GASTON GOHIERRE DE LONGCHAMPS

Sur les intégrales eulériennes de seconde espèce

Annales scientifiques de l'É.N.S. 2e série, tome 9 (1880), p. 419-427
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1880_2_9__419_0>

SUR LES

INTÉGRALES EULÉRIENNES DE SECONDE ESPÈCE,

PAR M. GOHIERRE DE LONGCHAMPS,

PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES AU LYCÉE CHARLEMAGNE.

Nous nous proposons dans cette Note d'établir, par une méthode que nous croyons nouvelle, la formule que Gauss a adoptée comme définissant les *intégrales eulériennes de seconde espèce*. On connaît l'importance de cette définition, de laquelle se déduisent très simplement les propriétés si remarquables des fonctions Γ.

1. Nous poserons

$$\gamma_p = \int_0^q e^{-x} x^{p-1}\, dx.$$

Cette fonction représente l'intégrale eulérienne $\Gamma(p)$, quand on suppose $q = \infty$.

Le développement connu de e^{-x} donne

$$e^{-x} x^{p-1} = x^{p-1} - \frac{x^p}{1} + \frac{x^{p+1}}{1.2} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{x^{p+n}}{1.2\ldots(n+1)} + \ldots.$$

Intégrons dans les limites o, q; on aura

$$\gamma_p = \frac{q^p}{p} - \frac{q^{p+1}}{1(p+1)} + \frac{q^{p+2}}{1.2(p+2)} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{q^{p+n+1}}{1.2\ldots(n+1)(p+n+1)} + \ldots.$$

C'est ce résultat que nous allons transformer.

Lorsqu'on cherche à décomposer en fractions simples la fraction composée

$$\frac{1}{p(p+1)\ldots(p+k)},$$

on trouve

$$\frac{1}{p(p+1)\ldots(p+k)} = \frac{1}{1.2\ldots k}\left[\frac{1}{p} - \frac{\frac{k}{1}}{p+1} + \frac{\frac{k(k-1)}{1.2}}{p+2} + \ldots + (-1)^k \frac{1}{p+k}\right].$$

De ce résultat on peut conclure l'identité suivante,

$$\begin{aligned}&\left[\frac{x^p}{p} - \frac{x^{p+1}}{(p+1).1} + \frac{x^{p+2}}{(p+2).1.2} + \ldots\right.\\ &\qquad \left. + (-1)^k \frac{x^{p+k}}{p+k}\,\frac{1}{1.2\ldots k} + \ldots\right]\left(1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \ldots + \frac{x^k}{1.2\ldots k} + \ldots\right)\\ &= \frac{x^p}{p} + \frac{x^{p+1}}{p(p+1)} + \frac{x^{p+2}}{p(p+1)(p+2)} + \ldots + \frac{x^{p+k}}{p(p+1)\ldots(p+k)} + \ldots,\end{aligned}$$

les deux séries qu'on a multipliées l'une par l'autre étant d'ailleurs, on peut le remarquer, convergentes *quel que soit* x.

Nous pouvons donc écrire

$$(1)\quad y_p = \int_0^q e^{-x} x^{p-1}\,dx = \frac{\dfrac{q^p}{p} + \dfrac{q^{p+1}}{p(p+1)} + \ldots + \dfrac{q^{p+k}}{p(p+1)\ldots(p+k)} + \ldots}{e^q}.$$

C'est la formule qui sert de base aux résultats suivants.

2. Nous faisons ici cette remarque, qui nous sera utile, que, *si deux séries*

$$\alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_n x^n + \ldots,$$
$$\beta_0 + \beta_1 x + \ldots + \beta_n x^n + \ldots$$

sont convergentes quel que soit x, *le rapport de ces deux séries a pour valeur*

$$\lim\left(\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right)$$

pour $n = \infty$, *quand on suppose* x *infiniment grand.*

Cette propriété est évidente pour les deux polynômes

$$\alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_n x^n,$$
$$\beta_0 + \beta_1 x + \ldots + \beta_n x^n.$$

Si nous considérons maintenant les deux séries

$$u = \alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_n x^n + \ldots,$$
$$v = \beta_0 + \beta_1 x + \ldots + \beta_n x^n + \ldots,$$

ces séries étant supposées convergentes *quel que soit la valeur attribuée à* x, on pourra donc prendre n assez grand pour que la somme des termes qui suivent les termes $\alpha_n x^n$, $\beta_n x^n$ soit aussi petite qu'on voudra, et cela *quel que soit* x. Si nous désignons par ε_n la somme des termes qui suivent $\alpha_n x^n$, par ε'_n celle des termes qui suivent $\beta_n x^n$, on aura donc

$$\frac{u}{v} = \frac{(\alpha_0 + \varepsilon_n) + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_n x^n}{(\beta_0 + \varepsilon'_n) + \beta_1 x + \ldots + \beta_n x^n}.$$

