ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

GASTON DARBOUX

Addition au mémoire sur les fonctions discontinues

Annales scientifiques de l'É.N.S. 2e série, tome 8 (1879), p. 195-202

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1879_2_8__195_0>

ADDITION AU MÉMOIRE

SUR

LES FONCTIONS DISCONTINUES,

Par M. G. DARBOUX,

MAITRE DE CONFÉRENCES A L'ÉCOLE NORMALE.

Dans un Mémoire présenté en janvier 1874 à la rédaction des *Annales scientifiques de l'École Normale supérieure* et inséré au Tome IV de ce Recueil (2e série), j'ai donné plusieurs exemples de fonctions continues qui n'ont de dérivée pour aucune valeur commensurable de la variable et *un* exemple d'une fonction continue qui n'a de dérivée pour aucune valeur de la variable. Le raisonnement que j'ai employé dans ce dernier exemple a été si abrégé, qu'il est très-difficile à saisir. Je me propose donc de le reprendre ici, en le présentant sous une forme plus générale et en indiquant plusieurs exemples de fonctions continues auxquelles s'applique ma méthode et qui n'ont de dérivée pour aucune valeur de la variable.

1. Considérons la fonction $\varphi(x)$ définie par la série

$$\varphi(x)=\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{f(a_n b_n x)}{a_n}, \tag{1}$$

où a_n, b_n sont des fonctions numériques de n, et où le symbole $f(x)$ désigne une fonction de x que nous supposerons toujours continue et inférieure en valeur absolue à un nombre fixe A. Nous admettrons, en outre, que cette fonction a une dérivée seconde $f''(x)$ toujours inférieure à un autre nombre fixe B. Alors on aura, quelle que soit x,

$$f(x+k) = f(x) + kf'(x) + \frac{k^2}{2}\theta B, \tag{2}$$

θ désignant un nombre compris entre -1 et $+1$.

Nous supposerons aussi que les fonctions numériques a_n, b_n ont été choisies de manière à satisfaire aux deux conditions

$$\lim_{n=\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = 0, \tag{3}$$

$$\lim_{n=\infty} \frac{a_1 b_1^2 + a_2 b_2^2 + \ldots + a_{n-k} b_{n-k}^2}{a_n} = 0, \tag{4}$$

k désignant un nombre fixe et déterminé quand n croît indéfiniment. Il est aisé de reconnaître que l'équation (3) entraîne la suivante :

$$\frac{1}{a_{n+1}} + \frac{1}{a_{n+2}} + \ldots = \frac{1}{a_n}\varepsilon_n, \tag{5}$$

ε_n tendant vers zéro quand n croît indéfiniment.

En vertu des hypothèses faites sur $f(x)$ et sur a_n, la série (1), toujours convergente, définit une fonction de x, $\varphi(x)$, toujours continue. Je me propose d'indiquer un grand nombre de cas dans lesquels cette fonction $\varphi(x)$ n'a de dérivée pour aucune valeur de x, et, pour cela, je vais chercher une expression du rapport

$$\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h}$$

quand h tend vers zéro.

Posons

$$a_p h = \varepsilon, \tag{6}$$

et supposons que, ε restant fixe, on donne à p des valeurs indéfiniment croissantes. Alors h prendra successivement les valeurs

$$\frac{\varepsilon}{a_1}, \quad \frac{\varepsilon}{a_2}, \quad \frac{\varepsilon}{a_3}, \quad \ldots$$

et tendra vers zéro. Pour qu'il y ait une dérivée, il faudra que le rapport

$$\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}$$

tende vers une limite *indépendante de* ε.

