H. LEMONNIER

Mémoires sur les fonctions elliptiques qui correspondent à la fonction $\cos x + i \sin x$

Annales scientifiques de l'É.N.S. 2e série, tome 6 (1877), p. 79-124

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1877_2_6__79_0>

MÉMOIRES

SUR

LES FONCTIONS ELLIPTIQUES

QUI CORRESPONDENT A LA FONCTION $\cos x + i \sin x$.

PAR M. H. LEMONNIER,

PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES AU LYCÉE HENRI IV.

DEUXIÈME MÉMOIRE.

Expression de $\nu_1(z+t)$.

1. Considérons la formule connue

$$\nu\left(\frac{\omega'}{2} - z\right) = i\,\frac{\mu(z)}{\lambda(z)}.$$

En la mettant sous la forme

$$\mu(z) + i\lambda(z)\,\nu\left(\frac{\omega'}{2} - z\right) = 0,$$

on voit que la fonction de z

$$\mu(z) + i\lambda(z)\,\nu(t),$$

s'annule pour

$$t = \frac{\omega'}{2} - z \quad \text{ou} \quad z = \frac{\omega'}{2} - t.$$

La même formule, par le changement de z en $-z$, donnant

$$\mu(z) - i\lambda(z)\,\nu\left(\frac{\omega'}{2} + z\right) = 0 \quad \text{ou} \quad \mu(t) - i\lambda(t)\,\nu\left(\frac{\omega'}{2} + t\right) = 0,$$

il est clair que la fonction de z

$$\mu(t) - i\lambda(t)\nu(z),$$

s'annule pour $z = -\frac{\omega'}{2} - t$.

La fraction $\frac{\mu(z)+i\lambda(z)\nu(t)}{\mu(t)-i\lambda(t)\nu(z)}$ a, comme ses deux termes, ω et $2\omega'$ pour périodes; ses zéros sont ceux du numérateur, et ses infinis les zéros du dénominateur; car, tant que $\nu(t)$ est différent de ± 1, les deux termes deviennent infinis à la fois en même temps que $\lambda(z)$, $\mu(z)$, $\nu(z)$, sans que la fraction devienne nulle ou infinie.

Dans l'étendue du parallélogramme dont un premier sommet est le point $(z = -t)$, et les deux côtés ω et $2\omega'$, le numérateur a deux zéros

$$z = \frac{\omega'}{2} - t, \quad z = \frac{\omega'}{2} + \frac{\omega}{2} - t;$$

le dénominateur a deux autres zéros

$$z = \frac{3}{2}\omega' - t, \quad z = \frac{3}{2}\omega' + \frac{\omega}{2} - t.$$

Or ce sont là les zéros et les infinis de la fonction $\nu_1(z+t)$ dans la même étendue. Il s'ensuit

$$\nu_1(z+t) = A\,\frac{\mu(z)+i\lambda(z)\nu(t)}{\mu(t)-i\lambda(t)\nu(z)}.$$

Il faut $A = 1$, pour avoir l'égalité par $z = 0$; la formule est donc

$$(1) \qquad \nu_1(z+t) = \frac{\mu(z)+i\lambda(z)\nu(t)}{\mu(t)-i\lambda(t)\nu(z)}.$$

Par l'échange entre z et t, on a également

$$(1)' \qquad \nu_1(z+t) = \frac{\mu(t)+i\lambda(t)\nu(z)}{\mu(z)-i\lambda(z)\nu(t)}.$$

Si l'on y remplace t par $-t$, dans ces formules, elles deviennent

$$(2) \qquad \nu_1(z-t) = \frac{\mu(z)+i\lambda(z)\nu(t)}{\mu(t)+i\lambda(t)\nu(z)},$$

$$(2)' \qquad \nu_1(z-t) = \frac{\mu(t)-i\lambda(t)\nu(z)}{\mu(z)-i\lambda(z)\nu(t)}.$$

2. *Conséquences.* — La formule (1) revenant à

$$\mu(z+t)+i\lambda(z+t)=\frac{[\mu(z)+i\lambda(z)\nu(t)][\mu(t)+i\lambda(t)\nu(z)]}{\mu^2(t)+\lambda^2(t)\nu^2(z)}$$

peut se partager en

$$\mu(z+t)=\frac{\mu(z)\mu(t)-\lambda(z)\nu(z)\lambda(t)\nu(t)}{\mu^2(t)+\lambda^2(t)\nu^2(z)}, \tag{3}$$

$$\lambda(z+t)=\frac{\lambda(z)\mu(t)\nu(t)+\lambda(t)\mu(z)\nu(z)}{\mu^2(t)+\lambda^2(t)\nu^2(z)}. \tag{4}$$

Quand le paramètre g est égal à 1, ces formules sont

$$\mu(z+t)=\frac{\mu(z)\mu(t)-\mu'(z)\mu'(t)}{\mu^2(t)+\lambda^2(t)\nu^2(z)}, \tag{3$'$}$$

$$\lambda(z+t)=\frac{\lambda(z)\lambda'(t)+\lambda(t)\lambda'(z)}{\mu^2(t)+\lambda^2(t)\nu^2(z)}. \tag{4$'$}$$

On a par suite

$$\mu(z-t)=\frac{\mu(z)\mu(t)+\lambda(z)\nu(z)\lambda(t)\nu(t)}{\mu^2(t)+\lambda^2(t)\nu^2(z)}, \tag{5}$$

$$\lambda(z-t)=\frac{\lambda(z)\mu(t)\nu(t)-\lambda(t)\mu(z)\nu(z)}{\mu^2(t)+\lambda^2(t)\nu^2(z)}. \tag{6}$$

3. Par les formules (1)$'$ et (2)$'$, on obtient

$$\left\{\begin{aligned}\nu_1(z+t)+\nu_1(z-t)&=\frac{2\mu(t)}{\mu(z)-i\lambda(z)\nu(t)},\\ \nu_1(z+t)-\nu_1(z-t)&=\frac{2i\lambda(t)\nu(z)}{\mu(z)-i\lambda(z)\nu(t)},\end{aligned}\right. \tag{7}$$

d'où l'on tire

$$\left\{\begin{aligned}\mu(z+t)+\mu(z-t)&=\frac{2\mu(z)\mu(t)}{\mu^2(z)+\lambda^2(z)\nu^2(t)},\\ \mu(z+t)-\mu(z-t)&=-\frac{2\lambda(z)\nu(z)\lambda(t)\nu(t)}{\mu^2(z)+\lambda^2(z)\nu^2(t)},\\ \lambda(z+t)+\lambda(z-t)&=\frac{2\lambda(z)\mu(t)\nu(t)}{\mu^2(z)+\lambda^2(z)\nu^2(t)},\\ \lambda(z+t)-\lambda(z-t)&=\frac{2\lambda(t)\mu(z)\nu(z)}{\mu^2(z)+\lambda^2(z)\nu^2(t)}.\end{aligned}\right. \tag{8}$$

On en tire encore

$$(9)\quad\left\{\begin{array}{l}[\mu(z+t)+\mu(z-t)]\mu(z)\qquad+[\lambda(z+t)+\lambda(z-t)]\lambda(z)\nu(t)=2\mu(t),\\ [\mu(z+t)+\mu(z-t)]\lambda(z)\nu(t)-[\lambda(z+t)+\lambda(z-t)]\mu(z)\qquad=0\\ \text{et}\\ [\mu(z+t)-\mu(z-t)]\mu(z)\qquad+[\lambda(z+t)-\lambda(z-t)]\lambda(z)\nu(t)=0,\\ [\mu(z+t)-\mu(z-t)]\lambda(z)\nu(t)-[\lambda(z+t)-\lambda(z-t)]\mu(z)\qquad=-2\lambda(t)\nu(z).\end{array}\right.$$

4. De même la formule (1), prise sous la forme

$$[\mu(z+t)+i\lambda(z+t)][\mu(t)-i\lambda(t)\nu(z)]=\mu(z)+i\lambda(z)\nu(t),$$

se dédouble en

$$(10)\quad\left\{\begin{array}{l}\mu(z+t)\mu(t)+\lambda(z+t)\lambda(t)\nu(z)=\mu(z),\\ \lambda(z+t)\mu(t)-\mu(z+t)\lambda(t)\nu(z)=\lambda(z)\nu(t),\end{array}\right.$$

formules qui deviennent, par le changement de z en $z+t$ et de t en $-t$,

$$(11)\quad\left\{\begin{array}{l}\mu(z+t)=\mu(z)\,\mu(t)-\lambda(z)\,\lambda(t)\,\nu(z+t),\\ \lambda(z+t)\,\nu(t)=\lambda(z)\,\mu(t)+\mu(z)\,\lambda(t)\,\nu(z+t).\end{array}\right.$$

La dernière, par un échange entre z et t, donne

$$(12)\quad\lambda(z+t)\,\nu(z)=\lambda(t)\,\mu(z)+\mu(t)\,\lambda(z)\,\nu(z+t),$$

ce qui, par le changement de t en $-(t+z)$, devient

$$(13)\quad\lambda(z+t)\,\mu(z)=\lambda(t)\,\nu(z)+\lambda(z)\,\nu(t)\,\mu(z+t).$$

En combinant par addition et soustraction ces formules (12) et (13), on en déduit

$$(14)\quad\left\{\begin{array}{l}[\lambda(z+t)+\lambda(t)][\nu(z)-\mu(z)]=\lambda(z)[\mu(t)\nu(z+t)-\nu(t)\mu(z+t)],\\ [\lambda(z+t)-\lambda(t)][\nu(z)+\mu(z)]=\lambda(z)[\mu(t)\nu(z+t)+\nu(t)\mu(z+t)],\end{array}\right.$$

d'où résulte

$$(15)\quad\frac{\lambda(z+t)+\lambda(t)}{\lambda(z+t)-\lambda(t)}=\frac{\nu(z)+\mu(z)}{\nu(z)-\mu(z)}\,\frac{\mu(t)\,\nu(z+t)-\nu(t)\,\mu(z+t)}{\mu(t)\,\nu(z+t)+\nu(t)\,\mu(z+t)}$$

ou

$$(15)'\quad\frac{\lambda(z)+\lambda(t)}{\lambda(z)-\lambda(t)}=\frac{\nu(z-t)+\mu(z-t)}{\nu(z-t)-\mu(z-t)}\,\frac{\mu(t)\,\nu(z)-\nu(t)\,\mu(z)}{\mu(t)\,\nu(z)+\nu(t)\,\mu(z)},$$

De même, la première des formules (11) pouvant se changer en

$$\mu(t) = \mu(z)\mu(z+t) + \lambda(z)\lambda(z+t)\nu(t),$$

on en déduit

$$(16)\quad \begin{cases} [\mu(z+t)+\mu(t)][1-\mu(z)] = \lambda(z)[\lambda(z+t)\nu(t) - \lambda(t)\nu(z+t)], \\ [\mu(z+t)-\mu(t)][1+\mu(z)] = -\lambda(z)[\lambda(z+t)\nu(t) + \lambda(t)\nu(z+t)], \end{cases}$$

d'où

$$(17)\quad \frac{\mu(z+t)+\mu(t)}{\mu(z+t)-\mu(t)} = -\frac{1+\mu(z)}{1-\mu(z)}\,\frac{\lambda(z+t)\nu(t)-\lambda(t)\nu(z+t)}{\lambda(z+t)\nu(t)+\lambda(t)\nu(z+t)}$$

ou

$$(17)'\quad \frac{\mu(z)+\mu(t)}{\mu(z)-\mu(t)} = -\frac{1+\mu(z-t)}{1-\mu(z-t)}\,\frac{\lambda(z)\nu(t)-\lambda(t)\nu(z)}{\lambda(z)\nu(t)+\lambda(t)\nu(z)}.$$

5. Les formules (1) et (2) donnent par la division

$$(18)\quad \frac{\nu_1(z+t)}{\nu_1(z-t)} = \frac{\mu(t)+i\lambda(t)\nu(z)}{\mu(t)-i\lambda(t)\nu(z)},$$

d'où, par un échange entre z et t,

$$\frac{\nu_1(z+t)}{\nu_1(t-z)} = \frac{\mu(z)+i\lambda(z)\nu(t)}{\mu(z)-i\lambda(z)\nu(t)}$$

ou

$$(19)\quad \nu_1(z+t)\,\nu_1(z-t) = \frac{\mu(z)+i\lambda(z)\nu(t)}{\mu(z)-i\lambda(z)\nu(t)}.$$

Cette formule (19) peut s'écrire

$$\nu_1(z+t)\,\nu_1(z-t) = \frac{1+i\varpi(z)\nu(t)}{1-i\varpi(z)\nu(t)};$$

si l'on y fait tendre z vers $\frac{\omega'}{2}$, il s'ensuit

$$(20)\quad \nu_1\left(\frac{\omega'}{2}+t\right)\nu_1\left(\frac{\omega'}{2}-t\right) = \frac{1-\nu(t)}{1+\nu(t)}.$$

