F. TISSERAND

Sur un point important de la théorie des perturbations planétaires

Annales scientifiques de l'É.N.S. 2e série, tome 7 (1878), p. 261-274
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1878_2_7__261_0>

SUR UN POINT IMPORTANT

DE LA

THÉORIE DES PERTURBATIONS PLANÉTAIRES,

PAR M. F. TISSERAND,

DIRECTEUR DE L'OBSERVATOIRE DE TOULOUSE (¹).

On sait que les éléments elliptiques des planètes sont soumis à deux genres d'inégalités, les inégalités périodiques et les inégalités séculaires : ces dernières sont d'une grande importance, surtout dans la question de la stabilité du système planétaire. Laplace a montré le premier, en 1773, que, dans la première approximation, les grands axes des orbites, seuls parmi tous les éléments elliptiques, ne contiennent pas de termes séculaires ; mais il n'avait obtenu cet important résultat qu'en tenant compte des premières et des secondes puissances des excentricités et des inclinaisons supposées très-petites. En 1776, Lagrange établit, d'un trait de plume, pour employer une expression de Jacobi, que le théorème a lieu quelque loin qu'on pousse l'approximation par rapport aux excentricités et aux inclinaisons, mais en s'arrêtant à la première approximation relative aux termes proportionnels aux masses des planètes.

Dans un Mémoire publié en 1808, Poisson fit faire un pas de plus à la question ; il arriva à démontrer l'invariabilité des grands axes, même en tenant compte des termes affectés des carrés et des produits des masses, termes qui sont introduits par la seconde approximation ; il réussit à montrer que cette approximation ne peut amener, dans les expressions des grands axes, aucun terme proportionnel au

(¹) Ce Mémoire a paru déjà dans le volume de 1875 des *Mémoires de l'Académie des Sciences de Toulouse* ; je l'avais rédigé en novembre 1874, au Japon, où j'étais allé observer le passage de Vénus sur le Soleil. F. TISSERAND.

temps. La démonstration de Poisson comprend deux parties : la première est très-simple : c'est celle dans laquelle on examine l'effet des variations des éléments de la planète troublée; la seconde partie, où l'on tient compte des variations des éléments de la planète troublante, est très-compliquée; cela tient à ce que les fonctions perturbatrices ne sont pas les mêmes dans les deux cas; elles diffèrent, comme on le sait, par les termes en $\frac{xx'+yy'+zz'}{r^3}$ et $\frac{xx'+yy'+zz'}{r'^3}$. Si les fonctions perturbatrices avaient été les mêmes, ou bien avaient été dans un rapport constant, la seconde partie de la démonstration de Poisson aurait été identique à la première, et le théorème se serait ainsi trouvé établi d'une façon très-simple.

Le Mémoire de Poisson rappela l'attention de Lagrange sur ce sujet, et, quelques mois après, il présentait à l'Académie des Sciences un travail dont nous voulons donner une idée.

Il rapporte les planètes, non plus au centre du Soleil, mais au centre de gravité du Soleil et des planètes; il obtient alors des équations symétriques, dans lesquelles la fonction perturbatrice est la même pour toutes les planètes; il peut donc appliquer la première partie de la démonstration de Poisson et prouver, d'une façon simple, l'invariabilité des grands axes, en ayant égard aux termes de l'ordre du carré des forces perturbatrices; mais il s'agit des grands axes des orbites elliptiques variables, décrites par les planètes autour du centre de gravité considéré plus haut. Il fallait passer de là à l'invariabilité des grands axes des orbites décrites autour du centre du Soleil; soient $2a$ le grand axe de l'orbite d'une planète dans le premier cas, 2α dans le second. Lagrange arrive à trouver la relation

