P. APPELL

Sur une classe de polynômes

Annales scientifiques de l'É.N.S. 2e série, tome 9 (1880), p. 119-144
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1880_2_9__119_0>

SUR
UNE CLASSE DE POLYNOMES,

PAR M. P. APPELL,
PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE DIJON.

1. Je m'occupe, dans ce Mémoire, de certains polynômes en x formant une suite

$$A_0,\ A_1,\ \ldots,\ A_{n-1},\ A_n,\ \ldots,$$

dont le terme A_n est un polynôme de degré n et dans laquelle deux termes consécutifs sont liés par la relation

$$\frac{dA_n}{dx} = nA_{n-1}. \tag{1}$$

Les polynômes les plus simples de cette espèce sont les puissances consécutives mêmes de la variable,

$$1,\ x,\ \ldots,\ x^{n-1},\ x^n,\ \ldots,$$

car on a

$$\frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}.$$

Mais il est facile de voir qu'il existe une infinité d'autres suites possédant la propriété (1) et de former l'expression la plus générale des différents termes d'une pareille suite. On voit en effet, par la méthode des coefficients indéterminés, que l'on a

$$A_n = \alpha_n + \frac{n}{1}\alpha_{n-1}x + \frac{n(n-1)}{1.2}\alpha_{n-2}x^2 + \ldots + \frac{n}{1}\alpha_1 x^{n-1} + \alpha_0 x^n, \tag{2}$$

les coefficients α_0, α_1, $\ldots$, α_n étant arbitraires, de sorte que dans chaque polynôme A_n il entre un nouveau coefficient α_n qui ne figurait pas dans les précédents.

Il est bon de remarquer que, si l'on a une suite de polynômes

$$X_0, X_1, \ldots, X_{n-1}, X_n, \ldots,$$

tels que l'on ait

$$\frac{dX_n}{dx} = \varphi(n) X_{n-1},$$

$\varphi(n)$ étant une fonction quelconque de n, on peut ramener ces polynômes aux précédents. Il suffit en effet de poser

$$A_n = \frac{1.2\ldots n}{\varphi(0).\varphi(1)\ldots\varphi(n)} X_n$$

pour que l'on ait

$$\frac{dA_n}{dx} = n A_{n-1}.$$

2. L'expression générale (2) du polynôme A_n fournit une autre manière de former ce polynôme. A cet effet, considérons le développement

$$(3) \qquad a(h) = \alpha_0 + \frac{h}{1}\alpha_1 + \frac{h^2}{1.2}\alpha_2 + \ldots + \frac{h^n}{1.2\ldots n}\alpha_n + \ldots,$$

les coefficients $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots$ se succédant suivant une loi quelconque; je désigne, pour abréger, ce développement par $a(h)$, sans m'occuper de savoir si la série ainsi formée est convergente ou non. Je considère ensuite le développement

$$e^{hx} = 1 + \frac{h}{1}x + \frac{h^2}{1.2}x^2 + \ldots + \frac{h^n}{1.2\ldots n}x^n + \ldots,$$

et je fais le produit des deux développements $a(h)$, e^{hx}. Si l'on ordonne ce produit par rapport aux puissances de h, on obtient précisément le polynôme (2) A_n comme coefficient de $\frac{h^n}{1.2\ldots n}$, de sorte que l'on peut écrire

$$(4) \qquad a(h)e^{hx} = A_0 + \frac{h}{1}A_1 + \frac{h^2}{1.2}A_2 + \ldots + \frac{h^n}{1.2\ldots n}A_n + \ldots.$$

Cette identité (4), ainsi déduite de l'expression générale (2) des polynômes A, peut, à son tour, servir de définition à ces polynômes. De cette façon, à chaque suite de polynômes A correspond un seul développement $a(h)$ et à chaque développement correspond une suite de polynômes. J'appellerai $a(h)$ la fonction génératrice des polynômes, en modifiant un peu le sens que l'on attribue ordinairement à cette expression.

Ainsi, par exemple, on pourra prendre pour fonctions génératrices les séries

$$e^{h^2} = 1 + \frac{h^2}{1} + \frac{h^4}{1.2} + \ldots + \frac{h^{2n}}{1.2\ldots n} + \ldots,$$

$$\frac{1}{1-h} = 1 + h + h^2 + \ldots + h^n + \ldots,$$

$$a(h) = 1 + h + 1.2h^2 + \ldots + 1.2\ldots nh^n + \ldots.$$

La fonction génératrice des polynômes formés par les puissances de la variable

$$1,\ x,\ x^2,\ \ldots,\ x^n,\ \ldots$$

est égale à l'unité.

3. Étant données deux suites de polynômes

$$\begin{array}{l} A_0,\ A_1,\ \ldots,\ A_n,\ \ldots, \\ B_0,\ B_1,\ \ldots,\ B_n,\ \ldots \end{array}$$

admettant respectivement pour fonctions génératrices $a(h)$ et $b(h)$, je remarque d'abord que les polynômes

$$\lambda A_0 + \mu B_0,\ \lambda A_1 + \mu B_1,\ \ldots,\ \lambda A_n + \mu B_n,\ \ldots,$$

où λ et μ désignent deux constantes, admettent la fonction génératrice

$$\lambda a(h) + \mu b(h),$$

ainsi qu'il résulte immédiatement des définitions. Je considère ensuite le polynôme obtenu en remplaçant dans A_n les puissances de la variable x^0, x^1, ..., x^k, ..., x^n respectivement par les polynômes B_0, B_1, ..., B_k, ..., B_n, et je désigne ce polynôme par $(AB)_n$. Ces nouveaux polynômes (AB),

$$(AB)_0,\ (AB)_1,\ \ldots,\ (AB)_n,\ \ldots$$

forment une suite possédant la propriété exprimée par la relation (1), et leur fonction génératrice est le produit des deux fonctions génératrices $a(h)$ et $b(h)$ des polynômes A et B. En effet, pour obtenir les polynômes A, on considère le développement

$$e^{hx} = 1 + \frac{h}{1} x + \frac{h^2}{1.2} x^2 + \ldots + \frac{h^n}{1.2\ldots n} x^n + \ldots,$$

on multiplie ce développement par $a(h)$, et l'on ordonne le produit par rapport aux puissances de h, ce qui donne

$$a(h) e^{hx} = A_0 + \frac{h}{1} A_1 + \frac{h^2}{1.2} A_2 + \ldots + \frac{h^n}{1.2\ldots n} A_n + \ldots.$$

Pour obtenir ensuite les polynômes (AB), il faut, dans les polynômes A, remplacer x^k par B_k. Par conséquent, pour former les polynômes (AB), il suffit de considérer le développement

$$S = B_0 + \frac{h}{1} B_1 + \frac{h^2}{1.2} B_2 + \ldots + \frac{h^n}{1.2\ldots n} B_n + \ldots,$$

de multiplier ce développement par $a(h)$ et d'ordonner le produit par rapport aux puissances de h, ce qui donne

$$a(h) S = (AB)_0 + \frac{h}{1} (AB)_1 + \frac{h^2}{1.2} (AB)_2 + \ldots + \frac{h^n}{1.2\ldots n} (AB)_n + \ldots.$$

Mais le développement S n'est autre que $b(h) e^{hx}$, donc $a(h)S$ est égal à $a(h)\, b(h) e^{hx}$, et la fonction génératrice des polynômes (AB) est $a(h)\, b(h)$.

