ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

DÉSIRÉ ANDRÉ

Terme général d'un série quelconque déterminée à la façon des séries récurrentes

Annales scientifiques de l'É.N.S. 2e série, tome 7 (1878), p. 375-408

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1878_2_7__375_0>

TERME GÉNÉRAL

D'UNE SÉRIE QUELCONQUE,

DÉTERMINÉE

A LA FAÇON DES SÉRIES RÉCURRENTES,

PAR M. DÉSIRÉ ANDRÉ,

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE.

INTRODUCTION.

§ I. — Objet du présent Mémoire.

1. Parmi les différents moyens de déterminer une série, l'un des plus simples évidemment consiste à donner, en même temps que les valeurs de ses premiers termes, une relation du premier degré liant chaque terme de la série à un ou plusieurs des termes précédents. Dans ce Mémoire, nous supposons une série quelconque déterminée de cette façon, et nous nous proposons de trouver l'expression de son terme général.

§ II. — Ordre suivi.

2. Nous précisons d'abord ce que nous entendons par relation du premier degré liant chaque terme à un ou plusieurs des précédents; et nous montrons qu'il existe un très-grand nombre de séries qui se présentent à nous déterminées spontanément par les valeurs de leurs premiers termes, et par une relation du premier degré.

Nous rappelons qu'on a déjà obtenu l'expression du terme général de séries ainsi déterminées, mais seulement pour des formes très-particulières de la relation du premier degré; et nous donnons une expression de ce terme général qui convient à toutes les formes possibles de cette relation.

Nous faisons remarquer ensuite que, dans les applications de notre expression du terme général, les différences dans le résultat final proviennent surtout des différences de forme de la relation du premier degré. Nous sommes ainsi conduits à énumérer et à classer ces formes : nous les trouvons au nombre de huit.

Enfin nous considérons successivement les huit formes que peut affecter la relation du premier degré; pour chacune d'elles, nous cherchons ce que devient notre expression du terme général; et, pour chacune d'elles aussi, nous appliquons nos résultats à la détermination du terme général d'une série particulière donnée.

§ III. — Méthode employée.

3. Bien que, par son objet, ce Mémoire appartienne à l'Algèbre, notre méthode pour déterminer le terme général est bien moins algébrique que combinatoire. Elle donne ce terme sous la forme d'une ou plusieurs sommes de produits dans chacun desquels les facteurs doivent satisfaire à des conditions que nous faisons connaître. Le problème de la détermination du terme général, dans la pleine généralité que nous donnons à la relation du premier degré, nous semble très-difficilement abordable par les procédés de l'Algèbre ordinaire.

CHAPITRE I.

DÉTERMINATION DE LA SÉRIE.

4. *Détermination de la série.* — Nous supposons, avons-nous dit, une série quelconque, déterminée par les valeurs de ses premiers termes et par une relation du premier degré liant chaque terme à un ou plusieurs des précédents.

Il est inutile d'expliquer ce qu'on entend par valeurs des premiers termes.

Pour ce qui est de la relation du premier degré, il faut l'entendre dans le sens le plus étendu, ou, pour nous exprimer mieux, il faut entendre que chaque terme de la série est égal à une quantité quelconque, constante ou variable, plus la somme d'un nombre quelconque constant ou variable des termes précédents, multipliés respectivement par des coefficients quelconques constants ou variables.

Si nous désignons le premier terme de la série par U_1, le second par U_2, et en général le $n^{\text{ième}}$ par U_n, notre relation pourra toujours se formuler ainsi :

$$U_n = u_n + \sum_1^{\lambda_n}{}_k A_k^{(n)} U_{n-k},$$

u_n étant une quantité connue fonction de n; λ_n un nombre entier connu fonction de n et au plus égal à $n-1$; $A_k^{(n)}$ un coefficient connu fonction des entiers n et k.

Nous pouvons remarquer, dès à présent, qu'on aura toujours

$$U_1 = u_1.$$

Pour abréger, nous désignerons souvent la relation du premier degré par ces mots « la loi de la série », ou, plus simplement, « la loi ».

5. *Exemples de séries ainsi déterminées.* — Les Mathématiques nous présentent une foule de séries qui s'offrent à nous déterminées spontanément par les valeurs de leurs premiers termes et une relation du premier degré. Telles sont :

Les séries récurrentes proprement dites, rencontrées par Cassini (¹), nommées par Moivre (²), étudiées par lui d'abord, puis par Euler (³), par Lagrange (⁴), etc., et dont chaque terme est la somme d'un nombre fixe des précédents, multipliés respectivement par des coefficients constants;

---

(1) *Histoire de l'Académie royale des Sciences,* année 1680, p. 309.
(2) *Miscellanea analytica,* p. 27.
(3) *Introductio in Analysin,* t. I, Ch. XIII et XVII.
(4) *Œuvres,* t. I, III, V.

Les séries considérées pour la première fois par Lagrange ([1]), où chaque terme est égal à une quantité connue, plus la somme d'un nombre fixe des termes précédents, multipliés par des coefficients constants;

Celles des séries, sommées par Stirling ([2]), dans lesquelles chaque terme est la somme d'un nombre fixe des précédents, multipliés respectivement par des quantités variables.

Il en est de même des séries qui ont pour termes :

Les intégrales qui se ramènent à d'autres analogues à l'aide de l'intégration par parties;

Les termes des réduites successives des fractions continues;

Les intégrales nommées Y_μ, Z_ν;

Les fonctions X_n de Legendre;

Les nombres de Bernoulli;

Les dérivées successives des fonctions algébriques;

Sin nx et cos nx considérés comme fonctions de $\sin x$ seul ou de $\cos x$ seul;

Les sommes des puissances semblables des n premiers nombres;

Les sommes des puissances semblables des racines d'une équation;

Etc., etc.....

Parmi toutes ces séries, les plus connues sont les séries récurrentes proprement dites. C'est pourquoi, quand une série est déterminée par les valeurs de ses premiers termes et par une relation du premier degré, nous disons, comme dans le titre de ce Mémoire, qu'elle est déterminée à la façon des séries récurrentes, quoique notre relation du premier degré soit infiniment plus générale que celle qui convient aux séries récurrentes proprement dites.

([1]) *Sur l'intégration d'une équation différentielle*, etc. (*Œuvres*), t. I, p. 23.
([2]) *Methodus differentialis*, etc. Londini, 1764.

CHAPITRE II.

EXPRESSION DU TERME GÉNÉRAL.

§ I. — Expressions particulières.

6. *Séries dont on a déjà obtenu le terme général.* — Les seules séries, déterminées comme nous le supposons, dont on ait obtenu directement le terme général, sont les séries récurrentes proprement dites, et les séries considérées pour la première fois par Lagrange, c'est-à-dire des séries où la loi affecte une forme extrêmement particulière; encore, pour ces deux espèces de séries, n'a-t-on obtenu l'expression du terme général que dans le cas où l'on sait résoudre une certaine équation algébrique.

7. *Séries récurrentes proprement dites.* — Moivre a montré le premier [1] qu'une série récurrente proprement dite n'était autre chose que la suite des coefficients du développement, suivant les puissances croissantes de la variable, d'une certaine fraction rationnelle, qu'on appelle la *fraction génératrice* de la suite considérée. Lagrange, de son côté [2], a nommé *équation génératrice* de la suite l'équation algébrique et entière que l'on obtient en remplaçant dans la loi de la série les termes U_n, U_{n-1}, U_{n-2}, ... , respectivement par x^n, x^{n-1}, x^{n-2}, ... D'ailleurs on peut voir facilement que le premier membre de l'équation génératrice ne diffère du dénominateur de la fraction génératrice que par le changement de x en $\frac{1}{x}$.

On n'a pas donné d'expression du terme général pour le cas où l'équation génératrice ne peut pas être résolue complétement. Dans le cas où cette résolution complète est possible, on a trouvé l'expression fort remarquable que nous allons rappeler.

---

(1) *Miscellanea analytica.*

(2) *Mémoire sur l'expression du terme général*, etc. (*Œuvres*), t. V, p. 625.

Si l'on désigne par a l'une quelconque des racines de l'équation génératrice, par α le degré de multiplicité de cette racine, et qu'on étende à toutes les racines le $\sum$ ci-dessous, on a identiquement

$$U_n = \sum \varphi_\alpha(n) a^n,$$

$\varphi_\alpha(n)$ étant un polynôme entier en n, du degré $\alpha - 1$.