$$\frac{1}{2a} = \frac{1}{2\alpha} + \frac{d\varphi_1}{dt} + \varphi_2,$$

φ_1 étant une fonction des coordonnées des deux planètes, comme φ_2; mais φ_1 est une fonction du premier ordre relativement aux masses, tandis que φ_2 est du second ordre. Si donc on néglige le troisième ordre, il suffira de substituer dans φ_2 les valeurs x, y, z, x', y', z' exprimées avec le temps et les éléments elliptiques constants; on n'obtiendra ainsi aucun terme proportionnel au temps; dans φ_1, il faut remplacer les coordonnées par leurs valeurs exprimées au moyen du temps et des éléments elliptiques variables, fournis par la première approximation. Cette substitution pourra introduire dans φ_1 un terme proportionnel au temps; mais ce terme disparaîtra quand on formera $\frac{d\varphi_1}{dt}$. Telle est la méthode suivie par Lagrange; malheureusement l'expression à laquelle il est arrivé pour exprimer la différence entre $\frac{1}{2a}$ et $\frac{1}{2\alpha}$, au moyen de la somme $\frac{d\varphi_1}{dt}+\varphi_2$, est inexacte, par suite de plusieurs fautes de calcul, comme l'a montré M. J.-A. Serret dans sa nouvelle édition des *Œuvres de Lagrange*, et la démonstration se trouve ainsi réduite à néant.

J'ai remarqué qu'il suffisait de rapprocher le commencement du Mémoire de Lagrange de certains passages du célèbre Mémoire de Jacobi *Sur l'élimination des nœuds dans le problème des trois corps*, pour donner une démonstration très-simple et très-satisfaisante du théorème de Poisson.

Les passages du Mémoire de Jacobi, auxquels je viens de faire allusion, ont été repris et développés par M. Radau (*Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, t. V). Il a montré dans ce travail que, si l'on rapporte le mouvement de la première planète au Soleil, celui de la deuxième au centre de gravité de la première planète et du Soleil, celui de la troisième au centre de gravité des deux premières planètes et du Soleil, et ainsi de suite, les coordonnées relatives dépendent d'équations différentielles symétriques, dans lesquelles la fonction perturbatrice est la même. En partant de là, j'ai donc vu que la première partie de la démonstration de Poisson s'appliquait comme dans le cas considéré par Lagrange, où l'on rapporte tous les mouvements des planètes au centre de gravité du Soleil et de ces planètes; donc tous les grands axes des orbites elliptiques variables ne contiennent aucun terme proportionnel au temps, en ayant égard aux carrés et au produit des masses; mais le mouvement de la première planète se trouve tout rapporté au Soleil; donc, au lieu d'avoir, comme Lagrange,

$$\frac{1}{2a}=\frac{1}{2\alpha}+\frac{d\varphi_1}{dt}+\varphi_2,$$

on a simplement

$$\frac{1}{2a}=\frac{1}{2\alpha},$$

et le théorème est ainsi démontré pour la première planète. Il est bien vrai que la démonstration n'est pas faite pour les autres planètes; mais rien ne s'oppose à ce qu'on fasse jouer à la seconde planète le rôle assigné à la première, et l'on voit ainsi que le théorème a lieu pour toutes les planètes.

J'aurais pu terminer ici mon travail, renvoyant le lecteur au Mémoire de Lagrange et à celui de M. Radau; mais j'ai préféré effectuer les calculs dans le cas de deux planètes, car le résultat du calcul me permet de compléter le sujet que j'avais traité dans ma thèse de doctorat en 1868. J'avais étendu la belle méthode, suivie par M. Delaunay dans sa théorie de la Lune, à l'étude des mouvements de Jupiter et Saturne; mais je n'avais pas la même fonction perturbatrice pour ces deux planètes, et j'avais dû laisser de côté, pour être traités à part, les termes en $\frac{xx' + yy' + zz'}{r'^3}$. Aujourd'hui, en rapprochant les résultats de ce Mémoire avec ceux obtenus dans ma thèse, je puis donner une méthode d'approximation rigoureuse pour le problème des trois corps.

Je vais indiquer les calculs en considérant seulement deux planètes et le Soleil; la marche suivie s'étendra sans aucune difficulté à un nombre quelconque de planètes.

Soient, relativement à trois axes rectangulaires fixes,

$$x_0,\ y_0,\ z_0,\qquad x_1,\ y_1,\ z_1,\qquad x_2,\ y_2,\ z_2,$$

les coordonnées des trois corps M_0, M_1, M_2, M_0 étant le Soleil : nous désignerons par m_0, m_1, m_2 leurs masses respectives, de sorte que les rapports $\frac{m_1}{m_0}$, $\frac{m_2}{m_0}$ seront des nombres petits, égaux au plus à $\frac{1}{1000}$. Appelons $\delta_{0,1}$, $\delta_{0,2}$, $\delta_{1,2}$ les distances M_0M_1, M_0M_2, M_1M_2; en désignant la fonction des forces par U, appelant f l'attraction de l'unité de masse sur l'unité de masse à l'unité de distance, les équations différentielles du mouvement seront