Divisons haut et bas par x^n et n étant supposé *fixe*, après avoir été choisi aussi grand qu'on le voulait, donnons à x de très grandes valeurs; les quantités ε_n, ε'_n varieront, mais pourront pourtant être toujours considérées comme aussi petites qu'on le voudra, puisque les séries considérées sont supposées convergentes quelle que soit la valeur de x et puisque le nombre fixe n a été choisi assez grand pour que ε_n, ε'_n soient aussi petits qu'on le désirera. Le rapport $\frac{u}{v}$ différera donc aussi peu qu'on le voudra de $\frac{\alpha_n}{\beta_n}$, pourvu qu'on donne à x des valeurs suffisamment grandes. On a donc bien

$$\lim \frac{u}{v} = \lim \frac{\alpha_n}{\beta_n} \quad \text{pour } x = \infty \text{ et } n = \infty.$$

Cela posé, la formule (1) pouvant s'écrire

$$y_p = \frac{q^p}{p} \, \frac{1 + \dfrac{q}{p+1} + \ldots + \dfrac{q^{n-1}}{(p+1)\ldots(p+n-1)} + \ldots}{1 + \dfrac{q}{1} + \ldots + \dfrac{q^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} + \ldots},$$

et les deux séries qui figurent dans cette expression étant convergentes quel que soit q, on a

$$\Gamma(p) = \lim \frac{q^p}{p} \, \frac{\dfrac{1}{(p+1)\ldots(p+n-1)}}{\dfrac{1}{1.2\ldots(n-1)}}$$

ou

$$\Gamma(p) = \lim q^p \frac{1.2..\,(n-1)}{p(p+1)\ldots(p+n-1)},$$

quand on suppose $q=\infty$ et $n=\infty$. C'est la formule que nous nous proposions d'établir; elle ne diffère pas sensiblement de celle donnée par Gauss,

$$\Gamma(p) = \lim \frac{(1.2\ldots n)\,n^{p-1}}{p(p+1)\ldots(p+n-1)},$$

et, comme elle, conduit aux propriétés des fonctions Γ. Nous ne pouvons, pour la démonstration de ces propriétés, que renvoyer le lecteur aux Traités ordinaires de Calcul intégral, et notamment à l'Ouvrage de M. J. Bertrand, où l'on trouvera une ingénieuse démonstration de la formule de Gauss. Nous tirerons seulement de la formule (1) quelques autres conséquences.

3. Elle donne immédiatement

$$p y_p = y_{p+1} + \frac{q^p}{e^q},$$

formule que fournit aussi l'intégration par parties.

Si p est entier, on a, grâce à cette égalité, une suite récurrente entre les quantités

$$y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_{p+1},$$

suite de laquelle on peut déduire l'expression de y_p en fonction de e^q et d'une suite finie de termes algébriques. Mais on peut arriver plus simplement à cette expression en remarquant que, si p est entier, on a identiquement

$$\begin{aligned}1.2\ldots(p-1) + 2.3\ldots(p-1)x + \ldots + (p-1)x^{p-2} + x^{p-1} + \left[\frac{x^p}{p} + \frac{x^{p+1}}{p(p+1)} + \ldots\right]\\ = 1.2\ldots(p-1)\left(1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \ldots\right);\end{aligned}$$

on a donc

$$y_p = 1.2\ldots(p-1)\,\frac{e^q - 1 - \dfrac{q}{1} - \dfrac{q^2}{1.2} - \ldots - \dfrac{q^{p-1}}{1.2\ldots(p-1)}}{e^q}.$$

4. Si nous posons

$$z_q = \frac{q^p}{p} + \frac{q^{p+1}}{p(p+1)} + \ldots,$$

on aura

$$\frac{dz_q}{dq} = q^{p-1} + \frac{q^p}{p} + \frac{q^{p+1}}{p(p+1)} + \ldots.$$

Donc

$$\frac{dz_q}{dq} - z_q - q^{p-1} = 0;$$

c'est une *équation linéaire du premier ordre*. En lui appliquant le procédé ordinaire d'intégration, on tombera sur la formule (1). Cette remarque permet d'établir cette formule par une voie plus rapide, mais peut-être moins naturelle que celle que nous avons donnée plus haut.