L'équation (2) nous donne

$$\frac{f[a_n b_n(x+h)]-f(a_n b_n x)}{a_n h} = b_n f'(a_n b_n x) + \frac{\theta_n}{2} a_n b_n^2 \mathrm{B} h,$$

θ_n étant compris entre -1 et $+1$, et, par conséquent, on a

$$\sum_{n=1}^{n=p-k} \frac{f[a_n b_n(x+h)]-f(a_n b_n x)}{a_n h}$$
$$= \sum_{n=1}^{n=p-k} b_n f'(a_n b_n x) + \frac{\theta \mathrm{B} h}{2}(a_1 b_1^2 + a_2 b_2^2 + \ldots + a_{p-k} b_{p-k}^2),$$

θ étant, comme θ_n, inférieur à 1 en valeur absolue.

Si l'on remplace h par sa valeur tirée de l'équation (6), on trouve

$$(7) \qquad \sum_{n=1}^{n=p-k} \frac{f[a_n b_n(x+h)]-f(a_n b_n x)}{a_n h} = \sum_{n=1}^{n=p-k} b_n f'(a_n b_n x) + \varepsilon_p,$$

en posant

$$\varepsilon_p = \frac{\theta \mathrm{B} \varepsilon}{2} \frac{a_1 b_1^2 + \ldots + a_{p-k} b_{p-k}^2}{a_p}.$$

Par conséquent, d'après la condition (4), ε_p tendra vers zéro quand p croîtra sans limite.

Considérons maintenant l'expression

$$\sum_{n=p+1}^{n=\infty} \frac{f[a_n b_n(x+h)]-f(a_n b_n x)}{a_n h}.$$

Le numérateur de chaque terme étant inférieur au double de la limite maximum A de $f(x)$, cette expression sera inférieure en valeur absolue à

$$\frac{2\mathrm{A}}{h}\left(\frac{1}{a_{p+1}} + \frac{1}{a_{p+2}} + \ldots\right),$$

ou, d'après l'équation (5), à $\frac{2A\varepsilon'_p}{ha_p} = \frac{2A\varepsilon'_p}{\varepsilon}$, ε'_p tendant vers zéro avec $\frac{1}{p}$. On aura donc

$$(8) \qquad \sum_{n=p+1}^{n=\infty} \frac{f[a_n b_n(x+h)] - f(a_n b_n x)}{a_n h} = \varepsilon''_p,$$

ε''_p tendant vers zéro avec $\frac{1}{p}$ comme ε'_p.

En réunissant les résultats contenus dans les formules (7) et (8), on trouve

$$(9) \quad \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} = \sum_{n=1}^{n=p-k} b_n f'(a_n b_n x) + \sum_{n=p-k+1}^{n=p} \frac{f[a_n b_n(x+h)] - f(a_n b_n x)}{a_n h} + R_p,$$

R_p étant infiniment petit avec $\frac{1}{p}$ et h étant toujours défini par l'équation (6), où ε désigne un nombre fixe quelconque.

Nous allons faire différentes applications de la formule (9).

2. Supposons d'abord

$$b_n = 1, \quad k = 1.$$

Alors a_n devra satisfaire à l'unique équation

$$\lim \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}}{a_n} = 0,$$

ce qui aura lieu, par exemple, si l'on prend $a_n = 1.2\ldots n$ et dans beaucoup d'autres cas. La formule (9) devient ici

$$(10) \qquad \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} = \sum_{n=1}^{n=p-1} f'(a_n x) + \frac{f(a_p x + \varepsilon) - f(a_p x)}{\varepsilon} + R_p.$$

La fonction $\varphi(x)$ ne pourra avoir de dérivée que si le second membre tend vers une valeur indépendante de ε. Or donnons à ε une valeur nouvelle quelconque ε'. Le second membre s'accroîtra de

$$\frac{f(a_p x + \varepsilon') - f(a_p x)}{\varepsilon'} - \frac{f(a_p x + \varepsilon) - f(a_p x)}{\varepsilon} + R'_p - R_p,$$

R'_p désignant la valeur nouvelle de R_p. La fonction $\varphi(x)$ n'aura donc pas de dérivée tant que l'expression

$$\frac{f(a_p x+\varepsilon')-f(a_p x)}{\varepsilon'}-\frac{f(a_p x+\varepsilon)-f(a_p x)}{\varepsilon} \tag{11}$$

ne tendra pas vers zéro, quels que soient ε, ε', quand p croîtra indéfiniment.