Ce résultat a été établi par Moivre ([1]) dans le cas où l'équation génératrice n'a que des racines simples; il a été développé ensuite par Euler ([2]), et enfin démontré complétement par Lagrange ([3]), qui s'est surtout occupé du cas des racines égales.

8. *Séries de Lagrange.* — Ce sont, comme nous l'avons vu, des séries récurrentes proprement dites, au second membre de la loi desquelles on a ajouté une quantité connue. Lagrange a donné ([4]) l'expression de leur terme général, sous une forme absolument analogue à la précédente; mais pour le cas seulement où l'équation génératrice, qu'on obtient en supprimant la quantité, peut être résolue complétement.

§ II. — Expression générale.

9. *But qu'on se propose.* — De la façon dont notre série est déterminée, il suit immédiatement que son terme général U_n est une fonction rationnelle et entière des quantités connues u_ν et des coefficients $A_x^{(\nu)}$, dans lequels l'indice ν ne dépasse pas n. Donner le moyen de former cette fonction, tel est le but particulier de ce Chapitre et l'objet principal de tout ce travail.

Si l'on remarque qu'à chacun des termes $U_1, U_2, U_3, \ldots, U_n$, qu'on peut regarder comme autant d'inconnues, correspond une équation du premier degré fournie par la loi de la série, on voit que le problème

---

([1]) *Miscellanea analytica.*
([2]) *Introductio in Analysin,* t. I, Ch. XIII.
([3]) *Mémoire sur l'expression du terme général,* etc. (*Œuvres*), t. V, p. 625.
([4]) *Sur l'intégration d'une équation,* etc. (*Œuvres*), t. I, p. 21.

actuel revient à déterminer la dernière U_n des inconnues d'un système de n équations du premier degré à n inconnues.

On peut donc écrire immédiatement cette expression de U_n sous la forme d'un quotient de deux déterminants. Mais ces déterminants sont, en général, d'une structure si particulière, qu'il y a d'ordinaire grand avantage à développer l'expression de U_n.

Ce que nous cherchons, c'est la façon d'écrire ce développement lui-même directement.

10. *Lemmes.* — Pour obtenir l'expression générale de U_n, nous établirons d'abord les trois lemmes suivants :

I. Chaque terme du développement de U_n est égal à l'une quelconque u_p des n quantités connues $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n$, multipliée par un ou plusieurs des coefficients $A_\varkappa^{(\nu)}$, et, par conséquent, peut s'écrire

$$A_{k_1}^{(n_1)} A_{k_2}^{(n_2)} A_{k_3}^{(n_3)} \ldots u_p.$$

II. Si l'on regarde chaque coefficient $A_\varkappa^{(\nu)}$ comme du degré $\varkappa$, et chaque quantité connue u_p comme du degré p, l'expression de U_n est homogène et du degré n, de façon que, dans le produit précédent, les indices inférieurs des coefficients satisfont toujours à l'égalité

$$k_1 + k_2 + k_3 + \ldots = n - p.$$

III. Enfin, si les coefficients $A_{k_1}^{(n_1)}, A_{k_2}^{(n_2)}, A_{k_3}^{(n_3)}, \ldots,$ qui entrent comme facteurs dans le produit précédent, y sont rangés dans un ordre tel que leurs indices supérieurs aillent constamment en croissant, les indices supérieurs et les indices inférieurs sont reliés entre eux par la relation générale

$$n_t = k_t + n_{t-1}.$$

De ces trois lemmes, le premier peut être regardé comme évident. Les deux autres, d'après la forme générale (4) de la loi de la série, subsistent pour U_n dès qu'ils sont vrais pour tous les termes précédents : étant vrais l'un et l'autre pour U_1 et U_2, ils sont donc tous les deux d'une généralité absolue.

11. *Expression de* U_n. — Il suit de là que, si l'on désigne par $\Psi(n,p)$ le coefficient de u_p dans le développement de U_n, on a identiquement

$$\Psi(n, p) = \sum A_{k_1}^{(n_1)} A_{k_2}^{(n_2)} A_{k_3}^{(n_3)} \ldots,$$

la caractéristique $\sum$ s'étendant à tous les systèmes possibles de valeurs des entiers $n_1, n_2, n_3, \ldots, k_1, k_2, k_3, \ldots$, qui satisfont à ces conditions :

$$\begin{gathered} k_1 + k_2 + k_3 + \ldots = n - p, \\ n_1 = k_1 + p, \\ n_t = k_t + n_{t-1}, \\ 0 < k_t < \lambda_{n_t}. \end{gathered}$$

Le coefficient $\Psi(n, p)$ doit être regardé comme égal à l'unité.

En résumé, on a identiquement

$$U_n = \sum_1^n {}_p \Psi(n, p) u_p.$$

Telle est notre expression du terme général. Ordonnée par rapport aux n quantités connues $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n$, elle peut s'écrire dès que l'on connaît ces n quantités ainsi que la loi de la série.

CHAPITRE III.

CLASSIFICATION DES DIFFÉRENTES FORMES DE LA LOI DE LA SÉRIE.

12. *Utilité d'une classification.* — L'expression du terme général que nous venons d'obtenir, à cause même de sa complète généralité, veut, pour être bien comprise, être appliquée à de nombreux exemples. Or, dans les applications, les différences qui se présentent, soit dans le mode du calcul, soit dans la nature du résultat, proviennent surtout des formes différentes que peut affecter la loi de la série. Pour faire des applications dans tous les cas qui se peuvent présenter et n'en faire qu'une dans chacun, il est donc utile d'énumérer et de classer les différentes formes que peut prendre la loi de la série.

13. *Caractères servant à la classification.* — Dans la formule

$$U_n = u_n + \sum_1^{\lambda_n}{}_k A_k^{(n)} U_{n-k},$$

qui exprime, de la manière la plus générale, la loi de notre série, il entre trois arguments distincts, savoir : n et k dans le coefficient $A_k^{(n)}$, n dans la limite λ_n.

Il se peut que $A_k^{(n)}$ dépende ou ne dépende pas de n, dépende ou ne dépende pas de k. Il se peut de même que λ_n varie toujours avec n, ou qu'il devienne, à partir d'une certaine valeur de n, absolument constant.

En d'autres termes, si nous supposons écrites, les unes sous les autres, les égalités successivement fournies par la loi de la série, et que nous considérions le tableau ci-dessous, formé par les coefficients

$$\begin{array}{lll} A_1^{(2)}, & & \\ A_1^{(3)}, & A_2^{(3)}, & \\ A_1^{(4)}, & A_2^{(4)}, & A_3^{(4)}, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, \end{array}$$

il se peut faire que les coefficients d'une même colonne verticale soient différents d'une ligne à l'autre ou tous égaux entre eux ; que les coefficients d'une même ligne horizontale soient aussi différents ou égaux ; enfin que les lignes horizontales aient une longueur perpétuellement variable, ou bien, à partir d'une certaine valeur de n, absolument constante.

Ces différentes manières d'être de la loi relativement à nos trois arguments sont autant de caractères qui nous permettent d'effectuer notre classification. Ils nous conduisent naturellement à reconnaître que la loi de la série peut affecter huit formes distinctes.

Seulement, pour que, dans la série de ces huit formes, les formes les plus voisines correspondent, autant que possible, aux modes de calcul et aux résultats les plus analogues, il convient d'examiner, parmi les trois arguments, quels sont ceux qui, par leur différent mode d'action sur la loi, apportent la plus grande différence dans le calcul et dans le résultat.

Que le coefficient $A_k^{(n)}$ dépende de n ou n'en dépende pas : voilà la source de la différence la plus profonde; que $A_k^{(n)}$ dépende de k ou n'en dépende pas : c'est l'origine d'une différence nouvelle, beaucoup moins marquée; que λ_n varie perpétuellement, ou, à partir d'un certain instant, devienne constant : telle est la cause d'une troisième différence, la plus faible des trois.

14. *Tableau des huit formes de la loi.* — Les considérations qui précèdent nous conduisent à former le tableau suivant :

$A_k^{(n)}$ dépend de n.......	$A_k^{(n)}$ dépend de k.......	λ_n varie toujours......	1re forme.
		λ_n devient constant....	2e forme.
	$A_k^{(n)}$ ne dépend pas de k.	λ_n varie toujours......	3e forme.
		λ_n devient constant....	4e forme.
$A_k^{(n)}$ ne dépend pas de n.	$A_k^{(n)}$ dépend de k.......	λ_n varie toujours......	5e forme.
		λ_n devient constant....	6e forme.
	$A_k^{(n)}$ ne dépend pas de k.	λ_n varie toujours......	7e forme.
		λ_n devient constant....	8e forme.