5. Si dans la formule (1) nous supposons $p = \frac{1}{2}$, il viendra

$$y_{\frac{1}{2}} = 2\frac{q^{\frac{1}{2}}}{e^q}\left[1 + \frac{2q}{3} + \frac{(2q)^2}{3.5} + \frac{(2q)^3}{3.5.7} + \ldots\right],$$

ou, en posant $2q = Q$,

$$y_{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2}}\frac{Q^{\frac{1}{2}}}{e^{\frac{Q}{2}}}\left(1 + \frac{Q}{3} + \frac{Q^2}{3.5} + \ldots\right). \tag{2}$$

Nous désignerons par A_n, dans ce qui va suivre, l'expression

$$\frac{1}{1.3.5\ldots(2n+1)},$$

et nous poserons symboliquement

$$(A)_n = A_0 A_n + A_1 A_{n-1} + \ldots + A_n A_0 = \sum_0^n {}_k A_k A_{n-k}.$$

En élevant au carré l'égalité (2), on aura donc, d'après cette écriture conventionnelle,

$$\left(y_{\frac{1}{2}}\right)^2 = \frac{2Q}{e^Q}[(A)_0 + (A)_1 Q + (A)_2 Q^2 + \ldots + (A)_n Q^n + \ldots]$$

ou encore

$$\left(y_{\frac{1}{2}}\right)^2 = 2\,\frac{(A)_0 Q + (A)_1 Q^2 + \ldots + (A)_n Q^{n+1} + \ldots}{1 + \frac{Q}{1} + \frac{Q^2}{1.2} + \cdots + \frac{Q^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)} + \ldots}.$$

Supposons maintenant que q et par conséquent Q deviennent infiniment grands; $y_{\frac{1}{2}}$ a pour limite $\Gamma(\frac{1}{2})$ ou $\sqrt{\pi}$. Appliquons la remarque que nous avons établie au n° **2**, et nous aurons

$$(3) \qquad \pi = 2 \lim (A)_n . 1.2 \ldots (n+1) \quad \text{pour } n = \infty.$$

En posant

$$\pi_n = 2(A)_n . 1.2 \ldots (n+1),$$

on trouve

$$\pi_0 = 2,$$
$$\pi_1 = \frac{8}{3},$$
$$\pi_2 = \frac{44}{15},$$
$$\pi_3 = \frac{64}{21},$$
$$\pi_4 = \frac{976}{315},$$
$$\pi_5 = \frac{10816}{3465},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Ces valeurs, qui convergent vers π, comme nous venons de le reconnaître, sont malheureusement *peu convergentes*. En réduisant π_5 en décimales, on trouve

$$\pi_5 = 3,12 \ldots,$$

qui ne donne qu'une approximation de $\frac{2}{100}$. Nous allons d'ailleurs reconnaître, à l'aide d'un développement que nous déduirons de l'égalité (3), que les nombres

$$\pi_0, \ \pi_1, \ \pi_2, \ \ldots$$

vont sans cesse en augmentant, mais augmentent, en effet, d'après une loi de convergence qui explique les résultats numériques précédents.

6. Nous avons posé

$$A_n = \frac{1}{1.3.5\ldots(2n+1)}$$

et

$$(A)_n = A_0 A_n + A_1 A_{n-1} + \ldots + A_n A_0,$$

d'où l'on conclut

$$(A)_{n-1} = A_0 A_{n-1} + A_1 A_{n-2} + \ldots + A_{n-1} A_0,$$

et par suite, en remarquant que $A_{n-1} - A_n = 2n A_n$,

$$(A)_{n-1} - (A)_n = 2n A_0 A_n + 2(n-1) A_1 A_{n-1} + \ldots + 2 A_{n-1} A_1 - A_n A_0,$$

qu'on peut encore écrire

$$(A)_{n-1} - (A)_n = 2n . A_0 A_n + 2 A_{n-1} A_1 + \ldots + 2(n-1) A_1 A_{n-1} - A_n A_0.$$