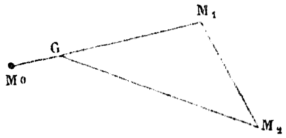
$$(1)\qquad \begin{cases} m_0\dfrac{d^2x_0}{dt^2} = \dfrac{dU}{dx_0}, & m_0\dfrac{d^2y_0}{dt^2} = \dfrac{dU}{dy_0}, & m_0\dfrac{d^2z_0}{dt^2} = \dfrac{dU}{dz_0}, \\ m_1\dfrac{d^2x_1}{dt^2} = \dfrac{dU}{dx_1}, & m_1\dfrac{d^2y_1}{dt^2} = \dfrac{dU}{dy_1}, & m_1\dfrac{d^2z_1}{dt^2} = \dfrac{dU}{dz_1}, \\ m_2\dfrac{d^2x_2}{dt^2} = \dfrac{dU}{dx_2}, & m_2\dfrac{d^2y_2}{dt^2} = \dfrac{dU}{dy_2}, & m_2\dfrac{d^2z_2}{dt^2} = \dfrac{dU}{dz_2}, \end{cases}$$

où

$$(2)\qquad U = \frac{fm_0m_1}{\delta_{0,1}} + \frac{fm_0m_2}{\delta_{0,2}} + \frac{fm_1m_2}{\delta_{1,2}},$$

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned}
\delta^2_{0,1} &= (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2,\\
\delta^2_{0,2} &= (x_2 - x_0)^2 + (y_2 - y_0)^2 + (z_2 - z_0)^2,\\
\delta^2_{1,2} &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2.
\end{aligned}\right.$$

Cela posé, nous allons faire un changement de variables; soit G le centre de gravité du Soleil M_1 et de la première planète M_1; nous allons introduire les coordonnées relatives ξ_1, η_1, ζ_1 du point M_1 par rapport



au point M_0, et les coordonnées relatives ξ_2, η_2, ζ_2 de la seconde planète M_2 par rapport au point G; en remarquant que les coordonnées du point G sont respectivement

$$\frac{m_0x_0 + m_1x_1}{m_0 + m_1},\quad \frac{m_0y_0 + m_1y_1}{m_0 + m_1},\quad \frac{m_0z_0 + m_1z_1}{m_0 + m_1};$$

nous aurons donc

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned}
x_1 &= x_0 + \xi_1, & x_2 &= \frac{m_0x_0 + m_1x_1}{m_0 + m_1} + \xi_2,\\
y_1 &= y_0 + \eta_1, & y_2 &= \frac{m_0y_0 + m_1y_1}{m_0 + m_1} + \eta_2,\\
z_1 &= z_0 + \zeta_1, & z_2 &= \frac{m_0z_0 + m_1z_1}{m_0 + m_1} + \zeta_2.
\end{aligned}\right.$$

Désignons par X, Y, Z les coordonnées du centre de gravité de l'ensemble du Soleil et des deux planètes, en sorte que

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned}
(m_0 + m_1 + m_2)\,X &= m_0x_0 + m_1x_1 + m_2x_2,\\
(m_0 + m_1 + m_2)\,Y &= m_0y_0 + m_1y_1 + m_2y_2,\\
(m_0 + m_1 + m_2)\,Z &= m_0z_0 + m_1z_1 + m_2z_2,
\end{aligned}\right.$$

Des formules (4) et (5) nous tirerons aisément

$$
(6) \quad \begin{cases}
x_0 = X - \dfrac{m_1}{m_0 + m_1}\xi_1 - \dfrac{m_2}{m_0 + m_2 + m_2}\xi_2, \\[2ex]
x_1 = X + \dfrac{m_0}{m_0 + m_1}\xi_1 - \dfrac{m_2}{m_0 + m_1 + m_2}\xi_2, \\[2ex]
x_2 = X \qquad\qquad\qquad\quad + \dfrac{m_0 + m_1}{m_0 + m_1 + m_2}\xi_2,
\end{cases}
$$

et nous aurions les mêmes formules en y et en z.