Nous allons étudier successivement ces huit formes de la loi de la série. Dans chacune d'elles nous chercherons d'abord ce que devient notre expression du terme général; ensuite, nous appliquerons le résultat obtenu à la détermination du terme général d'une série particulière donnée.

CHAPITRE IV.

APPLICATIONS.

§ I. — Lois de la première forme.

15. *Généralités.* — Sous cette première forme, la loi de la série dépend en réalité des trois arguments. Le terme général est donné par

notre formule générale (11). Si l'on n'introduit aucune particularité dans la loi, cette formule ne donne lieu à aucune simplification.

Bon nombre de quantités forment des séries qui présentent une loi de la première forme. Telles sont les sommes des puissances semblables des n premiers nombres entiers; les coefficients d'une équation considérés comme fonctions des sommes des puissances semblables de ses racines; les nombres des substitutions irréductibles, etc., etc.

Nous allons faire une application de notre théorie à la détermination du nombre des substitutions irréductibles de n lettres.

16. *Application au nombre des substitutions irréductibles.* — Le nombre des substitutions irréductibles de n lettres n'est autre chose ([1]) que celui des permutations de n lettres, où aucune lettre n'occupe la place que lui assigne son rang dans l'alphabet.

Soient, en général, P_n le nombre total des permutations de n lettres, et I_n le nombre des substitutions irréductibles de n lettres. Si l'on désigne par C_m^n le nombre des combinaisons simples de m lettres n à n, on voit très-facilement que le nombre des permutations de n lettres, où aucune lettre n'est à sa place, est I_n; où une lettre est à sa place, est $C_n^1 I_{n-1}$; où deux lettres sont à leurs places est $C_n^2 I_{n-2}$; où trois lettres sont à leurs places est $C_n^3 I_{n-3}$; et enfin où toutes les lettres sont à leurs places est $C_n^n I_0$, si l'on regarde I_0 comme égal à l'unité.

Il s'ensuit immédiatement que l'on a

$$I_n + C_n^1 I_{n-1} + C_n^2 I_{n-2} + \ldots + C_n^n I_0 = P_n.$$

Si nous posons

$$I_n = U_n,$$

nous voyons que U_n est le terme général d'une série déterminée à la façon des séries récurrentes, et dont la loi est de la première forme.

Nous voyons en même temps que nous avons, pour cette série :

$$\begin{aligned} u_n &= P_n - 1, \\ \lambda_n &= n - 1, \\ A_k^{(n)} &= - C_n^k. \end{aligned}$$

([1]) J.-A. Serret, *Algèbre supérieure*, t. II, p. 221.

Tirons de ces données l'expression de $\Psi(n, p)$. Nous trouvons d'abord

$$\Psi(n,p) = \sum (-1)^s C_{n_1}^{k_1} C_{n_2}^{k_2} C_{n_3}^{k_3} \ldots C_{n_s}^{k_s},$$

avec cette condition unique que les indices supérieurs satisfassent à la relation

$$k_1 + k_2 + k_3 + \ldots + k_s = n - p.$$

Or

$$C_{n_1}^{k_1} C_{n_2}^{k_2} C_{n_3}^{k_3} \ldots C_{n_s}^{k_s} = \frac{n_1!}{k_1!(n_1-k_1)!} \frac{n_2!}{k_2!(n_2-k_2)!} \frac{n_3!}{k_3!(n_3-k_3)!} \cdots \frac{n_s!}{k_s!(n_s-k_s)!},$$

et nous savons que l'on a

$$n_2 - k_2 = n_1, \quad n_3 - k_3 = n_2, \quad n_4 - k_4 = n_3, \quad \ldots,$$
$$n_s = n, \quad n_1 - k_1 = p.$$

Si nous tenons compte de toutes ces relations, nous trouvons

$$\Psi(n,p) = \frac{n!}{p!} \sum \frac{(-1)^s}{k_1!\, k_2!\, k_3! \ldots k_s!},$$

le signe $\sum$ s'étendant à tous les systèmes possibles de valeurs des entiers $k_1, k_2, k_3, \ldots, k_s$, tels que l'on ait

$$k_1 + k_2 + k_3 + \ldots + k_s = n - p.$$

Considérons maintenant à part cette expression

$$\sum \frac{(-1)^s}{k_1!\, k_2!\, k_3! \ldots k_s!},$$

où le $\sum$ a l'étendue que nous venons de dire, et désignons-la par a_{n-p}. La nature de cette quantité est telle que nous avons évidemment, quel que soit t,

$$a_t + \frac{1}{1!} a_{t-1} + \frac{1}{2!} a_{t-2} + \frac{1}{3!} a_{t-3} + \ldots + \frac{1}{t!} a_0 = 0.$$

Cette dernière égalité, et toutes celles qui n'en diffèrent que par la valeur de t, sont évidemment satisfaites si l'on y remplace a_0 par $\frac{(-1)^0}{0!}$; telle est aussi la valeur de a_0.

Il s'ensuit que nous avons

$$\Psi(n, p) = (-1)^{n-p} \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

et, par conséquent,

$$U_n = n! \sum_{1}^{n} {}_p \frac{(-1)^{n-p}}{p!\,(n-p)!} (P_p - 1).$$

Ce résultat peut s'écrire successivement

$$U_n = n! \sum_{1}^{n} {}_p \frac{(-1)^{n-p}}{(n-p)!} - \sum_{1}^{n} {}_p (-1)^{n-p} C_n^{n-p}.$$

$$U_n = n! \sum^{n-1} {}_t \frac{(-1)^t}{t!} + (-1)^n,$$

$$U_n = n! \sum_{0}^{n} {}_t \frac{(-1)^t}{t!}.$$

Cette dernière égalité nous donne

$$I_n = n! \sum_{0}^{n} {}_t \frac{(-1)^t}{t!}.$$

17. Cette formule, qui nous donne I_n (¹), est un cas particulier d'une formule plus générale, établie par Laplace à l'aide d'un procédé qui ne ressemble en rien au nôtre. Laplace ne s'est pas arrêté d'ailleurs à ce cas particulier, qui est cependant intéressant. De la solution que nous

---

(¹) *Théorie analytique des probabilités* (*Œuvres*), t. VII, p. 242.

venons d'exposer, on déduit très-facilement les formules que voici :

$$I_{2n} = \sum_{1}^{2n-1}{}_t (2n - t) I_{2n-t} + 1,$$

$$I_{2n+1} = \sum_{1}^{2n}{}_t (2n - t) I_{2n-t},$$

$$I_n = n I_{n-1} + (-1)^n,$$

$$I_n = (n-1)(I_{n-1} + I_{n-2}),$$

$$I_n = \frac{n!}{e} - \int_0^1 x^n e^{-x-1} dx.$$

De ces cinq formules, les deux premières manifestent une différence caractéristique entre I_{2n} et I_{2n+1} ; la troisième, montrant aussi cette différence, donne un moyen de calculer I_n qui paraît le plus rapide qu'on puisse trouver; la quatrième montre ce fait curieux que I_n est toujours divisible par $n - 1$; la cinquième, enfin, établit une relation entre le nombre I_n et la valeur d'une intégrale définie bien connue.

§ II. — Lois de la deuxième forme.

18. *Généralités.* — Lorsqu'elle affecte cette seconde forme, la loi de la série dépend du premier argument et du second; mais elle ne dépend pas du troisième. En d'autres termes, à partir d'une certaine valeur de n, la limite λ_n prend une valeur constante λ.

Le terme général est donné par notre formule générale (11); et, si l'on n'introduit dans la loi aucune nouvelle particularité, cette formule ne présente pas de simplification.

Il existe une foule de quantités formant des séries qui, se présentant à nous déterminées à la façon des séries récurrentes, nous offrent une loi de cette deuxième forme. Telles sont les intégrales finies ou indéfinies qui se ramènent à des intégrales analogues à l'aide de l'intégration par parties; les numérateurs et les dénominateurs des réduites successives de toutes les fractions continues; les intégrales qu'on désigne par les notations Y_μ, Z_ν, les fonctions X_n de Legendre, les dérivées successives des fonctions algébriques, la plupart des séries sommées par Stirling, etc., etc.