Les formules (18) et (19) reviennent à

$$(18)'\quad \frac{\nu_1[(2m+1)z]}{\nu_1(z)} = \frac{\mu(mz)+i\lambda(mz)\nu[(m+1)z]}{\mu(mz)-i\lambda(mz)\nu[(m+1)z]},$$

$$(19)'\quad \nu_1[(2m+1)z]\,\nu_1(z) = \frac{\mu[(m+1)z]+i\lambda[(m+1)z]\nu(mz)}{\mu[(m+1)z]-i\lambda[(m+1)z]\nu(mz)}.$$

6. La formule (19) étant

$$[\mu(z+t)+i\lambda(z+t)][\mu(z-t)+i\lambda(z-t)]=\frac{[\mu(z)+i\lambda(z)\nu(t)]^2}{\mu^2(z)+\lambda^2(z)\nu^2(t)}$$

équivaut aux deux suivantes :

$$(21)\quad\left\{\begin{aligned}&\mu(z+t)\mu(z-t)-\lambda(z+t)\lambda(z-t)=\frac{\mu^2(z)-\lambda^2(z)\nu^2(t)}{\mu^2(z)+\lambda^2(z)\nu^2(t)},\\&\mu(z+t)\lambda(z-t)+\mu(z-t)\lambda(z+t)=\frac{2\mu(z)\lambda(z)\nu(t)}{\mu^2(z)+\lambda^2(z)\nu^2(t)}.\end{aligned}\right.$$

De même la formule (18) étant

$$[\mu(z+t)+i\lambda(z+t)][\mu(z-t)-i\lambda(z-t)]=\frac{[\mu(t)+i\lambda(t)\nu(z)]^2}{\mu^2(t)+\lambda^2(t)\nu^2(z)}$$

se dédouble en

$$(22)\quad\left\{\begin{aligned}&\mu(z+t)\mu(z-t)+\lambda(z+t)\lambda(z-t)=\frac{\mu^2(t)-\lambda^2(t)\nu^2(z)}{\mu^2(t)+\lambda^2(t)\nu^2(z)},\\&-\mu(z+t)\lambda(z-t)+\mu(z-t)\lambda(z+t)=\frac{2\mu(t)\lambda(t)\nu(z)}{\mu^2(t)+\lambda^2(t)\nu^2(z)},\end{aligned}\right.$$

et de ces quatre formules résulte

$$(23)\quad\left\{\begin{aligned}&\mu(z+t)\mu(z-t)=\frac{1-\lambda^2(z)-\lambda^2(t)+k^2\lambda^2(z)\lambda^2(t)}{\mu^2(z)+\lambda^2(z)\nu^2(t)}=\frac{\mu^2(z)-\lambda^2(t)\nu^2(z)}{\mu^2(z)+\lambda^2(z)\nu^2(t)},\\&\lambda(z+t)\lambda(z-t)=\frac{\lambda^2(z)-\lambda^2(t)}{\mu^2(z)+\lambda^2(z)\nu^2(t)},\\&\mu(z+t)\lambda(z-t)=\frac{\mu(z)\lambda(z)\nu(t)-\mu(t)\lambda(t)\nu(z)}{\mu^2(z)+\lambda^2(z)\nu^2(t)},\\&\mu(z-t)\lambda(z+t)=\frac{\mu(z)\lambda(z)\nu(t)+\mu(t)\lambda(t)\nu(z)}{\mu^2(z)+\lambda^2(z)\nu^2(t)}.\end{aligned}\right.$$

Expression de $\mu_1(z+t)$.

7. La formule

$$\mu\left(\frac{\omega'}{2}-z\right)=i\frac{\nu(z)}{k\lambda(z)},$$

prise sous la forme

$$\nu(z)+ki\lambda(z)\mu\left(\frac{\omega'}{2}-z\right)=0,$$

accuse que la fonction de z

$$\nu(z) + ki\lambda(z)\,\mu(t)$$

s'annule pour $z = \frac{\omega'}{2} - t$.

Comme l'on a

$$\nu(z) - ki\lambda(z)\,\mu\left(\frac{\omega'}{2} + z\right) = 0$$

ou

$$\nu(t) - ki\lambda(t)\,\mu\left(\frac{\omega'}{2} + t\right) = 0,$$

la fonction de z

$$\nu(t) - ki\lambda(t)\,\mu(z)$$

s'annule également pour $z = -\frac{\omega'}{2} - t$.

Il s'ensuit que la fraction

$$\frac{\nu(z) + ki\lambda(z)\,\mu(t)}{\nu(t) - ki\lambda(z)\,\mu(t)},$$

dans l'étendue du parallélogramme qui a pour sommet le point $(z = -t)$ et pour côtés ses deux périodes ω et $2\omega'$, a pour zéros

$$z = \frac{\omega'}{2} - t, \quad z = \frac{\omega'}{2} - t + \omega' + \frac{\omega}{2} = 3\,\frac{\omega'}{2} + \frac{\omega}{2} - t,$$

et pour infinis

$$z = -\frac{\omega'}{2} - t + 2\omega' = \frac{3}{2}\,\omega' - t, \quad z = -\frac{\omega'}{2} - t + \omega' + \frac{\omega}{2} = \frac{\omega'}{2} + \frac{\omega}{2} - t.$$

Comme, dans la même étendue, ce sont les zéros et les infinis de $\mu_1(z + t)$, il y a lieu de poser

$$\mu_1(z + t) = A\,\frac{\nu(z) + ki\lambda(z)\,\mu(t)}{\nu(t) - ki\lambda(t)\,\mu(z)}.$$

On trouve $A = 1$, en prenant $z = 0$; donc on a

$$(1) \qquad \mu_1(z + t) = \frac{\nu(z) + ki\lambda(z)\,\mu(t)}{\nu(t) - ki\lambda(t)\,\mu(z)},$$

d'où

$$(1)' \qquad \mu_1(z+t) = \frac{\nu(t) + ki\lambda(t)\mu(z)}{\nu(z) - ki\lambda(z)\mu(t)},$$

et par suite

$$(2) \qquad \mu_1(z-t) = \frac{\nu(z) + ki\lambda(z)\mu(t)}{\nu(t) + ki\lambda(t)\mu(z)},$$

$$(2)' \qquad \mu_1(z-t) = \frac{\nu(t) - ki\lambda(t)\mu(z)}{\nu(z) - ki\lambda(z)\mu(t)}.$$

8. *Conséquences.* — La formule (1), écrite sous la forme

$$\nu(z+t) + ki\lambda(z+t) = \frac{[\nu(z) + ki\lambda(z)\mu(t)][\nu(t) + ki\lambda(t)\mu(z)]}{\nu^2(t) + k^2\lambda^2(t)\mu^2(z)},$$

se subdivise en

$$(3) \qquad \nu(z+t) = \frac{\nu(z)\nu(t) - k^2\lambda(z)\mu(z)\lambda(t)\mu(t)}{\nu^2(t) + k^2\lambda^2(t)\mu^2(z)},$$

$$(4) \qquad \lambda(z+t) = \frac{\lambda(z)\mu(t)\nu(t) + \lambda(t)\mu(z)\nu(z)}{\nu^2(t) + k^2\lambda^2(t)\mu^2(z)},$$

ce qui, au cas de $g = 1$, est

$$(3)' \qquad \nu(z+t) = \frac{\nu(z)\nu(t) - \frac{1}{k^2}\nu'(z)\nu'(t)}{\nu^2(t) + k^2\lambda^2(t)\mu^2(z)},$$

$$(4)' \qquad \lambda(z+t) = \frac{\lambda(z)\lambda'(t) + \lambda(t)\lambda'(z)}{\nu^2(t) + k^2\lambda^2(t)\mu^2(z)},$$

et de là

$$(5) \qquad \nu(z-t) = \frac{\nu(z)\nu(t) + k\lambda(z)\mu(z)\lambda(t)\mu(t)}{\nu^2(t) + k^2\lambda^2(t)\mu^2(z)},$$

$$(6) \qquad \lambda(z-t) = \frac{\lambda(z)\mu(t)\nu(t) - \lambda(t)\mu(z)\nu(z)}{\nu^2(t) + k^2\lambda^2(t)\mu^2(z)}.$$

9. Par (1)′ et (2)′ il vient

$$(7) \qquad \begin{cases} \mu_1(z+t) + \mu_1(z-t) = \dfrac{2\nu(t)}{\nu(z) - ki\lambda(z)\mu(t)}, \\ \mu_1(z+t) - \mu_1(z-t) = \dfrac{2ki\lambda(t)\mu(z)}{\nu(z) - ki\lambda(z)\mu(t)}, \end{cases}$$

d'où

$$(8)\quad \begin{cases} \nu(z+t)+\nu(z-t)=\dfrac{2\nu(t)\nu(z)}{\nu^2(z)+k^2\lambda^2(z)\mu^2(t)}, \\ \nu(z+t)-\nu(z-t)=\dfrac{-2k^2\lambda(z)\mu(z)\lambda(t)\mu(t)}{\nu^2(z)+k^2\lambda^2(z)\mu^2(t)}, \end{cases}$$

et d'autre part

$$[\nu(z+t)+\nu(z-t)]\nu(z)+[\lambda(z+t)+\lambda(z-t)]k^2\lambda(z)\mu(t)=2\nu(t),$$
$$[\nu(z+t)+\nu(z-t)]\lambda(z)\mu(t)+[\lambda(z+t)+\lambda(z-t)]\nu(z)=0,$$

et

$$(9)\quad \begin{cases} [\nu(z+t)-\nu(z-t)]\nu(z)+[\lambda(z+t)-\lambda(z-t)]k^2\lambda(z)\mu(t)=0, \\ [\nu(z+t)-\nu(z-t)]\lambda(z)\mu(t)+[\lambda(z+t)-\lambda(z-t)]k^2\lambda(z)\mu(t)=2\lambda(t)\mu(z). \end{cases}$$

10. De même, par la formule (1), on obtient

$$(10)\quad \begin{cases} \nu(z+t)\nu(t)+k^2\lambda(z+t)\lambda(t)\mu(z)=\nu(z), \\ \lambda(z+t)\nu(t)-\nu(z+t)\lambda(t)\mu(z)=\lambda(z)\mu(t); \end{cases}$$

d'où, par le changement de t en $-t$ et de z en $z+t$,

$$(11)\quad \begin{cases} \nu(z+t)=\nu(z)\nu(t)-k^2\lambda(z)\lambda(t)\mu(z+t), \\ \lambda(z+t)\mu(t)=\lambda(z)\nu(t)+\nu(z)\lambda(t)\mu(z+t), \end{cases}$$

dont la dernière peut se changer en

$$\lambda(z+t)\mu(z)=\lambda(t)\mu(z)+\nu(t)\lambda(z)\mu(z+t),$$

formule (13) du numéro précédent.

La première des formules (10), par un échange entre z et t, étant

$$\nu(t)=\nu(z+t)\nu(z)+k^2\lambda(z+t)\lambda(z)\mu(t),$$

on en tire, avec la première des formules (11),

$$(12)\quad \begin{cases} [\nu(z+t)+\nu(t)][1-\nu(z)]=k^2\lambda(z)[\lambda(z+t)\mu(t)-\lambda(t)\mu(z+t)], \\ [\nu(z+t)-\nu(t)][1+\nu(z)]=-k^2\lambda(z)[\lambda(z+t)\mu(t)+\lambda(t)\mu(z+t)], \end{cases}$$

d'où

$$\frac{\nu(z+t)+\nu(t)}{\nu(z+t)-\nu(t)}=\frac{1+\nu(z)}{1-\nu(z)}\,\frac{\lambda(t)\mu(z+t)-\lambda(z+t)\mu(t)}{\mu(t)\lambda(z+t)+\lambda(t)\mu(z+t)},$$

ou

$$(13)\qquad \frac{\nu(z)+\nu(t)}{\nu(z)-\nu(t)} = \frac{1+\nu(z-t)}{1-\nu(z-t)}\,\frac{\lambda(t)\,\mu(z)-\lambda(z)\,\mu(t)}{\lambda(t)\,\mu(z)+\lambda(z)\,\mu(t)}.$$

11. En divisant l'une par l'autre les formules (1) et (2), on obtient

$$(14)\qquad \frac{\mu_1(z+t)}{\mu_1(z-t)} = \frac{\nu(t)+ki\lambda(t)\,\mu(z)}{\nu(t)-ki\lambda(t)\,\mu(z)},$$

d'où

$$\frac{\mu_1(z+t)}{\mu_1(t-z)} = \frac{\nu(z)+ki\,\lambda(z)\,\mu(t)}{\nu(z)-ki\,\lambda(z)\,\mu(t)}$$

ou

$$(15)\qquad \mu_1(z+t)\,\mu_1(z-t) = \frac{\nu(z)+ki\lambda(z)\,\mu(t)}{\nu(z)-ki\lambda(z)\,\mu(t)}.$$

