ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

E. COMBESCURE

Sur les paramètres différentielles des fonctions et sur les lignes isothermes permanentes

Annales scientifiques de l'É.N.S. 2^e série, tome 7 (1878), p. 409-434
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1878_2_7__409_0>

SUR LES

PARAMÈTRES DIFFÉRENTIELS DES FONCTIONS

ET SUR

LES LIGNES ISOTHERMES PERMANENTES,

PAR M. É. COMBESCURE,

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE MONTPELLIER.

PREMIÈRE PARTIE.

Remarques sur quelques formules relatives aux déterminants.

1. Soit

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ b_1 & b_2 & \ldots & b_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ r_1 & r_2 & \ldots & r_n \\ u_1 & u_2 & \ldots & u_n \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} (aa) & (ab) & \ldots & (au) \\ (ab) & (bb) & \ldots & (bu) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (au) & (bu) & \ldots & (uu) \end{vmatrix} = \mathrm{R}$$

le carré d'un déterminant dans lequel les éléments $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots$, sont des quantités quelconques, et où, pour abréger,

$$(aa) = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2, \quad (ab) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n, \; \ldots.$$

Le déterminant R peut se représenter par les n formes quadratiques

$$\mathrm{R} = \mathrm{R}^{(i)} = \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial (aa)} a_i^2 + \ldots + \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial (uu)} u_i^2 + \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial (ab)} a_i b_i + \ldots,$$

i désignant un quelconque des nombres $1, 2, \ldots, n$; et si l'on pose

$$r_{ab}^{(t)} = a_1 \frac{\partial b_1}{\partial t} + a_2 \frac{\partial b_2}{\partial t} + \ldots + a_n \frac{\partial b_n}{\partial t},$$

d'où résulte

$$r_{ab}^{(t)} + r_{ba}^{(t)} = \frac{\partial(ab)}{\partial t},$$

t étant une variable indépendante quelconque, on a

$$(1) \qquad 2R\frac{\partial a_i}{\partial t} = \frac{\partial R^{(i)}}{\partial a_i} r_{aa}^{(t)} + \frac{\partial R^{(i)}}{\partial b_i} r_{ba}^{(t)} + \ldots + \frac{\partial R^{(i)}}{\partial u_i} r_{ua}^{(t)}.$$

Si l'on introduit une autre variable indépendante (s) et que l'on considère l'équation analogue à (1), savoir :

$$(1') \qquad 2R\frac{\partial a_i}{\partial s} = \frac{\partial R^{(i)}}{\partial a_i} r_{aa}^{(s)} + \frac{\partial R^{(i)}}{\partial b_i} r_{ba}^{(s)} + \ldots + \frac{\partial R^{(i)}}{\partial u_i} r_{ua}^{(s)},$$

on aura, pour $i = 1, 2, \ldots, n$, deux systèmes comprenant chacun n équations linéaires par rapport à $a_1, a_2, \ldots; b_1, b_2, \ldots; u_1, u_2, \ldots$, et si l'on regarde toutes les autres quantités comme connues, les conditions pour que ces équations puissent avoir lieu en même temps seront

$$(2) \quad R\left(\frac{\partial r_{hk}^{(s)}}{\partial t} - \frac{\partial r_{hk}^{(t)}}{\partial s}\right) = \frac{\partial R}{\partial(aa)}\left(r_{ah}^{(t)} r_{ak}^{(s)} - r_{ah}^{(s)} r_{ak}^{(t)}\right) + \ldots + \frac{\partial R}{\partial(ab)}\left(r_{ah}^{(t)} r_{bk}^{(s)} - r_{ah}^{(s)} r_{bk}^{(t)}\right) + \ldots,$$

h et k désignant deux quelconques des lettres $a, b, \ldots, u$.

J'ai établi ces formules (avec des notations différentes), dans le tome IV (1re série) de ce journal. On connaissait depuis longtemps la forme des équations (1) et (1'), lorsque $a_1, a_2, \ldots; b_1, b_2, \ldots$ étaient, dans un certain ordre, les dérivées partielles de n fonctions de n variables indépendantes; mais, même dans ce cas spécial, on n'avait pas établi, dans leur généralité, les équations qui correspondent à (2).

Cas des déterminants fonctionnels : première forme.

2. Lorsque, considérant n fonctions $x, y, z, \ldots, u$ des n variables indépendantes, $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \upsilon$, on suppose

$$a_1 = \frac{\partial x}{\partial \alpha}, \quad a_2 = \frac{\partial y}{\partial \alpha}, \quad \ldots, \quad a_n = \frac{\partial u}{\partial \alpha},$$

$$b_1 = \frac{\partial x}{\partial \beta}, \quad b_2 = \frac{\partial y}{\partial \beta}, \quad \ldots, \quad b_n = \frac{\partial u}{\partial \beta},$$

$$c_1 = \frac{\partial x}{\partial \gamma}, \quad c_2 = \frac{\partial y}{\partial \gamma}, \quad \ldots,$$

de sorte que

$$(aa) = \frac{\partial x^2}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial y^2}{\partial \alpha^2} + \ldots + \frac{\partial u^2}{\partial \alpha^2}, \quad (ab) = \frac{\partial x}{\partial \alpha}\frac{\partial x}{\partial \beta} + \ldots + \frac{\partial u}{\partial \alpha}\frac{\partial u}{\partial \beta}, \quad \ldots,$$

en supposant que t et s désignent deux quelconques des variables α, β, ..., υ, la combinaison de

$$r_{ab}^{(t)} + r_{ba}^{(t)} = \frac{\partial (ab)}{\partial t}$$

avec

$$\frac{\partial a_1}{\partial \beta} = \frac{\partial b_1}{\partial \alpha}, \quad \frac{\partial a_2}{\partial \beta} = \frac{\partial b_2}{\partial \alpha}, \quad \ldots$$

fournit

$$r_{ab}^{(\gamma)} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial (ab)}{\partial \gamma} + \frac{\partial (ac)}{\partial \beta} - \frac{\partial (bc)}{\partial \alpha}\right], \tag{3}$$

ce qui donne l'expression des $r_{ab}^{(t)}$ au moyen des dérivées partielles de (aa), (ab), ...

Si l'on introduit ces expressions dans les équations (2), il est facile de voir qu'elles sont les équations distinctes que l'on obtient. Par exemple, pour trois fonctions x, y, z de α, β, γ, on a seulement six équations distinctes qui, abstraction faite du facteur R, amènent aux premiers membres de (2) les six quantités comprises dans les deux types

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 (aa)}{\partial \beta\, \partial \gamma} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial}{\partial \alpha}\left[\dfrac{\partial (ab)}{\partial \gamma} + \dfrac{\partial (ac)}{\partial \beta} - \dfrac{\partial (bc)}{\partial \alpha}\right], \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 (aa)}{\partial \beta^2} + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 (bb)}{\partial \alpha^2} - \dfrac{\partial^2 (ab)}{\partial \alpha\, \partial \beta}, \end{array}\right. \tag{4}$$

les seconds membres ne renfermant que des dérivées premières.

Si l'on voulait introduire dans le calcul, comme éléments essentiels, les quantités

$$(\alpha\alpha) = \frac{\partial \alpha^2}{\partial x^2} + \frac{\partial \alpha^2}{\partial y^2} + \ldots + \frac{\partial \alpha^2}{\partial u^2}, \quad (\alpha\beta) = \frac{\partial \alpha}{\partial x}\frac{\partial \beta}{\partial x} + \frac{\partial \alpha}{\partial y}\frac{\partial \beta}{\partial y} + \ldots + \frac{\partial \alpha}{\partial u}\frac{\partial \beta}{\partial u}, \quad \ldots,$$

qui constituent ce que l'on appelle [du moins les $(\alpha\alpha)$, $(\beta\beta)$, ..., $(\upsilon\upsilon)$] les *paramètres différentiels du premier ordre* des fonctions α, β, γ, ..., υ, il suffirait d'employer les formules connues qui permettent d'exprimer les (ab) en fonction des $(\alpha\beta)$ et de substituer dans les formules

(1), (2), (3), (4), en supposant que t et s désignent toujours deux quelconques des variables α, β, ..., υ; mais il est plus simple de revenir aux relations du n° 1.

Déterminants fonctionnels : deuxième forme.

3. Je poserai

$$\begin{array}{llll}
\alpha_1 = \dfrac{\partial\alpha}{\partial x}, & \alpha_2 = \dfrac{\partial\alpha}{\partial y}, & \ldots, & \alpha_n = \dfrac{\partial\alpha}{\partial u},\\
\beta_1 = \dfrac{\partial\beta}{\partial x}, & \beta_2 = \dfrac{\partial\beta}{\partial y}, & \ldots, & \beta_n = \dfrac{\partial\beta}{\partial u},\\
\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots,\\
\upsilon_1 = \dfrac{\partial\upsilon}{\partial x}, & \upsilon_2 = \dfrac{\partial\upsilon}{\partial y}, & \ldots, & \upsilon_n = \dfrac{\partial\upsilon}{\partial u}.
\end{array}$$

Cela étant, si, dans le déterminant R, n° 1, on suppose

$$\begin{array}{llll}
a_1 = \alpha_1, & a_2 = \alpha_2, & \ldots, & a_n = \alpha_n,\\
b_1 = \beta_1, & b_2 = \beta_2, & \ldots, & b_n = \beta_n,
\end{array}$$

en sorte que

$$\begin{array}{l}
(aa) = (\alpha\alpha) = \dfrac{\partial\alpha^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial\alpha^2}{\partial y^2} + \ldots + \dfrac{\partial\alpha^2}{\partial u^2},\\
(ab) = (\alpha\beta) = \dfrac{\partial\alpha}{\partial x}\dfrac{\partial\beta}{\partial x} + \dfrac{\partial\alpha}{\partial y}\dfrac{\partial\beta}{\partial y} + \ldots + \dfrac{\partial\alpha}{\partial u}\dfrac{\partial\beta}{\partial u},\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{array}$$

en prenant

$$r_{ab}^{(t)} = r_{\alpha\beta}^{(t)} = \Sigma\alpha_i \frac{\partial\beta_i}{\partial t},$$

le Σ se rapportant aux indices et t étant une quelconque des variables α, β, ..., υ, les formules (1), (2) subsisteront comme toujours, et la question est d'exprimer actuellement les $r_{\alpha\beta}^{(t)}$ au moyen des $(\alpha\alpha)$ $(\alpha\beta)$ et de leurs dérivées premières. On a pour cela les relations

$$\frac{\partial\alpha_1}{\partial y} - \frac{\partial\alpha_2}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial\alpha_1}{\partial z} - \frac{\partial\alpha_3}{\partial x} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial\alpha_1}{\partial u} - \frac{\partial\alpha_n}{\partial x} = 0, \quad \ldots.$$