Nous allons prendre pour exemple particulier une série dans laquelle λ est égal à 3, et dont le terme général se présente sous une forme extrêmement simple.

19. *Application à une série particulière.* — Soit la série dont la loi est définie pour toutes les valeurs de n supérieures à 3, par l'égalité

$$U_n = e^n U_{n-1} + e^{2n-1} U_{n-2} + e^{3n-3} U_{n-3} + e^{\frac{n(n+1)}{2}};$$

et où l'on a, pour les trois premières valeurs de n,

$$\begin{aligned}
U_1 &= e,\\
U_2 &= e^2 U_1 + e^3,\\
U_3 &= e^3 U_2 + e^5 U_1 + e^6.
\end{aligned}$$

Dans cet exemple, u_n est constamment égal à $e^{\frac{n(n+1)}{2}}$; et, pour toutes les valeurs de n où ils existent, les coefficients $A_1^{(n)}$, $A_2^{(n)}$, $A_3^{(n)}$ sont respectivement égaux à e^n, e^{2n-1}, e^{3n-3}, le nombre e étant d'ailleurs quelconque.

Nous avons, comme d'ordinaire,

$$\Psi(n, p) = \sum A_{k_1}^{(n_1)} A_{k_2}^{(n_2)} A_{k_3}^{(n_3)} \ldots,$$

le signe $\sum$ ayant, dans cette formule, son étendue habituelle, les indices y satisfaisant aux relations connues, et les facteurs A possédant les valeurs que nous venons d'indiquer.

On voit très-facilement que chacun des produits soumis au $\sum$ précédent est égal à $e^{\frac{n(n+1)}{2} - \frac{p(p+1)}{2}}$. Si donc on appelle z_p le nombre de ces produits, on a

$$\Psi(n, p) = z_p e^{\frac{n(n+1) - p(p+1)}{2}},$$

et tout revient à déterminer z_p.

Pour y parvenir, considérons les produits, non encore effectués, dont la somme constituait $\Psi(n, p)$. Ceux d'entre eux qui possédaient le plus de facteurs en possédaient évidemment $n-p$; et ceux qui en présentaient le moins en présentaient ω_p, ce nombre ω_p étant la partie entière du quotient de $n-p+2$ divisé par 3.

Le nombre des produits présentant t facteurs est égal au nombre des manières dont on peut obtenir la somme $n-p$, par le jet de t dés, offrant chacun trois faces, marquées respectivement 1, 2, 3.

Or, comme nous l'avons dit dans notre *Mémoire sur les combinaisons régulières et leurs applications* (¹), ce dernier nombre n'est autre que celui des combinaisons régulières d'ordre 2, de t objets, pris $n-p-t$ à $n-p-t$, c'est-à-dire qu'il n'est autre, pour employer notre notation habituelle, que

$$(t, n-p-t)_2.$$

Donc nous avons

$$z_p = \sum_{\omega_p}^{n-p}{}_t (t, n-p-t)_2.$$

Il en résulte immédiatement

$$\Psi(n, p) = e^{\frac{n(n+1)-p(p+1)}{2}} \sum_{\omega_p}^{n-p}{}_t (t, n-p-t)_2,$$

et, par conséquent, si nous nous rappelons que u_p est égal à $e^{\frac{p(p+1)}{2}}$ et si nous regardons $(0, 0)_2$ comme égal à l'unité,

$$U_n = e^{\frac{n(n+1)}{2}} \sum_{1}^{n}{}_p \sum_{\omega_p}^{n-p}{}_t (t, n-p-t)_2.$$

Mais c'est une propriété des combinaisons régulières du second ordre, que l'on ait identiquement

$$\sum_{1}^{n}{}_p \sum_{\omega_p}^{n-p}{}_t (t, n-p-t)_2 = \sum_{0}^{\theta}{}_t [(n-2t-1, 2t)_2 + (n-2t-1, 2t+2)_2],$$

θ étant la plus grande valeur de t, qui n'annule pas à la fois les deux expressions

$$(n-2t-1, 2t)_2, \quad (n-2t-1, 2t+2)_2.$$

(¹) *Annales scientifiques de l'École Normale*, année 1876, p. 152.

Nous avons donc, en définitive,

$$\mathrm{U}_n = e^{\frac{n(n+1)}{2}} \sum_{0}^{0}{}_{t} [(n-2t-1, 2t)_2 + (n-2t-1, 2t+2)_2].$$

C'est une première expression générale de U_n.

20. Pour en obtenir une seconde, rappelons-nous que $(t, n-p-t)_2$ est le coefficient de x^{n-p-t} dans le développement de $(1+x+x^2)^t$, c'est-à-dire de x^{n-p} dans le développement de $(x+x^2+x^3)^t$. Il en résulte que, si nous posons

$$x + x^2 + x^3 = \mathrm{X},$$

le nombre z_p sera égal au coefficient de x^{n-p} dans la somme

$$\mathrm{X}^{n-p} + \mathrm{X}^{n-p-1} + \mathrm{X}^{n-p-2} + \ldots + \mathrm{X}^{\omega_p},$$

c'est-à-dire dans l'expression

$$\frac{\mathrm{X}^{n-p+1} - \mathrm{X}^{\omega_p}}{\mathrm{X}-1}.$$

Donc on obtiendra z_p en prenant la dérivée $(n-p)^{ième}$ de cette expression, la divisant par la factorielle $(n-p)!$ et y faisant x égal à zéro. Donc on aura

$$\mathrm{U}_n = e^{\frac{n(n+1)}{2}} \sum_{1}^{n}{}_{p} \frac{1}{(n-p)!} \left[\mathrm{D}_x^{n-p} \frac{\mathrm{X}^{n-p+1} - \mathrm{X}^{\omega_p}}{\mathrm{X}-1}\right]_0.$$

C'est une seconde expression générale de U_n, qu'on peut mettre aussi sous la forme d'une intégrale définie.

21. Dans cet exemple, il est à remarquer que les coefficients e^n, e^{2n-1}, e^{3n-3} s'assemblent dans chaque expression Ψ, de manière à y former un produit unique qui se met en facteur commun. Il en est ainsi toutes les fois que l'on a, en général,

$$\mathrm{A}_k^{(n)} = \varphi(n)\varphi(n-1)\varphi(n-2)\ldots\varphi(n-k+1),$$

$\varphi(n)$ désignant une fonction quelconque de n.

Les simplifications qu'apportent avec eux les coefficients de cette nature expliquent pourquoi Stirling a surtout étudié les séries dont la loi présente de tels coefficients.

§ III. — Lois de la troisième forme.

22. *Généralités.* — Lorsque la loi de la série est de cette troisième forme, λ_n et $A_k^{(n)}$ dépendent l'un et l'autre de n; mais $A_k^{(n)}$ ne dépend pas de k. Pour une valeur déterminée de n, le coefficient $A_k^{(n)}$ a une valeur constante, indépendante de k, que nous désignerons par $A^{(n)}$. La loi peut s'écrire

$$U_n = u_n + A^{(n)} \sum_{1}^{\lambda_n} {}_k U_{n-k}.$$

Le terme général est toujours fourni par notre formule générale (11); mais celle-ci, lorsque la loi est de cette troisième forme, peut être exposée d'une nouvelle façon.

23. Considérons, en effet, le développement de $\Psi(n,p)$. Évidemment l'un quelconque de ses termes est de la forme

$$A^{(n_1)} A^{(n_2)} A^{(n_3)} \ldots,$$

les indices supérieurs étant des entiers tous différents, dont le dernier est égal à n, dont le premier est supérieur à p, mais non pas à $p + \lambda_{n_1}$, et dont l'un quelconque n_t surpasse le précédent d'un nombre au plus égal à λ_{n_t}. Donc

$$\Psi(n, p) = \sum A^{(n_1)} A^{(n_2)} A^{(n_3)} \ldots,$$

chacun des produits soumis au $\sum$ présentant des indices supérieurs qui satisfont aux conditions énoncées, et le $\sum$ s'étendant à tous les produits possibles qui offrent de tels indices.

24. Parmi les séries qui sont naturellement déterminées à la façon des séries récurrentes, il n'en existe pour ainsi dire aucune dont la

loi affecte la troisième forme. La loi de la série que nous allons prendre pour exemple ne nous paraît analogue à aucune loi connue.