Comme l'on a $\frac{\nu(z)}{ki\lambda(z)} = \mu\left(\frac{\omega'}{2}+z\right)$, cette dernière formule peut s'écrire

$$\mu_1(z+t)\,\mu_1(z-t) = \frac{\mu\left(\frac{\omega'}{2}+z\right)+\mu(t)}{\mu\left(\frac{\omega'}{2}+z\right)-\mu(t)},$$

d'où

$$(16)\qquad \mu_1\left(\frac{\omega'}{2}+t\right)\mu_1\left(\frac{\omega'}{2}-t\right) = \frac{1-\mu(t)}{1+\mu(t)}.$$

Les formules (14) et (15) peuvent se prendre sous les formes

$$\frac{\mu_1[(2m+1)z]}{\mu_1(z)} = \frac{\nu(mz)+ki\,\lambda(mz)\,\mu[(m+1)z]}{\nu(mz)-ki\,\lambda(mz)\,\mu[(m+1)z]},$$

$$\mu_1[(2m+1)z]\,\mu_1(z) = \frac{\nu[(m+1)z]+ki\lambda[(m+1)z]\,\mu(mz)}{\nu[(m+1)z]-ki\lambda[(m+1)z]\,\mu(mz)}.$$

12. La formule (15) étant

$$[\nu(z+t)+ki\lambda(z+t)][\nu(z-t)+ki\lambda(z-t)] = \frac{[\nu(z)+ki\lambda(z)\,\mu(t)]^2}{\nu^2(z)+k^2\lambda^2(z)\,\mu^2(t)}$$

comprend les deux formules

$$\nu(z+t)\,\nu(z-t)-k^2\lambda(z+t)\,\lambda(z-t) = \frac{\nu^2(z)-k^2\lambda^2(z)\,\mu^2(t)}{\nu^2(z)+k^2\lambda^2(z)\,\mu^2(t)},$$

$$\nu(z+t)\,\lambda(z-t)+\quad\nu(z-t)\,\lambda(z+t) = \frac{2\lambda(z)\,\nu(z)\,\mu(t)}{\nu^2(z)+k^2\lambda^2(z)\,\mu^2(t)};$$

d'où, par un échange entre z et t, ce qui revient à opérer de même sur la formule (14),

$$\nu(z+t)\,\nu(z-t)+k^2\lambda(z+t)\,\lambda(z-t)=\frac{\nu^2(t)-k^2\lambda^2(t)\,\mu^2(z)}{\nu^2(t)+k^2\lambda^2(t)\,\mu^2(z)},$$

$$-\nu(z+t)\,\lambda(z-t)+\quad\nu(z-t)\,\lambda(z+t)=\frac{2\lambda(t)\,\nu(t)\,\mu(z)}{\nu^2(t)+k^2\lambda^2(t)\,\mu^2(z)},$$

et de là

$$\nu(z+t)\,\nu(z-t)=\frac{1-k^2\lambda^2(z)-k^2\lambda^2(t)+k^2\lambda^2(z)\lambda^2(t)}{\nu^2(z)+k^2\lambda^2(z)\,\mu^2(t)}=\frac{\nu^2(z)-k^2\mu^2(z)\,\lambda^2(t)}{\nu^2(z)+k^2\lambda^2(z)\,\mu^2(t)},$$

$$\lambda(z+t)\,\lambda(z-t)=\frac{\lambda^2(z)-\lambda^2(t)}{\nu^2(z)+k^2\lambda^2(z)\,\mu^2(t)},$$

$$\nu(z+t)\,\lambda(z-t)=\frac{\lambda(z)\,\nu(z)\,\mu(t)-\lambda(t)\,\nu(t)\,\mu(z)}{\nu^2(z)+k^2\lambda^2(z)\,\mu^2(t)},$$

$$\nu(z-t)\,\lambda(z+t)=\frac{\lambda(z)\,\nu(z)\,\mu(t)+\lambda(t)\,\nu(t)\,\mu(z)}{\nu^2(z)+k^2\lambda^2(z)\,\mu^2(t)}.$$

Il est à observer que l'on a

$$\begin{aligned}\mu^2(z)+\lambda^2(z)\,\nu^2(t)&=\mu^2(t)+\lambda^2(t)\,\nu^2(z)=\nu^2(z)+k^2\lambda^2(z)\,\mu^2(t)\\&=\nu^2(t)+k^2\lambda^2(t)\,\mu^2(z)=1-k^2\lambda^2(z)\,\lambda^2(t).\end{aligned}$$

Expression de $\lambda_1(z+t)$.

13. La formule

$$\lambda\left(\frac{\omega}{4}-z\right)=\frac{\mu(z)}{\nu(z)}$$

peut se transformer en

$$\nu(z)+k\,\mu(z)\,\lambda\left(z+\frac{\omega'}{2}-\frac{\omega}{4}\right)=0,$$

d'après quoi la fonction de z,

$$\nu(z)+k\,\mu(z)\,\lambda\left(\frac{\omega}{4}-t\right),$$

s'annule pour

$$z+\frac{\omega'}{2}-\frac{\omega}{4}=\frac{\omega}{4}-t\quad\text{ou}\quad z=\frac{\omega}{2}-\frac{\omega'}{2}-t.$$

Puis, comme, en changeant z en $\frac{\omega}{4} - t$, on a

$$\nu\left(\frac{\omega}{4} - t\right) + k\mu\left(\frac{\omega}{4} - t\right)\lambda\left(\frac{\omega'}{2} - t\right) = 0,$$

on voit que la fonction de z

$$\nu\left(\frac{\omega}{4} - t\right) + k\mu\left(\frac{\omega}{4} - t\right)\lambda(z)$$

s'annule par $z = \frac{\omega'}{2} - t$.

Il s'ensuit que le rapport

$$\frac{\nu(z) + k\mu(z)\lambda\left(\frac{\omega}{4} - t\right)}{\nu\left(\frac{\omega}{4} - t\right) + k\mu\left(\frac{\omega}{4} - t\right)\lambda(z)},$$

qui a ω et $2\omega'$ pour périodes, présente dans le parallélogramme $(\omega, 2\omega')$, ayant un sommet en $(z = -t)$, les deux zéros

$$z = \frac{\omega}{2} + \frac{\omega'}{2} - t, \quad z = \frac{\omega}{2} + \frac{3}{2}\omega' - t$$

et les deux infinis

$$z = \frac{\omega'}{2} - t, \quad z = 3\frac{\omega'}{2} - t;$$

d'où l'on conclut

$$\lambda_1(z + t) = \mathrm{A}\frac{\nu(z) + k\mu(z)\lambda\left(\frac{\omega}{4} - t\right)}{\nu\left(\frac{\omega}{4} - t\right) + k\mu\left(\frac{\omega}{4} - t\right)\lambda(z)},$$

ce qui, pour $z = 0$, donne

$$\lambda_1(t) = \mathrm{A}\frac{1 + k\lambda\left(\frac{\omega}{4} - t\right)}{\nu\left(\frac{\omega}{4} - t\right)} = \mathrm{A}\frac{1 + k\frac{\mu(t)}{\nu(t)}}{\frac{k'}{\nu(t)}} = \mathrm{A}\frac{\nu(t) + k\mu(t)}{k'},$$

c'est-à-dire $\mathrm{A} = 1$; donc

$$(1)\quad \lambda_1(z + t) = \frac{\nu(z) + k\mu(z)\lambda\left(\frac{\omega}{4} - t\right)}{\nu\left(\frac{\omega}{4} - t\right) + k\mu\left(\frac{\omega}{4} - t\right)\lambda(z)} = \frac{\nu(t) + k\mu(t)\lambda\left(\frac{\omega}{4} - z\right)}{\nu\left(\frac{\omega}{4} - z\right) + k\mu\left(\frac{\omega}{4} - z\right)\lambda(t)}$$

ou

$$(1)' \qquad \lambda_1(z+t) = \frac{\nu(z)\,\nu(t) + k\,\mu(z)\,\mu(t)}{k'[1 + k\,\lambda(z)\,\lambda(t)]};$$

de là

$$(2)\quad \left\{ \begin{aligned} \lambda_1(z-t) = \frac{\nu(z)\,\nu(t) + k\,\mu(z)\,\mu(t)}{k'[1 - k\,\lambda(z)\,\lambda(t)]} &= \frac{\nu(z) + k\,\mu(z)\,\lambda\left(\frac{\omega}{4}+t\right)}{\nu\left(\frac{\omega}{4}+t\right) + k\,\mu\left(\frac{\omega}{4}+t\right)\lambda(z)} \\ &= \frac{\nu(t) + k\,\mu(t)\,\lambda\left(\frac{\omega}{4}-z\right)}{\nu\left(\frac{\omega}{4}-z\right) - k\,\mu\left(\frac{\omega}{4}-z\right)\lambda(t)}. \end{aligned} \right.$$

Remarque. — La fonction

$$\lambda_1\left(\frac{\omega}{4}+z\right) = \frac{\nu(z)}{1 + k\,\lambda(z)} = \sqrt{\frac{1 - k\,\lambda(z)}{1 + k\,\lambda(z)}}$$

et

$$\lambda_1\left(\frac{\omega}{4}-z\right) = \frac{\nu(z)}{1 - k\,\lambda(z)} = \frac{1 + k\,\lambda(z)}{\nu(z)} = \sqrt{\frac{1 + k\,\lambda(z)}{1 - k\,\lambda(z)}} = \frac{1}{\lambda_1\left(\frac{\omega}{4}+z\right)}.$$

14. *Conséquences.* — La formule $(1)'$ étant

$$\nu(z+t) + k\,\mu(z+t) = \frac{[\nu(z)\,\nu(t) + k\,\mu(z)\,\mu(t)][1 - k\,\lambda(z)\,\lambda(t)]}{1 - k^2\lambda^2(z)\,\lambda^2(t)}$$

se dédouble en

$$(3)\quad \left\{ \begin{aligned} \nu(z+t) &= \frac{\nu(z)\,\nu(t) - k^2\,\mu(z)\,\lambda(z)\,\mu(t)\,\lambda(t)}{1 - k^2\lambda^2(z)\,\lambda^2(t)}, \\ \mu(z+t) &= \frac{\mu(z)\,\mu(t) - \lambda(z)\,\lambda(t)\,\nu(z)\,\nu(t)}{1 - k^2\lambda^2(z)\,\lambda^2(t)}, \end{aligned} \right.$$

formules déjà trouvées.

15. La formule $(1)'$, donnant

$$\frac{1}{\lambda_1(z+t)} = \frac{k'[1 + k\,\lambda(z)\,\lambda(t)]}{\nu(z)\,\nu(t) + k\,\mu(z)\,\mu(t)}$$

ou

$$\frac{\nu(z+t) - k\,\mu(z+t)}{k'} = \frac{k'[1 + k\,\lambda(z)\,\lambda(t)]}{\nu(z)\,\nu(t) + k\,\mu(z)\,\mu(t)},$$

peut se transformer en

$$(1)'' \qquad \lambda_1(z+t) = \frac{k'[1 - k\lambda(z)\lambda(t)}{\nu(z)\nu(t) - k\mu(z)\mu(t)};$$

d'où

$$(2)' \qquad \lambda_1(z-t) = \frac{k'[1 + k\lambda(z)\lambda(t)]}{\nu(z)\nu(t) - k\mu(z)\mu(t)},$$

ce qui mène à

$$(4) \qquad \left\{\begin{aligned} \lambda_1(z+t) + \lambda_1(z-t) &= \frac{2k'}{\nu(z)\nu(t) - k\mu(z)\mu(t)}, \\ \lambda_1(z+t) - \lambda_1(z-t) &= -\frac{-2kk'\lambda(z)\lambda(t)}{\nu(z)\nu(t) - k\mu(z)\mu(t)}: \end{aligned}\right.$$

d'où

$$(5) \qquad \left\{\begin{aligned} \nu(z+t) + \nu(z-t) &= \frac{2k'^2\nu(z)\nu(t)}{\nu^2(z)\nu^2(t) - k^2\mu^2(z)\mu^2(t)} = \frac{2\nu(z)\nu(t)}{1 - k^2\lambda^2(z)\lambda^2(t)}, \\ \mu(z+t) + \mu(z-t) &= \frac{2k'^2\mu(z)\mu(t)}{\nu^2(z)\nu^2(t) - k^2\mu^2(z)\mu^2(t)} = \frac{2\mu(z)\mu(t)}{1 - k^2\lambda^2(z)\lambda^2(t)}, \\ \nu(z+t) - \nu(z-t) &= -\frac{2k^2k'^2\lambda(z)\lambda(t)\mu(z)\mu(t)}{\nu^2(z)\nu^2(t) - k^2\mu^2(z)\mu^2(t)} = -\frac{2k^2\lambda(z)\lambda(t)\mu(z)\mu(t)}{1 - k^2\lambda^2(z)\lambda^2(t)}, \\ \mu(z+t) - \mu(z-t) &= -\frac{2k'^2\lambda(z)\lambda(t)\nu(z)\nu(t)}{\nu^2(z)\nu^2(t) - k^2\mu^2(z)\mu^2(t)} = -\frac{2\lambda(z)\lambda(t)\nu(z)\nu(t)}{1 - k^2\lambda^2(z)\lambda^2(t)}, \end{aligned}\right.$$

formules obtenues précédemment.