Formons l'expression de la force vive $2T$ du système; nous avons d'abord

$$
(7) \qquad 2T = m_0 \sum \left(\frac{dx_0}{dt}\right)^2 + m_1 \sum \left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + m_2 \sum \left(\frac{dx_2}{dt}\right)^2,
$$

le signe Σ étant défini comme il suit :

$$
\sum \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} + \frac{dz^2}{dt^2}.
$$

Remplaçons dans la formule (7) $x_0 y_0 z_0$, $x_1 y_1 z_1$, $x_2 y_2 z_2$ par leurs valeurs fournies par les équations (6); nous trouverons sans peine

$$
(8) \quad 2T = (m_0 + m_1 + m_2) \sum \left(\frac{dX}{dt}\right)^2 + \frac{m_0 m_1}{m_0 + m_1} \sum \left(\frac{d\xi_1}{dt}\right)^2 + m_2 \frac{m_0 + m_1}{m_0 + m_1 + m_2} \sum \left(\frac{d\xi_2}{dt}\right)^2.
$$

Ainsi le changement de variables employé est tel que le double produit en $\dfrac{d\xi_1}{dt}\,\dfrac{d\xi_2}{dt}$ ne figure pas dans l'expression de la force vive.

Posons, pour abréger,

$$
(9) \qquad \mu_1 = m_0 \frac{m_1}{m_0 + m_1}, \quad \mu_2 = (m_0 + m_1) \frac{m_2}{m_0 + m_1 + m_2},
$$

et nous aurons

$$
(10) \qquad 2T = (m_0 + m_1 + m_2) \sum \left(\frac{dX}{dt}\right)^2 + \mu_1 \sum \left(\frac{d\xi_1}{dt}\right)^2 + \mu_2 \sum \left(\frac{d\xi_2}{dt}\right)^2.
$$

Nous pouvons dès lors, par les formules célèbres de Lagrange, écrire les équations différentielles d'où dépendent les nouvelles variables; elles seront, en ce qui concerne seulement les deux planètes,

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} &\mu_1 \frac{d^2\xi_1}{dt^2} = \frac{dU}{d\xi_1}, \quad &\mu_2 \frac{d^2\xi_2}{dt^2} = \frac{dU}{d\xi_2},\\ &\mu_1 \frac{d^2\eta_1}{dt^2} = \frac{dU}{d\eta_1}, \quad &\mu_2 \frac{d^2\eta_2}{dt^2} = \frac{dU}{d\eta_2},\\ &\mu_1 \frac{d^2\zeta_1}{dt^2} = \frac{dU}{d\zeta_1}, \quad &\mu_2 \frac{d^2\zeta_2}{dt^2} = \frac{dU}{d\zeta_2}. \end{aligned}\right.$$

Il reste, dans la fonction U, à remplacer les anciennes variables par les nouvelles; or, des formules (6), nous déduisons

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} &x_1 - x_0 = \xi_1,\\ &x_2 - x_0 = \frac{m_1}{m_0+m_1}\xi_1 + \xi_2,\\ &x_2 - x_1 = \frac{m_1}{m_0+m_1}\xi_1 + \xi_2 - \xi_1; \end{aligned}\right.$$

posons

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} &r_1^2 = \xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2,\\ &r_2^2 = \xi_2^2 + \eta_2^2 + \zeta_2^2,\\ &\Delta^2 = (\xi_2 - \xi_1)^2 + (\eta_2 - \eta_1)^2 + (\zeta_2 - \zeta_1)^2,\\ &S = \xi_1\xi_2 + \eta_1\eta_2 + \zeta_1\zeta_2, \end{aligned}\right.$$

et, des formules (12), nous tirerons

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned} &\delta_{0,1} = r_1,\\ &\delta_{0,2} = \sqrt{r_2^2 + \frac{2m_1}{m_0+m_1}S + \left(\frac{m_1}{m_0+m_1}\right)^2 r_1^2},\\ &\delta_{1,2} = \sqrt{\Delta^2 + 2\frac{m_0+m_1}{m_1}(S - r_1^2) + \left(\frac{m_1}{m_0+m_1}\right)^2 r_1^2}. \end{aligned}\right.$$

On voit que $\delta_{0,1}$ n'est autre chose que r_1, et que $\delta_{0,2}$ et $\delta_{1,2}$ ne diffèrent respectivement de r_2 et Δ que par des quantités de l'ordre de $\frac{m_1}{m_0}$ ou $\frac{m_2}{m_0}$.

