

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

GOURIER

Sur l'équation de Kepler

Annales scientifiques de l'É.N.S. 2^e série, tome 7 (1878), p. 73-76

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1878_2_7__73_0>

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1878, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR
L'ÉQUATION DE KEPLER,

PAR M. GOURIER,
ÉLÈVE A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

Dans le cours professé à la Sorbonne l'année dernière, M. Hermite s'est occupé de l'équation de Kepler, et il a bien voulu m'engager à rédiger, d'après ses indications, la démonstration d'une propriété importante des racines de cette équation.

L'équation

$$(1) \quad f(z) = z - \alpha - E \sin z = 0,$$

dans laquelle α représente un angle donné compris entre zéro et π , et E une constante positive inférieure à l'unité, a une racine réelle comprise entre zéro et π et une infinité de racines imaginaires. En divisant le plan sur lequel on figure les valeurs de z par des bandes parallèles à l'axe des y , et distantes de π , chaque bande de rang impair du côté des x positives comprend deux racines conjuguées, et de même chaque bande de rang pair du côté des x négatives.

Si l'on considère la bande de rang $2k + 1$ du côté des x positives, et si l'on représente par $x \pm yi$ les deux racines comprises dans cette bande, il s'agit d'établir que, pour les grandes valeurs de k , la valeur de x est à peu près égale à $2k\pi + \frac{\pi}{2}$, et celle de y à $L \frac{2}{E} + L \left(2k\pi + \frac{\pi}{2} \right)$.

A cet effet, traçons dans cette bande un rectangle ABCD dont les

sommets correspondent aux quatre valeurs suivantes de z :

$$2k\pi + \frac{\pi}{2} - \varepsilon, \quad 2k\pi + \frac{\pi}{2} + \varepsilon, \quad 2k\pi + \frac{\pi}{2} - \varepsilon + ai, \quad 2k\pi + \frac{\pi}{2} + \varepsilon + ai,$$

dans lesquelles ε représente une constante positive, prise arbitrairement aussi petite que l'on veut, et a une autre constante positive dont le minimum sera déterminé plus loin. Nous allons démontrer que, quand k a une valeur supérieure à une certaine limite, ce rectangle renferme une des racines de l'équation. En faisant mouvoir le point z dans le sens direct sur le contour du rectangle, on reconnaît aisément que le nombre μ des racines situées à l'intérieur de ce rectangle est donné par la formule suivante :

$$\begin{aligned} 2\mu = & \text{I} \left[\frac{t + \frac{E}{2}(e^t - e^{-t}) \sin \varepsilon}{\frac{\pi}{2} + \omega + \varepsilon - \frac{E}{2}(e^t + e^{-t}) \cos \varepsilon} \right]_0^a \\ & - \text{I} \left[\frac{t - \frac{E}{2}(e^t - e^{-t}) \sin \varepsilon}{\frac{\pi}{2} + \omega - \varepsilon - \frac{E}{2}(e^t + e^{-t}) \cos \varepsilon} \right]_0^a \\ & + \text{I} \left[\frac{a - \frac{E}{2}(e^a - e^{-a}) \sin(t - \varepsilon)}{\frac{\pi}{2} + \omega + \varepsilon - t - \frac{E}{2}(e^a + e^{-a}) \cos(t - \varepsilon)} \right]_0^{2\pi}, \end{aligned}$$

dans laquelle ω représente la quantité $2k\pi - \alpha$, et I un indice pris par rapport à t .

L'équation

$$\frac{\pi}{2} + \omega + \varepsilon - \frac{E}{2}(e^t + e^{-t}) \cos \varepsilon = 0$$

admet une seule racine réelle positive t_1 . De même l'équation

$$\frac{\pi}{2} + \omega - \varepsilon - \frac{E}{2}(e^t + e^{-t}) \cos \varepsilon = 0$$

admet une seule racine positive t_2 moindre que t_1 . Nous supposons

α supérieur à t_1 . L'équation

$$t - \frac{E}{2} (e^t - e^{-t}) \sin \varepsilon = 0$$

est vérifiée par $t = 0$, et admet une seule racine positive t_3 ; nous démontrerons que, lorsque ω dépasse une certaine limite, t_3 est nécessairement inférieur à t_2 . Supposons cette condition remplie; on voit alors que le premier indice est égal à $+1$, que le second est égal à -1 , et que le troisième est égal à zéro. On a donc

$$\mu = 1.$$

La fonction $t - \frac{E}{2} (e^t - e^{-t}) \sin \varepsilon$ s'annule pour $t = 0$; elle va en croissant lorsque t varie depuis zéro jusqu'à la racine positive de l'équation

$$1 - \frac{E}{2} (e^t + e^{-t}) \sin \varepsilon = 0,$$

puis elle décroît continuellement; donc, pour que t_3 soit inférieur à t_2 , il suffit que l'on ait

$$(2) \quad t_2 - \frac{E}{2} (e^{t_2} - e^{-t_2}) \sin \varepsilon < 0.$$

Mais t_2 , étant la racine de l'équation

$$\frac{\pi}{2} + \omega - \varepsilon - \frac{E}{2} (e^t + e^{-t}) \cos \varepsilon = 0,$$

est supérieur à $L(\omega)$. L'inégalité (2) sera satisfaite si l'on a

$$L(\omega) - \frac{E}{2} \left(\omega - \frac{1}{\omega} \right) \sin \varepsilon < 0.$$

On déduit de cette inégalité une limite de ω et par suite de k .

Connaissant la valeur de x , on peut obtenir celle de γ par l'équation

$$x - \alpha - \frac{E}{2} (e^x + e^{-x}) \sin x = 0$$

ou

$$\omega + \frac{\pi}{2} + \gamma - \frac{E}{2} (e^{\gamma} + e^{-\gamma}) \cos \gamma = 0,$$

dans laquelle γ désigne une quantité très-petite, positive ou négative.
De cette équation on tire approximativement

$$\gamma = L \frac{2}{E \cos \gamma} + L \left(\omega + \frac{\pi}{2} + \gamma \right).$$

La valeur de γ est donc, à peu près,

$$\gamma = L \frac{2}{E} + L \left(2k\pi + \frac{\pi}{2} \right).$$