25. *Application à une série particulière.* — Soit la série définie par les égalités suivantes :

$$U_1 = 1, \quad U_n = n \sum_1^{\varepsilon} {}_k U_{n-k},$$

dans la dernière desquelles ε est égal à 1, à 2 ou à 3, suivant que n est un multiple de 3 moins 1, un multiple de 3, ou finalement un multiple de 3 plus 1.

Dans cet exemple, $A^{(n)}$ est égal à n, de façon que $\Psi(n, 1)$, c'est-à-dire la seule quantité à calculer, est la somme de tous les produits possibles de nombres entiers croissants, dans chacun desquels le premier facteur est 2, 3 ou 4, le dernier n, et où chaque facteur de la forme $3\omega - 1$ surpasse le précédent de 1, chaque facteur de la forme 3ω de 1 ou de 2; chaque facteur de la forme $3\omega + 1$, de 1, de 2 ou de 3. On peut donc former $\Psi(n, 1)$, et par suite U_n, qui lui est égal. La détermination du terme général est donc ainsi effectuée.

26. Mais, pour la série actuelle, on peut parvenir directement à l'expression de U_n, dans les trois cas où n est de la forme $3\omega - 1$, de la forme 3ω, ou de la forme $3\omega + 1$. Considérons pour cela les trois égalités suivantes :

$$\begin{aligned} U_{3\alpha-1} &= (3\alpha - 1)\, U_{3\alpha-2}, \\ U_{3\alpha} &= 3\alpha\,(U_{3\alpha-1} + U_{3\alpha-2}), \\ U_{3\alpha+1} &= (3\alpha + 1)\,(U_{3\alpha} + U_{3\alpha-1} + U_{3\alpha-2}). \end{aligned}$$

Nous en déduisons immédiatement

$$\begin{aligned} U_{3\alpha} &= (3\alpha)^2 U_{3\alpha-2}, \\ U_{3\alpha+1} &= (3\alpha + 1)^2\, 3\alpha\, U_{3\alpha-2}, \end{aligned}$$

et il s'ensuit

$$\begin{aligned} U_{3\alpha+1} &= (3\alpha+1)^2 (3\alpha - 2)^2 (3\alpha - 5)^2 \ldots 1^2 . 3\alpha\;\; 3(\alpha - 1) . 3(\alpha - 2) \ldots 3 . 1, \\ U_{3\alpha} &= (3\alpha)^2\, [(3\alpha - 2)^2 (3\alpha - 5)^2 \ldots 1^2 . 3(\alpha - 1) . 3(\alpha - 2) \ldots 3 . 1], \\ U_{3\alpha-1} &= (3\alpha - 1)[(3\alpha - 2)^2 (3\alpha - 5)^2 \ldots 1^2 . 3(\alpha - 1) . 3(\alpha - 2) \ldots 3 . 1]. \end{aligned}$$

Telle est la valeur de U_n pour les trois cas qui peuvent se présenter.

27. Cette possibilité d'évaluer directement $\Psi(n, 1)$ est due à la nature périodique de la loi de la série. En général, toutes les fois que cette loi est très-régulière et qu'elle affecte cette troisième forme, on peut obtenir l'expression du terme général directement, par des considérations analogues aux précédentes. Ces résultats obtenus directement, lorsqu'on les égale aux sommes fournies par notre formule générale, donnent des identités nombreuses, peut-être difficiles à établir autrement.

§ IV. — Lois de la quatrième forme.

28. *Généralités.* — Lorsque la loi affecte cette quatrième forme, $A_k^{(n)}$ dépend de n, mais non pas de k, et λ_n devient constant à partir d'une certaine valeur de n.

Soient λ le nombre constant auquel λ_n devient égal, et $A^{(n)}$ la valeur, indépendante de k, que prend $A_k^{(n)}$ pour une valeur déterminée de n. La loi de la série peut s'écrire

$$U_n = u_n + A^{(n)} \sum_{1}^{\lambda} {}_k U_{n-k}.$$

29. Quant à la quantité $\Psi(n, p)$, nous avons vu, dans notre étude de la forme précédente, qu'elle est égale à

$$\sum A^{(n_1)} A^{(n_2)} A^{(n_3)} \ldots,$$

les indices supérieurs étant des entiers tous différents, dont le dernier est égal à n, dont le premier est supérieur à p, mais non pas à $p + \lambda_{n_1}$, et dont l'un quelconque n_t surpasse le précédent d'un nombre au plus égal à λ_{n_t}.

Ici nous pouvons, dès que n est assez grand, remplacer λ_n par λ.

30. Parmi les lois des séries déterminées à la façon des séries récurrentes, celles qui affectent cette quatrième forme ne se rencontrent pas plus fréquemment que celles qui affectent la troisième. Dans l'impossibilité, absolue peut-être, de rencontrer un exemple, nous avons dû en imaginer un.

31. *Application à une série particulière.* — Soit la série définie par les égalités suivantes :

$$U_1 = \frac{a}{\sqrt[2]{a} + \sqrt[3]{a}},$$

$$U_2 = \frac{\sqrt[2]{a}}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[4]{a}} U_1,$$

et, en général, pour toutes les valeurs de n supérieures à 2,

$$U_n = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n+1]{a} + \sqrt[n+2]{a}} (U_{n-1} + U_{n-2}),$$

égalités dans lesquelles a est un nombre positif quelconque.

Dans cet exemple, évidemment nous avons

$$u_1 = \frac{a}{\sqrt[2]{a} + \sqrt[3]{a}},$$
$$u_2 = 0,$$

et, pour toute valeur de n supérieure à 2,

$$u_n = 0,$$
$$\lambda_n = 2,$$
$$A^{(n)} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n+1]{a} + \sqrt[n+2]{a}}.$$

Il s'ensuit que l'expression $\Psi(n, 1)$, la seule qu'il faille calculer pour obtenir U_n, est égale à

$$\sum \frac{\sqrt[n_1]{a}}{\sqrt[n_1+1]{a} + \sqrt[n_1+2]{a}} \; \frac{\sqrt[n_2]{a}}{\sqrt[n_2+1]{a} + \sqrt[n_2+2]{a}} \; \frac{\sqrt[n_3]{a}}{\sqrt[n_3+1]{a} + \sqrt[n_3+2]{a}} \cdots,$$

le signe $\sum$ s'étendant à tous les produits de cette forme, tels que, dans chacun d'eux, le premier indice supérieur soit égal à 2 ou à 3, le dernier à n, et que chaque indice supérieur surpasse le précédent de une ou de deux unités.

Comme U_n est égal à $u_1 \Psi(n, 1)$, il suffit de multiplier le $\sum$ précédent par u_1 pour obtenir précisément l'expression cherchée du terme général U_n de la série.

32. Cette série est assez remarquable; sa loi, en effet, est telle, qu'on peut très-facilement, d'abord établir que des termes consécutifs tendent à devenir égaux à mesure qu'on s'éloigne du commencement de la série; ensuite démontrer que U_n tend alors vers une limite déterminée; enfin obtenir la valeur même de cette limite.

Considérons d'abord le coefficient $A^{(n)}$, qui est égal à

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n+1]{a}+\sqrt[n+2]{a}}.$$

Il tend évidemment vers $\frac{1}{2}$ lorsque n croît au delà de toute limite; par suite, chaque terme tend à devenir la moyenne arithmétique entre les deux précédents; par suite, les termes tendent à devenir tous égaux.

Il s'ensuit évidemment que le terme général U_n tend vers une limite déterminée.

Passons maintenant à l'égalité

$$\left(\sqrt[n+1]{a}+\sqrt[n+2]{a}\right)U_n=\sqrt[n]{a}\left(U_{n-1}+U_{n-2}\right),$$

qui exprime la loi de la série, et, à ses deux membres, ajoutons la même quantité $\sqrt[n+1]{a}U_{n-1}$. Nous trouvons

$$\left(\sqrt[n+1]{a}+\sqrt[n+2]{a}\right)U_n+\sqrt[n+1]{a}\,U_{n-1}=\left(\sqrt[n]{a}+\sqrt[n+1]{a}\right)U_{n-1}+\sqrt[n]{a}\,U_{n-2},$$

et ce résultat nous montre immédiatement que l'expression

$$\left(\sqrt[n+1]{a}+\sqrt[n+2]{a}\right)U_n+\sqrt[n+1]{a}U_{n-1}$$

est constante, quel que soit n; par conséquent, cette expression est égale à

$$\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[4]{a}\right)U_2+\sqrt[3]{a}U_1,$$

c'est-à-dire à a.