16. D'autre part, il en résulte

$$(6) \qquad \left\{\begin{aligned} &[\nu(z+t) + \nu(z-t)]\nu(z)\nu(t) - k^2[\mu(z+t) + \mu(z-t)]\mu(z)\mu(t) = 2k'^2, \\ &[\mu(z+t) + \mu(z-t)]\nu(z)\nu(t) + [\nu(z+t) + \nu(z-t)]\mu(z)\mu(t) = 0, \\ &\text{et} \\ &[\nu(z+t) - \nu(z-t)]\nu(z)\nu(t) - k^2[\mu(z+t) - \mu(z-t)]\mu(z)\mu(t) = 0, \\ &[\mu(z+t) - \mu(z-t)]\nu(z)\nu(t) - [\nu(z+t) - \nu(z-t)]\mu(z)\mu(t) = -2k'^2\lambda(z)\lambda(t). \end{aligned}\right.$$

17. Par la formule $(1)'$, prise sous la forme

$$\lambda_1(z+t)k'[1 + k\lambda(z)\lambda(t)] = \nu(z)\nu(t) + k\mu(z)\mu(t),$$

on obtient

$$(7) \qquad \left\{\begin{aligned} \nu(z+t) + k^2\mu(z+t)\lambda(z)\lambda(t) &= \nu(z)\nu(t), \\ \mu(z+t) + \nu(z+t)\lambda(z)\lambda(t) &= \mu(z)\mu(t), \end{aligned}\right.$$

formules déjà trouvées.

La même équation $(1)'$ donnant

$$\frac{\nu(z+t)-k\mu(z+t)}{k'}=\frac{k'[1+k\lambda(z)\lambda(t)]}{\nu(z)\nu(t)+k\mu(z)\mu(t)}$$

ou

$$[\nu(z+t)-k\mu(z+t)][\nu(z)\nu(t)+k\mu(z)\mu(t)]=k'^2[1+k\lambda(z)\lambda(t)],$$

il s'ensuit

$$(8)\qquad \left\{\begin{array}{l}\nu(z+t)\nu(z)\nu(t)-k^2\mu(z+t)\mu(z)\mu(t)=k'^2,\\ \nu(z+t)\mu(z)\mu(t)-\mu(z+t)\nu(z)\nu(t)=k'\lambda(z)\lambda(t).\end{array}\right.$$

Cette dernière formule, quand on y change t en $-t-z$, devient

$$\nu(t)\mu(z)\mu(t+z)-\mu(t)\nu(z)\nu(t+z)=-k'^2\lambda(z)\lambda(t+z),$$

d'où, par un échange entre z et t,

$$\nu(z)\mu(t)\mu(t+z)-\mu(z)\nu(t)\nu(t+z)=-k'^2\lambda(t)\lambda(t+z).$$

De ces dernières, on tire

$$(9)\qquad \left\{\begin{array}{l}[\mu(z)\nu(t)+\mu(t)\nu(z)][\mu(z+t)-\nu(z+t)]=-k'^2[\lambda(z)+\lambda(t)]\lambda(z+t),\\ [\mu(z)\nu(t)-\mu(t)\nu(z)][\mu(z+t)+\nu(z+t)]=-k'^2[\lambda(z)-\lambda(t)]\lambda(z+t),\end{array}\right.$$

d'où

$$(10)\qquad \frac{\lambda(z)+\lambda(t)}{\lambda(z)-\lambda(t)}=\frac{\mu(z+t)-\nu(z+t)}{\mu(z+t)+\nu(z+t)}\,\frac{\mu(z)\nu(t)+\mu(t)\nu(z)}{\mu(z)\nu(t)-\mu(t)\nu(z)},$$

ce qui, rapproché de la formule $(15)'$ du n° 3, conduit à

$$\frac{\nu(z-t)+\mu(z-t)}{\nu(z-t)-\mu(z-t)}\,\frac{\mu(t)\nu(z)-\nu(t)\mu(z)}{\mu(t)\nu(z)+\nu(t)\mu(z)}=\frac{\mu(z+t)-\nu(z+t)}{\mu(z+t)+\nu(z-t)}\,\frac{\mu(z)\nu(t)+\mu(t)\nu(z)}{\mu(z)\nu(t)-\mu(t)\nu(z)}$$

ou

$$(11)\qquad \left[\frac{\mu(z)\nu(t)-\mu(t)\nu(z)}{\mu(z)\nu(t)+\mu(t)\nu(z)}\right]^2=\frac{\mu(z-t)-\nu(z-t)}{\mu(z-t)+\nu(z-t)}\,\frac{\mu(z+t)-\nu(z+t)}{\mu(z+t)+\nu(z+t)}.$$

18. Les formules $(1)'$ et (2) donnent par une division

$$(12)\qquad \frac{\lambda_1(z+t)}{\lambda_1(z-t)}=\frac{1-k\lambda(z)\lambda(t)}{1+k\lambda(z)\lambda(t)}.$$

La même formule (2) pouvant se remplacer par

$$\frac{1}{\lambda_1(z-t)}=\frac{\nu(z)\nu(t)-k\mu(z)\mu(t)}{k'[1+k\lambda(z)\lambda(t)]},$$

il s'ensuit, avec la formule (1)',

$$(13)\quad \lambda_1(z+t)\lambda_1(z-t)=\frac{\nu(z)\nu(t)+k\mu(z)\mu(t)}{\nu(z)\nu(t)-k\mu(z)\mu(t)}=\frac{1+k\lambda\left(\frac{\omega}{4}-z\right)\lambda\left(\frac{\omega}{4}-t\right)}{1-k\lambda\left(\frac{\omega}{4}-z\right)\lambda\left(\frac{\omega}{4}-t\right)},$$

d'où

$$\lambda_1\left(\frac{\omega'}{2}+t\right)\lambda_1\left(\frac{\omega'}{2}-t\right)=\frac{1+k\lambda\left(\frac{\omega}{4}-t\right)}{1-k\lambda\left(\frac{\omega}{4}-t\right)}=\frac{1+k\lambda\left(\frac{\omega}{4}+t\right)}{1-k\lambda\left(\frac{\omega}{4}+t\right)}.$$

Sous une autre forme, on a ainsi

$$(12)'\qquad \frac{\lambda_1[(2m+1)z]}{\lambda_1(z)}=\frac{1-k\lambda[(m+1)z]\lambda(mz)}{1+k\lambda[(m+1)z]\lambda(mz)},$$

$$(13)'\qquad \lambda_1[(2m+1)z]\lambda_1(z)=\frac{\nu[(m+1)z]\nu(mz)+k\mu[(m+1)z]\mu(mz)}{\nu[(m+1)z]\nu(mz)-k\mu[(m+1)z]\mu(mz)}.$$

On tire de la formule (12), en chassant les dénominateurs,

$$\nu(z+t)+k^2\mu(z+t)\lambda(z)\lambda(t)=\nu(z-t)-k^2\mu(z-t)\lambda(z)\lambda(t),$$
$$\mu(z+t)+\nu(z+t)\lambda(z)\lambda(t)=\mu(z-t)-\nu(z-t)\lambda(z)\lambda(t)$$

ou

$$(14)\qquad \begin{cases} \nu(z+t)-\nu(z-t)=-k^2\lambda(z)\lambda(t)[\mu(z+t)+\mu(z-t)], \\ [\nu(z+t)+\nu(z-t)]\lambda(z)\lambda(t)]=-[\mu(z+t)-\mu(z-t)], \end{cases}$$

d'où

$$\frac{\nu(z+t)-\nu(z-t)}{\nu(z+t)+\nu(z-t)}=k^2\lambda^2(z)\lambda^2(t)\frac{\mu(z+t)+\mu(z-t)}{\mu(z+t)-\mu(z-t)}$$

et

$$(15)\qquad \begin{cases} [\nu(z+t)+\nu(z-t)][\nu(z+t)-\nu(z-t)] \\ \quad =k^2[\mu(z+t)+\mu(z-t)][\mu(z+t)-\mu(z-t)]. \end{cases}$$

La même formule, prise au préalable sous la forme

$$\frac{\nu(z+t)+k\mu(z+t)}{k'}\,\frac{\nu(z-t)-k\mu(z-t)}{k'}=\frac{1-k\lambda(z)\lambda(t)}{1+k\lambda(z)\lambda(t)},$$

se dédouble, quand on y chasse les dénominateurs, en

$$(16)\qquad \begin{cases} \nu(z+t)\nu(z-t)-k^2\mu(z+t)\mu(z-t) \\ \quad +k^2\lambda(z)\lambda(t)[\mu(z+t)\nu(z-t)-\mu(z-t)\nu(z+t)]=k'^2, \\ \mu(z+t)\nu(z-t)-\mu(z-t)\nu(z+t) \\ \quad +\lambda(z)\lambda(t)[\nu(z+t)\nu(z-t)-k^2\mu(z+t)\mu(z-t)]=-k'^2\lambda(z)\lambda(t); \end{cases}$$

on trouve de même, par la formule (13),

$$
(17)\quad \left\{\begin{aligned}
&[\nu(z+t)\,\nu(z-t)+k^2\,\mu(z+t)\,\mu(z-t)]\,\nu(z)\,\nu(t)\\
&\quad -k^2[\mu(z+t)\,\nu(z-t)+\mu(z-t)\,\nu(z+t)]\,\mu(z)\,\mu(t)=k'^2\nu(z)\,\nu(t),\\
&[\mu(z+t)\,\nu(z-t)+\mu(z-t)\,\nu(z+t)]\,\nu(z)\,\nu(t)\\
&\quad -[\nu(z+t)\,\nu(z-t)+k^2\,\mu(z+t)\,\mu(z-t)]\,\mu(z)\,\mu(t)=k'^2\,\mu(z)\,\mu(t).
\end{aligned}\right.
$$

Les formules (12) et (13), prises sous les formes

$$
\frac{\nu(z+t)+k\mu(z+t)}{k'}\;\frac{\nu(z-t)-k\mu(z-t)}{k'}=\frac{[1-k\lambda(z)\,\lambda(t)]^2}{1-k^2\lambda^2(z)\,\lambda^2(t)},
$$

$$
\frac{\nu(z+t)+k\mu(z+t)}{k'}\;\frac{\nu(z-t)+k\mu(z-t)}{k'}=\frac{[\nu(z)\,\nu(t)+k\mu(z)\,\mu(t)]^2}{\nu^2(z)\,\nu^2(t)-k^2\mu^2(z)\,\mu^2(t)},
$$

se dédoublent en les suivantes :

$$
\left\{\begin{aligned}
&\nu(z+t)\,\nu(z-t)-k^2\mu(z+t)\,\mu(z-t)=k'^2\,\frac{1+k^2\lambda^2(z)\,\lambda^2(t)}{1-k^2\lambda^2(z)\,\lambda^2(t)},\\
&\mu(z+t)\,\nu(z-t)-\mu(z-t)\,\nu(z+t)=-\frac{2\lambda(z)\,\lambda(t)}{1-k^2\lambda^2(z)\,\lambda^2(t)},\\
&\text{et}\\
&\nu(z+t)\,\nu(z-t)+k^2\mu(z+t)\,\mu(z-t)=k'^2\,\frac{\nu^2(z)\,\nu^2(t)+k^2\mu^2(z)\,\mu^2(t)}{\nu^2(z)\,\nu^2(t)-k^2\mu^2(z)\,\mu^2(t)}=\frac{\nu^2(z)\,\nu^2(t)+k^2\mu^2(z)\,\mu^2(t)}{1-k^2\lambda^2(z)\,\lambda^2(t)},\\
&\mu(z+t)\,\nu(z-t)+\mu(z-t)\,\nu(z+t)=2k'^2\,\frac{\mu(z)\,\mu(t)\,\nu(z)\,\nu(t)}{\nu^2(z)\,\nu^2(t)-k^2\mu^2(z)\,\mu^2(t)}=\frac{2\mu(z)\,\mu(t)\,\nu(z)\,\nu(t)}{1-k^2\lambda^2(z)\,\lambda^2(t)};
\end{aligned}\right.
$$

d'où l'on déduit

$$
(19)\quad \left\{\begin{aligned}
&\nu(z+t)\,\nu(z-t)=\frac{1-k^2\lambda^2(z)-k^2\lambda^2(t)+k^2\lambda^2(z)\,\lambda^2(t)}{1-k^2\lambda(z)\,\lambda^2(t)}=\frac{\nu^2(z)-k^2\mu^2(z)\,\lambda^2(t)}{\nu^2(z)+k^2\lambda^2(z)\,\mu^2(t)},\\
&\mu(z+t)\,\mu(z-t)=\frac{1-\lambda^2(z)-\lambda^2(t)+k^2\lambda^2(z)\,\lambda^2(t)}{1-k^2\lambda^2(z)\,\lambda^2(t)}=\frac{\mu^2(z)-\lambda^2(t)\,\nu^2(z)}{\mu^2(z)+\lambda^2(z)\,\nu^2(t)},\\
&\mu(z+t)\,\nu(z-t)=\frac{\mu(z)\,\mu(t)\,\nu(z)\,\nu(t)-\lambda(z)\,\lambda(t)}{1-k^2\lambda^2(z)\,\lambda^2(t)},\\
&\mu(z-t)\,\nu(z+t)=\frac{\mu(z)\,\mu(t)\,\nu(z)\,\nu(t)+\lambda(z)\,\lambda(t)}{1-k^2\lambda^2(z)\,\lambda^2(t)}.
\end{aligned}\right.
$$