En prenant α, β, ..., υ pour variables indépendantes, ces relations reviennent aux suivantes, où la première, qui est identique, a été introduite auxiliairement,

$$\alpha_1 \frac{\partial \alpha_1}{\partial \alpha} + \beta_1 \frac{\partial \alpha_1}{\partial \beta} + \ldots + \upsilon_1 \frac{\partial \alpha_1}{\partial \upsilon} - \left(\alpha_1 \frac{\partial \alpha_1}{\partial \alpha} + \beta_1 \frac{\partial \alpha_1}{\partial \beta} + \ldots + \upsilon_1 \frac{\partial \alpha_1}{\partial \upsilon}\right) = 0,$$

$$\alpha_2 \frac{\partial \alpha_1}{\partial \alpha} + \beta_2 \frac{\partial \alpha_1}{\partial \beta} + \ldots + \upsilon_2 \frac{\partial \alpha_1}{\partial \upsilon} - \left(\alpha_1 \frac{\partial \alpha_2}{\partial \alpha} + \beta_1 \frac{\partial \alpha_2}{\partial \beta} + \ldots + \upsilon_1 \frac{\partial \alpha_2}{\partial \upsilon}\right) = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\alpha_n \frac{\partial \alpha_1}{\partial \alpha} + \beta_n \frac{\partial \alpha_1}{\partial \beta} + \ldots + \upsilon_n \frac{\partial \alpha_1}{\partial \upsilon} - \left(\alpha_1 \frac{\partial \alpha_n}{\partial \alpha} + \beta_1 \frac{\partial \alpha_n}{\partial \beta} + \ldots + \upsilon_1 \frac{\partial \alpha_n}{\partial \upsilon}\right) = 0,$$

et l'on a d'autres groupes analogues. En multipliant ces équations par $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$, où γ est une quelconque des variables $\alpha, \beta, \ldots, \upsilon$, et ajoutant les produits, on aura la première du groupe suivant, les autres équations étant obtenues par un procédé analogue,

$$(\alpha\gamma) \frac{\partial \alpha_1}{\partial \alpha} + (\beta\gamma) \frac{\partial \alpha_1}{\partial \beta} + \ldots + (\upsilon\gamma) \frac{\partial \alpha_1}{\partial \upsilon} - \alpha_1 r^{(\alpha)}_{\gamma\alpha} - \beta_1 r^{(\beta)}_{\gamma\alpha} - \ldots - \upsilon_1 r^{(\upsilon)}_{\gamma\alpha} = 0,$$

$$(\alpha\gamma) \frac{\partial \alpha_2}{\partial \alpha} + (\beta\gamma) \frac{\partial \alpha_2}{\partial \beta} + \ldots + (\upsilon\gamma) \frac{\partial \alpha_2}{\partial \upsilon} - \alpha_2 r^{(\alpha)}_{\gamma\alpha} - \beta_2 r^{(\beta)}_{\gamma\alpha} - \ldots - \upsilon_2 r^{(\upsilon)}_{\gamma\alpha} = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$(\alpha\gamma) \frac{\partial \alpha_n}{\partial \alpha} + (\beta\gamma) \frac{\partial \alpha_n}{\partial \beta} + \ldots + (\upsilon\gamma) \frac{\partial \alpha_n}{\partial \upsilon} - \alpha_n r^{(\alpha)}_{\gamma\alpha} - \beta_n r^{(\beta)}_{\gamma\alpha} - \ldots - \upsilon_n r^{(\upsilon)}_{\gamma\alpha} = 0.$$

Enfin, $\varkappa$ étant une autre quelconque des variables indépendantes, en multipliant ces équations par $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_n$ et ajoutant, on obtiendra

$$(5)\quad (\alpha\gamma) r^{(\alpha)}_{\varkappa\alpha} + (\beta\gamma) r^{(\beta)}_{\varkappa\alpha} + \ldots + (\upsilon\gamma) r^{(\upsilon)}_{\varkappa\alpha} - (\alpha\varkappa) r^{(\alpha)}_{\gamma\alpha} - (\beta\varkappa) r^{(\beta)}_{\gamma\alpha} - \ldots - (\upsilon\varkappa) r^{(\upsilon)}_{\gamma\alpha} = 0.$$

Cette équation multiple, dans laquelle deux ou trois des quatre lettres $\alpha, \beta, \gamma, \varkappa$ peuvent coïncider, servira, en y joignant

$$r^{(t)}_{\alpha\beta} + r^{(t)}_{\beta\alpha} = \frac{\partial(\alpha\beta)}{\partial t},$$

à résoudre la question particulière, que l'on s'était posée, d'exprimer les $r^{(t)}_{\alpha\beta}$ par les $(\alpha\beta)$ et leurs dérivées premières. Je ne m'occuperai pas des formules définitives propres à ce dernier objet; je ferai remarquer seulement que les premiers membres des équations (2) ne conserveront plus la forme caractéristique qui convient au cas en quelque sorte inverse du n° 2 [la forme (4) pour trois variables par exemple]. Or comme, dans les recherches particulières qu'on peut avoir en vue, la partie la plus importante en général est celle qui correspond aux dérivées de l'ordre le plus élevé, il m'a paru au moins curieux, sinon nécessaire, d'examiner comment on pouvait conserver cette forme. C'est ce qui va faire l'objet des paragraphes suivants.

J'ajouterai seulement ici l'expression des paramètres différentiels du second ordre, qui ont la forme la plus simple possible quand on y laisse subsister les $r_{\alpha\beta}^{(l)}$. L'expression

$$\Delta_2 \alpha = \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial y^2} + \ldots + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial u^2},$$

ou

$$\Delta_2 \alpha = \frac{\partial \alpha_1}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_2}{\partial y} + \ldots + \frac{\partial \alpha_n}{\partial u}$$

devient tout de suite, en effet, quand on prend $\alpha, \beta, \ldots, \upsilon$ pour variables indépendantes,

$$\Delta_2 \alpha = r_{\alpha\alpha}^{(\alpha)} + r_{\beta\alpha}^{(\beta)} + \ldots + r_{\upsilon\alpha}^{(\upsilon)}.$$

Formules nouvelles concernant les paramètres différentiels. Introduction des signes d'opération.

4. Soient toujours $\alpha, \beta, \ldots, \upsilon$, n fonctions des n variables indépendantes $x, y, z, \ldots, u$, et

$$\alpha_1 = \frac{\partial \alpha}{\partial x}, \quad \alpha_2 = \frac{\partial \alpha}{\partial y}, \quad \ldots, \quad \alpha_{11} = \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2}, \quad \alpha_{12} = \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x\, \partial y}, \quad \ldots.$$

Désignons par A, B, C, ..., U les opérations

$$\mathrm{A} = \alpha_1 \frac{\partial}{\partial x} + \alpha_2 \frac{\partial}{\partial y} + \cdots + \alpha_n \frac{\partial}{\partial u}, \quad \mathrm{B} = \beta_1 \frac{\partial}{\partial x} + \beta_2 \frac{\partial}{\partial y} + \cdots + \beta_n \frac{\partial}{\partial u}, \quad \ldots,$$

de façon que

$$\begin{aligned} &\mathrm{A}\alpha = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_n^2 = (\alpha\alpha), \\ &\mathrm{A}\beta = \mathrm{B}\alpha = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \ldots + \alpha_n\beta_n = (\alpha\beta) \ldots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

En posant encore

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n \\ \beta_1 & \beta_2 & \ldots & \beta_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \upsilon_1 & \upsilon_2 & \ldots & \upsilon_n \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} (\alpha\alpha) & (\alpha\beta) & \ldots & (\alpha\upsilon) \\ (\alpha\beta) & (\beta\beta) & \ldots & (\beta\upsilon) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (\alpha\upsilon) & (\beta\upsilon) & \ldots & (\upsilon\upsilon) \end{vmatrix} = \mathrm{R}$$

et tenant compte des relations ordinaires

$$(\alpha\alpha)\ \frac{\partial R}{\partial(\alpha\alpha)} + (\alpha\beta)\frac{1}{2}\frac{\partial R}{\partial(\alpha\beta)} + \ldots + (\alpha\upsilon)\frac{1}{2}\frac{\partial R}{\partial(\alpha\upsilon)} = R,$$

$$(\alpha\alpha)\frac{1}{2}\frac{\partial R}{\partial(\alpha\beta)} + (\alpha\beta)\ \frac{\partial R}{\partial(\beta\beta)} + \ldots + (\alpha\upsilon)\frac{1}{2}\frac{\partial R}{\partial(\beta\upsilon)} = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

on voit immédiatement que, pour une fonction quelconque φ des variables α, β, ..., υ, on a

$$R\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} = \frac{\partial R}{\partial(\alpha\alpha)}A\varphi + \frac{1}{2}\frac{\partial R}{\partial(\alpha\beta)}B\varphi + \ldots + \frac{1}{2}\frac{\partial R}{\partial(\alpha\upsilon)}U\varphi,$$

en observant que

$$A\varphi = (\alpha\alpha)\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} + (\alpha\beta)\frac{\partial\varphi}{\partial\beta} + \ldots + (\alpha\upsilon)\frac{\partial\varphi}{\partial\upsilon},$$

formules qui servent au passage de la différentiation partielle aux opérations, ou *vice versa*. En changeant dans la première φ en $\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}$, on obtiendrait aisément les expressions d'une dérivée seconde en opérations doubles, ou *vice versa*. Mais je n'insisterai pas sur ce point, qui se rattache spécialement au calcul des opérations, dont les géomètres anglais principalement se sont occupés à un point de vue très-général.

Fonctions auxiliaires.

5. Si l'on fait

$$\gamma_1 B\alpha_1 + \gamma_2 B\alpha_2 + \ldots + \gamma_n B\alpha_n = R^{(\alpha)}_{\beta\gamma}$$

ou, pour abréger,

$$\Sigma\gamma_1 B\alpha_1 = R^{(\alpha)}_{\beta\gamma},$$

le Σ se rapportant aux indices 1, 2, ..., n, comme cela sera sous-entendu désormais, on a, par le développement immédiat,

$$\Sigma\gamma_1 B\alpha_1 = \Sigma\beta_1 C\alpha_1, \quad \text{c'est-à-dire} \quad R^{(\alpha)}_{\beta\gamma} = R^{(\alpha)}_{\gamma\beta}.$$

D'autre part, les indices numériques marquant toujours les dérivées partielles par rapport à $x, y, \ldots,$ on a

$$(A\beta)_1 = A\beta_1 + B\alpha_1;$$

d'où résulte

$$\Sigma\gamma_1 A\beta_1 + \Sigma\gamma_1 B\alpha_1 = \Sigma\gamma_1(A\beta)_1 = CA\beta.$$

Ainsi

$$R^{(\alpha)}_{\beta\gamma} + R^{(\beta)}_{\alpha\gamma} = C(\alpha\beta), \quad R^{(\beta)}_{\alpha\gamma} + R^{(\gamma)}_{\alpha\beta} = A(\beta\gamma), \quad R^{(\gamma)}_{\alpha\beta} + R^{(\alpha)}_{\beta\gamma} = B(\alpha\gamma).$$

En joignant à ces équations celles-ci :

$$R^{(\alpha)}_{\beta\gamma} = R^{(\alpha)}_{\gamma\beta}, \quad R^{(\beta)}_{\alpha\gamma} = R^{(\beta)}_{\gamma\alpha}, \quad R^{(\gamma)}_{\alpha\beta} = R^{(\gamma)}_{\beta\alpha},$$

on en tire

(6) $$R^{(\alpha)}_{\beta\gamma} = \tfrac{1}{2}[C(\alpha\beta) + B(\alpha\gamma) - A(\beta\gamma)],$$

et en particulier

(6') $$R^{(\alpha)}_{\beta\beta} = B(\alpha\beta) - \tfrac{1}{2}A(\beta\beta), \quad R^{(\alpha)}_{\alpha\beta} = \tfrac{1}{2}B(\alpha\alpha), \quad R^{(\alpha)}_{\alpha\alpha} = \tfrac{1}{2}A(\alpha\alpha).$$

On peut donc exprimer sous forme très-simple les $R^{(\alpha)}_{\beta\gamma}, \ldots$, par les dérivées premières des $(\alpha\beta)$, ou *viceversa*. Et l'on peut observer la parfaite analogie de l'équation (6) avec les formules (3) du n° **2**.