Ajoutons et divisons par 2 :

$$(A)_{n-1} - (A)_n = n(A_0 A_n + A_1 A_{n-1} + \ldots + A_n A_0) - A_n A_0.$$

On a donc entre les deux nombres $(A)_n$, $(A)_{n-1}$ la relation

$$(n+1)(A)_n - (A)_{n-1} = A_n.$$

et, comme $\pi_n = (A)_n . 1.2\ldots(n+1)$,

$$\pi_n - \pi_{n-1} = 2\frac{1.2\ldots n}{1.3.5\ldots(2n+1)}.$$

Nous désignerons par B_n l'expression

$$\frac{1.2\ldots n}{1.3\ldots(2n+1)},$$

et nous aurons

$$\tfrac{1}{2}(\pi_n - \pi_0) = B_1 + B_2 + \ldots + B_n.$$

D'ailleurs,

$$\pi_0 = 2(A)_0 = 2,$$

et, en posant conventionnellement

$$B_0 = 1,$$

on a

$$\tfrac{1}{2}\pi_n = B_0 + B_1 + B_2 + \ldots + B_n$$

et, pour $n=\infty$,

$$\tfrac{1}{2}\pi = B_0 + B_1 + B_2 + \ldots + B_n + \ldots, \tag{4}$$

ce qui donne pour π ce développement en série, que nous croyons nouveau :

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{1.3} + \frac{1.2}{1.3.5} + \cdots + \frac{1.2\ldots n}{1.3\ldots(2n+1)} + \ldots. \tag{5}$$

En remarquant que

$$2^n.1.3.5\ldots(2n+1) = (n+1)(n+2)\ldots(2n+1),$$

on peut écrire

$$\frac{\pi}{2} = 1 + 2\,\frac{1}{3C_2^1} + 2^2\,\frac{1}{5C_4^2} + \ldots + 2^n\,\frac{1}{(2n+1)C_{2n}^n} + \ldots, \tag{6}$$

C_{2n}^n désignant, suivant l'usage, le nombre des combinaisons de $2n$ objets pris n à n.

7. Nous allons chercher maintenant le développement de π^2 en fonction des nombres B_0, B_1, ..., B_n, ..., et démontrer la formule

$$\frac{\pi^2}{8} = B_0 + \frac{B_1}{2} + \frac{B_2}{3} + \cdots + \frac{B_n}{n+1} + \ldots. \tag{7}$$

A cet effet, nous poserons

$$y = B_0 + B_1 x + B_2 x^2 + \ldots + B_n x^n + \ldots,$$

série convergente pour des valeurs de x positives, mais inférieures à 2. Élevons cette série au carré et nous aurons, d'après la notation que nous avons adoptée,

$$y^2 = (B)_0 + (B)_1 x + \ldots + (B)_n x^n + \ldots.$$

Entre deux nombres consécutifs $(B)_n$, $(B)_{n-1}$, il existe, comme on peut le reconnaître par plusieurs procédés, la relation

$$2(B)_n - (B)_{n-1} = \frac{2B_n}{n+1}. \tag{8}$$

De cette relation, on conclut sans peine

$$\frac{\pi^2}{8} = \frac{B_0}{1} + \frac{B_2}{2} + \dots + \frac{B_n}{n+1} + \dots,$$

résultat connu et qu'on déduit de la formule

$$x^2 = \sin^2 x + \frac{2}{3}\frac{\sin^4 x}{2} + \dots + \frac{2.4\dots 2n}{3.5\dots(2n+1)}\frac{\sin^{2n+2} x}{n+1} + \dots,$$

en y supposant

$$x = \frac{\pi}{4}.$$

La relation (8) peut d'ailleurs conduire, si l'on veut, à ce développement; elle donne encore la formule

$$\frac{x}{\cos x} = B_0 \sin x + 2 B_1 \sin^3 x + \dots + 2^n B_n \sin^{2n+1} x + \dots,$$

et les identités

$$\frac{B_1}{n-1} + \frac{(2n-1)}{(n-1)(n-2)} B_2 + \dots + \frac{(2n-1)\dots 7.5}{(n-1)\dots 2.1} B_{n-1} = \frac{n-1}{n+1},$$

$$\frac{(n-1)(2n+1)}{n(n+1)} B_n = \frac{B_1 B_{n-1}}{n-1} + \frac{B_2 B_{n-2}}{n-2} + \dots + \frac{B_{n-1} B_1}{1}.$$

En terminant, nous ferons encore remarquer que la fonction

$$y = B_0 + B_1 x + \dots + B_n x^n + \dots$$

et son intégrale

$$z = B_0 x + B_1 \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{B_n x^{n+1}}{n+1} + \dots$$

sont liées par l'égalité

$$y^2 = \frac{2z}{x(2-x)}.$$

FIN DU TOME NEUVIÈME.

5868 PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS, QUAI DES AUGUSTINS, 55.