Nous aurons ainsi

$$
(15)\quad \left\{
\begin{aligned}
\mathrm{U} = \frac{fm_0 m_1}{r_1} &+ \frac{fm_0 m_2}{\sqrt{r_2^2 + \frac{2m_1}{m_0+m_1}\mathrm{S} + \left(\frac{m_1}{m_0+m_1}\right)^2 r_1^2}} \\
&+ \frac{fm_1 m_2}{\sqrt{\Delta^2 + \frac{2m_1}{m_0+m_1}(\mathrm{S} - r_1^2) + \left(\frac{m_1}{m_0+m_1}\right)^2 r_1^2}}.
\end{aligned}
\right.
$$

Si l'on introduit, à la place de la fonction U, une fonction V définie par la relation

$$
(16)\qquad \mathrm{V} = \mathrm{U} - f\mu_1 \frac{m_0+m_1}{r_1} - f\mu_2 \frac{m_0+m_2}{r_2},
$$

les équations (11) deviendront

$$
(17)\quad \left\{
\begin{aligned}
\frac{d^2\xi_1}{dt^2} + f\frac{m_0+m_1}{r_1^3}\xi_1 &= \frac{m_0+m_1}{m_0 m_1}\frac{d\mathrm{V}}{d\xi_1}, \\
\frac{d^2\eta_1}{dt^2} + f\frac{m_0+m_1}{r_1^3}\eta_1 &= \frac{m_0+m_1}{m_0 m_1}\frac{d\mathrm{V}}{d\eta_1}, \\
\frac{d^2\zeta_1}{dt^2} + f\frac{m_0+m_1}{r_1^3}\zeta_1 &= \frac{m_0+m_1}{m_0 m_1}\frac{d\mathrm{V}}{d\zeta_1};
\end{aligned}
\right.
$$

$$
(18)\quad \left\{
\begin{aligned}
\frac{d^2\xi_2}{dt^2} + f\frac{m_0+m_2}{r_2^3}\xi_2 &= \frac{m_0+m_1+m_2}{m_2(m_0+m_1)}\frac{d\mathrm{V}}{d\xi_2}, \\
\frac{d^2\eta_2}{dt^2} + f\frac{m_0+m_2}{r_2^3}\eta_2 &= \frac{m_0+m_1+m_2}{m_2(m_0+m_1)}\frac{d\mathrm{V}}{d\eta_2}, \\
\frac{d^2\xi_2}{dt^2} + f\frac{m_0+m_2}{r_2^3}\zeta_2 &= \frac{m_0+m_1+m_2}{m_2(m_0+m_1)}\frac{d\mathrm{V}}{d\zeta_2}.
\end{aligned}
\right.
$$

On trouve, en partant des formules (15) et (16),

$$
\begin{aligned}
\mathrm{V} = -\frac{f}{r_2}\frac{m_2(m_0+m_1)(m_0+m_2)}{m_0+m_1+m_2} &+ \frac{fm_0 m_2}{\sqrt{r_2^2 + \frac{2m_1}{m_0+m_1}\mathrm{S} + \left(\frac{m_1}{m_0+m_1}\right)^2 r_1^2}} \\
&+ \frac{fm_1 m_2}{\sqrt{\Delta^2 + \frac{2m_1}{m_0+m_1}(\mathrm{S} - r_1^2) + \left(\frac{m_1}{m_0+m_1}\right)^2 r_1^2}},
\end{aligned}
$$

ce qu'on peut encore écrire

$$(19)\quad \left\{\begin{aligned} V = f m_0 m_2 &\left[\frac{1}{\sqrt{r_2^2 + \frac{2m_1}{m_0+m_1}S + \left(\frac{m_1}{m_0+m_1}\right)^2 r_1^2}} - \frac{1}{r_2}\right] \\ &+ \frac{f m_1 m_2}{\sqrt{\Delta^2 + \frac{2m_1}{m_0+m_1}(S - r_1^2) + \left(\frac{m_1}{m_0+m_1}\right)^2 r_1^2}} - \frac{f m_1 m_2^2}{(m_0+m_1+m_2) r_2}. \end{aligned}\right.$$