On peut aussi observer, en passant, que si l'on posait

$$\beta_1 \frac{\partial\alpha_1}{\partial x} + \beta_2 \frac{\partial\alpha_2}{\partial x} + \ldots = r^{(x)}_{\beta\alpha}, \quad \ldots,$$

ce qui s'offrirait naturellement, d'après le n° **1**, si l'on voulait prendre $x, y, \ldots, u$ pour les variables indépendantes, on pourrait écrire cette relation sous la forme

$$\beta_1 \frac{\partial\alpha_1}{\partial x} + \beta_2 \frac{\partial\alpha_1}{\partial y} + \ldots = r^{(x)}_{\beta\alpha},$$

c'est-à-dire

$$B\alpha_1 = r^{(x)}_{\beta\alpha},$$

et il en résulterait

$$R^{(\alpha)}_{\beta\gamma} = \gamma_1 r^{(x)}_{\beta\alpha} + \gamma_2 r^{(y)}_{\beta\alpha} + \ldots + \gamma_n r^{(u)}_{\beta\alpha}.$$

Équations linéaires.

6. Considérons les équations de définition

$$\begin{aligned}
\alpha_1 A\alpha_1 + \alpha_2 A\alpha_2 + \ldots + \alpha_n A\alpha_n &= R^{(\alpha)}_{\alpha\alpha},\\
\beta_1 A\alpha_1 + \beta_2 A\alpha_2 + \ldots + \beta_n A\alpha_n &= R^{(\alpha)}_{\alpha\beta},\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &\ldots\ldots,\\
\upsilon_1 A\alpha_1 + \upsilon_2 A\alpha_2 + \ldots + \upsilon_n A\alpha_n &= R^{(\alpha)}_{\alpha\upsilon}.
\end{aligned}$$

En les résolvant par rapport à $A\alpha_1, A\alpha_2, \ldots, A\alpha_n$, on en tirera des expressions de la forme

$$\begin{aligned}
A\alpha_1 &= \alpha_1 \mathcal{A} + \beta_1 \mathcal{B} + \ldots + \upsilon_1 \mathcal{V},\\
A\alpha_2 &= \alpha_2 \mathcal{A} + \beta_2 \mathcal{B} + \ldots + \upsilon_2 \mathcal{V},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;
\end{aligned}$$

car on déduira de là

$$\begin{aligned}
\Sigma \alpha_1 A\alpha_1 &= (\alpha\alpha)\mathcal{A} + (\alpha\beta)\mathcal{B} + \ldots + (\alpha\upsilon)\mathcal{V},\\
\Sigma \beta_1 A\alpha_1 &= (\alpha\beta)\mathcal{A} + (\beta\beta)\mathcal{B} + \ldots + (\beta\upsilon)\mathcal{V},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

En tirant de ces dernières les valeurs de $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \ldots, \mathcal{V}$, on aura donc

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned}
RA\alpha_1 = &\left[\frac{\partial R}{\partial(\alpha\alpha)} R^{(\alpha)}_{\alpha\alpha} + \frac{1}{2}\frac{\partial R}{\partial(\alpha\beta)} R^{(\alpha)}_{\alpha\beta} + \ldots + \frac{1}{2}\frac{\partial R}{\partial(\alpha\upsilon)} R^{(\alpha)}_{\alpha\upsilon}\right]\alpha_1\\
&+ \left[\frac{1}{2}\frac{\partial R}{\partial(\alpha\beta)} R^{(\alpha)}_{\alpha\alpha} + \frac{\partial R}{\partial(\beta\beta)} R^{(\alpha)}_{\alpha\beta} + \ldots + \frac{1}{2}\frac{\partial R}{\partial(\beta\upsilon)} R^{(\alpha)}_{\alpha\upsilon}\right]\beta_1\\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&+ \left[\frac{1}{2}\frac{\partial R}{\partial(\alpha\upsilon)} R^{(\alpha)}_{\alpha\alpha} + \frac{1}{2}\frac{\partial R}{\partial(\beta\upsilon)} R^{(\alpha)}_{\alpha\beta} + \ldots + \frac{\partial R}{\partial(\upsilon\upsilon)} R^{(\alpha)}_{\upsilon\upsilon}\right]\upsilon_1.
\end{aligned}\right.$$

On trouverait d'une manière analogue

$$(7')\quad \left\{\begin{aligned}
RB\alpha_1 = &\left[\frac{\partial R}{\partial(\alpha\alpha)} R^{(\alpha)}_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\frac{\partial R}{\partial(\alpha\beta)} R^{(\alpha)}_{\beta\beta} + \ldots + \frac{1}{2}\frac{\partial R}{\partial(\alpha\upsilon)} R^{(\alpha)}_{\beta\upsilon}\right]\alpha_1\\
&+ \left[\frac{1}{2}\frac{\partial R}{\partial(\alpha\beta)} R^{(\alpha)}_{\alpha\beta} + \frac{\partial R}{\partial(\beta\beta)} R^{(\alpha)}_{\beta\beta} + \ldots + \frac{1}{2}\frac{\partial R}{\partial(\beta\upsilon)} R^{(\alpha)}_{\beta\upsilon}\right]\beta_1\\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&+ \left[\frac{1}{2}\frac{\partial R}{\partial(\alpha\upsilon)} R^{(\alpha)}_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\frac{\partial R}{\partial(\beta\upsilon)} R^{(\alpha)}_{\beta\beta} + \ldots + \frac{\partial R}{\partial(\upsilon\upsilon)} R^{(\alpha)}_{\beta\upsilon}\right]\upsilon_1,
\end{aligned}\right.$$

formules où l'on doit écrire successivement $\alpha_2, \beta_2, \ldots, \upsilon_2$; puis $\alpha_3, \beta_3, \ldots, \upsilon_3$; ... au lieu de $\alpha_1, \beta_1, \ldots, \upsilon_1$; et l'on aura d'autres formules pareilles par des transpositions de lettres. Il est facile de voir que l'intégration de ces équations, quand les $R^{(\alpha)}_{\beta\gamma}$ et les $(\alpha\beta)$ sont connus, peut être ramenée à l'intégration successive d'équations que l'on peut traiter comme aux différentielles ordinaires.

Sommes symétriques.

7. En multipliant l'expression précédente de $A\alpha_1$ par $A\alpha_1$ et prenant le Σ, on aura

$$R\Sigma A\alpha_1 A\alpha_1 = \sum_{\varepsilon\iota} \frac{\partial R}{\partial(\varepsilon\iota)} R^{(\alpha)}_{\alpha\varepsilon} R^{(\alpha)}_{\alpha\iota},$$

$\Sigma_{\varepsilon\iota}$ se rapportant à toutes les combinaisons avec répétition des lettres $\alpha, \beta, \ldots, \upsilon$.

En multipliant de même par $A\alpha_1$ les deux membres de l'équation (7'), on en conclura

$$R\Sigma A\alpha_1 B\alpha_1 = \frac{1}{2}\sum_{\varepsilon\iota} \frac{\partial R}{\partial(\varepsilon\iota)} \left(R^{(\alpha)}_{\alpha\varepsilon} R^{(\alpha)}_{\beta\iota} + R^{(\alpha)}_{\alpha\iota} B^{(\alpha)}_{\beta\varepsilon}\right),$$

et l'on trouvera, par le même procédé, la formule générale qui comprend les deux précédentes

$$(8) \qquad R\Sigma H\alpha_1 K\beta_1 = \frac{1}{2}\sum_{\varepsilon\iota} \frac{\partial R}{\partial(\varepsilon\iota)} \left(R^{(\alpha)}_{\eta\varepsilon} R^{(\beta)}_{\varkappa\iota} + R^{(\alpha)}_{\eta\iota} R^{(\beta)}_{\varkappa\iota}\right),$$

les lettres H et η se correspondant, ainsi que K et $\varkappa$.

On remarquera que quelques-unes de ces sommes symétriques peuvent s'écrire d'une manière un peu différente, en ayant égard aux relations

$$A\alpha_1 = \tfrac{1}{2}(\alpha\alpha)_1, \quad B\alpha_1 + A\beta_1 = (\alpha\beta)_1, \quad \ldots.$$

En multipliant ces relations deux à deux, on en conclut effectivement

$$4\Sigma A\alpha_1 A\alpha_1 = \left[\frac{\partial(\alpha\alpha)}{\partial x}\right]^2 + \left[\frac{\partial(\alpha\alpha)}{\partial y}\right]^2 + \ldots + \left[\frac{\partial(\alpha\alpha)}{\partial u}\right]^2,$$

$$4\Sigma A\alpha_1 B\beta_1 = \frac{\partial(\alpha\alpha)}{\partial x}\frac{\partial(\beta\beta)}{\partial x} + \ldots + \frac{\partial(\alpha\alpha)}{\partial u}\frac{\partial(\beta\beta)}{\partial u},$$

$$2\Sigma A\alpha_1 B\alpha_1 + 2\Sigma A\alpha_1 A\beta_1 = \frac{\partial(\alpha\alpha)}{\partial x}\frac{\partial(\alpha\beta)}{\partial x} + \ldots + \frac{\partial(\alpha\alpha)}{\partial u}\frac{\partial(\alpha\beta)}{\partial u},$$

$$\Sigma(B\alpha_1)^2 + \Sigma(A\beta_1)^2 + 2\Sigma A\beta_1 B\alpha_1 = \left[\frac{\partial(\alpha\beta)}{\partial x}\right]^2 + \ldots + \left[\frac{\partial(\alpha\beta)}{\partial u}\right]^2,$$

Relations différentielles entre les fonctions auxiliaires.

8. Soit f une fonction quelconque des variables $x, y, \ldots, u$. On a

$$\mathrm{A}f = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \ldots + \alpha_n f_n,$$
$$\mathrm{B}f = \beta_1 f_1 + \beta_2 f_2 + \ldots + \beta_n f_n;$$

d'où

$$\mathrm{BA}f - \mathrm{AB}f = (\mathrm{B}\alpha_1 - \mathrm{A}\beta_1) f_1 + \ldots + (\mathrm{B}\alpha_n - \mathrm{A}\beta_n) f_n.$$

En changeant successivement, dans cette dernière relation, f en f_1, $f_2, \ldots, f_n$, on en déduit

$$\Sigma\alpha_1(\mathrm{BA}f_1 - \mathrm{AB}f_1) = (\mathrm{B}\alpha_1 - \mathrm{A}\beta_1)\mathrm{A}f_1 + \ldots + (\mathrm{B}\alpha_n - \mathrm{A}\beta_n)\mathrm{A}f_n.$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\Sigma\alpha_1(\mathrm{BA}f_1 - \mathrm{AB}f_1) &= \Sigma(\mathrm{B}\alpha_1 - \mathrm{A}\beta_1)\mathrm{A}f_1,\\
\Sigma\beta_1(\mathrm{BA}f_1 - \mathrm{AB}f_1) &= \Sigma(\mathrm{B}\alpha_1 - \mathrm{A}\beta_1)\mathrm{B}f_1,\\
\Sigma\gamma_1(\mathrm{BA}f_1 - \mathrm{AB}f_1) &= \Sigma(\mathrm{B}\alpha_1 - \mathrm{A}\beta_1)\mathrm{C}f_1,\\
\ldots\ldots&\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Si l'on observe que, par exemple, on a

$$\alpha_1 \mathrm{BA} f_1 = \mathrm{B}(\alpha_1 \mathrm{A} f_1) - \mathrm{B}\alpha_1 \mathrm{A} f_1,$$

ces relations peuvent s'écrire

$$\begin{aligned}
\mathrm{B}\Sigma\alpha_1\mathrm{A}f_1 - \mathrm{A}\Sigma\alpha_1\mathrm{B}f_1 &= 2\Sigma\mathrm{B}\alpha_1\mathrm{A}f_1 - \Sigma\mathrm{A}\alpha_1\mathrm{B}f_1 - \Sigma\mathrm{A}\beta_1\mathrm{A}f_1,\\
\mathrm{B}\Sigma\beta_1\mathrm{A}f_1 - \mathrm{A}\Sigma\beta_1\mathrm{B}f_1 &= \Sigma\mathrm{B}\beta_1\mathrm{A}f_1 + \Sigma\mathrm{B}\alpha_1\mathrm{B}f_1 - 2\Sigma\mathrm{A}\beta_1\mathrm{B}f_1,\\
\mathrm{B}\Sigma\gamma_1\mathrm{A}f_1 - \mathrm{A}\Sigma\gamma_1\mathrm{B}f_1 &= \Sigma\mathrm{B}\alpha_1\mathrm{C}f_1 - \Sigma\mathrm{A}\beta_1\mathrm{C}f_1 + \Sigma\mathrm{B}\gamma_1\mathrm{A}f_1 - \Sigma\mathrm{A}\gamma_1\mathrm{B}f_1,\\
\ldots\ldots&\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Lorsque f désigne l'une quelconque des variables $\alpha, \beta, \ldots, \varkappa$, on a donc