19. La formule

$$
\lambda_1(z+t)=\frac{\nu(z)+k\mu(z)\lambda\left(\frac{\omega}{4}-t\right)}{\nu\left(\frac{\omega}{4}-t\right)+k\mu\left(\frac{\omega}{4}-t\right)\lambda(z)},
$$

quand on y remplace t par $-\frac{\omega}{4}+t$, devient

$$(20)\qquad \lambda_1\left(-\frac{\omega}{4}+z+t\right)=\frac{\nu(z)+k\mu(z)\lambda\left(\frac{\omega}{4}-t\right)}{\nu\left(\frac{\omega}{2}-t\right)+k\mu\left(\frac{\omega}{2}-t\right)\lambda(z)}=\frac{\nu(z)+k\mu(z)\lambda(t)}{\nu(t)-k\mu(t)\lambda(z)}.$$

C'est alors une formule où le second membre est analogue à celui de

$$\nu_1(z+t)=\frac{\mu(z)+i\lambda(z)\nu(t)}{\mu(t)-i\lambda(t)\nu(z)}.$$

Il s'ensuit

$$(21)\qquad \begin{cases} \lambda_1\left(-\frac{\omega}{4}+z+t\right)=\frac{\nu(t)+k\mu(t)\lambda(z)}{\nu(z)-k\mu(z)\lambda(t)}=\frac{\nu(z)+k\mu(z)\lambda(t)}{\nu(t)-k\mu(t)\lambda(z)}, \\ \lambda_1\left(-\frac{\omega}{4}+z-t\right)=\frac{\nu(z)-k\mu(z)\lambda(t)}{\nu(t)-k\mu(t)\lambda(z)}=\frac{\nu(t)+k\mu(t)\lambda(z)}{\nu(z)+k\mu(z)\lambda(t)}; \end{cases}$$

d'où

$$(22)\qquad \frac{\lambda_1\left(-\frac{\omega}{4}+z+t\right)}{\lambda_1\left(-\frac{\omega}{4}+z-t\right)}=\frac{\nu(z)+k\mu(z)\lambda(t)}{\nu(z)-k\mu(z)\lambda(t)}$$

ou bien

$$\lambda_1\left(-\frac{\omega}{4}+z+t\right)\lambda_1\left(\frac{\omega}{4}+z-t\right)=\lambda_1\left[\frac{\omega}{4}-(z+t)\right]\lambda_1\left(\frac{\omega}{4}+z-t\right)=\frac{\nu(z)+k\mu(z)\lambda(t)}{\nu(z)-k\mu(z)\lambda(t)}$$

et

$$(23)\qquad \begin{cases} \lambda_1\left(-\frac{\omega}{4}+z+t\right)\lambda_1\left(-\frac{\omega}{4}+z-t\right)=\frac{\nu(t)+k\mu(t)\lambda(z)}{\nu(t)-k\mu(t)\lambda(z)}, \\ \lambda_1\left[\frac{\omega}{4}-(z+t)\right]\lambda_1\left[\frac{\omega}{4}-(z-t)\right]=\frac{\nu(t)+k\mu(t)\lambda(z)}{\nu(t)-k\mu(t)\lambda(z)}. \end{cases}$$

La formule (20), sous la forme

$$\lambda_1\left(-\frac{\omega}{4}+z+t\right)=\frac{[\nu(z)+k\mu(z)\lambda(t)][\nu(t)+k\mu(t)\lambda(z)]}{\nu^2(t)-k^2\mu^2(t)\lambda^2(z)},$$

peut se dédoubler en

$$(24)\qquad \begin{cases} \nu\left(-\frac{\omega}{4}+z+t\right)=h'\frac{\nu(z)\nu(t)+k^2\mu(z)\mu(t)\lambda(z)\lambda(t)}{\nu^2(t)-k^2\mu^2(t)\lambda^2(z)}=h'\frac{\nu(z)\nu(t)+k^2\mu(z)\mu(t)\lambda(z)\lambda(t)}{\nu^2(z)-k^2\mu^2(z)\lambda^2(t)}, \\ \mu\left(-\frac{\omega}{4}+z+t\right)=h'\frac{\mu(z)\lambda(t)\nu(t)+\mu(t)\lambda(z)\nu(z)}{\nu^2(t)-k^2\mu^2(t)\lambda^2(z)}=h'\frac{\mu(z)\lambda(t)\nu(t)+\mu(t)\lambda(z)\nu(z)}{\nu^2(z)-k^2\mu^2(z)\lambda^2(t)}, \end{cases}$$

dont la première, en raison de ce que $\nu\left(\frac{\omega}{4}-z\right)=\frac{k'}{\nu(z)}$ revient à

$$(25)\quad \nu(z+t)=\frac{\nu^2(t)-k^2\mu^2(t)\lambda^2(z)}{\nu(z)\nu(t)+k^2\mu(z)\mu(t)\lambda(z)\lambda(t)}=\frac{\nu^2(z)-k^2\mu^2(z)\lambda^2(t)}{\nu(z)\nu(t)+k^2\mu(t)\lambda(z)\mu(z)\lambda(t)}.$$

Les formules (21) donnent par addition et soustraction

$$(26)\quad \begin{cases} \lambda_1\left(-\frac{\omega}{4}+z+t\right)+\lambda_1\left(-\frac{\omega}{4}+z-t\right)=\dfrac{2\nu(z)}{\nu(t)-k\mu(t)\lambda(z)}, \\ \lambda_1\left(-\frac{\omega}{4}+z+t\right)-\lambda_1\left(-\frac{\omega}{4}+z-t\right)=\dfrac{2k\mu(z)\lambda(t)}{\nu(t)-k\mu(t)\lambda(z)}, \end{cases}$$

d'où

$$(27)\quad \begin{cases} \nu\left(-\frac{\omega}{4}+z+t\right)+\nu\left(-\frac{\omega}{4}+z-t\right)=\dfrac{2k'\nu(z)\nu(t)}{\nu^2(t)-k^2\mu^2(t)\lambda^2(z)}, \\ \nu\left(-\frac{\omega}{4}+z+t\right)-\nu\left(-\frac{\omega}{4}+z-t\right)=\dfrac{2k^2k'\mu(z)\mu(t)\lambda(z)\lambda(t)}{\nu^2(t)-k^2\mu^2(t)\lambda^2(z)}, \\ \mu\left(-\frac{\omega}{4}+z+t\right)+\mu\left(-\frac{\omega}{4}+z-t\right)=k'\dfrac{2\mu(t)\lambda(z)\nu(z)}{\nu^2(t)-k^2\mu^2(t)\lambda^2(z)}, \\ \mu\left(-\frac{\omega}{4}+z+t\right)-\mu\left(-\frac{\omega}{4}+z-t\right)=k'\dfrac{2\mu(z)\lambda(t)\nu(t)}{\nu^2(t)-k^2\mu^2(t)\lambda^2(z)}, \end{cases}$$

et d'autre façon

$$(28)\quad \begin{cases} \left[\nu\left(-\frac{\omega}{4}+z+t\right)+\nu\left(-\frac{\omega}{4}+z-t\right)\right]\nu(t) \\ \quad -k^2\mu(t)\lambda(z)\left[\mu\left(-\frac{\omega}{4}+z+t\right)+\mu\left(-\frac{\omega}{4}+z-t\right)\right]=2k'\nu(z), \\ \left[\mu\left(-\frac{\omega}{4}+z+t\right)+\mu\left(-\frac{\omega}{4}+z-t\right)\right]\nu(t) \\ \quad -\mu(t)\lambda(z)\left[\nu\left(-\frac{\omega}{4}+z+t\right)+\nu\left(-\frac{\omega}{4}+z-t\right)\right]=0, \\ \left[\nu\left(-\frac{\omega}{4}+z+t\right)-\nu\left(-\frac{\omega}{4}+z-t\right)\right]\nu(t) \\ \quad -k^2\mu(t)\lambda(z)\left[\mu\left(-\frac{\omega}{4}+z+t\right)-\mu\left(-\frac{\omega}{4}+z-t\right)\right]=0, \\ \left[\mu\left(-\frac{\omega}{4}+z+t\right)-\mu\left(-\frac{\omega}{4}+z-t\right)\right]\nu(t) \\ \quad -\mu(t)\lambda(z)\left[\nu\left(-\frac{\omega}{4}+z+t\right)-\nu\left(-\frac{\omega}{4}+z-t\right)\right]=2k'\mu(z)\lambda(t) \end{cases}$$

Par la formule (20) on a encore

$$(29)\quad \begin{cases} \nu(t)\,\nu\left(-\frac{\omega}{4}+z+t\right)-k^2\mu(t)\,\lambda(z)\,\mu\left(-\frac{\omega}{4}+z+t\right)=k'\,\nu(z), \\ \nu(t)\,\mu\left(-\frac{\omega}{4}+z+t\right)-\quad\mu(t)\,\lambda(z)\,\nu\left(-\frac{\omega}{4}+z+t\right)=k'\,\mu(z)\,\lambda(t), \end{cases}$$

ou, par le changement de t en $-t$ et de z en $z+t$,

$$(30)\quad \begin{cases} \nu(t)\,\nu\left(-\frac{\omega}{4}+z\right)-k^2\mu(t)\,\lambda(z+t)\,\mu\left(-\frac{\omega}{4}+z\right)=k'\,\nu(z+t), \\ \nu(t)\,\mu\left(-\frac{\omega}{4}+z\right)-\quad\mu(t)\,\lambda(z+t)\,\nu\left(-\frac{\omega}{4}+z\right)=-k'\,\mu(z+t)\,\lambda(t), \end{cases}$$

et, si l'on change là z en $\frac{\omega}{4}+z$,

$$(31)\quad \begin{cases} \nu(t)\,\nu(z)=k^2\mu(t)\,\mu(z)\,\lambda\left(\frac{\omega}{4}+z+t\right)+k'\,\nu\left(\frac{\omega}{4}+z+t\right), \\ \nu(t)\,\mu(z)=\mu(t)\,\nu(z)\,\lambda\left(\frac{\omega}{4}+z+t\right)-k'\,\lambda(t)\,\mu\left(\frac{\omega}{4}+z+t\right); \end{cases}$$

d'où, par un échange entre z et t dans la dernière,

$$\nu(z)\,\mu(t)=\mu(z)\,\nu(t)\,\lambda\left(\frac{\omega}{4}+z+t\right)-k'\,\lambda(z)\,\mu\left(\frac{\omega}{4}+z+t\right).$$

De là, par addition et soustraction,

$$(32)\quad \begin{cases} [\nu(z)\mu(t)+\nu(t)\mu(z)]\left[1-\lambda\left(\frac{\omega}{4}+z+t\right)\right]=-k'[\lambda(z)+\lambda(t)]\,\mu\left(\frac{\omega}{4}+z+t\right), \\ [\nu(z)\mu(t)-\nu(t)\mu(z)]\left[1+\lambda\left(\frac{\omega}{4}+z+t\right)\right]=-k'[\lambda(z)-\lambda(t)]\,\mu\left(\frac{\omega}{4}+z+t\right); \end{cases}$$

d'où

$$(33)\quad \frac{\lambda(z)+\lambda(t)}{\lambda(z)-\lambda(t)}=\frac{1-\lambda\left(\frac{\omega}{4}+z+t\right)}{1+\lambda\left(\frac{\omega}{4}+z+t\right)}\,\frac{\nu(z)\,\mu(t)+\nu(t)\,\mu(z)}{\nu(z)\,\mu(t)-\nu(t)\,\mu(z)}.$$

Comme on a trouvé

$$\begin{aligned} \frac{\lambda(z)+\lambda(t)}{\lambda(z)-\lambda(t)}&=\frac{\mu(z+t)-\nu(z+t)}{\mu(z+t)+\nu(z+t)}\,\frac{\mu(z)\,\nu(t)+\mu(t)\,\nu(z)}{\mu(z)\,\nu(t)-\mu(t)\,\nu(z)} \\ &=\frac{\nu(z-t)+\mu(z-t)}{\nu(z-t)-\mu(z-t)}\,\frac{\nu(z)\,\mu(t)-\nu(t)\,\mu(z)}{\nu(z)\,\mu(t)+\nu(t)\,\mu(z)}, \end{aligned}$$

il s'ensuit

$$(34)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\nu(z+t)-\mu(z+t)}{\nu(z+t)+\mu(z+t)}=\frac{1-\lambda\left(\frac{\omega}{4}+z+t\right)}{1+\lambda\left(\frac{\omega}{4}+z+t\right)},\\ &\frac{\nu(z-t)+\mu(z-t)}{\nu(z-t)-\mu(z-t)}=\frac{1-\lambda\left(\frac{\omega}{4}+z+t\right)}{1+\lambda\left(\frac{\omega}{4}+z+t\right)}\left[\frac{\nu(z)\,\mu(t)+\nu(t)\,\mu(z)}{\nu(z)\,\mu(t)-\nu(t)\,\mu(z)}\right]^2. \end{aligned}\right.$$