Il résulte de ce qui précède que l'on a

$$(AB)_n = (BA)_n,$$

car les polynômes (AB) et les polynômes (BA) ont la même fonction génératrice $a(h)\, b(h)$.

En particulier, on peut supposer les polynômes B identiques aux polynômes A, et l'on voit que les polynômes $(AA)_n$ ou $(A^2)_n$ obtenus en remplaçant dans les polynômes A les puissances de la variable telles que x^k par A_k admettent pour fonction génératrice le carré $a^2(h)$ de la fonction $a(h)$.

Si maintenant on considère une troisième suite de polynômes C, ayant pour fonction génératrice $c(h)$, on voit que les polynômes (ABC) obtenus en remplaçant dans (AB) x^k par C_k ont pour fonction génératrice le produit $a(h)b(h)c(h)$. En particulier, on peut supposer les polynômes A, B, C identiques, et ainsi de suite pour un nombre de polynômes aussi grand que l'on voudra.

Nous sommes ainsi conduits à une opération sur les polynômes qui est analogue à la multiplication et à l'élévation aux puissances entières, et qui correspond effectivement à ces opérations effectuées sur les fonctions génératrices.

On peut de même concevoir des opérations analogues à la division et à l'élévation aux puissances fractionnaires positives ou négatives. Ainsi, on pourra se proposer de chercher des polynômes C tels que l'on ait

$$(AC)_n = B_n;$$

la fonction génératrice de ces polynômes C sera le quotient des fonctions génératrices de B et A, et l'on pourra désigner ces polynômes C par $\left(\frac{B}{A}\right)_n$, de sorte que l'on a

$$\left(A\frac{B}{A}\right)_n = B_n,$$

comme dans les opérations élémentaires. En particulier, étant donnés des polynômes A, on peut chercher des polynômes B tels que

$$(AB)_n = x^n;$$

ces polynômes B ont pour fonction génératrice l'inverse de la fonction génératrice de A; je les appellerai *polynômes inverses* des polynômes A, en les désignant par la notation $\left(\frac{1}{A}\right)$ ou (A^{-1}).

Je n'insiste pas sur les opérations analogues aux élévations aux puissances, qui se conçoivent aisément d'après ce qui précède, me bornant à remarquer que la fonction génératrice des polynômes $(A^m)_n$ est $a^m(h)$, $a(h)$ étant la fonction génératrice des polynômes A_n.

4. Avant de continuer cette étude, appliquons ce qui précède à quelques exemples.

Considérons d'abord les polynômes A ayant pour fonction génératrice $(1-h)$; on a

$$(1-h)e^{hx} = 1 + \frac{h}{1}(x-1) + \ldots + \frac{h^n}{1.2\ldots n}(x^n - nx^{n-1}) + \ldots;$$

donc

$$A_n = x^n - nx^{n-1}.$$

Proposons-nous de trouver les polynômes inverses des polynômes A, c'est-à-dire des polynômes B tels que le polynôme

$$(AB)_n = B_n - n B_{n-1}$$

se réduise à x^n. Ces polynômes inconnus ont pour fonction génératrice

$$\frac{1}{1-h} = 1 + h + h^2 + \ldots + h^n + \ldots,$$

de sorte que l'on a, en effectuant le produit $\frac{1}{1-h}e^{hx}$,

$$B_n = 1.2\ldots n\left(1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \ldots + \frac{x^n}{1.2\ldots n}\right).$$

On voit, en effet, que

$$B_n - nB_{n-1} = x^n.$$

Je prends un deuxième exemple. Considérons les polynômes $P_n(x)$ ayant pour fonction génératrice e^{-h^2}

$$(5) \qquad e^{-h^2}e^{hx} = P_0 + \frac{h}{1}P_1 + \ldots + \frac{h^n}{1.2\ldots n}P_n + \ldots.$$

Ces polynômes P_n, dans lesquels on remplace la variable x par $(-2x)$, donnent les polynômes de M. Hermite (*Comptes rendus*, t. LVIII, p. 93, 266). Les polynômes $(P^2)_n$ obtenus en remplaçant dans P_n les puissances de la variable telles que x^k par P_k ont pour fonction génératrice le carré de e^{-h^2}, c'est-à-dire e^{-2h^2}. On a donc

$$(6) \qquad e^{-2h^2}e^{hx} = (P^2)_0 + \frac{h}{1}(P^2)_1 + \ldots + \frac{h^n}{1.2\ldots n}(P^2)_n + \ldots.$$

Dans l'identité (5), posons

$$h = h'\sqrt{2}, \quad x = \frac{x'}{\sqrt{2}};$$

elle devient

$$e^{-2h'^2}e^{h'x'} = P_0 + \frac{h'\sqrt{2}}{1}P_1\left(\frac{x'}{\sqrt{2}}\right) + \ldots + \frac{h'^n 2^{\frac{n}{2}}}{1.2\ldots n}P_n\left(\frac{x'}{\sqrt{2}}\right) + \ldots,$$

et par suite, en comparant à (6),

$$(P^2)_n = 2^{\frac{n}{2}}P_n\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right).$$

Cherchons aussi les polynômes inverses des polynômes P. Ces polynômes (P^{-1}) ont pour fonction génératrice $\frac{1}{e^{-h^2}}$ ou e^{h^2}; on a donc

$$(7)\qquad e^{h^2}e^{hx} = (P^{-1})_0 + \frac{h}{1}(P^{-1})_1 + \ldots + \frac{h^n}{1.2\ldots n}(P^{-1})_n + \ldots.$$

Posons donc l'identité (5)

$$h = h'i,\quad x = -ix',$$

i désignant le symbole $\sqrt{-1}$; cette identité devient

$$e^{h'^2}e^{h'x} = P_0 + \frac{h'}{1}iP_1(-ix') + \ldots + \frac{h'^n}{1.2\ldots n}i^nP_n(-ix') + \ldots,$$

et par suite, en comparant à (7),

$$(8)\qquad (P^{-1})_n = i^nP_n(-ix).$$

Les deux formules que je viens de démontrer peuvent être comprises dans une autre plus générale,

$$(P^m)_n = m^{\frac{n}{2}}P_n\left(\frac{x}{\sqrt{m}}\right),$$

dans laquelle m est un nombre quelconque entier ou fractionnaire, positif ou négatif, et qui se démontre de la même manière que les précédentes.