Or on peut trouver des fonctions, en nombre illimité, pour lesquelles l'expression (11) ne tend vers zéro pour aucune valeur de x. Prenons, par exemple,

$$f(x)=\cos x. \tag{12}$$

L'expression (11) deviendra

$$\frac{\cos(a_p x+\varepsilon')-\cos a_p x}{\varepsilon'}-\frac{\cos(a_p x+\varepsilon)-\cos a_p x}{\varepsilon}.$$

Faisons $\varepsilon'=2\varepsilon$; elle prend la forme simple

$$\frac{\cos\varepsilon-1}{\varepsilon}\cos(a_p x+\varepsilon).$$

Cette expression ne pourrait tendre vers zéro, quel que soit ε, que si $\cos a_p x$, $\sin a_p x$ tendaient séparément vers zéro, ce qui est impossible. La fonction $\varphi(x)$ correspondante à la valeur de $f(x)$ définie par l'équation (12) n'aura donc jamais de dérivée.

3. L'exemple que nous venons d'indiquer est assez remarquable, parce qu'on peut reconnaître comment varie le rapport

$$\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}$$

quand h tend vers zéro. En effet, la formule (10) nous donne ici

$$\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}=-\sum_1^{p-1}\sin a_p x+\frac{\cos(a_p x+\varepsilon)-\cos a_p x}{\varepsilon}+R_p. \tag{13}$$

Supposons, pour fixer les idées, que l'on prenne

$$a_p=1.2.3\ldots,p,$$

et examinons d'abord le cas où x est commensurable avec π.

Supposons $x = \pi \frac{q'}{q}$. Alors la série

(14) $$S = -\Sigma \sin a_n x$$

se terminera au terme pour lequel $n = q$ ou à un terme précédent, car, à partir d'un certain rang, $a_n x$ deviendra un multiple entier de π. Si donc on prend $p > q$, on aura

$$\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} = S + \frac{\cos(a_p x + \varepsilon) - \cos a_p x}{\varepsilon} + R_p.$$

Cette expression tend vers la limite dépendante de ε, $S + \frac{\cos\varepsilon - 1}{\varepsilon}$, car, à partir d'un certain rang, $a_p x$ sera un multiple pair de π.

Quand le rapport $\frac{x}{\pi}$ sera incommensurable, on pourra faire usage d'un mode de représentation des incommensurables que je vais indiquer en quelques mots.

Étant donnée une incommensurable y (¹), on peut toujours poser

$$y = \alpha_1 + \frac{\alpha_2}{1.2} + \frac{\alpha_3}{1.2.3} + \ldots + \frac{\alpha_p}{1.2\ldots p} + \ldots,$$

α_p étant un entier positif inférieur à p si $p > 1$, et α_1 étant un entier positif quelconque. Supposons que le rapport $\frac{x}{\pi}$ soit développé de cette manière; on aura

$$\sin a_p x = (-1)^{\alpha_p + p\alpha_{p-1}} \sin\left(\frac{\alpha_{p+1}\pi}{p+1} + \frac{\alpha_{p+2}\pi}{(p+1)(p+2)} + \ldots\right),$$

et l'on reconnaîtra aisément, au moyen de cette formule, qu'il y a des incommensurables pour lesquelles la somme

$$\sum_{n=1}^{n=p-1} -\sin a_n x$$

(¹) Ce mode de représentation des incommensurables, qui se trouve en germe dans le Mémoire de Riemann sur les séries trigonométriques, vient d'être présenté avec quelque développement dans une Note élégante de M. Stefanos, publiée au Tome VII du *Bulletin de la Société mathématique de France*.

croît sans limite, d'autres pour lesquelles elle est convergente, d'autres enfin pour lesquelles elle est indéterminée. Le rapport

$$\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}$$

pourra donc tantôt être indéterminé, tantôt croître indéfiniment par des valeurs positives ou négatives quand h tendra vers zéro.