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned}
\mathrm{BR}^{(\varkappa)}_{\alpha\alpha} - \mathrm{AR}^{(\varkappa)}_{\alpha\beta} &= 2\Sigma\mathrm{B}\alpha_1\mathrm{A}\varkappa_1 - \Sigma\mathrm{A}\alpha_1\mathrm{B}\varkappa_1 - \Sigma\mathrm{A}\beta_1\mathrm{A}\varkappa_1,\\
\mathrm{BR}^{(\varkappa)}_{\alpha\beta} - \mathrm{AR}^{(\varkappa)}_{\beta\beta} &= \Sigma\mathrm{B}\beta_1\mathrm{A}\varkappa_1 + \Sigma\mathrm{B}\alpha_1\mathrm{B}\varkappa_1 - 2\Sigma\mathrm{A}\beta_1\mathrm{B}\varkappa_1,\\
\mathrm{BR}^{(\varkappa)}_{\alpha\gamma} - \mathrm{AR}^{(\varkappa)}_{\beta\gamma} &= \Sigma\mathrm{B}\alpha_1\mathrm{C}\varkappa_1 - \Sigma\mathrm{A}\beta_1\mathrm{C}\varkappa_1 + \Sigma\mathrm{B}\gamma_1\mathrm{A}\varkappa_1 - \Sigma\mathrm{A}\gamma_1\mathrm{B}\varkappa_1,\\
\ldots\ldots&\ldots\ldots
\end{aligned}\right.$$

En ayant égard à la formule (8), on pourra écrire la troisième de ces équations sous la forme

$$
(10)\quad \left\{
\begin{aligned}
\mathrm{R}\left(\mathrm{BR}_{\alpha\gamma}^{(\varkappa)}-\mathrm{AR}_{\beta\gamma}^{(\varkappa)}\right)=\frac{1}{2}\sum_{\varepsilon\iota}\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial(\varepsilon\iota)}\Big(&\mathrm{R}_{\beta\varepsilon}^{(\alpha)}\mathrm{R}_{\gamma\iota}^{(\varkappa)}+\mathrm{R}_{\beta\iota}^{(\alpha)}\mathrm{R}_{\gamma\varepsilon}^{(\varkappa)}-\mathrm{R}_{\alpha\varepsilon}^{(\beta)}\mathrm{R}_{\gamma\iota}^{(\varkappa)}-\mathrm{R}_{\alpha\iota}^{(\beta)}\mathrm{R}_{\gamma\varepsilon}^{(\varkappa)}\\
&+\mathrm{R}_{\beta\varepsilon}^{(\gamma)}\mathrm{R}_{\alpha\iota}^{(\varkappa)}+\mathrm{R}_{\beta\iota}^{(\gamma)}\mathrm{R}_{\alpha\varepsilon}^{(\varkappa)}-\mathrm{R}_{\alpha\varepsilon}^{(\gamma)}\mathrm{R}_{\beta\iota}^{(\varkappa)}-\mathrm{R}_{\alpha\iota}^{(\gamma)}\mathrm{R}_{\beta\varepsilon}^{(\varkappa)}\Big).
\end{aligned}
\right.
$$

On peut, dans cette formule, faire coïncider γ avec α ou β et $\varkappa$ avec une quelconque de ces lettres.

Conditions d'intégrabilité des équations linéaires du n° 6.

9. Les relations (9) ou (10) expriment précisément les conditions de la coexistence des n systèmes d'équations simultanées

$$
\begin{aligned}
\mathrm{A}\alpha_1 &= \alpha_1\mathcal{A} + \beta_1\mathcal{B} + \ldots + \upsilon_1\mathcal{V},\\
\mathrm{B}\alpha_1 &= \alpha_1\mathcal{A}' + \beta_1\mathcal{B}' + \ldots + \upsilon_1\mathcal{V}',\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\mathrm{U}\alpha_1 &= \alpha_1\mathcal{A}^{(n-1)} + \beta_1\mathcal{B}^{(n-1)} + \ldots + \upsilon_1\mathcal{V}^{(n-1)},\\[1ex]
\mathrm{A}\alpha_2 &= \alpha_2\mathcal{A} + \beta_2\mathcal{B} + \ldots + \upsilon_2\mathcal{V},\\
\mathrm{B}\alpha_2 &= \alpha_2\mathcal{A}' + \beta_2\mathcal{B}' + \ldots + \upsilon_2\mathcal{V}',\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\mathrm{U}\alpha_2 &= \alpha_2\mathcal{A}^{(n-1)} + \beta_2\mathcal{B}^{(n-1)} + \ldots + \upsilon_2\mathcal{V}^{(n-1)},\\[1ex]
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\[1ex]
\mathrm{A}\alpha_n &= \alpha_n\mathcal{A} + \ldots + \upsilon_n\mathcal{V},\\
\mathrm{B}\alpha_n &= \alpha_n\mathcal{A}' + \ldots + \upsilon_n\mathcal{V}',\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\mathrm{U}\alpha_n &= \alpha_n\mathcal{A}^{(n-1)} + \ldots + \upsilon_n\mathcal{V}^{(n-1)},
\end{aligned}
$$

où les quantités $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, ..., $\mathcal{V}$, censées connues, ont les valeurs trouvées au n° 6, et de même les expressions analogues $\mathcal{A}'$, $\mathcal{B}'$, ..., $\mathcal{A}^{(n-1)}$, ... On tire, en effet, des équations proposées, pour les conditions en question, des relations telles que

$$
\begin{aligned}
\mathrm{BA}\alpha_1-\mathrm{AB}\alpha_1 = {} & (\alpha_1\mathrm{B}\mathcal{A}+\ldots+\upsilon_1\mathrm{B}\mathcal{V})-(\alpha_1\mathrm{A}\mathcal{A}'+\ldots+\upsilon_1\mathrm{A}\mathcal{V}')\\
&+(\mathcal{A}\mathrm{B}\alpha_1+\ldots+\mathcal{V}\mathrm{B}\upsilon_1)-(\mathcal{A}'\mathrm{A}\alpha_1+\ldots+\mathcal{V}'\mathrm{A}\upsilon_1).
\end{aligned}
$$

Les n équations obtenues en mettant successivement dans cette dernière, à la place de l'indice 1, les indices 1, 2, ..., n, peuvent être remplacées par les n équations provenant de la combinaison

$$\Sigma \rho_1 (\mathrm{BA}\alpha_1 - \mathrm{AB}\alpha_1),$$

dans laquelle ρ désigne successivement les n variables $\alpha, \beta, \ldots, \nu$. On a ainsi

$$\begin{aligned}\Sigma \rho_1 (\mathrm{BA}\alpha_1 - \mathrm{AB}\alpha_1) &= (\alpha\rho)\mathrm{B}\mathcal{A} + \ldots + (\nu\rho)\mathrm{B}\mathcal{V} - [(\alpha\rho)\mathrm{A}\mathcal{A}' + \ldots + (\nu\rho)\mathrm{A}\mathcal{V}'] \\ &+ \mathcal{A}\Sigma\rho_1\mathrm{B}\alpha_1 + \ldots + \mathcal{V}\Sigma\rho_1\mathrm{B}\nu_1 - (\mathcal{A}'\Sigma\rho_1\mathrm{A}\alpha_1 + \ldots + \mathcal{V}'\Sigma\rho_1\mathrm{A}\nu_1).\end{aligned}$$

Or de la relation (n° 6)

$$\mathrm{R}^{(\alpha)}_{\alpha\rho} = (\alpha\rho)\mathcal{A} + (\beta\rho)\mathcal{B} + \ldots + (\nu\rho)\mathcal{V}$$

résulte

$$\mathrm{BR}^{(\alpha)}_{\alpha\rho} = (\alpha\rho)\mathrm{B}\mathcal{A} + \ldots + (\nu\rho)\mathrm{B}\mathcal{V} + \mathcal{A}\mathrm{B}(\alpha\rho) + \ldots + \mathcal{V}\mathrm{B}(\nu\rho);$$

de sorte que le second membre de l'équation précédente, en ne faisant attention qu'aux termes qui introduisent des dérivées secondes de $(\alpha\alpha)$, $(\alpha\beta)$, ..., contient seulement en fait de pareils termes $\mathrm{BR}^{(\alpha)}_{\alpha\rho} - \mathrm{AR}^{(\alpha)}_{\beta\rho}$: ce qui est précisément la partie qu'introduit au premier membre l'expression $\Sigma\rho_1(\mathrm{BA}\alpha_1 - \mathrm{AB}\alpha_1)$, d'après le numéro précédent. On démontrerait aisément que les parties du *premier ordre* sont aussi les mêmes dans les deux membres : de façon que les conditions d'*intégrabilité*, qu'on trouverait par le procédé habituel, qu'on vient d'employer, deviennent identiques quand on tient compte des relations (9) ou (10), qui peuvent dès lors les remplacer.

Remarques sur ces conditions.

10. Lorsque, dans les formules (9) ou (10), on substitue les expressions (7) des $\mathrm{R}^{(\alpha)}_{\beta\gamma}$, les équations ainsi obtenues ne sont pas toutes distinctes. Ainsi, pour $\varkappa = \alpha$, la première devient

$$\tfrac{1}{2}\mathrm{BA}(\alpha\alpha) - \tfrac{1}{2}\mathrm{AB}(\alpha\alpha) = \Sigma\mathrm{B}\alpha_1\mathrm{A}\alpha_1 - \Sigma\mathrm{A}\alpha_1\mathrm{A}\beta_1,$$

équation où n'entrent en réalité que des dérivées premières $\dfrac{\partial(\alpha\beta)}{\partial\alpha}, \ldots,$ et qui doit être identique entre ces dérivées. C'est ce que l'on vérifie, en observant qu'on peut l'écrire

$$\tfrac{1}{2}\mathrm{BA}(\alpha\alpha) - \tfrac{1}{2}\mathrm{AB}(\alpha\alpha) = \Sigma\tfrac{1}{2}(\alpha\alpha)_1(\mathrm{B}\alpha_1 - \mathrm{A}\beta_1).$$

Or, en supposant $f = (\alpha\alpha)$ dans la troisième équation du commencement du n° 8, l'équation précédente devient manifestement identique.