Les polynômes qui ont pour fonction génératrice e^{-h^k}, k désignant un entier positif, possèdent des propriétés analogues.

5. Soit une suite de polynômes A ayant pour fonction génératrice $a(h)$. Je me propose d'exprimer en fonction des polynômes A les

polynômes ayant pour fonction génératrice la dérivée de $a(h)$, $\frac{da(h)}{dh}$. J'entends par dérivée de $a(h)$ un développement dont tous les termes sont les dérivées des termes de $a(h)$. Je désigne par la notation (dA) les polynômes cherchés. On a

$$(9) \qquad a(h)e^{hx} = A_0 + \frac{h}{1}A_1 + \frac{h^2}{1.2}A_2 + \ldots + \frac{h^n}{1.2\ldots n}A_n + \ldots,$$

$$(10) \qquad \frac{da(h)}{dh}e^{hx} = (dA)_0 + \frac{h}{1}(dA)_1 + \frac{h^2}{1.2}(dA)_2 + \ldots + \frac{h^n}{1.2\ldots n}(dA)_n + \ldots.$$

Prenons les dérivées des deux membres de l'identité (9) par rapport à h. On obtient

$$\frac{da(h)}{dh}e^{hx} + xa(h)e^{hx} = A_1 + \frac{h}{1}A_2 + \ldots + \frac{h^{n-1}}{1.2\ldots n-1}A_n + \ldots.$$

Remplaçons maintenant $\frac{da(h)}{dh}e^{hx}$ par sa valeur (10), et égalons les coefficients de h^n dans les deux membres ; nous avons la relation

$$(11) \qquad (dA)_n = A_{n+1} - xA_n,$$

qui est la relation cherchée.

De même, en désignant par $(d^2A)_n$ les polynômes ayant pour fonction génératrice $\frac{d^2a(h)}{dh^2}$, on a

$$(d^2A)_n = A_{n+2} - 2xA_{n+1} + x^2A_n.$$

D'une manière générale, en appelant $(d^kA)_n$ les polynômes ayant pour fonction génératrice $\frac{d^ka(h)}{dh^k}$, on a

$$(12) \qquad (d^kA)_n = A_{n+k} - \frac{k}{1}xA_{n+k-1} + \frac{k.k-1}{1.2}x^2A_{n+k-2} - \ldots.$$

Dans le second membre, tous les termes en x d'un degré supérieur à n se détruisent, de façon que le second membre est un polynôme de degré n.

6. Supposons que la fonction génératrice $a(h)$ des polynômes A satisfasse à une équation différentielle linéaire dont les coefficients

soient des polynômes en h. Multiplions alors les deux membres de cette équation par e^{hx}, et remplaçons les produits

$$\frac{d^k a(h)}{dh^k} e^{hx}$$

par les séries

$$(d^k \mathrm{A})_0 + \frac{h}{1}(d^k \mathrm{A})_1 + \ldots + \frac{h^n}{1.2\ldots n}(d^k \mathrm{A})_n + \ldots.$$

L'équation ainsi obtenue devra être identique, et les coefficients des mêmes puissances de h dans les deux membres devront être égaux. En égalant les coefficients de h^n dans les deux membres, on aura une relation linéaire entre un certain nombre de polynômes A, $(d\mathrm{A})$, ..., $(d^k\mathrm{A})$, ...

De cette relation on pourra déduire une relation linéaire entre un certain nombre de polynômes A, en y remplaçant les autres polynômes $(d^k\mathrm{A})$ par leurs expressions (12) en fonction des polynômes A.

Enfin cette dernière relation, linéaire par rapport aux polynômes A, pourra servir à former une équation différentielle linéaire à laquelle satisfait le polynôme A_n; pour obtenir cette équation différentielle, il suffira de remplacer tous les autres polynômes qui figurent dans la relation par des dérivées de A_n, au moyen des équations

$$\frac{d\mathrm{A}_n}{dx} = n\mathrm{A}_{n-1}, \quad \frac{d^2\mathrm{A}_n}{dx^2} = n(n-1)\mathrm{A}_{n-2}, \quad \ldots.$$

7. Appliquons cette méthode à quelques exemples particuliers.

Soit d'abord la fonction génératrice $a = \frac{1}{1-h}$. Cette fonction satisfait à l'équation linéaire

$$(1-h)\frac{da}{dh} - a = 0,$$

d'où, en multipliant par e^{hx},

$$(1-h)\frac{da}{dh}e^{hx} - ae^{hx} = 0.$$

Remplaçons $\frac{da}{dh}e^{hx}$ par le développement

$$(d\mathrm{A})_0 + \frac{h}{1}(d\mathrm{A})_1 + \ldots + \frac{h^n}{1.2\ldots n}(d\mathrm{A})_n + \ldots$$

et ae^{hx} par le développement

$$A_0 + \frac{h}{1} A_1 + \ldots + \frac{h^n}{1.2\ldots n} A_n + \ldots,$$

puis égalons à zéro le coefficient de h^{n-1}. Nous aurons

$$(dA)_{n-1} - (n-1)(dA)_{n-2} - A_{n-1} = 0.$$

Mais on a

$$(dA)_{n-1} = A_n \quad - x A_{n-1},$$
$$(dA)_{n-2} = A_{n-1} - x A_{n-2}.$$

La relation précédente devient donc

$$A_n - (x+n) A_{n-1} + (n-1) x A_{n-2} = 0,$$

qui est une relation entre trois polynômes A consécutifs. De cette relation on déduit immédiatement une équation différentielle à laquelle satisfait le polynôme A_n en remplaçant A_{n-1} et A_{n-2} respectivement par $\frac{1}{n}\frac{dA_n}{dx}$ et $\frac{1}{n(n-1)}\frac{d^2A_n}{dx^2}$, ce qui donne

$$x\frac{d^2A_n}{dx^2} - (x+n)\frac{dA_n}{dx} + nA_n = 0.$$

Prenons maintenant les polynômes P déjà considérés qui ont pour fonction génératrice $p = e^{-h^2}$. Cette fonction satisfait à l'équation différentielle

$$\frac{dp}{dh} + 2hp = 0.$$

Multiplions par e^{hx} et faisons

$$\frac{dp}{dh} e^{hx} = (dP)_0 + \frac{h}{1}(dP)_1 + \ldots + \frac{h^n}{1.2\ldots n}(dP)_n + \ldots,$$
$$pe^{hx} = P_0 + \frac{h}{1} P_1 + \ldots + \frac{h^n}{1.2\ldots n} P_n + \ldots.$$