4. Je ferai encore l'application de la formule (9) à l'exemple traité dans mon travail primitif. On prend ici

$$a_n = 1.2\ldots n, \quad b_n = n+1,$$

et l'on peut faire $k=3$, car on a

$$\frac{a_1 b_1^2 + \ldots + a_{n-3} b_{n-3}^2}{a_n} < \frac{a_{n-3} b_{n-3}^2}{a_n} + \frac{(n-4)\, a_{n-4} b_{n-4}^2}{a_n},$$

et, par conséquent, la limite du premier membre de cette inégalité est zéro.

On obtiendra donc, en appliquant la formule (9),

$$(15)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h} &= \sum_{n=1}^{n=p-3} (n+1) f'(a_{n+1}x) + R_p + \frac{f[a_{p+1}x + (p+1)\varepsilon] - f(a_{p+1}x)}{\varepsilon} \\ &\quad + \frac{f(a_p x + \varepsilon) - f(a_p x)}{\varepsilon} p + \frac{f\left(a_{p-1}x + \frac{\varepsilon}{p}\right) - f(a_{p-1}x)}{\varepsilon} p(p-1) \end{aligned} \right.$$

On a, en développant $f\left(a_{p-1}x + \frac{\varepsilon}{p}\right)$ par la formule de Taylor et supposant que C soit la limite maximum de $f'''(x)$,

$$\frac{f\left(a_{p-1}x + \frac{\varepsilon}{p}\right) - f(a_{p-1}x)}{\varepsilon} p(p-1) = (p-1) f'(a_{p-1}x) + \frac{p-1}{2p} \varepsilon f''(a_{p-1}x) + \varepsilon^2 \frac{p-1}{6p^2} \theta C.$$

En tenant compte de cette formule et réunissant à R_p les termes qui s'annulent avec $\frac{1}{p}$, on trouve

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h} &= \sum_{n=1}^{n=p-2}(n+1)f'(a_{n+1}x)+\frac{\varepsilon}{2}f''(a_{p-1}x) \\ &\quad + \frac{f[a_{p+1}x+(p+1)\varepsilon]-f(a_{p+1}x)}{\varepsilon}+p\frac{f(a_p x+\varepsilon)-f(a_p x)}{\varepsilon}+\mathrm{R}'_p. \end{aligned}\right.$$

Or, si l'on change ε en ε', le second membre s'accroît d'une quantité dont le terme principal est

$$(17)\qquad p\frac{f(a_p x+\varepsilon')-f(a_p x)}{\varepsilon'}-p\frac{f(a_p x+\varepsilon)-f(a_p x)}{\varepsilon}.$$

Tant que cette expression ne tendra pas vers zéro avec $\frac{1}{p}$, quels que soient ε, ε', la fonction $\varphi(x)$ n'aura pas de dérivée.

L'expression (17) n'est autre que l'expression (11) multipliée par p. Elle n'aura donc pas zéro pour limite, si l'on prend, par exemple, $f(x)=\sin x$, $f(x)=\cos x$, et dans un grand nombre d'autres cas.

5. Je ne multiplierai pas les applications de la formule (9); je ferai toutefois remarquer que, dans la suite des recherches précédentes, nous avons seulement supposé que la fonction $f(x)$ et sa dérivée seconde $f''(x)$ demeurent inférieures à des nombres fixes. Nos raisonnements s'appliqueront donc sans modification si, au lieu de la fonction définie par l'équation (1), nous prenons la suivante, bien plus générale :

$$(18)\qquad \varphi(x)=\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{f_n(a_n b_n x)}{a_n},$$

où les fonctions $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, ... sont assujetties uniquement à demeurer, quel que soit x, inférieures à un nombre fixe A, et leurs dérivées secondes $f_1''(x)$, $f_2''(x)$, ... à demeurer de même inférieures à un nombre B.

On pourrait prendre, par exemple, $f_n(x)=f(x+\alpha_n)$, α_n étant une certaine constante, fonction numérique de n.