Pour $x = \beta$, la première équation (9) devient

$$\mathrm{BA}(\alpha\beta) - \tfrac{1}{2}\mathrm{AA}(\beta\beta) - \tfrac{1}{2}\mathrm{BB}(\alpha\alpha) = 2\Sigma\mathrm{B}\alpha_1\mathrm{A}\beta_1 - \Sigma\mathrm{A}\alpha_1\mathrm{B}\beta_1 - \Sigma\mathrm{A}\beta_1\mathrm{A}\beta_1;$$

et, comme on aurait aussi

$$\mathrm{AB}(\alpha\beta) - \tfrac{1}{2}\mathrm{AA}(\beta\beta) - \tfrac{1}{2}\mathrm{BB}(\alpha\alpha) = 2\Sigma\mathrm{A}\beta_1\mathrm{B}\alpha_1 - \Sigma\mathrm{B}\alpha_1\mathrm{A}\alpha_1 - \Sigma\mathrm{B}\alpha_1\mathrm{B}\alpha_1,$$

il en résulte

$$\mathrm{BA}(\alpha\beta) - \mathrm{AB}(\alpha\beta) = \Sigma\mathrm{B}\alpha_1\mathrm{B}\alpha_1 - \Sigma\mathrm{A}\beta_1\mathrm{A}\beta_1.$$

Le premier membre est du premier ordre par rapport aux dérivées $\frac{\partial(\alpha\alpha)}{\partial x}, \ldots$; il en est de même du second, et l'équation est identique. On peut le vérifier en observant que le second membre revient à

$$\Sigma(\mathrm{B}\alpha_1 + \mathrm{A}\beta_1)(\mathrm{B}\alpha_1 - \mathrm{A}\beta_1) \quad \text{ou} \quad \Sigma(\mathrm{B}\alpha_1 - \mathrm{A}\beta_1)(\alpha\beta)_1,$$

c'est-à-dire en supposant $f = (\alpha\beta)$, dans la formule rappelée du n° 8,

$$\mathrm{BA}(\alpha\beta) - \mathrm{AB}(\alpha\beta).$$

Cette équation, où n'entrent que des dérivées premières $\frac{\partial(\alpha\alpha)}{\partial x}, \ldots$, peut servir, si l'on veut, à de certaines transformations ou à un calcul particulier des sommes $\Sigma\mathrm{B}\alpha_1\mathrm{B}\alpha_1, \ldots$.

Les deux équations ci-dessus rentrant l'une dans l'autre, on peut leur substituer, pour plus de symétrie, l'équation unique provenant de leur somme, savoir :

$$\begin{aligned}&\mathrm{BA}(\alpha\beta) + \mathrm{AB}(\alpha\beta) - \mathrm{AA}(\beta\beta) - \mathrm{BB}(\alpha\alpha)\\ &\quad = 4\Sigma\mathrm{B}\alpha_1\mathrm{A}\beta_1 - 2\Sigma\mathrm{A}\alpha_1\mathrm{B}\beta_1 - \Sigma\mathrm{A}\beta_1\mathrm{A}\beta_1 - \Sigma\mathrm{B}\alpha_1\mathrm{B}\alpha_1,\end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned}&\mathrm{BA}(\alpha\beta) + \mathrm{AB}(\alpha\beta) - \mathrm{AA}(\beta\beta) - \mathrm{BB}(\alpha\alpha)\\ &\quad = 6\Sigma\mathrm{B}\alpha_1\mathrm{A}\beta_1 - \Sigma(\alpha\beta)_1(\alpha\beta)_1 - \tfrac{1}{2}\Sigma(\alpha\alpha)_1(\beta\beta)_1,\end{aligned}$$

en tenant compte de la remarque de la fin du n° 7.

Pour $x = \gamma$, la première équation (9) donne

$$\begin{aligned}&\mathrm{BA}(\alpha\gamma) - \tfrac{1}{2}\mathrm{BC}(\alpha\alpha) - \tfrac{1}{2}\mathrm{A}[\mathrm{A}(\beta\gamma) + \mathrm{B}(\alpha\gamma) - \mathrm{C}(\alpha\beta)]\\ &\quad = 2\Sigma\mathrm{B}\alpha_1\mathrm{A}\gamma_1 - \Sigma\mathrm{A}\alpha_1\mathrm{B}\gamma_1 - \Sigma\mathrm{A}\beta_1\mathrm{A}\gamma_1;\end{aligned}$$

mais la troisième (9), pour $x = \alpha$, devient

$$\tfrac{1}{2}BC(\alpha\alpha) - \tfrac{1}{2}[C(\alpha\beta) + B(\alpha\gamma) - A(\beta\gamma)]$$
$$= \Sigma B\alpha_1 C\alpha_1 - \Sigma A\beta_1 C\alpha_1 + \Sigma B\gamma_1 A\alpha_1 - \Sigma A\gamma_1 A\alpha_1,$$

équation qui, ajoutée à la précédente, fournirait l'équation identique entre les dérivées premières

$$BA(\alpha\gamma) - AB(\alpha\gamma) = \Sigma(B\alpha_1 - A\beta_1)(A\gamma_1 + C\alpha_1).$$

On peut donc conserver l'une ou l'autre seulement des équations précédentes, la dernière par exemple, ou encore remplacer celle-ci par celle qu'on obtient en lui ajoutant l'équation qu'on déduit de l'équation en question, moyennant l'échange de β et γ, et B et C.

Avec trois lettres α, β, γ, on donne donc lieu ainsi à six équations distinctes seulement, comprises sous deux types différents. Cela suppose toujours que les fonctions auxiliaires $R^{(\alpha)}_{\beta\gamma}$ ont été partout éliminées au moyen de (6), (6′) du n° 5. Quand on conserve les inconnues auxiliaires, qui ont pour effet de ramener au premier ordre le nombre total des équations, certaines des équations rejetées doivent être conservées, comme cela arrive lorsque l'on représente par des lettres indépendantes les dérivées partielles d'une ou plusieurs fonctions.

Paramètres différentiels du second ordre.

11. Des équations

$$\begin{aligned}
&\alpha_1\alpha_{11} + \alpha_2\alpha_{12} + \ldots + \alpha_n\alpha_{1n} = A\alpha_1,\\
&\beta_1\alpha_{11} + \beta_2\alpha_{12} + \ldots + \beta_n\alpha_{1n} = B\alpha_1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&\upsilon_1\alpha_{11} + \upsilon_2\alpha_{12} + \ldots + \upsilon_n\alpha_{1n} = U\alpha_1
\end{aligned}$$

on tire

$$\begin{aligned}
\sqrt{R}\,\alpha_{11} &= \frac{\partial\sqrt{R}}{\partial\alpha_1}A\alpha_1 + \frac{\partial\sqrt{R}}{\partial\beta_1}B\alpha_1 + \ldots + \frac{\partial\sqrt{R}}{\partial\upsilon_1}U\alpha_1,\\
\sqrt{R}\,\alpha_{12} &= \frac{\partial\sqrt{R}}{\partial\alpha_2}A\alpha_1 + \frac{\partial\sqrt{R}}{\partial\beta_2}B\alpha_1 + \ldots + \frac{\partial\sqrt{R}}{\partial\upsilon_2}U\alpha_1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\sqrt{R}\,\alpha_{1n} &= \frac{\partial\sqrt{R}}{\partial\alpha_n}A\alpha_1 + \frac{\partial\sqrt{R}}{\partial\beta_n}B\alpha_1 + \ldots + \frac{\partial\sqrt{R}}{\partial\upsilon_n}U\alpha_1;
\end{aligned}$$

et l'on a des expressions analogues pour α_{22}, α_{23}, ... Si l'on pose généralement

$$\Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial u^2},$$

on aura, d'après ces équations,

$$\sqrt{R}\,\Delta_2 \alpha = \sum \frac{\partial \sqrt{R}}{\partial \alpha_1} A\alpha_1 + \sum \frac{\partial \sqrt{R}}{\partial \beta_1} B\alpha_1 + \ldots + \sum \frac{\partial \sqrt{R}}{\partial \upsilon_1} U\alpha_1,$$

le Σ étant toujours relatif aux indices. En mettant, dans cette équation, les expressions (7), (7') de $A\alpha_1$, $B\alpha_1$, et les analogues, on en conclura immédiatement

$$(11) \qquad R\,\Delta_2 \alpha = \sum_{\varepsilon\iota} \frac{\partial R}{\partial(\varepsilon\iota)} R_{\varepsilon\iota}^{(\alpha)},$$

le $\Sigma_{\varepsilon\iota}$ se rapportant à toutes les combinaisons deux à deux, avec répétition, des n lettres α, β, ..., υ.

On observera, en passant, que, en ayant égard aux relations telles que

$$\sqrt{R}\frac{\partial \sqrt{R}}{\partial \alpha_1} = \frac{\partial R}{\partial(\alpha\alpha)}\alpha_1 + \frac{1}{2}\frac{\partial R}{\partial(\alpha\beta)}\beta_1 + \ldots + \frac{1}{2}\frac{\partial R}{\partial(\alpha\upsilon)}\upsilon_1,$$

les expressions ci-dessus de α_{11}, α_{12}, ... peuvent être rendues linéaires relativement à α_1, β_1, ...

Paramètres différentiels du second ordre des paramètres du premier ordre.

12. D'après une propriété connue des déterminants, on tire des expressions ci-dessus de α_{11}, α_{12}, ...

$$R(\alpha_{11}^2 + \alpha_{12}^2 + \ldots + \alpha_{1n}^2) = \frac{\partial R}{\partial(\alpha\alpha)}(A\alpha_1)^2 + \ldots + \frac{\partial R}{\partial(\upsilon\upsilon)}(U\alpha)^2 + \frac{\partial R}{\partial(\alpha\beta)} A\alpha_1 B\alpha_1 + \ldots;$$

d'ailleurs, de

$$A\alpha_1 = \tfrac{1}{2}(\alpha\alpha)_1$$

on tire, par la différentiation immédiate,

$$A\alpha_{11} + \alpha_{11}^2 + \alpha_{12}^2 + \ldots + \alpha_{1n}^2 = \tfrac{1}{2}(\alpha\alpha)_{11}.$$

Cela, rapproché de l'équation précédente, fournit tout de suite

$$(12)\qquad R[\tfrac{1}{2}\Delta_2(\alpha\alpha) - A\Delta_2\alpha] = \sum\nolimits_{\varepsilon\iota}\left[\frac{\partial R}{\partial(\varepsilon\iota)}\,\Sigma E\alpha_1 I\alpha_1\right],$$

le $\Sigma_{\varepsilon\iota}$ affectant toujours les lettres α, β, ..., υ et en même temps les opérations correspondantes A, B, ..., U.

Des mêmes expressions déjà invoquées de α_{11}, α_{12}, ..., et des expressions analogues de β_{11}, β_{12}, ..., on tire aussi

$$\begin{aligned}&R(\alpha_{11}\beta_{11} + \alpha_{12}\beta_{12} + \ldots + \alpha_{1n}\beta_{1n})\\ &= \frac{\partial R}{\partial(\alpha\alpha)} A\alpha_1 A\beta_1 + \ldots + \frac{\partial R}{\partial(\upsilon\upsilon)} U\alpha_1 U\beta_1 + \frac{1}{2}\frac{\partial R}{\partial(\alpha\beta)}(A\alpha_1 B\beta_1 + A\beta_1 B\alpha_1) + \ldots;\end{aligned}$$

d'ailleurs, à cause de

$$B\alpha_1 + A\beta_1 = (\alpha\beta)_1,$$

on a

$$B\alpha_{11} + A\beta_{11} + 2(\alpha_{11}\beta_{11} + \alpha_{12}\beta_{12} + \ldots + \alpha_{1n}\beta_{1n}) = (\alpha\beta)_{11}.$$

On conclut de là

$$(13)\qquad R[\Delta_2(\alpha\beta) - B\Delta_2\alpha - A\Delta_2\beta] = \sum\nolimits_{\varepsilon\iota}\left[\frac{\partial R}{\partial(\varepsilon\iota)}\,\Sigma(E\alpha_1 I\beta_1 + E\beta_1 I\alpha_1)\right],$$

formule qui redonne la précédente en faisant coïncider α et β, et, en même temps, les opérations correspondantes A et B.