En égalant à zéro le coefficient de h^{n-1}, on a

$$(dP)_{n-1} + 2(n-1) P_{n-2} = 0,$$

et, comme

$$(dP)_{n-1} = P_n - xP_{n-1},$$

on a

$$(13) \qquad P_n - x P_{n-1} + 2(n-1) P_{n-2} = 0,$$

d'où l'on déduit l'équation différentielle connue

$$(14) \qquad 2\frac{d^2 P_n}{dx^2} - x\frac{dP_n}{dx} + n P_n = 0.$$

On verra de même que les polynômes A_n ayant pour fonction génératrice e^{-h^k}, k étant entier positif, vérifient la relation

$$A_n - x A_{n-1} + k(n-k+1)(n-k+2)\ldots(n-1) A_{n-k} = 0$$

et l'équation différentielle d'ordre k

$$(15) \qquad k\frac{d^k A_n}{dx^k} - x\frac{dA_n}{dx} + n A_n = 0.$$

8. Je considère enfin les polynômes Q ayant pour fonction génératrice la série hypergéométrique de Gauss $F(\alpha, \beta, \gamma, h)$:

$$F(\alpha, \beta, \gamma, h) = 1 + \frac{\alpha\beta}{\gamma}\frac{h}{1} + \ldots + \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-1)}{\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)}\frac{h^n}{1.2\ldots n} + \ldots.$$

Multiplions par

$$e^{hx} = 1 + \frac{h}{1}x + \ldots + \frac{h^n}{1.2\ldots n}x^n + \ldots.$$

Après la multiplication, le coefficient de $\frac{h^n}{1.2\ldots n}$ sera

$$(16) \qquad \left\{ \begin{aligned} Q_n = {} & \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-1)}{\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)} \\ & \times \left\{ 1 + \frac{(\gamma+n-1)n}{(\alpha+n-1)(\beta+n-1)}\frac{x}{1} \right. \\ & \quad + \frac{(\gamma+n-1)(\gamma+n-2)n(n-1)}{(\alpha+n-1)(\alpha+n-2)(\beta+n-1)(\beta+n-2)}\frac{x^2}{1.2} \\ & \quad \left. + \frac{(\gamma+n-1)\ldots\gamma n(n-1)\ldots 1}{(\alpha+n-1)\ldots\alpha(\beta+n-1)\ldots\beta}\frac{x^n}{1.2\ldots n} \right\}. \end{aligned} \right.$$

La fonction génératrice de ces polynômes satisfait à l'équation différentielle linéaire

$$(h-h^2)\frac{d^2F}{dh^2}+(\gamma-ah)\frac{dF}{dh}-bF=0,$$

en posant $\alpha+\beta+1=a$, $\alpha\beta=b$. Multiplions cette équation différentielle par e^{hx}, développons en série et égalons à zéro le coefficient de h^{n-2}; nous aurons

$$\begin{aligned}(n-1)(d^2Q)_{n-2}-(n-1)(n-2)(d^2Q)_{n-3}\\ +\gamma(dQ)_{n-1}-a(n-1)(dQ)_{n-2}-bQ_{n-1}=0.\end{aligned}$$

Cette relation devient, en remplaçant les polynômes (d^2Q) et (dQ) par leurs expressions (12) en fonction de Q,

$$\begin{aligned}(n+\gamma-1)Q_n-[(n-1)(2x+a+n-2)+\gamma x+b]Q_{n-1}\\ +(n-1)x(x+a+2n-4)Q_{n-2}-(n-1)(n-2)x^2Q_{n-3}=0.\end{aligned}$$

On a ainsi une relation linéaire entre quatre polynômes consécutifs. De cette relation on déduit l'équation différentielle linéaire du troisième ordre

$$(17)\quad\left\{\begin{aligned}&x^2\frac{d^3Q_n}{dx^3}-x(x+a+2n-4)\frac{d^2Q_n}{dx^2}\\ &+[(n-1)(2x+a+n-2)+\gamma x+b]\frac{dQ_n}{dx}-n(n+\gamma-1)Q_n=0.\end{aligned}\right.$$

9. Étant donnée une suite de polynômes A ayant pour fonction génératrice $a(h)$, formons les polynômes $(d^{-1}A)$ ayant pour fonction génératrice $\int a(h)dh$. Ce problème est l'inverse de celui qui a été traité dans le n° 5. D'après l'équation (11), on a

$$A_{n-1}=(d^{-1}A)_n-x(d^{-1}A)_{n-1},$$

de même

$$A_{n-2}=(d^{-1}A)_{n-1}-x(d^{-1}A)_{n-2},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$A_0=(d^{-1}A)_1-x(d^{-1}A)_0.$$

Multiplions la deuxième de ces relations par x, la troisième par x^2, ..., la dernière par x^{n-1}, et ajoutons; nous avons la formule cherchée

$$(18)\qquad d^{-1}A)_n=x^n(d^{-1}A)_0+A_{n-1}+xA_{n-2}+\dots+x^{n-1}A_0.$$

Cette expression de $(d^{-1}A)_n$ contient une constante arbitraire $(d^{-1}A)_0$, qui est la constante introduite par l'intégration.

10. J'aborde maintenant un autre genre de problèmes, et je me propose d'abord d'exprimer un polynôme donné quelconque,

$$f(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_{m-1} x + a_m,$$

au moyen d'une suite de polynômes A ayant une fonction génératrice donnée. Considérons, à cet effet, les polynômes inverses (A^{-1}) des polynômes A, et soit, par exemple,

$$(A^{-1})_n = \lambda_0 x^n + \lambda_1 x^{n-1} + \ldots + \lambda_n.$$

On en déduit immédiatement, par la définition des polynômes inverses,

$$x^n = \lambda_0 A_n + \lambda_1 A_{n-1} + \ldots + \lambda_n A_0.$$

On a donc le moyen d'exprimer une puissance quelconque de x à l'aide des polynômes A, et, par suite, on obtient l'expression cherchée du polynôme $f(x)$ en y remplaçant toutes les puissances x^m, x^{m-1}, ..., x, x^0 par leurs expressions en fonction des polynômes A.