Donc, pour toute valeur de n,

$$\left(\sqrt[n+1]{a}+\sqrt[n+2]{a}\right)U_n+\sqrt[n+1]{a}U_{n-1}=a.$$

Or, lorsque n croît indéfiniment, $\sqrt[n+1]{a}$ et $\sqrt[n+2]{a}$ tendent chacun vers l'unité; U_n et U_{n-1} tendent chacun vers la même limite. Donc

$$\lim U_n=\frac{a}{3}.$$

33. Les transformations qui nous ont permis d'obtenir cette limite nous donnent aussi le moyen d'arriver à une nouvelle expression de U_n. Nous en tirons, en effet,

$$U_n = -\frac{\sqrt[n+1]{a}}{\sqrt[n+1]{a}+\sqrt[n+2]{a}}U_{n-1} + \frac{a}{\sqrt[n+1]{a}+\sqrt[n+2]{a}},$$

nouvelle loi qui nous donne, pour toutes les valeurs de n,

$$u_n = \frac{a}{\sqrt[n+1]{a}+\sqrt[n+2]{a}},$$

et, pour toutes les valeurs de n supérieures à l'unité,

$$\lambda_n = 1,$$

$$A^{(n)} = -\frac{\sqrt[n+1]{a}}{\sqrt[n+1]{a}+\sqrt[n+2]{a}}.$$

Il en résulte immédiatement

$$\Psi(n,p) = (-1)^{n-p}\prod_{p+1}^{n}{}_t \frac{\sqrt[t+1]{a}}{\sqrt[t+1]{a}+\sqrt[t+2]{a}},$$

et, par conséquent,

$$U_n = a\sum_{1}^{n}{}_p\left[\frac{(-1)^{n-p}}{\sqrt[p+1]{a}+\sqrt[p+2]{a}}\prod_{p+1}^{n}{}_t \frac{\sqrt[t+1]{a}}{\sqrt[t+1]{a}+\sqrt[t+2]{a}}\right].$$

§ V. — Lois de la cinquième forme.

34. *Généralités.* — Lorsque la loi de la série affecte cette cinquième forme, la limite λ_n dépend de n, mais le coefficient $A_k^{(n)}$ n'en dépend pas; ce dernier varie seulement avec k. Si l'on considère une valeur déterminée de k, $A_k^{(n)}$ prend une valeur constante et indépendante de n, que nous désignons par A_k.

Le terme général est, comme toujours, donné par notre formule générale; mais celle-ci, si l'on n'introduit dans la loi aucune nouvelle particularité, ne présente point de simplification. Il suffirait de supposer que λ_n croît toujours pour arriver à une formule beaucoup plus simple.

Il est très-rare qu'une série, déterminée à la façon des séries récurrentes, présente une loi de cette cinquième forme. Nous allons donner, comme application, une série assez simple, qu'on n'a point encore étudiée.

35. *Application à une série particulière.* — Soit la série déterminée par les relations

$$U_n = \sum_{k=1}^{n-1} k^2 U_{n-k},$$

$$u_1 = 1.$$

Nous avons évidemment, dans le cas actuel, pour toute valeur de n supérieure à l'unité,

$$u_n = 0,$$

et, en général,

$$\lambda_n = n - 1,$$

$$A_k = k^2.$$

A cause de l'absence des termes tout connus autres que u_1, le calcul se réduit simplement à la détermination de $\Psi(n, 1)$. Or il est évident qu'un terme quelconque du développement de $\Psi(n, 1)$ est égal à

$$1^{2\alpha} . 2^{2\beta} . 3^{2\gamma} \ldots (n-1)^{2\omega},$$

$1, 2, 3, \ldots, n-1$ étant des valeurs particulières de k, et $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \omega$ des exposants correspondants, entiers positifs ou nuls, satisfaisant d'ailleurs à l'égalité

$$1\alpha + 2\beta + 3\gamma + \ldots + (n-1)\omega = n - 1.$$

Il importe seulement de savoir le nombre de fois z qu'un pareil terme se présente dans ce développement. Ce nombre est évidemment celui des permutations de $\alpha + \beta + \gamma + \ldots + \omega$ nombres, dont α sont égaux à 1, β à 2, γ à 3, ..., ω à $n - 1$. Ce nombre, on le sait, est égal à

$$\frac{(\alpha + \beta + \gamma + \ldots + \omega)!}{\alpha! \beta! \gamma! \ldots \omega!}.$$

Nous avons donc finalement, puisque U_n est égal à $\Psi(n, 1)$,

$$U_n = \sum \frac{(\alpha + \beta + \ldots + \omega)!}{\alpha! \beta! \ldots \omega!} 1^{2\alpha} . 2^{2\beta} \ldots (n-1)^{2\omega},$$

le signe $\sum$ s'étendant à toutes les solutions en nombres entiers nuls ou positifs de l'égalité déjà décrite

$$1\alpha + 2\beta + \ldots + (n-1)\omega = n-1.$$

36. Pour obtenir une autre expression de U_n, remarquons que, dans les différents termes du $\sum$ précédent, l'expression $\alpha + \beta + \gamma + \ldots + \omega$ peut prendre toutes les valeurs 1, 2, 3, ..., $n-1$, mais aucune autre. La somme des termes où cette expression est égale à t, si nous posons

$$X = 1^2 x + 2^2 x^2 + 3^2 x^3 + \ldots + (n-1)^2 x^{n-1},$$

n'est autre que le coefficient de x^{n-1} dans le développement de X^t. Donc U_n est le coefficient de x^{n-1} dans $X^1 + X^2 + \ldots + X^{n-1}$, c'est-à-dire dans le développement de $\frac{X^n - X}{X-1}$. Donc nous avons, en nous servant des dérivées par rapport à x,

$$U_n = \frac{1}{(n-1)!}\left(D_x^{n-1}\frac{X^n - X}{X-1}\right)_0,$$

et cette expression, comme toutes les expressions analogues que nous obtiendrons par la suite, peut se mettre sous la forme d'une intégrale définie.

§ VI. — Lois de la sixième forme.

37. *Généralités.* — Dans le cas de cette sixième forme, le coefficient $A_k^{(n)}$ dépend de k, mais non pas de n; la limite λ_n devient, à partir d'un certain rang, égale à la constante λ; et la loi même de la série peut s'écrire

$$U_n = u_n + P_1 U_{n-1} + P_2 U_{n-2} + \ldots + P_\lambda U_{n-\lambda},$$

$P_1, P_2, \ldots, P_\lambda$ étant des constantes quelconques.

L'expression de U_n peut être considérablement simplifiée, si l'on suppose que λ_n, avant de devenir constant, va toujours en croissant. Comme il est évident d'ailleurs qu'on peut toujours prendre pour premier terme U_1 un terme assez éloigné pour qu'il en soit ainsi, nous pouvons regarder cette condition comme toujours remplie.

38. Supposons-la donc satisfaite et déterminons $\Psi(n, p)$.

Évidemment cette quantité est la somme de plusieurs produits de la forme $P_1^\alpha P_2^\beta P_3^\gamma \ldots P_\lambda^\omega$, dans chacun desquels les exposants α, β, γ, ..., ω sont des entiers quelconques, positifs ou nuls, satisfaisant à l'égalité

$$1\alpha + 2\beta + 3\gamma + \ldots + \lambda\omega = n - p.$$

Celui de ces produits qui nous sert de type se trouve répété un nombre de fois égal au nombre des permutations de $\alpha + \beta + \gamma + \ldots + \omega$ lettres, dont α sont égales à P_1, β à P_2, γ à P_3, ..., ω à P_λ. Or ce nombre de permutations est

$$\frac{(\alpha + \beta + \gamma + \ldots + \omega)!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\ldots\omega!};$$

donc, si nous convenons d'étendre le $\sum$ ci-dessous à toutes les valeurs entières, nulles ou positives, des exposants qui satisfont à l'égalité écrite plus haut, nous avons

$$\Psi(n, p) = \sum \frac{(\alpha + \beta + \ldots + \omega)!}{\alpha!\,\beta!\ldots\omega!} P_1^\alpha P_2^\beta \ldots P_\lambda^\omega,$$

de façon que U_n est déterminé, puisque nous savons que

$$U_n = u_n \Psi(n, n) + u_{n-1}\Psi(n, n-1) + u_{n-2}\Psi(n, n-2) + \ldots.$$

C'est une expression simple et générale de U_n.