On peut présenter sous une autre forme les équations (12) et (13). Je m'occuperai seulement de la seconde, la première pouvant être considérée comme un cas particulier de celle-ci.

En ayant égard à l'équation (8), l'équation (13) peut s'écrire

$$\begin{aligned}&R^2[\Delta_2(\alpha\beta) - B\Delta_2\alpha - A\Delta_2\beta]\\ &= 2\sum\nolimits_{\varepsilon\iota\eta\varkappa}\frac{1}{2}\frac{\partial R}{\partial(\varepsilon\iota)}\,\frac{1}{2}\frac{\partial R}{\partial(\eta\varkappa)}\left(R^{(\alpha)}_{\varepsilon\eta}R^{(\beta)}_{\iota\varkappa} + R^{(\alpha)}_{\iota\varkappa}R^{(\beta)}_{\varepsilon\eta} + R^{(\alpha)}_{\varepsilon\varkappa}R^{(\beta)}_{\iota\eta} + R^{(\alpha)}_{\iota\eta}R^{(\beta)}_{\varepsilon\varkappa}\right).\end{aligned}$$

Si l'on représente, pour un moment, par $a_{\varepsilon\iota}$ le déterminant mineur, pris avec un signe convenable, que l'on obtient en effaçant dans R la ligne et la colonne qui se croisent à l'un des éléments ($\varepsilon\iota$) ou ($\iota\varepsilon$) (déterminant qui peut ainsi être obtenu de deux manières si ε et ι sont différents), il est clair que le second membre de l'équation précédente revient à

$$2\,\Sigma_{\varepsilon\iota\eta\varkappa}\, a_{\varepsilon\iota}\, a_{\eta\varkappa}\, R^{(\alpha)}_{\varepsilon\eta} R^{(\beta)}_{\iota\varkappa},$$

pourvu que ε, ι, η, $\varkappa$ désignent séparément et successivement chacune des n lettres $\alpha, \beta, \ldots, \upsilon$, dans cette somme quadruple, sous la condition

$$a_{\varepsilon\iota} = a_{\iota\iota}, \quad a_{\eta\varkappa} = a_{\varkappa\eta}.$$

Sous ces mêmes conventions, on peut écrire, d'après l'équation (11),

$$R^2 \Delta_2 \alpha \Delta_2 \beta = \Sigma_{\varepsilon\iota\eta\varkappa}\, a_{\iota\eta}\, a_{\iota\varkappa}\, R^{(\alpha)}_{\varepsilon\eta} R^{(\beta)}_{\iota\varkappa}.$$

D'après cela, on aura

$$\tfrac{1}{2} R^2 [\Delta_2(\alpha\beta) - A\Delta_2\beta - B\Delta_2\alpha - 2\Delta_2\alpha\Delta_2\beta] = \Sigma_{\varepsilon\iota\eta\varkappa}(a_{\varepsilon\iota}\, a_{\eta\varkappa} - a_{\iota\eta}\, a_{\iota\varkappa}) R^{(\alpha)}_{\varepsilon\eta} R^{(\beta)}_{\iota\varkappa}.$$

Si l'on échange ε et ι, et en même temps η et $\varkappa$, l'expression $(a_{\varepsilon\iota} a_{\eta\varkappa} - a_{\varepsilon\eta} a_{\iota\varkappa})$ reste la même, en sorte que l'on a toujours au second membre

$$(a_{\varepsilon\iota} a_{\eta\varkappa} - a_{\varepsilon\eta} a_{\iota\varkappa})(R^{(\alpha)}_{\varepsilon\eta} R^{(\beta)}_{\iota\varkappa} + R^{(\alpha)}_{\iota\varkappa} R^{(\beta)}_{\varepsilon\eta});$$

mais, en échangeant ε et $\varkappa$, la même expression change de signe, de façon qu'il s'introduit au second membre

$$(a_{\varepsilon\iota} a_{\eta\varkappa} - a_{\varepsilon\eta} a_{\iota\varkappa})(R^{(\alpha)}_{\varepsilon\eta} R^{(\beta)}_{\iota\varkappa} + R^{(\alpha)}_{\iota\varkappa} R^{(\beta)}_{\varepsilon\eta} - R^{(\alpha)}_{\varkappa\eta} R^{(\beta)}_{\iota\varepsilon} - R^{(\alpha)}_{\iota\varepsilon} R^{(\beta)}_{\varkappa\eta}).$$

Enfin $(a_{\varepsilon\iota} a_{\eta\varkappa} - a_{\varepsilon\eta} a_{\iota\varkappa})$ est égale, suivant les cas, à $R \dfrac{\partial^2 R}{\partial(\varepsilon\iota)\,\partial(\eta\varkappa)}$ ou à la moitié de cette quantité, à cause que R est un déterminant symétrique. En ayant égard à l'étendue que doivent parcourir les lettres ε, ι, η, $\varkappa$, on voit aisément que l'on peut prendre dans tous les cas

$$(13') \quad \left\{ \begin{aligned} &\tfrac{1}{2} R[\Delta_2(\alpha\beta) - A\Delta_2\beta - B\Delta_2\alpha - 2\Delta_2\alpha\Delta_2\beta] \\ &\quad = \sum \frac{\partial^2 R}{\partial(\varepsilon\iota)\,\partial(\eta\varkappa)} (R^{(\alpha)}_{\varepsilon\eta} R^{(\beta)}_{\iota\varkappa} + R^{(\alpha)}_{\iota\varkappa} R^{(\beta)}_{\varepsilon\eta} - R^{(\alpha)}_{\varkappa\eta} R^{(\beta)}_{\iota\varepsilon} - R^{(\alpha)}_{\iota\varepsilon} R^{(\beta)}_{\varkappa\eta}), \end{aligned} \right.$$

le second membre comprenant toutes les dérivées secondes distinctes, sous la condition qu'ayant pris le terme répondant à $\dfrac{\partial^2 R}{\partial(\varepsilon\iota)\,\partial(\eta\varkappa)}$, par exemple, il faut alors exclure ce qui proviendrait de $\dfrac{\partial^2 R}{\partial(\iota\varkappa)\,\partial(\varepsilon\eta)}$ et de $\dfrac{\partial^2 R}{\partial(\varepsilon\eta)\,\partial(\iota\varkappa)}$.

En faisant coïncider α et β, on aura

$$(12') \quad \tfrac{1}{2} R[\tfrac{1}{2}\Delta_2(\alpha\alpha) - A\Delta_2\alpha - \Delta_2\alpha^2] = \sum \frac{\partial^2 R}{\partial(\varepsilon\iota)\,\partial(\eta\varkappa)} (R^{(\alpha)}_{\varepsilon\eta} R^{(\alpha)}_{\iota\varkappa} - R^{(\alpha)}_{\varkappa\eta} R^{(\alpha)}_{\iota\varepsilon}).$$

Développement des principales formules pour le cas des trois fonctions.

13. Comme, pour l'application aux lignes isothermes, il sera nécessaire d'avoir sous les yeux les formules développées, je vais écrire ici les plus essentielles de ces formules, pour le cas de trois fonctions α, β, γ des variables indépendantes x, y, z.

Pour simplifier autant que possible l'écriture, je poserai

$$
\begin{aligned}
(\alpha\alpha) &= \frac{\partial\alpha^2}{\partial x^2} + \frac{\partial\alpha^2}{\partial y^2} + \frac{\partial\alpha^2}{\partial z^2} = l,\\
(\beta\beta) &= \frac{\partial\beta^2}{\partial x^2} + \frac{\partial\beta^2}{\partial y^2} + \frac{\partial\beta^2}{\partial z^2} = m,\\
(\gamma\gamma) &= \frac{\partial\gamma^2}{\partial x^2} + \frac{\partial\gamma^2}{\partial y^2} + \frac{\partial\gamma^2}{\partial z^2} = n,\\
(\beta\gamma) &= \frac{\partial\beta}{\partial x}\frac{\partial\gamma}{\partial x} + \frac{\partial\beta}{\partial y}\frac{\partial\gamma}{\partial y} + \frac{\partial\beta}{\partial z}\frac{\partial\gamma}{\partial z} = \lambda,\\
(\gamma\alpha) &= \frac{\partial\gamma}{\partial x}\frac{\partial\alpha}{\partial x} + \frac{\partial\gamma}{\partial y}\frac{\partial\alpha}{\partial y} + \frac{\partial\gamma}{\partial z}\frac{\partial\alpha}{\partial z} = \mu,\\
(\alpha\beta) &= \frac{\partial\alpha}{\partial x}\frac{\partial\beta}{\partial x} + \frac{\partial\alpha}{\partial y}\frac{\partial\beta}{\partial y} + \frac{\partial\alpha}{\partial z}\frac{\partial\beta}{\partial z} = \nu.
\end{aligned}
$$

Je ferai, pour la même raison,

$$
\begin{array}{llllll}
R^{(\alpha)}_{\alpha\alpha} = p_{11}, & R^{(\alpha)}_{\beta\beta} = p_{22}, & R^{(\alpha)}_{\gamma\gamma} = p_{33}, & R^{(\alpha)}_{\alpha\beta} = p_{12}, & R^{(\alpha)}_{\alpha\gamma} = p_{13}, & R^{(\alpha)}_{\beta\gamma} = p_{23},\\
R^{(\beta)}_{\alpha\alpha} = q_{11}, & R^{(\beta)}_{\beta\beta} = q_{22}, & R^{(\beta)}_{\gamma\gamma} = q_{33}, & R^{(\beta)}_{\alpha\beta} = q_{12}, & R^{(\beta)}_{\alpha\gamma} = q_{13}, & R^{(\beta)}_{\beta\gamma} = q_{23},\\
R^{(\gamma)}_{\alpha\alpha} = r_{11}, & R^{(\gamma)}_{\beta\beta} = r_{22}, & R^{(\gamma)}_{\gamma\gamma} = r_{33}, & R^{(\gamma)}_{\alpha\beta} = r_{12}, & R^{(\gamma)}_{\alpha\gamma} = r_{13}, & R^{(\gamma)}_{\beta\gamma} = r_{23},
\end{array}
$$

c'est-à-dire que, dans les $R^{(\alpha)}_{\beta\gamma}$, l'indice supérieur α correspond à la lettre p, β à q, γ à r, et les indices inférieurs aux mêmes lettres α, β, γ, suivant leur rang alphabétique.