Par exemple, nous avons vu précédemment que les polynômes

$$A_n = x^n - n x^{n-1},$$
$$B_n = 1.2\ldots n\left(1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \ldots + \frac{x^n}{1.2\ldots n}\right)$$

sont inverses l'un de l'autre. On a donc l'expression suivante de x^n en fonction des polynômes A :

$$x^n = 1.2\ldots n\left(A_0 + \frac{A_1}{1} + \frac{A_2}{1.2} + \ldots + \frac{A_n}{1.2\ldots n}\right).$$

Nous avons vu aussi que les polynômes

$$(19) \qquad P_n(x) = x^n - \frac{n(n-1)}{1} x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2} x^{n-4} - \ldots,$$

ayant pour fonction génératrice e^{-h^2}, ont pour polynômes inverses les polynômes

$$(P^{-1})_n = i^n P_n(-ix) \quad [\text{n}^\circ\ 4,\ \text{éq. } (8)].$$

On a donc, d'après l'équation (19),

$$(20)\qquad (\mathrm{P}^{-1})_n = x^n + \frac{n(n-1)}{1} x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2} x^{n-4} + \ldots,$$

c'est-à-dire le polynôme déduit de l'équation (19) en attribuant à tous les termes le signe $+$. On a ainsi l'expression suivante de x^n :

$$(21)\qquad x^n = \mathrm{P}_n + \frac{n(n-1)}{1} \mathrm{P}_{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2} \mathrm{P}_{n-4} + \ldots.$$

11. Étant donnée une fonction $\mathrm{F}(x)$ développée en série suivant les puissances croissantes de x, on peut trouver le développement de cette fonction en série de polynômes A_n, à la condition qu'on ait démontré dans chaque cas particulier la possibilité d'un pareil développement. Pour obtenir ce développement, il suffit, dans la série qui développe $\mathrm{F}(x)$ suivant les puissances de x, de remplacer x^n par son expression en fonction des polynômes A déterminée par la méthode précédente. Il est clair que la région de convergence de la nouvelle série ordonnée par rapport aux polynômes $\mathrm{A}_0, \mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_n, \ldots$ pourra être entièrement différente de la région de convergence de la série procédant suivant les puissances de x.

Proposons-nous, par exemple, de développer la fonction

$$\mathrm{J}(x) = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{(1.2)^2} + \frac{x^3}{(1.2.3)^2} + \ldots + \frac{x^n}{(1.2\ldots n)^2} + \ldots,$$

suivant les polynômes

$$\mathrm{A}_n = 1.2\ldots n\left(1 + \frac{x}{1} + \ldots + \frac{x^n}{1.2\ldots n}\right).$$

On a, d'après ce qui précède, et comme on le vérifie immédiatement,

$$x^n = \mathrm{A}_n - n\mathrm{A}_{n-1};$$

donc, en substituant dans $\mathrm{J}(x)$,

$$\mathrm{J}(x) = 1 + \frac{1}{1.2}\frac{\mathrm{A}_1}{1} + \frac{1}{2.3}\frac{\mathrm{A}_2}{1} + \frac{1}{3.4}\frac{\mathrm{A}_3}{(1.2)^2} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}\frac{\mathrm{A}_n}{[1.2\ldots(n-1)]^2} + \ldots.$$

Soit encore proposé de développer la fonction

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{1.2\ldots 2n} + \ldots$$

en série de polynômes P_n définis précédemment. En appliquant la formule (21), on a pour coefficient de P_{2n} la série

$$(-1)^n \frac{1}{1.2\ldots 2n}\left[1-\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}-\frac{1}{1.2.3}+\ldots+(-1)^k \frac{1}{1.2\ldots k}+\ldots\right],$$

c'est-à-dire

$$(-1)^n \frac{1}{1.2\ldots 2n} e^{-1}.$$

Donc

$$\cos x = e^{-1}\left[P_0-\frac{P_2}{1.2}+\frac{P_4}{1.2.3.4}+\ldots+(-1)^n \frac{P_{2n}}{1.2\ldots 2n}+\ldots\right].$$

Mais je laisse de côté la question des développements en série, sur laquelle je me propose de revenir, pour continuer l'étude des propriétés des polynômes.

12. Dans ce qui suit, je ferai constamment usage d'une opération particulière que je veux définir une fois pour toutes. Étant données une fonction $F(x)$ développée en série convergente suivant les puissances de x et une suite $A_0, A_1, \ldots, A_n, \ldots$ de polynômes, je considère la nouvelle série obtenue, en remplaçant dans la série $F(x)$ chaque puissance de x par le polynôme correspondant, x^0 par A_0, x^1 par $A_1, \ldots$, x^n par $A_n, \ldots$; si cette nouvelle série est convergente, elle définit une fonction de x que je désignerai par $F(A)$.

Je vais étudier les propriétés de la fonction $F(A)$, en supposant que les polynômes A vérifient la relation

$$(1) \qquad \frac{dA_n}{dx} = nA_{n-1}.$$

Je suppose d'abord que la fonction $F(x)$ satisfasse à une équation différentielle linéaire, à coefficients constants, sans second membre; je veux montrer que la fonction $F(A)$ satisfait à la même équation. En effet, si dans l'équation différentielle on remplace $F(x)$ et ses dérivées $F'(x)$, $F''(x), \ldots$ par leurs développements en série, les coefficients des différentes puissances de x seront nuls séparément, puisque l'équation différentielle se trouve vérifiée. Dans cette même équation différentielle, remplaçons maintenant la fonction et ses dérivées par $F(A)$,

$\frac{dF(A)}{dx}, \frac{d^2F(A)}{dx^2}, \ldots,$ et remarquons que l'on a, en vertu de la relation (1),

$$\frac{dF(A)}{dx} = F'(A), \quad \frac{d^2F(A)}{dx^2} = F''(A) \quad \ldots;$$

nous obtiendrons pour coefficient de A_n, dans le résultat de la substitution, le coefficient qu'avait précédemment x^n; par conséquent, les coefficients de tous les polynômes A sont nuls séparément et l'équation est encore vérifiée.

Par exemple, si l'on considère la fonction

$$y = \sin x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \ldots,$$

qui satisfait à l'équation différentielle

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0,$$

la fonction

$$\sin(A) = A_1 - \frac{A_3}{1.2.3} + \frac{A_5}{1.2.3.4.5} - \ldots$$

satisfait à la même équation, et l'on a, par suite,

$$\sin(A) = \lambda \cos x + \mu \sin x,$$

λ et μ étant des constantes.

On voit, par le même raisonnement, que, si la fonction $F(x)$ satisfait à une équation différentielle linéaire à coefficients constants dont le second membre est une fonction $\varphi(x)$ développable en série convergente suivant les puissances croissantes de x, la fonction $F(A)$ satisfait à une équation différentielle ayant le même premier membre et ayant pour second membre $\varphi(A)$.

13. Je passe maintenant au cas plus général où la fonction $F(x)$ satisfait à une équation différentielle linéaire dont les coefficients sont des polynômes en x et dont le second membre est une fonction $\varphi(x)$ développable en série convergente suivant les puissances croissantes de x.