Sous cette forme, on voit bien que la fonction V est du second ordre par rapport aux masses, de sorte qu'en la substituant dans les seconds membres des équations (17) et (18) on trouvera que ces seconds membres sont du premier ordre, relativement aux masses des planètes; cette fonction V va donc jouer ici le rôle de la fonction perturbatrice dans la méthode ordinaire. Nous sommes parvenus à ce résultat important que la fonction V est la même dans les équations différentielles du mouvement des deux planètes. On développera, du reste, aisément V suivant les puissances des petites quantités $\frac{m_1}{m_0}$ et $\frac{m_2}{m_0}$; on écrira

$$V = V_2 + V_3 + \ldots,$$

avec les valeurs suivantes de V_2, V_3, ...,

$$V_2 = f m_1 m_2 \left(\frac{1}{\Delta} - \frac{m_0}{m_0+m_1}\frac{S}{r_2^3}\right),$$

$$V_3 = -f m_1 m_2 \left[\frac{m_1}{m_0+m_1}\frac{S - r_1^2}{\Delta^3} + \frac{m_0}{m_0+m_1}\frac{m_1}{m_0+m_1}\frac{1}{2r_2^3}\left(r_1^2 - \frac{3S^2}{r_2^2}\right) + \frac{m_2}{m_0+m_1+m_2}\frac{1}{r_2}\right].$$

Il n'y aura d'autre difficulté que la longueur à pousser ce développement aussi loin qu'on le voudra. Dans la théorie ordinaire, on développe S et $\frac{1}{\Delta}$; ces développements serviront ici.

La recherche du mouvement des deux planètes est donc ramenée à l'intégration des équations (17) et (18), dans lesquelles V a la valeur (19). Si, dans ces équations, on supprime les seconds membres, on a deux mouvements elliptiques qui donnent les valeurs de ξ_1, η_1, ζ_1, ξ_2, η_2, ζ_2, en fonction du temps et des éléments elliptiques; substituant ces valeurs dans l'expression de V, on réduira aisément cette fonction en une série périodique, et l'on pourra procéder aux approximations successives. Les équations (17) et (18), étant de la même forme que celles que Lagrange avait trouvées pour les mouvements autour du centre de gravité commun, peuvent être traitées de la même manière. En appliquant donc la première partie de la démonstration de Poisson, on démontrera que les grands axes des orbites elliptiques de M_1 autour de M_0 et de M_2 autour du centre de gravité de M_0 et M_1 n'ont pas d'inégalités séculaires, en tenant compte des termes de l'ordre du carré des masses. Mais l'orbite elliptique de M_1 est toute rapportée au Soleil; le théorème est donc démontré pour le mouvement de la planète M_1 autour du Soleil. On peut recommencer les mêmes raisonnements en rapportant M_2 à M_0 et M_1 au centre de gravité de M_0 et M_2, et l'on démontrera ainsi la même chose pour l'orbite de M_2 autour du Soleil.

J'arrive maintenant à compléter le sujet traité dans ma thèse; j'avais pour but de donner une méthode d'approximation rigoureuse dans le problème du mouvement de Jupiter et de Saturne; je suppose que M_1 est Jupiter, et M_2 Saturne. Dans la transformation qui a été faite, ξ_1, η_1, ζ_1 sont donc les coordonnées de Jupiter rapportées au Soleil, tandis que ξ_2, η_2, ζ_2 sont les coordonnées de Saturne rapportées au centre de gravité du Soleil et de Jupiter.

Si, dans les équations (17) et (18) nous supprimons les seconds membres, nous aurons les équations

$$(20)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d^2\xi_1}{dt_2} + f\,\frac{m_0+m_1}{r_1^3}\,\xi_1 = 0, \\ &\frac{d^2\eta_1}{dt_2} + f\,\frac{m_0+m_1}{r_1^3}\,\eta_1 = 0, \\ &\frac{d^2\zeta_1}{dt_2} + f\,\frac{m_0+m_1}{r_1^3}\,\zeta_1 = 0; \end{aligned}\right.$$

$$(21)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d^2\xi_2}{dt^2} + f\,\frac{m_0+m_2}{r_2^3}\,\xi_2 = 0, \\ &\frac{d^2\eta_2}{dt^2} + f\,\frac{m_0+m_2}{r_2^3}\,\eta_2 = 0, \\ &\frac{d^2\zeta_2}{dt^2} + f\,\frac{m_0+m_2}{r_2^3}\,\zeta_2 = 0, \end{aligned}\right.$$

qui nous donne deux mouvements elliptiques.