La formule (22) est, sous une autre forme,

$$\frac{\lambda_1\left[-\frac{\omega}{4}+(2m+1)z\right]}{\lambda_1\left(-\frac{\omega}{4}+z\right)}=\frac{\nu[(m+1)z]+k\,\mu[(m+1)z]\,\lambda(mz)}{\nu[(m+1)z]-k\,\mu[(m+1)z]\,\lambda(mz)},$$

et la suivante est

$$\lambda_1\left[-\frac{\omega}{4}+(2m+1)z\right]\lambda_1\left(-\frac{\omega}{4}+z\right)=\frac{\nu(mz)+k\,\mu(mz)\,\lambda[(m+1)z]}{\nu(mz)-k\,\mu(mz)\,\lambda[(m+1)z]}.$$

Ces formules (22), (23), écrites comme il suit,

$$\frac{\nu\left(-\frac{\omega}{4}+z+t\right)+k\,\mu\left(-\frac{\omega}{4}+z+t\right)}{k'}\;\frac{\nu\left(-\frac{\omega}{4}+z-t\right)-k\,\mu\left(-\frac{\omega}{4}+z-t\right)}{k'}=\frac{[\nu(z)+k\,\mu(z)\,\lambda(t)]^2}{\nu^2(z)-k^2\,\mu^2(z)\,\lambda^2(t)},$$

$$\frac{\nu\left(-\frac{\omega}{4}+z+t\right)+k\,\mu\left(-\frac{\omega}{4}+z+t\right)}{k'}\;\frac{\nu\left(-\frac{\omega}{4}+z-t\right)+k\,\mu\left(-\frac{\omega}{4}+z-t\right)}{k'}=\frac{[\nu(t)+k\,\mu(t)\,\lambda(z)]^2}{\nu^2(t)-k^2\,\mu^2(t)\,\lambda^2(z)},$$

peuvent être dédoublées en

$$(35)\quad \left\{\begin{aligned} &\nu\left(-\frac{\omega}{4}+z+t\right)\nu\left(-\frac{\omega}{4}+z-t\right)-k^2\,\mu\left(-\frac{\omega}{4}+z+t\right)\mu\left(-\frac{\omega}{4}+z-t\right)=k'^2\,\frac{\nu^2(z)+k^2\,\mu^2(z)\,\lambda^2(t)}{\nu^2(z)-k^2\,\mu^2(z)\,\lambda^2(t)},\\ &\mu\left(-\frac{\omega}{4}+z+t\right)\nu\left(-\frac{\omega}{4}+z-t\right)-\quad\nu\left(-\frac{\omega}{4}+z+t\right)\mu\left(-\frac{\omega}{4}+z-t\right)=k'^2\,\frac{2\nu(z)\,\mu(z)\,\lambda(t)}{\nu^2(z)-k^2\,\mu^2(z)\,\lambda^2(t)},\\ &\nu\left(-\frac{\omega}{4}+z+t\right)\nu\left(-\frac{\omega}{4}+z-t\right)+k^2\,\mu\left(-\frac{\omega}{4}+z+t\right)\mu\left(-\frac{\omega}{4}+z-t\right)=k'^2\,\frac{\nu^2(t)+k^2\,\mu^2(t)\,\lambda^2(z)}{\nu^2(t)-k^2\,\mu^2(t)\,\lambda^2(z)},\\ &\mu\left(-\frac{\omega}{4}+z+t\right)\nu\left(-\frac{\omega}{4}+z-t\right)+\quad\nu\left(-\frac{\omega}{4}+z+t\right)\mu\left(-\frac{\omega}{4}+z-t\right)=k'^2\,\frac{2\nu(t)\,\mu(t)\,\lambda(z)}{\nu^2(t)-k^2\,\mu^2(t)\,\lambda^2(z)}; \end{aligned}\right.$$

d'où

$$(36)\quad \left\{\begin{aligned}
&\nu\left(-\frac{\omega}{4}+z+t\right)\nu\left(-\frac{\omega}{2}+z-t\right)=k'^2\,\frac{\nu^2(z)+k^2\lambda^2(z)\mu^2(t)}{\nu^2(z)-k^2\mu^2(z)\lambda^2(t)},\\
&\mu\left(-\frac{\omega}{4}+z+t\right)\mu\left(-\frac{\omega}{4}+z-t\right)=k'^2\,\frac{\lambda^2(z)-\lambda^2(t)}{\nu^2(z)-k^2\mu^2(z)\lambda^2(t)},\\
&\mu\left(-\frac{\omega}{4}+z+t\right)\nu\left(-\frac{\omega}{4}+z-t\right)=k'^2\,\frac{\nu(z)\mu(z)\lambda(t)+\nu(t)\mu(t)\lambda(z)}{\nu^2(z)-k^2\mu^2(z)\lambda^2(t)},\\
&\nu\left(-\frac{\omega}{4}+z+t\right)\mu\left(-\frac{\omega}{4}+z-t\right)=k'^2\,\frac{\nu(t)\mu(t)\lambda(z)-\nu(z)\mu(z)\lambda(t)}{\nu^2(z)-k^2\mu^2(z)\lambda^2(t)}.
\end{aligned}\right.$$

20. Les fonctions de z et de t

$$\nu_1(z+t)\,\nu_1(z-t),\quad \frac{\nu_1(z+t)}{\nu_1(z-t)},\quad \mu_1(z+t)\,\mu_1(z-t),\quad \frac{\mu_1(z+t)}{\mu_1(z-t)},$$
$$\lambda_1(z+t)\,\lambda_1(z-t),\quad \frac{\lambda_1(z+t)}{\lambda_1(z-t)}$$

jouissent de la propriété commune de satisfaire à l'équation différentielle du second ordre

$$y''_{z^2}-y''_{t^2}=\frac{y'^2_z-y'^2_t}{y}.$$

Soit posé

$$u=\nu_1(z+t)\,\nu_1(z-t)=\frac{\mu(z)+i\lambda(z)\nu(t)}{\mu(z)-i\lambda(z)\nu(t)};$$

on en tire

$$u'_z=\frac{2gi\,\nu(z)\,\nu(t)}{[\mu(z)-i\lambda(z)\nu(t)]^2},\qquad u'_t=\frac{-2gik^2\lambda(z)\lambda(t)\mu(z)\mu(t)}{[\mu(z)-i\lambda(z)\nu(t)]^2},$$

d'où

$$u'_z+u'_t=2giu\,\nu(z+t),$$
$$u'_z-u'_t=2giu\,\nu(z-t),$$

et de là

$$u''_{z^2}+u''_{tz}=2giu\,\nu'(z+t)+2giu'_z\,\nu(z+t),$$
$$u''_{zt}+u''_{t^2}=2giu\,\nu'(z+t)+2giu'_t\,\nu(z+t),$$

ce qui donne

$$u''_{z^2}-u''_{t^2}=2gi(u'_z-u'_t)\,\nu(z+t)=-4g^2u\,\nu(z+t)\,\nu(z-t);$$

mais d'un autre côté on a

$$u'^2_z-u'^2_t=-4g^2u^2\,\nu(z+t)\,\nu(z-t),$$

d'où il vient

$$u''_{z^2} - u''_{t^2} = \frac{u'^2_z - u'^2_t}{u}.$$

L'équation aux dérivées partielles

$$y''_{z^2} - y''_{t^2} = \frac{y'^2_z - y'^2_t}{y}$$

est ainsi vérifiée par

$$y = u = \frac{\mu(z) + i\lambda(z)\nu(t)}{\mu(z) - i\lambda(z)\nu(t)} = \nu_1(z+t)\,\nu_1(z-t).$$

Comme elle ne change pas, quand z et t se permutent, elle est également satisfaite par

$$y = \nu_1(z+t)\,\nu_1(t-z) = \frac{\nu_1(z+t)}{\nu_1(z-t)} = \frac{\mu(t) + i\lambda(t)\nu(z)}{\mu(t) - i\lambda(t)\nu(z)}.$$

On trouve que, si l'on pose

$$u = \mu_1(z+t)\,\mu_1(z-t) = \frac{\nu(z) + ki\lambda(z)\mu(t)}{\nu(z) - ki\lambda(z)\mu(t)},$$

en opérant d'une manière semblable,

$$u'_z = \frac{2gki\,\mu(z)\,\mu(t)}{[\nu(z) - ki\lambda(z)\mu(t)]^2}, \quad u'_t = \frac{-2gki\lambda(z)\lambda(t)}{[\nu(z) - ki\lambda(z)\mu(t)]^2},$$

$$u'_z + u'_t = 2gkiu\,\mu(z+t),$$

$$u'_z - u'_t = 2gkiu\,\mu(z-t),$$

$$u''_{z^2} - u''_{t^2} = -4g^2k^2u\,\mu(z+t)\,\mu(z-t),$$

$$u'^2_z - u'^2_t = -4g^2k^2u^2\mu(z+t)\,\mu(z-t),$$

$$u''_{z^2} - u''_{t^2} = \frac{u'^2_z - u'^2_t}{u},$$

de sorte que la même équation différentielle est vérifiée par

$$y = \mu_1(z+t)\,\mu_1(z-t) = \frac{\nu(z) + ki\lambda(z)\mu(t)}{\nu(z) - ki\lambda(z)\mu(t)};$$

puis par

$$y = \frac{\mu_1(z+t)}{\mu_1(z-t)} = \frac{\nu(t) + ki\lambda(t)\mu(z)}{\nu(t) - ki\lambda(t)\mu(z)}.$$

De même, en posant

$$u = \frac{\lambda_1(z+t)}{\lambda_1(z-t)} = \frac{1 - k\,\lambda(z)\,\lambda(t)}{1 + k\,\lambda(z)\,\lambda(t)},$$

il vient

$$u'_z = \frac{-2k\,\lambda'(z)\,\lambda(t)}{[1 + k\,\lambda(z)\,\lambda(t)]^2}, \quad u'_t = \frac{-2k\,\lambda(z)\,\lambda'(t)}{[1 + k\,\lambda(z)\,\lambda(t)]^2},$$

$$u'_z + u'_t = -2gku\,\lambda(z+t),$$
$$u'_z - u'_t = -2gku\,\lambda(z-t),$$

puis

$$u''_{z^2} - u''_{t^2} = 4g^2k^2u\,\lambda(z+t)\,\lambda(z-t),$$
$$u'^2_z - u'^2_t = 4g^2k^2u^2\,\lambda(z+t)\,\lambda(z-t),$$

d'où

$$u''_{z^2} - u''_{t^2} = \frac{u'^2_z - u'^2_t}{u};$$

c'est-à-dire que l'équation différentielle a aussi pour solution

$$y = \frac{\lambda_1(z+t)}{\lambda_1(z-t)} = \frac{1 - k\,\lambda(z)\,\lambda(t)}{1 + k\,\lambda(z)\,\lambda(t)}.$$

Si l'on prend

$$u = \lambda_1(z+t)\,\lambda_1(z-t) = \frac{\nu(z)\,\nu(t) + k\,\mu(z)\,\mu(t)}{\nu(z)\,\nu(t) - k\,\mu(z)\,\mu(t)},$$

il s'ensuit

$$u'_z = \frac{-2gkk'^2\,\lambda(z)\,\mu(t)\,\nu(t)}{[\nu(z)\,\nu(t) - k\,\mu(z)\,\mu(t)]^2}, \quad u'_t = \frac{-2gkk'^2\,\lambda(t)\,\mu(z)\,\nu(z)}{[\nu(z)\,\nu(t) - k\,\mu(z)\,\mu(t)]^2},$$

$$u'_z + u'_t = -2gku\,\lambda(z+t),$$
$$u'_z - u'_t = -2gku\,\lambda(z-t),$$

puis

$$u''_{z^2} - u''_{t^2} = \frac{u'^2_z - u'^2_t}{u}.$$

L'équation différentielle est donc satisfaite aussi par

$$y = \lambda_1(z+t)\,\lambda_1(z-t) = \frac{\nu(z)\,\nu(t) + k\,\mu(z)\,\mu(t)}{\nu(z)\,\nu(t) - k\,\mu(z)\,\mu(t)}.$$

Multiplication.