Pour ne pas rester dans le vague des généralités, je vais développer cette théorie en prenant pour exemple les polynômes P de M. Hermite précédemment définis et en remarquant que la même méthode s'applique à des polynômes quelconques tels qu'un certain nombre de polynômes consécutifs soient liés par une relation linéaire, ainsi qu'il arrive pour les polynômes P qui satisfont à la relation (13) du n° 7 :

$$P_n - xP_{n-1} + 2(n-1)P_{n-2} = 0. \tag{13}$$

J'établis d'abord quelques propriétés des séries procédant suivant les polynômes P. Soit

$$u = \lambda_0 P_0 + \lambda_1 P_1 + \ldots + \lambda_n P_n + \ldots \tag{22}$$

une pareille série, et considérons le produit ux :

$$ux = \lambda_0 xP_0 + \lambda_1 xP_1 + \ldots + \lambda_n xP_n + \ldots.$$

La relation (13) permet de transformer le second membre en une série de polynômes P ; cette relation peut, en effet, s'écrire

$$xP_{n-1} = P_n + 2(n-1)P_{n-2},$$

d'où l'on tire immédiatement les expressions des termes xP_0, xP_1, ..., xP_n, ... en fonction des polynômes P. On obtient ainsi la série

$$ux = 2\lambda_1 P_0 + (\lambda_0 + 2.2\lambda_2)P_1 + \ldots + [\lambda_{n-1} + 2(n+1)\lambda_{n+1}]P_n + \ldots.$$

Si, d'autre part, on remarque que

$$\frac{du}{dx} = \lambda_1 P_0 + 2\lambda_2 P_1 + \ldots + n\lambda_n P_{n-1} + \ldots,$$

on voit que l'on a

$$ux - 2\frac{du}{dx} = \lambda_0 P_1 + \lambda_1 P_2 + \ldots + \lambda_{n-1} P_n + \ldots. \tag{23}$$

Appelons v cette dernière série et appliquons-lui la formule précédente ; nous aurons

$$vx - 2\frac{dv}{dx} = \lambda_0 P_2 + \lambda_1 P_3 + \ldots + \lambda_{n-2} P_n + \ldots,$$

ou bien, en remplaçant v par sa valeur $ux - 2\frac{du}{dx}$,

$$ux^2 - 2u - 4x\frac{du}{dx} + 4\frac{d^2u}{dx^2} = \lambda_0 P_2 + \lambda_1 P_3 + \ldots + \lambda_{n-2} P_n + \ldots \tag{24}$$

En appliquant de nouveau la formule (23) à cette série (24), on obtiendra l'expression de la série

$$\lambda_0 P_3 + \lambda_1 P_4 + \ldots + \lambda_{n-3} P_n + \ldots$$

en fonction de u, $\frac{du}{dx}$, $\frac{d^2 u}{dx^2}$, $\frac{d^3 u}{dx^3}$, $\ldots$, et ainsi de suite.

14. Je reviens maintenant à la question que je me suis proposée. Je considère une fonction

$$y = F(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

satisfaisant à une équation différentielle linéaire dont les coefficients sont des polynômes en x et dont le second membre est une fonction $\varphi(x)$ développable en série suivant les puissances positives croissantes de x; je suppose, en outre, les séries $F(P)$ et $\varphi(P)$ convergentes, et je me propose de former une équation différentielle à laquelle satisfasse la fonction

$$z = F(P) = a_0 P_0 + a_1 P_1 + a_2 P_2 + \ldots + a_n P_n + \ldots.$$

A cet effet, je remarque : 1° Que, dans les séries

$$y, \ \frac{dy}{dx}, \ \frac{d^2 y}{dx^2}, \ \ldots,$$

es coefficients respectifs de x^n sont les mêmes que les coefficients de P_n dans les séries

$$z, \ \frac{dz}{dx}, \ \frac{d^2 z}{dx^2}, \ \ldots,$$

ainsi qu'il résulte de la formule $\frac{dP_n}{dx} = n P_{n-1}$;

2° Que, dans les séries

$$xy, \ x\frac{dy}{dx}, \ x\frac{d^2 y}{dx^2}, \ \ldots,$$

es coefficients respectifs de x^n sont les mêmes que les coefficients de P_n dans les séries

$$xz - 2\frac{dz}{dx}, \ x\frac{dz}{dx} - 2\frac{d^2 z}{dx^2}, \ x\frac{d^2 z}{dx^2} - 2\frac{d^3 z}{dx^3}, \ \ldots,$$

ainsi qu'il résulte des formules (22) et (23), dans lesquelles on prend successivement pour u les fonctions $z, \frac{dz}{dx}, \frac{d^2z}{dx^2}, \cdots$;

3° Que, dans les séries

$$x^2y,\ x^2\frac{dy}{dx},\ x^2\frac{d^2y}{dx^2},\ \cdots,$$

les coefficients de x^n sont les mêmes que ceux de P_n dans

$$(x^2-2)z-4x\frac{dz}{dx}+4\frac{d^2z}{dx^2},\quad (x^2-2)\frac{dz}{dx}-4x\frac{d^2z}{dx^2}+4\frac{d^3z}{dx^3},$$
$$(x^2-2)\frac{d^2z}{dx^2}-4x\frac{d^3z}{dx^3}+4\frac{d^4z}{dx^4},\quad \cdots,$$

ainsi qu'il résulte des formules (22) et (24), dans lesquelles on fait successivement $u=z$, $u=\frac{dz}{dx}$, $u=\frac{d^2z}{dx^2}$, $\cdots$; et ainsi de suite.

Or, le premier membre de l'équation différentielle à laquelle est supposée satisfaire la fonction y est une somme de termes tels que

$$\begin{array}{cccc}
y, & \frac{dy}{dx}, & \frac{d^2y}{dx^2}, & \cdots, \\
xy, & x\frac{dy}{dx}, & x\frac{d^2y}{dx^2}, & \cdots, \\
x^2y, & x^2\frac{dy}{dx}, & x^2\frac{dy^2}{dx^2}, & \cdots, \\
\cdots, & \cdots\cdots, & \cdots\cdots, & \cdots,
\end{array}$$

multipliés par des coefficients constants; on obtiendra donc une équation différentielle à laquelle satisfait z en remplaçant dans le premier membre chacun de ces termes par l'expression correspondante indiquée précédemment, à savoir, par exemple, y par z, $x\frac{dy}{dx}$ par $x\frac{dz}{dx}-2\frac{d^2z}{dx^2}$, $x^2\frac{d^2y}{dx^2}$ par $(x^2-2)\frac{d^2z}{dx^2}-4x\frac{d^3z}{dx^3}+4\frac{d^4z}{dx^4}$, et en écrivant $\varphi(P)$ à la place du second membre $\varphi(x)$; car, dans la nouvelle équation, les coefficients de P_n sont dans les deux membres les mêmes que ceux de x^n dans l'ancienne, et par suite ils sont égaux.

15. Je vais maintenant appliquer la théorie précédente à quelques exemples.

Le polynôme P_n satisfait, comme nous l'avons vu, à l'équation différentielle

$$2\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + ny = 0;$$

par suite, le polynôme $(P^2)_n$, obtenu en remplaçant, dans P_n, x^k par P_k, satisfait à l'équation

$$4\frac{d^2z}{dx^2} - x\frac{dz}{dx} + nz = 0,$$

qui se ramène à la première par le changement de x en $x\sqrt{2}$, ainsi qu'on pouvait le prévoir d'après la relation que nous avons trouvée entre les polynômes P_n et $(P^2)_n$.

