme f, savoir

$$f=(x+\alpha y+\alpha^2 z)^2+A(x+\beta y+\beta^2 z)^2+B(x+\gamma y+\gamma^2 z)^2;$$

mais on peut prendre, par exemple,

$$f=(\alpha x+\beta y+\gamma z)^2+A(\beta x+\gamma y+\alpha z)^2+B(\gamma x+\alpha y+\beta z)^2,$$

et de cette forme on peut encore déduire des unités complexes.

Une unité complexe pourra alors s'écrire

$$a\alpha + b\beta + c\gamma,$$

et l'on devra avoir

$$(a\alpha + b\beta + c\gamma)(a\beta + b\gamma + c\alpha)(a\gamma + b\alpha + c\beta) = 1,$$

et il suffit de remarquer que multiplier f par $(a\alpha + b\beta + c\gamma)^2$ revient à faire une certaine substitution de déterminant 1.

Mais je laisse pour un autre travail de plus longs développements sur ce sujet.

En terminant, je remercie M. Hermite des conseils qu'il m'a prodigués; c'est grâce à lui qu'on trouvera peut-être quelque nouveauté dans le présent travail. Je remercie aussi M. Darboux, qui a bien voulu m'encourager dans mes recherches et m'aider aussi de ses affectueux conseils.

NOTE SUR LES SUBSTITUTIONS.

On a vu, au n° 29, que les substitutions

$$S = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad T = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

sont les éléments nécessaires et suffisants de toute réduction.

Il en résulte que *toute substitution*

$$U = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

est équivalente à une combinaison des substitutions S *et* T.

En effet, soit φ une forme réduite; appliquons à cette forme la substitution U^{-1}, c'est-à-dire la substitution inverse de U; on obtiendra ainsi une transformée Φ. Cette forme Φ peut être réduite au moyen des seules substitutions S et T, et lorsque la réduction sera opérée, la nouvelle forme sera, après avoir au besoin permuté les variables, identique à φ.

Mais, comme on peut permuter les variables en employant une combinaison convenable des substitutions S et T, on voit qu'on peut passer de la forme Φ à la forme φ en n'employant que les substitutions S et T. D'un autre côté, on passe évidemment de Φ à φ en faisant dans Φ la substitution U. Donc la substitution U est équivalente à une certaine combinaison des substitutions S et T.

On peut, du reste, le démontrer directement.

Soit en effet une substitution

$$\Sigma = \begin{vmatrix} \alpha & \alpha' & \alpha'' \\ \beta & \beta' & \beta'' \\ \gamma & \gamma' & \gamma'' \end{vmatrix},$$

où nous supposerons, en permutant au besoin les variables,

$$\alpha'' \gtreqless \alpha' \gtreqless \alpha.$$

Si nous faisons suivre cette substitution de la substitution

$$\Theta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ m & n & 1 \end{vmatrix},$$

ces deux substitutions successives pourront être remplacées par la substitution unique

$$\Sigma\Theta = \begin{vmatrix} \alpha + m\alpha'' & \alpha' + n\alpha'' & \alpha'' \\ \beta + m\beta'' & \beta' + n\beta'' & \beta'' \\ \gamma + m\gamma'' & \gamma' + n\gamma'' & \gamma'' \end{vmatrix},$$

où l'on peut disposer de m et de n de manière que $\alpha + m\alpha''$, $\alpha' + n\alpha''$ soient l'un et l'autre, en valeur absolue, inférieurs ou au plus égaux à $\frac{\alpha''}{2}$.

Nous opérerons ensuite sur la substitution $\Sigma\Theta$ comme nous avons opéré sur la substitution Σ, c'est-à-dire que nous amènerons, par une permutation des variables, le plus petit coefficient de la première ligne au dernier rang et que nous abaisserons ensuite les deux autres coefficients au-dessous de la moitié de celui-ci.

Un nombre évidemment fini de semblables opérations nous conduira finalement à une substitution Σ_1, qui peut s'écrire ainsi :

$$\Sigma_1 = \begin{vmatrix} \alpha & \alpha' & 0 \\ \beta & \beta' & \beta'' \\ \gamma & \gamma' & \gamma'' \end{vmatrix}.$$

Joignant alors à la permutation des variables x et y l'emploi de la substitution

$$\Theta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

on sera conduit par un nombre fini d'opérations à une substitution dans laquelle les deux derniers éléments de la première ligne seront nuls. Soit

$$\Sigma_2 = \begin{vmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ \beta & \beta' & \beta'' \\ \gamma & \gamma' & \gamma'' \end{vmatrix}$$

cette substitution; comme le déterminant de cette substitution est égal à l'unité, on en conclut

$$\alpha = 1, \quad \beta'\gamma'' - \gamma'\beta'' = 1,$$

de sorte qu'on a

$$\Sigma_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \beta & \beta' & \beta'' \\ \gamma & \gamma' & \gamma'' \end{vmatrix}.$$

Si l'on fait suivre cette substitution de la permutation des variables y et z, ainsi que de la substitution

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & m & 1 \end{vmatrix},$$

on sera conduit par un nombre fini d'opérations à la substitution

$$\Sigma_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \beta & 1 & 0 \\ \gamma & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Faisant enfin suivre cette substitution des deux substitutions

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\beta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\gamma & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

on arrivera à la substitution identique

$$\Sigma_4 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Si l'on remarque maintenant que la substitution

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ m & n & 1 \end{vmatrix}$$

résulte de la composition des deux suivantes

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ m & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & n & 1 \end{vmatrix},$$

on voit qu'on parvient à la substitution identique Σ_4, lorsqu'on fait suivre une substitution quelconque Σ de certaines substitutions comprenant seulement :

1° Les substitutions qui permutent les variables;

2° La substitution $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ ou son inverse $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

Or on a vu que les substitutions qui permutent les variables peuvent toujours être obtenues en combinant les substitutions désignées par S et T; il est, en outre, facile de vérifier que la substitution

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

est équivalente à la combinaison suivante des substitutions S et T:

$$S^2\ T^2\ S\ T^2\ S^2\ T^2\ S\ T^2\ S\ T^3\ S^2\ T^2\ S\ T^2\ S\ T\ S.$$

Quant à la substitution

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

qui est l'inverse de la précédente, elle s'obtient par la combinaison

$$S^2\ T^3\ S^2\ T^2\ S^2\ T^2\ S\ T\ S^2\ T^2\ S^2\ T^2\ S\ T^2\ S^2\ T^2\ S.$$

Donc, en adjoignant à une substitution quelconque Σ une certaine combinaison des substitutions S et T, on sera conduit à la substitution identique Σ_4.

Il en résulte que toute substitution U est équivalente à une certaine combinaison des substitutions S et T, et cette combinaison sera celle qu'il faut adjoindre à la substitution Σ, inverse de U, pour parvenir à la substitution identique

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$