21. Parmi les formules que nous venons d'établir, celles qui se rapportent le plus particulièrement à la multiplication, quand on y suppose m entier, sont les suivantes :

$$(1)\qquad \nu_1[(2m+1)z]\,\nu_1(z) = \frac{\mu[(m+1)z] + i\lambda[(m+1)z]\,\nu(mz)}{\mu[(m+1)z] - i\lambda[(m+1)z]\,\nu(mz)},$$

$$(2)\qquad \frac{\nu_1[(2m+1)z]}{\nu_1(z)} = \frac{\mu(mz) + i\lambda(mz)\,\nu[(m+1)z]}{\mu(mz) - i\lambda(mz)\,\nu[(m+1)z]},$$

$$(3)\qquad \nu_1(2mz) = \frac{\mu(mz) + i\lambda(mz)\,\nu(mz)}{\mu(mz) - i\lambda(mz)\,\nu(mz)};$$

$$(1)'\qquad \mu_1[(2m+1)z]\,\mu_1(z) = \frac{\nu[(m+1)z] + ki\lambda[(m+1)z]\,\mu(mz)}{\nu[(m-1)z] - ki\lambda[(m+1)z]\,\mu(mz)},$$

$$(2)'\qquad \frac{\mu_1[(2m+1)z]}{\mu_1(z)} = \frac{\nu(mz) + ki\lambda(mz)\,\mu[(m+1)z]}{\nu(mz) - ki\lambda(mz)\,\mu[(m+1)z]},$$

$$(3)'\qquad \mu_1(2mz) = \frac{\nu(mz) + ki\lambda(mz)\,\mu(mz)}{\nu(mz) - ki\lambda(mz)\,\mu(mz)};$$

$$(1)''\qquad \lambda_1[(2m+1)z]\,\lambda_1(z) = \frac{\nu[(m+1)z]\,\nu(mz) + k\mu[(m+1)z]\,\mu(mz)}{\nu[(m+1)z]\,\nu(mz) - k\mu[(m+1)z]\,\mu(mz)},$$

$$(2)''\qquad \frac{\lambda_1[(2m+1)z]}{\lambda_1(z)} = \frac{1 - k\lambda(mz)\,\lambda[(m+1)z]}{1 + k\lambda(mz)\,\lambda[(m+1)z]},$$

$$(3)''\qquad \lambda_1(2mz) = \frac{\nu^2(mz) + k\mu^2(mz)}{\nu^2(mz) - k\mu^2(mz)}.$$

En appliquant de proche en proche ces diverses formules convenablement, on est conduit à des expressions heureuses des fonctions ν_1, μ_1, λ_1 et, par suite, des fonctions λ, μ, ν des multiples consécutifs de z.

22. D'abord les formules (3), si l'on y fait $m=1$, donnent

$$\nu_1(2z) = \frac{\mu(z) + i\lambda(z)\,\nu(z)}{\mu(z) - i\lambda(z)\,\nu(z)},\qquad \mu_1(2z) = \frac{\nu(z) + ki\lambda(z)\,\mu(z)}{\nu(z) - ki\lambda(z)\,\mu(z)},\qquad \lambda_1(2z) = \frac{\nu^2(z) + k\mu^2(z)}{k'[1 + k\lambda^2(z)]},$$

d'où résultent

$$(2)\qquad \mu(2z) = \frac{\mu^2 - \lambda^2\nu^2}{\mu^2 + \lambda^2\nu^2},\qquad \lambda(2z) = \frac{2\lambda\mu\nu}{\mu^2 + \lambda^2\nu^2},\qquad \nu(2z) = \frac{\nu^2 - k^2\lambda^2\mu^2}{\nu^2 + k^2\lambda^2\mu^2},$$

et l'on a

$$(3) \qquad \mu^2 + \lambda^2\nu^2 = \nu^2 + k^2\lambda^2\mu^2 = 1 - k^2\lambda^2.$$

La formule $\dfrac{\lambda_1(z+t)}{\lambda_1(z-t)} = \dfrac{1 - k\lambda(z)\lambda(t)}{1 + k\lambda(z)\lambda(t)}$ donne encore

$$(4) \qquad \lambda_1(2z) = \frac{1+k}{k'}\,\frac{1-k\lambda^2(z)}{1+k\lambda^2(z)} = \frac{1+k}{k'}\,\frac{\lambda\left(\dfrac{\omega'}{2}+z\right) - \lambda(z)}{\lambda\left(\dfrac{\omega'}{2}+z\right) + \lambda(z)},$$

et la formule $\lambda_1(z+t)\,\lambda_1(z-t) = \dfrac{\nu(z)\nu(t) + k\mu(z)\mu(t)}{\nu(z)\nu(t) - k\mu(z)\mu(t)}$

$$(4)' \qquad \lambda_1(2z) = \frac{k'}{1+k}\,\frac{\nu^2 + k\mu^2}{\nu^2 - k\mu^2}.$$

On a ainsi

$$\frac{\nu(2z) + k\mu(2z)}{1+k} = \frac{\lambda\left(\dfrac{\omega'}{2}+z\right) - \lambda(z)}{\lambda\left(\dfrac{\omega'}{2}+z\right) + \lambda(z)},$$

d'où

$$\frac{\nu(2z) - k\mu(2z)}{1-k} = \frac{\lambda\left(\dfrac{\omega'}{2}+z\right) + \lambda(z)}{\lambda\left(\dfrac{\omega'}{2}+z\right) - \lambda(z)};$$

de là, par addition et soustraction,

$$(5) \qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\nu(2z) - k^2\mu(2z)}{k'^2} &= \frac{\lambda^2\left(\dfrac{\omega'}{2}+z\right) + \lambda^2(z)}{\lambda^2\left(\dfrac{\omega'}{2}+z\right) - \lambda^2(z)}, \\ \frac{k}{k'^2}[-\nu(2z) + \mu(2z)] &= \frac{2\lambda(z)\,\lambda\left(\dfrac{\omega'}{2}+z\right)}{\lambda^2\left(\dfrac{\omega'}{2}+z\right) - \lambda^2(z)}. \end{aligned}\right.$$

23. Faisons $m = 1$ dans la formule (1); il vient

$$\nu_1(3z) = (\mu - i\lambda)\,\frac{\mu(2z) + i\lambda(2z)\,\nu(z)}{\mu(2z) - i\lambda(2z)\,\nu(z)},$$

d'où, en usant des formules (2),

$$(6)\qquad \nu_1(3z) = (\mu - i\lambda)\,\frac{\mu^2 - \lambda^2\nu^2 + 2i\lambda\mu\nu^2}{\mu^2 - \lambda^2\nu^2 - 2i\lambda\mu\nu^2}.$$

On trouve, de même, par la formule (1)′ et les formules (2),

$$(7)\qquad \mu_1(3z) = (\nu - ki\lambda)\,\frac{\nu^2 - k^2\lambda^2\mu^2 + 2ki\lambda\nu\mu^2}{\nu^2 - k^2\lambda^2\mu^2 - 2ki\lambda\nu\mu^2},$$

et par la formule (2)″

$$(8)\qquad \lambda_1(3z) = \frac{\nu + k\mu}{k'}\,\frac{1 - k\lambda\lambda(2z)}{1 + k\lambda\lambda(2z)} = \frac{\nu + k\mu}{k'}\,\frac{\mu^2 + \lambda^2\nu^2 - 2k\lambda^2\mu\nu}{\mu^2 + \lambda^2\nu^2 + 2k\lambda^2\mu\nu}.$$

De la formule (6) on déduit

$$(9)\qquad \left\{\begin{aligned}
\mu(3z) &= \mu\,\frac{(\mu^2 - \lambda^2\nu^2)^2 - 4\lambda^2\mu^2\nu^4 + 4\lambda^2\nu^2(\mu^2 - \lambda^2\nu^2)}{(\mu^2 - \lambda^2\nu^2)^2 + 4\lambda^2\mu^2\nu^4}\\
&= \mu\,\frac{(\mu^2 - \lambda^2\nu^2)^2 - 4k'^2\lambda^4\nu^2}{(\mu^2 - \lambda^2\nu^2)^2 + 4\lambda^2\mu^2\nu^4} = \mu\,\frac{(\mu^2 + \lambda^2\nu^2)^2 - 4\lambda^2\nu^4}{(\mu^2 - \lambda^2\nu^2)^2 + 4\lambda^2\mu^2\nu^4},\\
\lambda(3z) &= \lambda\,\frac{4\mu^2\nu^2(\mu^2 - \lambda^2\nu^2) - (\mu^2 - \lambda^2\nu^2)^2 + 4\lambda^2\mu^2\nu^4}{(\mu^2 - \lambda^2\nu^2)^2 + 4\lambda^2\mu^2\nu^4}\\
&= \lambda\,\frac{4\mu^4\nu^2 - (\mu^2 - \lambda^2\nu^2)^2}{(\mu^2 - \lambda^2\nu^2)^2 + 4\lambda^2\mu^2\nu^4} = \lambda\,\frac{4\mu^2\nu^2 - (\mu^2 + \lambda^2\nu^2)^2}{(\mu^2 - \lambda^2\nu^2)^2 + 4\lambda^2\mu^2\nu^4}.
\end{aligned}\right.$$

Par la formule (7), on a

$$(9)\qquad \left\{\begin{aligned}
\nu(3z) &= \nu\,\frac{(\nu^2 - k^2\lambda^2\mu^2)^2 - 4k^2\lambda^2\nu^2\mu^4 + 4k^2\lambda^2\mu^2(\nu^2 - k^2\lambda^2\mu^2)}{(\nu^2 - k^2\lambda^2\mu^2)^2 + 4k^2\lambda^2\nu^2\mu^4}\\
&= \nu\,\frac{(\nu^2 - k^2\lambda^2\mu^2)^2 + 4k^2k'^2\lambda^4\mu^2}{(\nu^2 - k^2\lambda^2\mu^2)^2 + 4k^2\lambda^2\nu^2\mu^4} = \nu\,\frac{(\nu^2 + k^2\lambda^2\mu^2)^2 - 4k^2\lambda^2\mu^4}{(\nu^2 - k^2\lambda^2\mu^2)^2 + 4k^2\lambda^2\nu^2\mu^4},\\
\lambda(3z) &= \lambda\,\frac{4\nu^4\mu^2 - (\nu^2 - k^2\lambda^2\mu^2)^2}{(\nu^2 - k^2\lambda^2\mu^2)^2 + 4k^2\lambda^2\nu^2\mu^4} = \lambda\,\frac{4\mu^2\nu^2 - (\nu^2 + k^2\lambda^2\mu^2)^2}{(\nu^2 - k^2\lambda^2\mu^2)^2 + 4k^2\lambda^2\nu^2\mu^4},
\end{aligned}\right.$$

et par la formule (8), il vient

$$(9)\qquad \left\{\begin{aligned}
\nu(3z) &= \nu\,\frac{(\mu^2 + \lambda^2\nu^2)^2 - 4k^2\lambda^2\mu^4}{(\mu^2 + \lambda^2\nu^2)^2 - 4k^2\lambda^4\mu^2\nu^2} = \nu\,\frac{(\mu^2 - \lambda^2\nu^2)^2 + 4k'^2\lambda^2\mu^2}{(\mu^2 + \lambda^2\nu^2)^2 - 4k^2\lambda^4\mu^2\nu^2},\\
\mu(3z) &= \mu\,\frac{(\mu^2 + \lambda^2\nu^2)^2 - 4\lambda^2\nu^4}{(\mu^2 + \lambda^2\nu^2)^2 - 4k^2\lambda^4\mu^2\nu^2} = \mu\,\frac{(\mu^2 - \lambda^2\nu^2)^2 - 4k'^2\lambda^4\nu^2}{(\mu^2 - \lambda^2\nu^2)^2 - 4k^2\lambda^4\mu^2\nu^2}.
\end{aligned}\right.$$

Remarquons, d'après ces résultats, les égalités suivantes :

$$(\mu^2-\lambda^2\nu^2)^2+4\lambda^2\mu^2\nu^4=(\mu^2+\lambda^2\nu^2)^2-4k^2\lambda^4\mu^2\nu^2$$
$$=(\nu^2-k^2\lambda^2\mu^2)^2+4k^2\lambda^2\nu^2\mu^4=(\nu^2+k^2\lambda^2\mu^2)^2-4k^2\lambda^4\mu^2\nu^2.$$