Moyennant cette notation, on aura

$$
(a)\left\{
\begin{array}{lll}
p_{11} = \frac{1}{2}\mathrm{A}l, & q_{12} = \frac{1}{2}\mathrm{A}m, & r_{13} = \frac{1}{2}\mathrm{A}n,\\
p_{12} = \frac{1}{2}\mathrm{B}l, & q_{22} = \frac{1}{2}\mathrm{B}m, & r_{23} = \frac{1}{2}\mathrm{B}n,\\
p_{13} = \frac{1}{2}\mathrm{C}l; & q_{23} = \frac{1}{2}\mathrm{C}m; & r_{33} = \frac{1}{2}\mathrm{C}n;
\end{array}
\right.
$$

$$
(b)\left\{
\begin{array}{lll}
p_{22} = \mathrm{B}\nu - \frac{1}{2}\mathrm{A}m, & q_{11} = \mathrm{A}\nu - \frac{1}{2}\mathrm{B}l, & r_{11} = \mathrm{A}\mu - \frac{1}{2}\mathrm{C}l,\\
p_{33} = \mathrm{C}\mu - \frac{1}{2}\mathrm{A}n, & q_{33} = \mathrm{C}\lambda - \frac{1}{2}\mathrm{B}n, & r_{22} = \mathrm{B}\lambda - \frac{1}{2}\mathrm{C}m,\\
p_{23} = \frac{1}{2}(\mathrm{B}\mu + \mathrm{C}\nu - \mathrm{A}\lambda), & q_{13} = \frac{1}{2}(\mathrm{A}\lambda + \mathrm{C}\nu - \mathrm{B}\mu), & r_{12} = \frac{1}{2}(\mathrm{A}\lambda + \mathrm{B}\mu - \mathrm{C}\nu),
\end{array}
\right.
$$

ce dernier groupe pouvant être remplacé par

$$(b')\quad \begin{cases} A\lambda = q_{13} + r_{12}, & A\mu = r_{11} + p_{13}, & A\nu = p_{12} + q_{11}, \\ B\lambda = q_{23} + r_{22}, & B\mu = r_{12} + p_{23}, & B\nu = p_{22} + q_{12}, \\ C\lambda = q_{33} + r_{23}, & C\mu = r_{13} + p_{33}, & C\nu = p_{23} + q_{13}. \end{cases}$$

On a ici

$$R = lmn - l\lambda^2 - m\mu^2 - n\nu^2 + 2\lambda\mu\nu,$$

et les équations (11), (12'), (13') deviennent

$$(c)\quad \begin{cases} R\Delta_2\alpha = (mn - \lambda^2)p_{11} + 2(\mu\nu - l\lambda\ )p_{23} \\ \qquad + (ln\ - \mu^2)p_{22} + 2(\lambda\nu - m\mu)p_{13} \\ \qquad + (lm\ - \nu^2)p_{33} + 2(\lambda\mu - n\nu\ )p_{12}; \end{cases}$$

$$(d)\quad \begin{cases} \tfrac{1}{2}R(\tfrac{1}{2}\Delta_2 l - A\Delta_2\alpha - \Delta_2\alpha^2) = l\ (p_{23}^2 - p_{22}p_{33}) + 2\lambda\ (p_{11}p_{23} - p_{12}p_{13}) \\ \qquad + m(p_{13}^2 - p_{11}p_{33}) + 2\mu(p_{22}p_{13} - p_{12}p_{23}) \\ \qquad + n\ (p_{12}^2 - p_{11}p_{22}) + 2\nu\ (p_{33}p_{12} - p_{13}p_{23}); \end{cases}$$

$$(e)\quad \begin{cases} \tfrac{1}{2}R(\Delta_2\nu - A\Delta_2\beta - B\Delta_2\alpha - 2\Delta_2\alpha\Delta_2\beta) \\ \quad = l\ (2p_{23}q_{23} - p_{22}q_{33} - p_{33}q_{22}) + 2\lambda\ (p_{11}q_{23} + p_{23}q_{11} - p_{12}q_{13} - p_{13}q_{12}) \\ \quad + m(2p_{13}q_{13} - p_{11}q_{33} - p_{33}q_{11}) + 2\mu(p_{22}q_{13} + p_{13}q_{22} - p_{12}q_{23} - p_{23}q_{12}) \\ \quad + n\ (2p_{12}q_{12} - p_{11}q_{22} - p_{22}q_{11}) + 2\nu\ (p_{33}q_{12} + p_{12}q_{33} - p_{23}q_{13} - p_{13}q_{23}). \end{cases}$$

L'équation (10) donne les six équations du groupe (f), réductibles à trois en se conformant aux remarques du n° 10. Je n'ai écrit que la première, les autres s'en déduisant par des transpositions de lettres, telles que l'échange de α et β, par exemple, entraîne ceux de l et m, λ et μ, p et q, et des indices 1 et 2. J'indique par $\binom{\alpha}{\beta}$ cette substitution simultanée :

$$(f)\quad \begin{cases} R(Bp_{13} - Ap_{23}) \text{ ou } R[\tfrac{1}{2}BCl - \tfrac{1}{2}A(B\mu + C\nu - A\lambda)] \\ \quad = (mn - \lambda^2)\,(p_{12}p_{13} - p_{13}q_{11} + p_{11}r_{12} - p_{12}r_{11}) \\ \quad + (ln\ - \mu^2)\,(p_{22}p_{23} - p_{23}q_{12} + p_{12}r_{22} - p_{22}r_{12}) \\ \quad + (lm\ - \nu^2)\,(p_{23}p_{33} - p_{33}q_{13} + p_{13}r_{23} - p_{23}r_{13}) \\ \quad + (\mu\nu - l\lambda\ )\,(p_{22}p_{33} + p_{23}^2 - p_{33}q_{12} - p_{23}q_{13} + p_{13}r_{22} + p_{12}r_{23} - p_{22}r_{13} - p_{23}r_{12}) \\ \quad + (\lambda\nu - m\mu)\,(p_{12}p_{33} + p_{23}p_{13} - p_{33}q_{11} - p_{13}q_{13} + p_{13}r_{12} + p_{11}r_{23} - p_{12}r_{13} - p_{23}r_{11}) \\ \quad + (\lambda\mu - n\nu\ )\,(p_{12}p_{23} + p_{22}p_{13} - p_{23}q_{11} - p_{13}q_{12} + p_{11}r_{22} - p_{22}r_{11}); \end{cases}$$

$$(f')\quad \begin{cases} R(Cp_{12}-Ap_{23}) \text{ ou } R[\tfrac{1}{2}CBl-\tfrac{1}{2}A(B\mu+C\nu-A\lambda)] \\ \quad =\binom{\beta}{\gamma} \text{ effectuée sur le second membre de } (f), \end{cases}$$

$$(f_1)\quad \begin{cases} R(Aq_{23}-Bq_{13}) \text{ ou } R[\tfrac{1}{2}ACm-\tfrac{1}{2}B(A\lambda+C\nu-B\mu)] \\ \quad =\binom{\alpha}{\beta} \text{ effectuée sur le second membre de } (f), \end{cases}$$

$$(f_1')\quad \begin{cases} R(Cq_{12}-Bq_{13}) \text{ ou } R[\tfrac{1}{2}CAm-\tfrac{1}{2}B(A\lambda+C\nu-B\mu)] \\ \quad =\binom{\alpha}{\gamma} \text{ effectuée sur le second membre de } (f_1), \end{cases}$$

$$(f_2)\quad \begin{cases} R(Br_{13}-Cr_{12}) \text{ ou } R[\tfrac{1}{2}BAn-\tfrac{1}{2}C(A\lambda+B\mu-C\nu)] \\ \quad =\binom{\alpha}{\gamma} \text{ effectuée sur le second membre de } (f), \end{cases}$$

$$(f_2')\quad \begin{cases} R(Ar_{23}-Cr_{12}) \text{ ou } R[\tfrac{1}{2}ABn-\tfrac{1}{2}C(A\lambda+B\mu-C\nu)] \\ \quad =\binom{\alpha}{\beta} \text{ effectuée sur le second membre de } (f_2'). \end{cases}$$

Comme on peut déduire ces équations de l'une quelconque d'entre elles, il en résulte certains moyens de vérification.

La même équation (10) donne enfin cet autre groupe d'équations, réductibles à trois,

$$(g)\quad \begin{cases} R(Ap_{22}-Bp_{12}) \text{ ou } R(AB\nu-\tfrac{1}{2}AAm-\tfrac{1}{2}BBl) \\ \quad =(mn-\lambda^2)(2p_{12}q_{11}-p_{12}^2-p_{11}q_{12}) \\ \quad +(ln-\mu^2)(2p_{22}q_{12}-p_{22}^2-p_{12}q_{22}) \\ \quad +(lm-\nu^2)(2p_{23}q_{13}-p_{23}^2-p_{13}q_{23}) \\ \quad +(\mu\nu-l\lambda)(2p_{22}q_{13}+2p_{23}q_{12}-2p_{22}p_{23}-p_{12}q_{23}-p_{13}q_{22}) \\ \quad +(\lambda\nu-m\mu)(2p_{12}q_{13}+2p_{23}q_{11}-2p_{12}p_{23}-p_{11}q_{23}-p_{13}q_{12}) \\ \quad +(\lambda\mu-n\nu)(2p_{22}q_{11}+p_{12}q_{12}-2p_{12}p_{22}-p_{11}q_{22}), \end{cases}$$

$$(g')\quad \begin{cases} R(Bq_{11}-Aq_{12}) \text{ ou } R(BA\nu-\tfrac{1}{2}AAm-\tfrac{1}{2}BBl) \\ \quad =\binom{\alpha}{\beta} \text{ effectuée sur le second membre de } (g), \end{cases}$$

$$(g_1)\quad \begin{cases} R(Ap_{33}-Cp_{13}) \text{ ou } R(AC\mu-\tfrac{1}{2}AAn-\tfrac{1}{2}CCl) \\ \quad =\binom{\beta}{\gamma} \text{ effectuée sur le second membre de } (g), \end{cases}$$

$$(g'_1)\quad \left\{\begin{aligned} &R(Cr_{11} - Ar_{13}) \text{ ou } R(CA\mu - \tfrac{1}{2}AAn - \tfrac{1}{2}CCl) \\ &\quad = \binom{\alpha}{\gamma} \text{ effectuée sur le second membre de } (g_1), \end{aligned}\right.$$

$$(g_2)\quad \left\{\begin{aligned} &R(Bq_{33} - Cq_{23}) \text{ ou } R(BC\lambda - \tfrac{1}{2}CCm - \tfrac{1}{2}BBn) \\ &\quad = \binom{\alpha}{\gamma} \text{ effectuée sur le second membre de } (g'), \end{aligned}\right.$$

$$(g'_2)\quad \left\{\begin{aligned} &R(Cr_{22} - Br_{23}) \text{ ou } R(CB\lambda - \tfrac{1}{2}CCm - \tfrac{1}{2}BBn) \\ &\quad = \binom{\beta}{\gamma} \text{ effectuée sur le second membre de } (g_2). \end{aligned}\right.$$

Il importe de remarquer que les six équations (d), (e) peuvent remplacer les six équations (f), (f_1), (f_2), (g), (g_1), (g_2), c'est-à-dire expriment, sous une forme nouvelle, les *conditions d'intégrabilité*, pourvu que dans les trois équations (c) et dans les six (d), (e) on introduise les expressions (a) et (b) des p, q, r, ou qu'on tienne compte de toute autre manière de ces dernières relations. On peut se convaincre de ce fait en faisant attention aux dérivées secondes de l, m, n, λ, μ, ν, qui s'introduisent aux premiers membres de ces deux systèmes d'équations.

Rayons principaux de courbure.

14. On a donné des formes assez variées à l'équation qui détermine les rayons principaux de courbure d'une surface. On n'a pas, que je sache, signalé la suivante.