39. Pour en obtenir une nouvelle, considérons l'expression précédente de $\Psi(n, p)$. Dans les différents produits dont elle est la somme, l'expression $\alpha + \beta + \ldots + \omega$ n'est jamais ni supérieure à $n - p$, ni inférieure à θ_p, ce nombre θ_p étant la partie entière du quotient de $n - p + \lambda - 1$ par λ. La somme des termes où $\alpha + \beta + \ldots + \omega$ est égal à t, si nous posons

$$X = P_1 x + P_2 x^2 + P_3 x^3 + \ldots + P_\lambda x^\lambda,$$

n'est autre que le coefficient de x^{n-p} dans le développement de X^t. Donc $\Psi(n, p)$ est juste le coefficient de x^{n-p} dans la somme

$$X^{n-p} + X^{n-p-1} + X^{n-p-2} + \ldots + X^{\theta_p},$$

c'est-à-dire dans le développement de

$$\frac{X^{n-p+1} - X^{0}{}_{p}}{X - 1};$$

donc nous avons

$$\Psi(n, p) = \frac{1}{(n-p)!}\left(D_x^{n-p}\frac{X^{n-p+1} - X^{0}{}_{p}}{X-1}\right)_0,$$

donc

$$U_n = u_n + \frac{u_{n-1}}{1!}\left(D_x\frac{X^2 - X^{0}{}_{n-1}}{X-1}\right)_0 + \frac{u_{n-2}}{2!}\left(D_x^2\frac{X^3 - X^{0}{}_{n-2}}{X-1}\right)_0 + \ldots$$

40. Ces deux expressions générales de U_n ont chacune leurs inconvénients et leurs avantages. La première demande plus d'explications; la seconde s'explique pour ainsi dire d'elle-même. La première exige un calcul plus court, mais plus difficile; la seconde, un calcul plus long, mais presque mécanique. La grande supériorité de la première, c'est qu'elle pénètre bien plus avant dans la nature de la quantité à calculer.

Quoi qu'il en soit, ces deux formules donnent, pour ce cas, le moyen d'écrire l'expression de U_n, sans qu'il soit besoin de résoudre au préalable la moindre équation.

41. C'est dans les séries dont la loi affecte cette sixième forme que rentrent la plupartdes séries récurrentes proprement dites, et des séries considérées par Lagrange. On y pourrait ramener très-facilement la recherche des développements, soit de $\sin nx$, soit de $\cos nx$, en fonction de $\sin x$ seul ou de $\cos x$ seul.

Nous allons appliquer ce qui précède à la détermination de la somme des puissances semblables des racines d'une équation, c'est-à-dire au problème fameux, résolu pour la première fois par Waring.

42. *Application au problème de Waring.* — On sait que, si l'on désigne par S_1, S_2, S_3, ... les sommes des puissances 1re, 2e, 3e, ... des racines de l'équation algébrique du degré m

$$x^m + T_1 x^{m-1} + T_2 x^{m-2} + \ldots + T_{m-1} x + T_m = 0,$$

on sait, disons-nous, que S_n est reliée aux quantités S précédentes, lorsque n ne surpasse pas m, par la relation

$$S_n + T_1 S_{n-1} + T_2 S_{n-2} + \ldots + T_{n-1} S_1 + n T_n = 0,$$

qui est due à Newton, et, lorsque n surpasse m, par l'égalité évidente

$$S_n + T_1 S_{n-1} + T_2 S_{n-2} + \ldots + T_{m-1} S_{n-m+1} + T_m S_{n-m} = 0.$$

Nous en déduisons immédiatement

$$\lambda = m,$$
$$P_1 = -T_1, \quad P_2 = -T_2, \quad P_3 = -T_3, \quad \ldots, \quad P_m = -T_m,$$
$$u_1 = -1T_1, \quad u_2 = -2T_2, \quad u_3 = -3T_3, \quad \ldots, \quad u_m = -mT_m,$$

et aussi

$$u_{m+q} = 0,$$

quel que soit l'entier supérieur à zéro, que nous désignions par q.

Nous avons, par conséquent,

$$S_n = -T_1 \Psi(n, 1) - 2T_2 \Psi(n, 2) - 3T_3 \Psi(n, 3) - \ldots - sT_s \Psi(n, s),$$

s étant égal à n, si n ne dépasse pas m, et à m dans tous les autres cas.

Pour la série actuelle, nous avons d'ailleurs

$$\Psi(n, p) = \sum (-1)^{\alpha+\beta+\ldots} \frac{(\alpha+\beta+\ldots)!}{\alpha!\beta!\ldots} T_1^\alpha T_2^\beta \ldots.$$

Il en résulte une première expression générale de S_n.

43. Pour en obtenir une seconde, considérons la formule générale qui précède (39). En l'appliquant littéralement au cas actuel, nous posons

$$X = -(T_1 x + T_2 x^2 + T_3 x^3 + \ldots + T_m x^m),$$

et nous trouvons facilement

$$S_n = -\sum_1^s {}_p \frac{p T_p}{(n-p)!} \left(D_x^{n-p} \frac{X^{n-p+1} - X^{\theta_p}}{X - 1} \right)_0,$$

s ayant la même signification que ci-dessus (42), et θ_p désignant la partie entière du quotient de $n - p + m - 1$ par m.

44. Revenons à la première formule (42) trouvée pour S_n. Quel que soit p, $\Psi(n, p)$ y est multiplié par $-pT_p$; par suite, dans S_n effectuée, tous les termes seront des produits $T_1^\alpha T_2^\beta T_3^\gamma \ldots$, tels que

$$1\alpha + 2\beta + 3\gamma + \ldots = n.$$

Il est évident, de plus, qu'on y trouvera tous les produits de cette forme, dont les exposants satisfont à cette condition. Mais combien de fois y rencontrera-t-on chacun d'eux? Pour répondre à cette question, soit

$$T_{q'}^q T_{r'}^r T_{s'}^s$$

l'un quelconque de ces produits, où nous ne marquons que les T dont l'exposant n'est pas nul. Évidemment ce produit ne se présentera que dans les termes

$$-q'T_{q'}\Psi(n, q'), \quad -r'T_{r'}\Psi(n, r'), \quad -s'T_{s'}\Psi(n, s').$$

Or les nombres de fois qu'il entre dans ces différents termes sont respectivement

$$q'(-1)^{q+r+s}\frac{(q-1+r+s)!}{(q-1)!\,r!\,s!},$$

$$r'(-1)^{q+r+s}\frac{(q+r-1+s)!}{q!\,(r-1)!\,s!},$$

$$s'(-1)^{q+r+s}\frac{(q+r+s-1)!}{q!\,r!\,(s-1)!};$$

donc le nombre de fois qu'il entre dans S_n est égal à

$$(qq' + rr' + ss')(-1)^{q+r+s}\frac{(q+r+s-1)!}{q!\,r!\,s!}.$$

Mais ce résultat est général, et la somme $qq' + rr' + ss'$ est égale à n; donc finalement

$$S_n = n\sum(-1)^{\alpha+\beta+\ldots+\omega}\frac{(\alpha+\beta+\ldots+\omega-1)!}{\alpha!\,\beta!\ldots\omega!}T_1^\alpha T_2^\beta \ldots T_m^\omega,$$

la caractéristique $\sum$ s'étendant à tous les systèmes de valeurs des nombres $\alpha, \beta, \ldots, \omega$, tels que l'on ait

$$1\alpha + 2\beta + 3\gamma + \ldots + m\omega = n.$$

Cette troisième expression de S_n est justement la formule de Waring (¹).