Le polynôme A_n, ayant pour fonction génératrice $\frac{1}{1-h}$, satisfait à l'équation différentielle

$$x\frac{d^2y}{dx^2} - (x+n)\frac{dy}{dx} + ny = 0 \text{ (n° 7)}.$$

Donc le polynôme $(AP)_n$ est une intégrale particulière de l'équation

$$2\frac{d^3z}{dx^3} - (x+2)\frac{d^2z}{dx^2} + (x+n)\frac{dz}{dx} - nz = 0.$$

De même, de l'équation

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + n^2y = 0,$$

à laquelle satisfait le polynôme $y = \cos(n \arccos x)$, on déduit pour le polynôme $z = \cos(n \arccos P)$ l'équation du quatrième ordre

$$4\frac{d^4z}{dx^4} - 4x\frac{d^3z}{dx^3} + (x^2-5)\frac{d^2z}{dx^2} + x\frac{dz}{dx} - n^2z = 0.$$

On pourra de la même manière former, à l'aide des polynômes de Legendre et des polynômes de Jacobi, des polynômes satisfaisant à une équation différentielle du quatrième ordre.

Soit maintenant la série

$$y = 1 + \frac{1}{a}\frac{x}{1} + \frac{1}{a(a+1)}\frac{x^2}{1.2} + \ldots + \frac{1}{a(a+1)\ldots(a+n-1)}\frac{x^n}{1.2\ldots n} + \ldots,$$

qui a été considérée par Legendre. Cette série satisfait à l'équation différentielle du second ordre

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + a\frac{dy}{dx} - y = 0.$$

On en conclut que la fonction représentée par la série convergente

$$z = P_0 + \frac{1}{a}\frac{P_1}{1} + \frac{1}{a(a+1)}\frac{P_2}{1.2} + \ldots + \frac{1}{a(a+1)\ldots(a+n-1)}\frac{P_n}{1.2\ldots n} + \ldots$$

satisfait à l'équation différentielle du troisième ordre

$$2\frac{d^3z}{dx^3} - x\frac{d^2z}{dx^2} - a\frac{dz}{dx} + z = 0.$$

Soit encore la fonction

$$y = 1 + \frac{x}{1.2} + \frac{x^2}{1.2.3} + \ldots + \frac{x^n}{1.2\ldots(n+1)} + \ldots,$$

qui satisfait à l'équation

$$xy = e^x - 1.$$

On en conclut que la fonction

$$z = P_0 + \frac{P_1}{1.2} + \frac{P_2}{1.2.3} + \ldots + \frac{P_n}{1.2\ldots(n+1)} + \ldots$$

est une intégrale particulière de l'équation différentielle

$$xz - 2\frac{dz}{dx} = e^P - 1,$$

e^P désignant, suivant nos notations, ce que devient la série e^x quand on y remplace x^n par P_n. Mais on a, d'après la définition même des polynômes P,

$$e^P = e^{x-1};$$

la fonction z vérifie donc l'équation

$$2\frac{dz}{dx} - xz = 1 - e^{x-1}.$$

16. La question que nous venons de traiter comprend la solution du problème suivant :

Étant donnée une fonction développée en série de polynômes (P^{-1}) *inverses des polynômes* P *et satisfaisant à une équation différentielle linéaire dont les coefficients sont des polynômes, former une équation différentielle à laquelle satisfasse la fonction obtenue en remplaçant chaque polynôme* $(P^{-1})_n$ *par* x^n.

Il suffit, pour cela, de faire subir à l'équation différentielle les transformations indiquées précédemment, car remplacer $(P^{-1})_n$ par x^n, c'est remplacer x^n par P_n, attendu que $(P^{-1}P)_n = x^n$.

On peut aussi déduire de là une méthode pour développer en série de polynômes (P^{-1}) certaines fonctions définies par des équations différentielles linéaires ; mais je ne m'arrêterai pas sur cette question.

17. Je termine par quelques remarques sur ce que deviennent les polynômes considérés, pour des valeurs de n infiniment grandes. A ce point de vue, les polynômes peuvent se diviser en deux catégories. Dans la première se placent les polynômes A_n qu'il suffit de diviser par une fonction $\varphi(n)$ de l'entier n pour que le quotient $\frac{A_n}{\varphi(n)}$ tende vers une limite $f(x)$ quand n croît indéfiniment. Tels sont, par exemple, les polynômes déjà considérés

$$A_n = 1.2\ldots n\left(1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \ldots + \frac{x^n}{1.2\ldots n}\right),$$

car on a évidemment

$$\lim \frac{A_n}{1.2\ldots n} = e^x.$$

Dans la seconde catégorie se rangent les polynômes qu'il faut diviser par $\varphi(n)$ et dans lesquels il faut, en outre, changer la variable x pour obtenir une fonction qui tende vers une limite $f(x)$ quand n croît indéfiniment. Tels sont, parmi les plus simples, les polynômes

$$B_n(x) = (1+x)^n,$$

car on a

$$B_n\left(\frac{x}{n}\right) = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n,$$

et par suite

$$\lim B_n\left(\frac{x}{n}\right) = e^x.$$

18. On a un exemple de polynômes de la première catégorie en considérant les polynômes A_n qui ont pour fonction génératrice $\frac{1}{(1-h)^p}$. L'expression générale de ces polynômes est

$$A_n = p(p+1)\ldots(p+n-1)\left[1+\frac{n}{p+n-1}\,\frac{x}{1}+\frac{n(n-1)}{(p+n-1)(p+n-2)}\,\frac{x^2}{1.2}+\ldots\right.$$
$$\left.+\frac{n(n-1)\ldots1}{(p+n-1)\ldots(p+1)p}\,\frac{x^n}{1.2\ldots n}\right],$$

d'où l'on déduit

$$A_n\frac{n^{1-p}}{1.2\ldots n} = n^{1-p}\frac{p(p+1)\ldots(p+n-1)}{1.2\ldots n}\left[1+\frac{n}{p+n-1}\,\frac{x}{1}+\frac{n(n-1)}{(p+n-1)(p+n-2)}\,\frac{x^2}{1.2}+\ldots\right.$$
$$\left.+\frac{n(n-1)\ldots1}{(p+n-1)\ldots(p+1)p}\,\frac{x^n}{1.2\ldots n}\right],$$

et, quand n croît indéfiniment,

$$\lim A_n\frac{n^{1-p}}{1.2\ldots n} = \frac{1}{\Gamma(p)}e^x.$$

Plus généralement, on peut ranger dans cette catégorie les polynômes admettant pour fonction génératrice la fonction $F(\alpha,\beta,\gamma,h)$, que j'ai considérés plus haut (n° 8).