Nous prenons pour éléments elliptiques, dans le premier de ces mouvements, les six quantités L_1, G_1, H_1; l_1, g_1, h_1, liées, comme il suit, aux éléments des astronomes :

$$(22)\quad \left\{\begin{aligned} L_1 &= \sqrt{f(m_0+m_1)a_1},\\ G_1 &= \sqrt{f(m_0+m_1)a_1(1-e_1^2)},\\ H_1 &= \sqrt{f(m_0+m_1)a_1(1-e_1^2)}\cos i_1,\\ l_1 &= n_1(t+c_1) = \text{l'anomalie moyenne},\\ g_1 &= \pi_1 - \Omega \quad = \text{la distance du périhélie au nœud},\\ h_1 &= \Omega_1 \qquad\;\; = \text{la longitude du nœud}.\end{aligned}\right.$$

Nous introduirons de même les quantités correspondantes pour Saturne L_2, G_2, H_2; l_2, g_2, h_2.

Faisons, pour abréger,

$$\frac{m_0+m_1}{m_0 m_1} = K_1, \quad \frac{m_0+m_1+m_2}{m_0(m_0+m_1)} = K_2,$$

et nous aurons les équations suivantes pour déterminer en fonction du temps les douze variables $L_1, G_1, H_1, \ldots$,

$$(23)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{dL_1}{dt} &= K_1\frac{dV}{dl_1}, & \frac{dl_1}{dt} &= n_1 - K_1\frac{dV}{dL_1},\\ \frac{dG_1}{dt} &= K_1\frac{dV}{dg_1}, & \frac{dg_1}{dt} &= \quad\;\; - K_1\frac{dV}{dG_1},\\ \frac{dH_1}{dt} &= K_1\frac{dV}{dh_1}, & \frac{dh_1}{dt} &= \quad\;\; - K_1\frac{dV}{dH_1};\end{aligned}\right.$$

$$(24)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{dL_2}{dt} &= K_2\frac{dV}{dl_2}, & \frac{dl_2}{dt} &= n_2 - K_2\frac{dV}{dL_2},\\ \frac{dG_2}{dt} &= K_2\frac{dV}{dg_2}, & \frac{dg_2}{dt} &= \quad\;\; - K_2\frac{dV}{dG_2},\\ \frac{dH_2}{dt} &= K_2\frac{dV}{dh_2}, & \frac{dh_2}{dt} &= \quad\;\; - K_2\frac{dV}{dH_2}.\end{aligned}\right.$$

Si nous posons

$$V = V' - \frac{fm_0m_1}{2a_1} - \frac{fm_0m_2}{2a_2},$$

$$L_1 = K_1 L'_1, \quad L_2 = K_2 L'_2,$$

$$G_1 = K_1 G'_1, \quad G_2 = K_2 G'_2,$$

$$H_1 = K_1 H'_1, \quad H_2 = K_2 H'_2,$$

nous aurons les équations transformées, toutes sous la forme dite canonique, savoir :

$$(25)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{dL'_1}{dt} &= \frac{dV'}{dl_1}, & \frac{dl_1}{dt} &= -\frac{dV'}{dL'_1},\\ \frac{dG'_1}{dt} &= \frac{dV'}{dg_1}, & \frac{dg_1}{dt} &= -\frac{dV'}{dG'_1},\\ \frac{dH'_1}{dt} &= \frac{dV'}{dh_1}, & \frac{dh_1}{dt} &= -\frac{dV'}{dH'_1}; \end{aligned}\right.$$

$$(26)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{dL'_2}{dt} &= \frac{dV'}{dl_2}, & \frac{dl_2}{dt} &= -\frac{dV'}{dL'_2},\\ \frac{dG'_2}{dt} &= \frac{dV'}{dg_2}, & \frac{dg_2}{dt} &= -\frac{dV'}{dG'_2},\\ \frac{dH'_2}{dt} &= \frac{dV'}{dh_2}, & \frac{dh_2}{dt} &= -\frac{dV'}{dH'_2}. \end{aligned}\right.$$

Dès lors on peut suivre, pour l'intégration de ces équations, la méthode que j'ai indiquée dans ma thèse ; V′ est de la forme

$$V' = A + \Sigma B \cos(\alpha_1 l_1 + \beta_1 g_1 + \gamma_1 h_1 + \alpha_2 l_2 + \beta_3 g_3 + \gamma_2 h_2),$$

où $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1,\ \alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ sont des nombres entiers, A et B des fonctions des six variables $L'_1, G'_1, H'_1;\ L'_2, G'_2, H'_2$.