45. Dans cette formule de Waring, considérons l'un quelconque des produits soumis au $\sum$. Soit t la valeur de $\alpha + \beta + \ldots + \omega$ dans ce produit. La somme de tous les produits, où cette valeur est la même, n'est autre que le coefficient de x^n dans le développement de $\frac{1}{t}X^t$, le polynôme X étant défini comme plus haut (43). Or ce nombre t prend dans ce $\sum$ toutes les valeurs entières non supérieures à n, mais non inférieures à θ, ce nombre θ étant la partie entière du quotient de $n + m - 1$ par m. Donc le $\sum$ tout entier est le coefficient de x^n dans le développement de

$$\frac{X^n}{n} + \frac{X^{n-1}}{n-1} + \frac{X^{n-2}}{n-2} + \cdots + \frac{X^\theta}{\theta}.$$

Donc on a, en désignant par la caractéristique D_x^n la dérivée $n^{\text{ième}}$ par rapport à x,

$$S_n = \frac{1}{(n-1)!}\left[D_x^n\left(\frac{X^n}{n} + \frac{X^{n-1}}{n-1} + \cdots + \frac{X^\theta}{\theta}\right)\right]_0.$$

Appelons Y la dérivée première, par rapport à x, du polynôme X; nous pouvons écrire immédiatement

$$S_n = \frac{1}{(n-1)!}\left[D_x^{n-1}\left(\frac{X^n - X^{\theta-1}}{X-1}Y\right)\right]_0.$$

C'est une quatrième expression générale de S_n.

§ VII. — Lois de la septième forme.

46. *Généralités*. — La loi affectant cette forme, $A_k^{(n)}$ ne dépend ni de n ni de k; en d'autres termes, tous les coefficients sont égaux à une même constante a; mais λ_n est fonction de n. La loi de la série peut

(¹) *Meditationes algebraicæ*, in-4°, Cantabrigiæ, 1782. — Probl. I, p. 1.

s'écrire

$$U_n = u_n + a\sum_{1}^{\lambda_n}{}_k U_{n-k}.$$

Le terme général s'exprime toujours à l'aide de notre formule générale, et, si l'on ne fait aucune hypothèse sur la nature de λ_n, considéré comme fonction de n, cette formule ne se simplifie point.

On trouve peu de séries dont la loi ait cette forme. En voici une assez simple.

47. *Application à une série particulière.* — Soit la série déterminée par les égalités

$$u_1 = 1, \quad U_n = a\sum_{1}^{n-1}{}_k U_{n-k}.$$

Nous avons évidemment

$$U_n = \Psi(n, 1),$$

et, d'après sa définition, $\Psi(n, 1)$ est la somme de termes égaux aux diverses puissances de a, depuis la première jusqu'à la $(n-1)^{\text{ième}}$. Combien de fois a^t se trouve-t-il dans cette somme? Autant de fois qu'il y a de manières d'obtenir la somme $n-1$, par le jet de t dés, présentant chacun $n-1$ faces, marquées $1, 2, 3, \ldots, n-1$.

Ce nombre est celui des combinaisons régulières, d'ordre $n-2$, de t lettres, prises $n-1-t$ à $n-1-t$. Or le nombre de ces combinaisons régulières, à cause que l'ordre en est supérieur ou égal au nombre des lettres de chaque combinaison, se confond [1] avec celui des combinaisons complètes de t lettres $n-1-t$ à $n-1-t$, lequel, à son tour, n'est autre que le nombre des combinaisons simples de $n-2$ lettres $t-1$ à $t-1$; donc, si nous désignons ce dernier nombre par C_{n-2}^{t-1}, nous avons

$$U_n = \sum_{1}^{n-1}{}_t C_{n-2}^{t-1} a^t.$$

Telle est l'expression de notre terme général.

---

[1] *Voir* notre *Mémoire sur les combinaisons régulières*, cité plus haut.

48. Cette expression peut s'écrire

$$U_n = a \sum_{1}^{n-1} {}_t C_{n-2}^{t-1} a^{t-1},$$

et, comme le nouveau $\sum$ est juste égal à $(1+a)^{n-2}$, nous avons

$$U_n = a(1+a)^{n-2}.$$

49. Grâce à cette particularité que λ_n est égal à $n-1$, on peut obtenir directement ce dernier résultat. La loi de la série se transforme, en effet, très-facilement en celle-ci :

$$U_n = (1+a)U_{n-1}.$$

Or cette dernière formule, jointe aux deux égalités

$$U_1 = 1, \quad U_2 = aU_1,$$

nous donne immédiatement

$$U_n = a(1+a)^{n-2}.$$

50. Il est à remarquer que, si l'on ignorait la formule du binôme, on la trouverait en égalant nos deux expressions de U_n.

§ VIII. — Lois de la huitième forme.

51. *Généralités.* — Dans ce dernier cas, la loi de la série ne dépend d'aucun des trois arguments; en d'autres termes, dans le tableau des coefficients (13), les termes sont tous égaux, soit dans les colonnes verticales, soit dans les lignes horizontales ; et, de plus, la longueur de ces dernières, à partir d'un certain moment, devient absolument constante, après avoir, comme nous pouvons toujours le supposer, été jusque-là constamment en croissant.

Si nous désignons par λ la valeur constante de λ_n, et par a celle de $A_k^{(n)}$, la loi de la série peut s'écrire alors

$$U_n = u_n + a \sum_{k}^{\lambda} U_{n-k}.$$

52. Le terme général U_n prend, dans ce cas, une forme très-simple. On a toujours, nous le savons,

$$U_n = \sum_{1}^{n}{}_p u_p \Psi(n, p).$$

Or, dans le cas actuel, $\Psi(n,p)$ est évidemment la somme de termes tous égaux à des puissances de a, dont le plus fort exposant est $n-p$, et le plus faible θ_p, ce nombre θ_p étant la partie entière du quotient de $n-p+\lambda-1$ divisé par λ.

Combien de fois le terme a^t entre-t-il dans cette somme? Autant de fois qu'il y a de manières d'obtenir la somme $n-p$ par le jet de t dés, présentant chacun λ faces, marquées respectivement $1, 2, 3, \ldots, \lambda$. Mais ce nombre de manières est égal à $(t, n-p-t)_{\lambda-1}$, si, conformément à notre notation habituelle, nous désignons par cette expression le nombre des combinaisons régulières, d'ordre $\lambda-1$, de t lettres, $n-p-t$ à $n-p-t$; donc nous avons identiquement

$$\Psi(n, p) = \sum_{\theta_p}^{n-p}{}_t a^t (t, n-p-t)_{\lambda-1},$$

et, en portant cette expression dans la valeur précédente de U_n, nous obtenons l'expression générale de U_n, ordonnée suivant les quantités connues $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n$.

53. Nous pouvons obtenir une autre expression générale de U_n. En effet, $a^t(t, n-p-t)_{\lambda-1}$ n'est autre chose que le coefficient de x^{n-p} dans le développement de $(ax + ax^2 + ax^3 + \ldots + ax^\lambda)^t$, c'est-à-dire, si nous appelons X le polynôme entre parenthèses, dans le développement de X^t; donc $\Psi(n,p)$ est le coefficient de x^{n-p} dans l'expression

$$X^{n-p} + X^{n-p-1} + X^{n-p-2} + \ldots + X^{\theta_p},$$

c'est-à-dire dans

$$\frac{X^{n-p+1} - X^{\theta_p}}{X - 1}$$

et, par suite,

$$U_n = \sum_{1}^{n}{}_p \frac{u_p}{(n-p)!} \left(D_x^{n-p} \frac{X^{n-p+1} - X^{\theta_p}}{X-1} \right)_0.$$

54. La loi des séries récurrentes proprement dites et des séries de Lagrange, toutes les fois qu'elle n'est pas de la sixième forme, appartient à la huitième. La loi des séries de Cassini est toujours de la huitième. Nous allons considérer une série analogue aux séries de Cassini.

55. *Application à une série particulière.* — Soit la série dont chaque terme est égal à la somme des trois précédents multipliés par a. Supposons les trois premiers termes donnés par les égalités

$$\begin{aligned} U_1 &= 1, \\ U_2 &= aU_1, \\ U_3 &= a(U_1 + U_2). \end{aligned}$$

Le terme général sera identique à $\Psi(n, 1)$. Si nous appliquons la première formule, nous aurons

$$U_n = \sum_{\theta_1}^{n-1} {}_t\, a^t (t, n - 1 - t)_2,$$

θ_1 étant la partie entière du quotient de $n + 1$ par 3. Si nous appliquons la seconde, nous avons

$$U_n = \frac{1}{(n-1)!} \left(D_x^{n-1} \frac{X^n - X^{\theta_1}}{X - 1} \right)_0.$$

Telles sont nos deux expressions de U_n.