Les développements en série procédant suivant des polynômes de cette espèce présentent une particularité intéressante. Supposons que l'on ait un polynôme Q_n tel que $\lim\frac{Q_n}{\varphi(n)} = f(x)$ pour n infini, que ce polynôme Q_n satisfasse ou non à la relation $\frac{dQ_n}{dx} = nQ_{n-1}$. Posons

$$R_n = \frac{Q_n}{\varphi(n)},$$

de façon que ce nouveau polynôme R_n tende vers une limite $f(x)$ quand n croît indéfiniment. Si maintenant on veut développer une fonction donnée $F(x)$ en série de polynômes Q_n, ou, ce qui revient au même, en série de polynômes R_n, on déterminera par une certaine méthode les coefficients du développement, et l'on aura

$$F(x) = a_0 R_0 + a_1 R_1 + \ldots + a_n R_n + \ldots.$$

Mais, si l'on veut appliquer ce mode de développement à la fonction particulière $f(x)$, limite de R_n, la méthode de détermination des coefficients donnera o pour tous les coefficients $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$, car il ne subsiste alors qu'un terme du développement, à savoir le terme de rang infini R_∞, qui est $f(x)$, et dont le coefficient, $a_\infty = 1$, est seul différent de o.

Par exemple, il résulte de ce que nous avons dit (n° **11**) sur le développement d'une fonction $F(x)$ en série de polynômes A,

$$A_n = 1.2\ldots n\left(1 + \frac{x}{1} + \ldots + \frac{x^n}{1.2\ldots n}\right),$$

que le coefficient de $\frac{A_n}{1.2\ldots n}$ dans ce développement est égal à la différence des dérivées

$$a_n = \left[\frac{d^n F(x)}{dx^n}\right]_0 - \left[\frac{d^{n+1} F(x)}{dx^{n+1}}\right]_0,$$

et l'on voit que, dans le cas particulier où l'on suppose

$$F(x) = \lim \frac{A_n}{1.2\ldots n} = e^x,$$

la valeur de tous les coefficients a_n est o.

19. Parmi les polynômes de la seconde catégorie se trouvent, par exemple, les polynômes de M. Hermite et les polynômes ayant pour fonction génératrice e^{-h^k}, auxquels on peut appliquer la méthode employée par M. Hermite (*Comptes rendus*, t. LVIII, p. 266) pour trouver une valeur approchée de $P_n(x)$ quand n est très grand.

20. La méthode employée dans ce Mémoire peut se généraliser et s'étendre à des polynômes d'un nombre quelconque de variables.

Soit $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ une forme quadratique de n variables, et considérons la fonction

$$\begin{aligned} &\mathrm{F}(x_1, x_2, \ldots, x_n, h_1, h_2, \ldots, h_n) \\ &\quad = e^{-\frac{1}{2}[\varphi(x_1+h_1, x_2+h_2, \ldots, x_n+h_n) - \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) - \varphi(h_1, h_2, \ldots, h_n)]}, \end{aligned}$$

Soit, en outre, $f(h_1, h_2, \ldots, h_n)$ une fonction quelconque développable suivant les puissances positives croissantes de $h_1, h_2, \ldots, h_n$. Si l'on pose

$$\begin{aligned} &f(h_1, h_2, \ldots, h_n)\,\mathrm{F}(x_1, x_2, \ldots, x_n, h_1, h_2, \ldots, h_n) \\ &\quad = \sum \frac{h_1^{n_1} h^{n_2} \ldots}{1.2\ldots n_1 . 1.2 \ldots n_2 \ldots} \mathrm{U}_{n_1 n_2 \ldots}, \end{aligned}$$

les fonctions $\mathrm{U}_{n_1 n_2 \ldots}$ seront des polynômes en $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de degré $n_1 + n_2 + \ldots$, dont les propriétés seront analogues à celles des polynômes d'une variable que je viens de considérer. La fonction $f(h_1, h_2, \ldots, h_n)$ pourra être nommée *fonction génératrice* des polynômes U. En particulier, en prenant

$$f(h_1, h_2, \ldots, h_n) = e^{-\frac{1}{2}\varphi(h_1, h_2, \ldots, h_n)},$$

on a les polynômes de M. Hermite à plusieurs variables. Et même on peut généraliser davantage et prendre pour la fonction

$$\mathrm{F}(x_1, x_2, \ldots, x_n, h_1, h_2, \ldots, h_n)$$

une expression de la forme

$$e^{\Sigma a_{pq} x_p h_q},$$

la sommation étant étendue aux valeurs entières de p et q depuis o jusqu'à n, sans que l'on suppose $a_{pq} = a_{qp}$, comme il arrive dans le cas où cette somme est déduite d'une forme quadratique de la façon indiquée.

La dérivée partielle par rapport à une des variables x_k d'un polynôme U de degré m, $\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x_k}$, est une fonction linéaire et homogène des polynômes U de degré $(m-1)$.

Considérons, par exemple, le cas de deux variables. L'identité

$$f(h,k)e^{x(ah+bk)+y(b'h+ck)} = \sum \frac{h^m k^n}{1.2\ldots m.1.2\ldots n} \mathrm{U}_{m,n}$$

définit des polynômes $\mathrm{U}_{m,n}$ de degré $m+n$ en x et y. En prenant les dérivées des deux membres de cette identité successivement par rapport à x et y, on trouve

$$(25)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \mathrm{U}_{m,n}}{\partial x} = am\,\mathrm{U}_{m-1,n} + bn\,\mathrm{U}_{m,n-1}, \\ \dfrac{\partial \mathrm{U}_{m,n}}{\partial y} = b'm\,\mathrm{U}_{m-1,n} + cn\,\mathrm{U}_{m,n-1}. \end{cases}$$

Si l'on suppose $f(h,k) = \dfrac{1}{1-h-k}$, on voit facilement que les polynômes U correspondants vérifient les deux relations

$$\mathrm{U}_{m,n} - (m+ax+b'y)\mathrm{U}_{m-1,n} - n\,\mathrm{U}_{m,n-1} + (ax+b'y)[(m-1)\mathrm{U}_{m-2,n} + n\,\mathrm{U}_{m-1,n-1}] = 0,$$
$$\mathrm{U}_{m,n} - m\,\mathrm{U}_{m-1,n} - (n+bx+cy)\mathrm{U}_{m,n-1} + (bx+cy)[(n-1)\mathrm{U}_{n-2,m} + m\,\mathrm{U}_{m-1,n-1}] = 0,$$

d'où l'on déduit, pour le polynôme $\mathrm{U}_{m,n}$, deux équations du second ordre aux dérivées partielles, en se servant des relations (25) pour remplacer $\mathrm{U}_{m-1,n}$, $\mathrm{U}_{m,n-1}$, $\mathrm{U}_{m-2,n}$, $\mathrm{U}_{m,n-2}$ et $\mathrm{U}_{m-1,n-1}$ par leurs expressions en fonction des dérivées partielles de $\mathrm{U}_{m,n}$.