En réduisant V′ à la partie non périodique augmentée d'un terme périodique, on peut intéger rigoureusement les équations (25) et (26), et il arrive que, quand on fait varier les constantes introduites par l'intégration, on a des équations toutes pareilles à (25) et (26), seulement le terme périodique considéré a disparu. Par une série d'intégrations rigoureuses, on arrivera donc à épuiser les termes les plus importants de V′.

On arrivera donc ainsi à obtenir les expressions de $\xi_1, \eta_1, \zeta_1, \xi_2, \eta_2, \zeta_2$ en fonction du temps et de douze constantes arbitraires. D'après les formules (12), les coordonnées de Saturne, rapportées au Soleil, seront

$$x_2 - x_0 = \xi_2 + \frac{m_1}{m_0 + m_1}\xi_1,$$

$$y_2 - y_0 = \eta_2 + \frac{m_1}{m_0 + m_1}\eta_1,$$

$$z_2 - z_0 = \zeta_2 + \frac{m_1}{m_0 + m_1}\zeta_1.$$

Je crois utile de dire quelques mots de l'application du principe des aires au problème actuel. Ce principe, qui s'applique aux mouvements du Soleil et de nos deux planètes, rapportés aux axes ox, oy, oz, nous donne l'équation

$$m_0\left(y_0\frac{dz_0}{dt}-z_0\frac{dy_0}{dt}\right)+m_1\left(y_1\frac{dz_1}{dt}-z_1\frac{dy_1}{dt}\right)+m_2\left(y_2\frac{dz_2}{dt}-z_2\frac{dy_2}{dt}\right)=\text{const.}$$

et deux autres équations pareilles, que l'on obtient en permutant les lettres x, y, z.

Or si, dans le premier membre de cette équation, on substitue les expressions des cordonnées x_0, y_0, z_0; x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2, fournies par les équations (6), on arrive aisément à l'équation suivante :

$$\mu_1\left(\eta_1\frac{d\zeta_1}{dt}-\zeta_1\frac{d\eta_1}{dt}\right)+\mu_2\left(\eta_2\frac{d\zeta_2}{dt}-\zeta_2\frac{d\eta_2}{dt}\right)=\text{const.}$$

et deux autres équations pareilles; remarquons que

$$\eta_1\frac{d\zeta_1}{dt}-\zeta_1\frac{d\eta_1}{dt}=\sqrt{f(m_0+m_1)a_1(1-e_1^2)}\sin i_1\sin\Omega_1,$$

$$\zeta_1\frac{d\xi_1}{dt}-\xi_1\frac{d\;_1}{dt}=-\sqrt{f(m_0+m_1)a_1(1-e_1^2)}\sin i_1\cos\Omega_1,$$

$$\xi_1\frac{d\eta_1}{dt}-\eta_1\frac{d\xi_1}{dt}=+\sqrt{f(m_0+m_1)a_1(1-e_1^2)}\cos i_1,$$

et nous trouverons aisément que, en nommant A, B, C trois constantes, le principe des aires nous donnera les trois relations

$$(27)\qquad\left\{\begin{aligned}&H'_1+H'_2=A,\\&\sqrt{G'^2-H_1'^2}\sin h_1+\sqrt{G_2'^2-H_2'^2}\sin h_2=B,\\&\sqrt{G_1'^2-H_1'^2}\cos h_1+\sqrt{G_2'^2-H_2'^2}\cos h_2=C.\end{aligned}\right.$$

Voilà donc, entre six de nos douze variables, trois relations tout à fait rigoureuses, qui ne peuvent manquer d'être d'un grand secours dans la méthode d'approximation que j'ai en vue.

Quand on rapporte les mouvements de Jupiter et de Saturne au Soleil, dans la théorie des inégalités séculaires, on rencontre les trois équations (27), mais elles ne sont pas rigoureuses. On voit donc que, à plusieurs égards, il y a un grand avantage à partir, pour la résolution par approximation du problème des trois corps, des équations symétriques (17) et (18).