Soit $-\omega$ l'inverse de l'un quelconque des rayons principaux de courbure de la surface

$$f(x, y, z) = \alpha = \text{const.},$$

rapportée à des axes rectangulaires. En désignant par ξ, η, ζ les cosinus de direction de la normale, on a les équations ordinaires pour les lignes de courbure

$$\begin{aligned} (\omega + \xi_1)\,dx + \xi_2\,dy + \xi_3\,dz &= 0, \\ \eta_1\,dx + (\omega + \eta_2)\,dy + \eta_3\,dz &= 0, \\ \zeta_1\,dx + \zeta_2\,dy + (\omega + \zeta_3)\,dz &= 0; \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{vmatrix} \omega+\xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ \eta_1 & \omega+\eta_2 & \eta_3 \\ \zeta_1 & \zeta_2 & \omega+\zeta_3 \end{vmatrix} = 0,$$

les indices marquant les dérivées partielles par rapport à x, y, z. A cause de

$$\xi^2+\eta^2+\zeta^2=1,$$

le déterminant fonctionnel $\Sigma \pm \xi_1\eta_2\zeta_3$ est identiquement nul, et l'équation précédente revient à

$$\omega^2+(\xi_1+\eta_2+\zeta_3)\omega+\xi_1\eta_2+\xi_1\zeta_3+\eta_2\zeta_3-\xi_2\eta_1-\xi_3\zeta_1-\eta_3\zeta_2=0.$$

En faisant toujours

$$\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2=l,$$

de sorte que

$$\xi=\frac{\alpha_1}{\sqrt{l}},\quad \eta=\frac{\alpha_2}{\sqrt{l}},\quad \zeta=\frac{\alpha_3}{\sqrt{l}},$$

et, par suite,

$$\xi_1=\frac{\alpha_{11}}{\sqrt{l}}-\left(\frac{1}{\sqrt{l}}\right)_1\alpha_1,\quad \xi_2=\frac{\alpha_{12}}{\sqrt{l}}-\left(\frac{1}{\sqrt{l}}\right)_2\alpha_1,\quad \ldots,$$

les deux premiers termes de l'équation en ω deviennent

$$\omega^2+\left[\frac{\Delta_2\alpha}{\sqrt{l}}-\mathrm{A}\left(\frac{1}{\sqrt{l}}\right)\right]\omega,$$

où, bien entendu,

$$\mathrm{A}=\alpha_1\frac{\partial}{\partial x}+\alpha_2\frac{\partial}{\partial y}+\alpha_3\frac{\partial}{\partial z}.$$

Le terme indépendant de ω, dans la même équation, peut ensuite s'écrire

$$\begin{aligned}\frac{1}{l}\Big(&\alpha_{11}\alpha_{22}+\alpha_{11}\alpha_{33}+\alpha_{22}\alpha_{33}-\alpha_{12}^2-\alpha_{13}^2-\alpha_{23}^2\\ &+\frac{\alpha_{11}}{2l^2}(\alpha_2 l_2+\alpha_3 l_3)+\frac{\alpha_{22}}{2l^2}(\alpha_1 l_1+\alpha_3 l_3)+\frac{\alpha_{33}}{2l^2}(\alpha_1 l_1+\alpha_2 l_2)\\ &-\frac{\alpha_{23}}{2l^2}(\alpha_2 l_3+\alpha_3 l_2)-\frac{\alpha_{13}}{2l^2}(\alpha_1 l_3+\alpha_3 l_1)-\frac{\alpha_{12}}{2l^2}(\alpha_1 l_2+\alpha_2 l_1)\Big).\end{aligned}$$

En ajoutant, dans la seconde ligne, un terme à chaque parenthèse,

$\alpha_1 l_1$ pour la première, etc., cela, abstraction faite de la première ligne, revient à

$$\frac{\Delta_2\alpha}{2l^2}\mathrm{A}l - \frac{l_1}{2l^2}(\alpha_1\alpha_{11}+\alpha_2\alpha_{12}+\alpha_3\alpha_{13})$$
$$-\frac{l_2}{2l^2}(\alpha_1\alpha_{12}+\alpha_2\alpha_{22}+\alpha_3\alpha_{23})$$
$$-\frac{l_3}{2l^2}(\alpha_1\alpha_{13}+\alpha_2\alpha_{23}+\alpha_3\alpha_{33}).$$

c'est-à-dire à

$$\frac{\Delta_2\alpha}{2l^2}\mathrm{A}l - \frac{1}{4l^2}(l_1^2+l_2^2+l_3^2).$$

Quant à la partie, mise de côté tout à l'heure, elle peut s'écrire

$$\frac{1}{2l}[\Delta_2\alpha^2 - (\alpha_{11}^2+\alpha_{22}^2+\alpha_{33}^2+2\alpha_{12}^2+2\alpha_{13}^2+2\alpha_{23}^2)].$$

Mais de

$$\mathrm{A}\alpha_1 = \tfrac{1}{2}l_1$$

résulte

$$\mathrm{A}\alpha_{11}+\alpha_{11}^2+\alpha_{12}^2+\alpha_{13}^2 = \tfrac{1}{2}l_{11},$$

et, en lui ajoutant les deux équations analogues, on pourra prendre, au lieu de l'expression précédente, celle-ci

$$\frac{1}{2l}(\Delta_2\alpha^2 - \tfrac{1}{2}\Delta_2 l + \mathrm{A}\Delta_2\alpha).$$

On aura donc finalement

$$\omega^2 + \left[\frac{\Delta_2\alpha}{\sqrt{l}} - \mathrm{A}\left(\frac{1}{\sqrt{l}}\right)\right]\omega - \frac{1}{4l^2}(l_1^2+l_2^2+l_3^2) + \frac{1}{2l}\left[\Delta_2\alpha^2 - \tfrac{1}{2}\Delta_2 l + \frac{\mathrm{A}(l\Delta_2\alpha)}{l}\right] = 0,$$

équation assez remarquable.

Remarques sur les surfaces parallèles.

15. Lorsqu'on suppose l égal à l'unité, c'est-à-dire dans le cas de

$$\frac{\partial\alpha^2}{\partial x^2}+\frac{\partial\alpha^2}{\partial y^2}+\frac{\partial\alpha^2}{\partial z^2} = 1,$$

les surfaces (α) sont parallèles, et si l'on désigne par R, R_1 les rayons principaux de courbure de l'une des surfaces particulières (α_0) de la série, les rayons principaux de courbures pour une surface quelconque (α) seront $\alpha - R$, $\alpha - R_1$. L'équation en ω, de la fin du numéro précédent, fournissant la somme des inverses de ces rayons, on aura, dans le cas présent,

$$\Delta_2\alpha = \frac{1}{\alpha - R} + \frac{1}{\alpha - R_1},$$

c'est-à-dire l'importante formule de M. Bertrand. Si l'on prend pour coordonnées le paramètre α et les paramètres ρ, σ des deux séries de surfaces développables, qui forment avec α un triple système orthogonal, l'opération A ou $\alpha_1 \frac{\partial}{\partial x} + \alpha_2 \frac{\partial}{\partial y} + \alpha_3 \frac{\partial}{\partial z}$ reviendra simplement ici à $\frac{\partial}{\partial \alpha}$. En l'appliquant dans ce sens à l'équation précédente, et observant que R, R_1 sont indépendants de α, on en déduira

$$-A\Delta_2\alpha = \frac{1}{(\alpha - R)^2} + \frac{1}{(\alpha - R_1)^2},$$

$$AA\Delta_2\alpha = \frac{2}{(\alpha - R)^3} + \frac{2}{(\alpha - R_1)^2}.$$

L'élimination de R et R_1 entre ces deux équations et celle qui précède fournira

$$AA\Delta_2\alpha + 3\Delta_2\alpha . A\Delta_2\alpha + \Delta_2\alpha^3 = 0.$$

Mais, tant pour enlever la restriction apportée ici au sens de l'opération A que pour rendre cette équation applicable au cas où α deviendrait imaginaire, on peut procéder comme il suit.

Puisque l est constant, on a

$$A\alpha_1 = 0,$$

d'où

$$A\alpha_{11} + \alpha_{11}^2 + \alpha_{12}^2 + \alpha_{13}^2 = 0,$$

$$A\alpha_{12} + \alpha_{12}\alpha_{11} + \alpha_{22}\alpha_{12} + \alpha_{23}\alpha_{13} = 0.$$

De là résulte d'abord

$$A\Delta_2\alpha + \alpha_{11}^2 + \alpha_{22}^2 + \alpha_{33}^2 + 2\alpha_{12}^2 + 2\alpha_{13}^2 + 2\alpha_{23}^2 = 0,$$

et ensuite

$$AA\Delta_2\alpha = 2[\alpha_{11}^3 + \ldots + 3\alpha_{11}(\alpha_{12}^2 + \alpha_{13}^2) + \ldots + 6\alpha_{12}\alpha_{13}\alpha_{23}].$$

En retranchant des deux membres l'identité

$$6\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} \end{vmatrix} = 6(\alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33} - \alpha_{11}\alpha_{23}^2 - \alpha_{22}\alpha_{13}^2 - \alpha_{33}\alpha_{12}^2 + 2\alpha_{12}\alpha_{13}\alpha_{23})$$

dont le premier membre est ici zéro, on aura

$$\mathrm{A}\mathrm{A}\Delta_2\alpha = 2[\alpha_{11}^3 + \alpha_{12}^3 + \alpha_{33}^3 - 3\alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33} + 3\Delta^2\alpha.(\alpha_{12}^2 + \alpha_{13}^2 + \alpha_{23}^2)].$$

Si l'on a égard à l'identité bien connue

$$\alpha_{11}^3 + \alpha_{22}^3 + \alpha_{33}^3 - 3\alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33} = \Delta_2\alpha.(\alpha_{11}^2 + \alpha_{22}^2 + \alpha_{33}^2 - \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{11}\alpha_{33} - \alpha_{22}\alpha_{33}),$$

et que, en vertu de l'une des équations qu'on vient d'écrire, on remplace $\alpha_{12}^2 + \alpha_{13}^2 + \alpha_{23}^2$, par $-\frac{1}{2}(\Delta_2\alpha + \alpha_{11}^2 + \alpha_{22}^2 + \alpha_{33}^2)$, on reconnaîtra tout de suite que l'équation ci-dessus revient à

$$\mathrm{A}\mathrm{A}\Delta_2\alpha + 3\Delta_2\alpha.\mathrm{A}\Delta_2\alpha + \Delta_2\alpha^3 = 0.$$

J'aurais pu rattacher cela à une transformation un peu plus générale; mais, n'ayant pas à faire usage de la formule à laquelle je fais allusion, je me borne à ce cas particulier.

Enfin je rappellerai, toujours à propos des surfaces parallèles, que les variables ρ et σ, dont il a été question au commencement du présent paragraphe, donnent lieu aux relations

$$\frac{\partial\rho^2}{\partial x^2} + \frac{\partial\rho^2}{\partial y^2} + \frac{\partial\rho^2}{\partial z^2} = \frac{\mathrm{M}}{(\alpha - \mathrm{R})^2},$$
$$\frac{\partial\sigma^2}{\partial x^2} + \frac{\partial\sigma^2}{\partial y^2} + \frac{\partial\sigma^2}{\partial z^2} = \frac{\mathrm{N}}{(\alpha - \mathrm{R}_1)^2},$$

M et N étant des fonctions de ρ et σ seulement. Ces formules se déduisent facilement des formules de Lamé [*Coordonnées curvilignes*, p. 76 et 78, équations (8) et (9)]. On peut aussi les établir de diverses manières, comme, par exemple, je l'ai fait au tome V (2e série) des *Annali di Matematica*.

FIN DU TOME SEPTIÈME.