24. En faisant $m=2$ dans les formules (3), on obtient

$$\left\{\begin{aligned}
\nu_1(4z)&=\frac{\mu(2z)+i\lambda(2z)\nu(2z)}{\mu(2z)-i\lambda(2z)\nu(2z)}=\frac{(\mu^2-\lambda^2\nu^2)(\mu^2+\lambda^2\nu^2)+2i\lambda\mu\nu(\nu^2-k^2\lambda^2\mu^2)}{(\mu^2-\lambda^2\nu^2)(\mu^2+\lambda^2\nu^2)-2i\lambda\mu\nu(\nu^2-k^2\lambda^2\mu^2)},\\
\mu_1(4z)&=\frac{\nu(2z)+ki\lambda(2z)\mu(2z)}{\nu(2z)-ki\lambda(2z)\mu(2z)}=\frac{(\nu^2-k^2\lambda^2\mu^2)(\nu^2+k^2\lambda^2\mu^2)+2ki\lambda\mu\nu(\mu^2-\lambda^2\nu^2)}{(\nu^2-k^2\nu^2\mu^2)(\nu^2+k^2\lambda^2\mu^2)-2ki\lambda\mu\nu(\mu^2-\lambda^2\nu^2)},\\
\lambda_1(4z)&=\frac{\nu^2(2z)+k\mu^2(2z)}{k'[1+k\lambda^2(2z)]}=\frac{(\nu^2-k^2\lambda^2\mu^2)^2+k(\mu^2-\lambda^2\nu^2)^2}{k'[(\nu^2+k^2\lambda^2\mu^2)^2+4k\lambda^2\mu^2\nu^2]}\\
&=\frac{1+k}{k'}\,\frac{1-k\lambda^2(2z)}{1+k\lambda^2(2z)}=\frac{1+k}{k'}\,\frac{(\mu^2+\lambda^2\nu^2)^2-4k\lambda^2\mu^2\nu^2}{(\mu^2-\lambda^2\nu^2)^2+4k\lambda^2\mu^2\nu^2};
\end{aligned}\right.$$

d'où

$$(11)\quad\left\{\begin{aligned}
\mu(4z)&=\frac{(\mu^4-\lambda^4\nu^4)^2-4\lambda^2\mu^2\nu^2(\nu^2-k^2\lambda^2\mu^2)^2}{(\mu^4-\lambda^4\nu^4)^2+4\lambda^2\mu^2\nu^2(\nu^2-k^2\lambda^2\mu^2)^2},\\
\lambda(4z)&=\frac{4\lambda\mu\nu(\mu^4-\lambda^4\nu^4)(\nu^2-k^2\lambda^2\mu^2)}{(\mu^4-\lambda^4\nu^4)^2+4\lambda^2\mu^2\nu^2(\nu^2-k^2\lambda^2\mu^2)^2},\\
\nu(4z)&=\frac{(\nu^4-k^4\lambda^4\mu^4)^2-4k^2\lambda^2\mu^2\nu^2(\mu^2-\lambda^2\nu^2)^2}{(\nu^4-k^4\lambda^4\mu^4)^2+4k^2\lambda^2\mu^2\nu^2(\mu^2-\lambda^2\nu^2)^2},\\
\lambda(4z)&=\frac{4\lambda\mu\nu(\nu^4-k^4\lambda^4\mu^4)(\mu^2-\lambda^2\nu^2)}{(\nu^4-k^4\lambda^4\mu^4)^2+4k^2\lambda^2\mu^2\nu^2(\mu^2-\lambda^2\nu^2)^2},\\
\nu(4z)&=\frac{(\nu^4-k^4\lambda^4\mu^4)^2-4k^2\lambda^2\mu^2\nu^2(\mu^2-\lambda^2\nu^2)^2}{(\nu^2+k^2\lambda^2\mu^2)^4-16k^2\lambda^4\mu^4\nu^4},\\
\lambda(4z)&=\frac{(\mu^2-\lambda^2\nu^2)^2(\nu^2+k^2\lambda^2\mu^2)^2-4\lambda^2\mu^2\nu^2(\nu^2-k^2\lambda^2\mu^2)^2}{(\nu^2+k^2\lambda^2\mu^2)^4-16k^2\lambda^4\mu^4\nu^4}.
\end{aligned}\right.$$

De là ressortent les égalités

$$(\mu^4-\lambda^4\nu^4)^2+4\lambda^2\mu^2\nu^2(\nu^2-k^2\lambda^2\mu^2)^2=(\nu^4-k^4\lambda^4\mu^4)^2+4k^2\lambda^2\mu^2\nu^2(\mu^2-\lambda^2\nu^2)^2$$
$$=(\nu^2+k^2\lambda^2\mu^2)^4-16k^2\lambda^4\mu^4\nu^4.$$

25. En faisant $m = 2$ dans les formules (2), on obtient

$$\left\{\begin{aligned}
\nu_1(5z) &= \nu_1 \frac{\mu(2z) + i\lambda(2z)\nu(3z)}{\mu(2z) + i\lambda(2z)\nu(3z)} \\
&= (\mu + i\lambda)\, \frac{(\mu^2 - \lambda^2\nu^2)[(\mu^2 - \lambda^2\nu^2)^2 + 4\lambda^2\mu^2\nu^4] + 2i\lambda\mu\nu^2[(\nu^2 - k^2\lambda^2\mu^2)^2 + 4k^2k'^2\lambda^4\mu^2]}{(\mu^2 - \lambda^2\nu^2)[(\mu^2 - \lambda^2\nu^2)^2 + 4\lambda^2\mu^2\nu^4] - 2i\lambda\mu\nu^2[(\nu^2 - k^2\lambda^2\mu^2)^2 + 4k^2k'^2\lambda^4\mu^2]}, \\
\mu_1(5z) &= \mu_1 \frac{\nu(2z) + ki\lambda(2z)\mu(2z)}{\nu(2z) - ki\lambda(2z)\mu(2z)} \\
&= (\nu + ki\lambda)\, \frac{(\nu^2 - k^2\lambda^2\mu^2)[(\nu^2 - k^2\lambda^2\mu^2)^2 + 4k^2\lambda^2\nu^2\mu^4] + 2ki\lambda\mu^2\nu[(\mu^2 - \lambda^2\nu^2)^2 - 4k'^2\lambda^4\nu^2]}{(\nu^2 - k^2\lambda^2\mu^2)[(\nu^2 - k^2\lambda^2\mu^2)^2 + 4k^2\lambda^2\nu^2\mu^4] - 2ki\lambda\mu^2\nu[(\mu^2 - \lambda^2\nu^2)^2 - 4k'^2\lambda^4\nu^2]}, \\
\lambda_1(5z) &= \lambda_1 \frac{1 - k\lambda(2z)\lambda(3z)}{1 + k\lambda(2z)\lambda(3z)} \\
&= \frac{\nu + k\mu}{k'}\, \frac{(\mu^2 + \lambda^2\nu^2)[(\mu^2 + \lambda^2\nu^2)^2 - 4k^2\lambda^4\mu^2\nu^2] - 2k\lambda^2\mu\nu[4\mu^4\nu^2 - (\mu^2 - \lambda^2\nu^2)^2]}{(\mu^2 + \lambda^2\nu^2)[(\mu^2 + \lambda^2\nu^2)^2 - 4k^2\lambda^4\mu^2\nu^2] + 2k\lambda^2\mu\nu[4\mu^4\nu^2 - (\mu^2 - \lambda^2\nu^2)^2]},
\end{aligned}\right.$$

et de là pour $\lambda(5z)$, $\mu(5z)$, $\nu(5z)$ des expressions où le dénominateur, qui leur est commun, est une fonction paire par rapport à λ, à μ ou à ν, et où les numérateurs sont les produits de fonctions analogues par λ, μ, ν.

26. On aura ensuite

$$\nu_1(6z) = \frac{\mu(3z) + i\lambda(3z)\nu(3z)}{\mu(3z) - i\lambda(3z)\nu(3z)},$$

$$\mu_1(6z) = \frac{\nu(3z) + ki\lambda(3z)\mu(3z)}{\nu(3z) - ki\lambda(3z)\mu(3z)},$$

$$\lambda_1(3z) = \frac{\nu^2(3z) + k\mu^2(3z)}{k^2[1 + k\lambda^2(3z)]};$$

de sorte qu'en posant

$$\lambda(3z) = \lambda\frac{A}{D}, \quad \mu(3z) = \mu\frac{B}{D}, \quad \nu(3z) = \nu\frac{C}{D},$$

on obtient

$$(13) \quad \nu_1(6z) = \frac{\mu BD + i\lambda\nu AC}{\mu BD - i\lambda\nu AC}, \quad \mu_1(6z) = \frac{\nu CD + ki\lambda\mu AB}{\nu CD - ki\lambda\mu AB}, \quad \lambda_1(6z) = \frac{\nu^2C^2 + k\mu^2B^2}{k^2(D^2 + k\lambda^2A^2)},$$

expressions où les termes sont du degré $\frac{6^2}{2}$ en λ, μ, ν, et d'où l'on tire

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned} \mu(6z) &= \frac{\mu^2 B^2 D^2 - \lambda^2\nu^2 A^2 C^2}{\mu^2 B^2 D^2 + \lambda^2\nu^2 A^2 C^2} = \frac{\mu^2 B^2 D^2 - \lambda^2\nu^2 A^2 C^2}{D^4 - k^2\lambda^4 A^4}, \\ \lambda(6z) &= \frac{2\lambda\mu\nu\, ABCD}{\mu^2 B^2 C^2 + \lambda^2\nu^2 A^2 C^2} = \frac{2\lambda\mu\nu\, ABCD}{\nu^2 C^2 D^2 + k^2\lambda^2\mu^2 A^2 B^2}, \\ \nu(6z) &= \frac{\nu^2 C^2 D^2 - k^2\lambda^2\mu^2 A^2 B^2}{\nu^2 C^2 D^2 + k^2\lambda^2\mu^2 A^2 B^2} = \frac{\nu^2 C^2 D^2 - k^2\lambda^2\mu^2 A^2 B^2}{D^4 - k^2\lambda^4 A^4}, \end{aligned}\right.$$

de sorte que

$$\mu^2 B^2 D^2 + \lambda^2\nu^2 A^2 C^2 = \nu^2 C^2 D^2 + k^2\lambda^2\mu^2 A^2 B^2 = D^4 - k^2\lambda^4 A^4.$$

Pour former $\nu_1(7z)$, $\mu_1(7z)$, $\lambda_1(7z)$, on emploiera, comme pour $\nu_1(3z)$, $\mu_1(3z)$, $\lambda_1(3z)$, les formules (1), (1)′, (2)″.

En continuant ainsi à se servir des formules (5) quand n sera pair et quand n sera impair pour $\nu_1(nz)$, $\mu_1(nz)$ alternativement des formules (1), (1)′ et des formules (2), (2)′, suivant que n sera de la forme $4p-1$ ou de la forme $4p+1$, et de la formule (2)″ pour $\lambda_1(nz)$ dans les deux cas, on s'élèvera de proche en proche jusqu'à telle valeur de n qu'on voudra.

27. Il ressort des calculs que, au cas où n est pair, les expressions de $\nu_1(nz)$, $\mu_1(nz)$, $\lambda_1(nz)$ sont des fractions dont les termes sont des fonctions paires du degré $\frac{n^2}{2}$, soit en λ, soit en μ, soit en ν; les deux termes sont conjugués dans les expressions de $\nu_1(nz)$, $\mu_1(nz)$; puis les valeurs de $\mu(nz)$, $\nu(nz)$ ont leurs termes du degré n^2 paires en λ, ou μ, ou ν, et ont le même dénominateur; mais celle de $\lambda(nz)$ avec ce dénominateur a un numérateur du degré n^2-1 qui est le produit de $2\lambda\mu\nu$ par quatre facteurs, du degré $\left(\frac{n}{2}\right)^2 - 1$ si $\frac{n}{2}$ est impair. Au cas où n est impair, les expressions de $\nu_1(nz)$, $\mu_1(nz)$ sont les produits par ν_1 et μ_1, ou par $\frac{1}{\nu_1}$ et $\frac{1}{\mu_1}$ selon que n a la forme $4p+1$ ou la forme $4p-1$, par des fractions ayant pour termes des fonctions entières paires en λ, ou μ ou ν conjuguées l'une de l'autre; et l'expression de $\lambda_1(nz)$ est toujours le produit de λ_1 par une fraction analogue : de sorte que

$\nu_1(nz)$ est une fonction rationnelle de ν_1, $\mu_1(nz)$, une pareille fonction de μ_1 et $\lambda_1(nz)$ l'est de λ_1 En outre, les valeurs de $\lambda(nz)$, $\mu(nz)$, $\nu(nz)$ ont un même dénominateur du degré n^2-1 fonction paire en λ, ou μ, ou ν à volonté, et pour numérateurs les produits de fonctions analogues respectivement par λ, μ, ν.

D'après cela, quel que soit n, $\mu(nz)$ et $\nu(nz)$ peuvent s'exprimer rationnellement, la première par $\mu(z)$, la seconde par $\nu(z)$; le dénominateur y est une fonction paire de μ ou de ν, le numérateur une fonction de même parité que n. De même, quand n est impair, $\lambda(nz)$ est une fraction rationnelle de λ, ou le dénominateur en est une fonction paire et le numérateur une fonction impaire; mais, quand n est pair, le numérateur est le produit de $\lambda\mu\nu$ par une fonction entière, paire en λ, ou μ, ou ν, à volonté, du degré n^2-4.

28. On peut, en suivant une marche analogue, obtenir sans facteurs étrangers les expressions de

$$\nu_1(\Sigma z_p),\quad \mu_1(\Sigma z_p),\quad \nu_1(\Sigma z_p);$$

d'où celles de

$$\lambda(\Sigma z_p),\quad \mu(\Sigma z_p),\quad \nu(\Sigma z_p),$$

Σz_p désignant la somme $z_1+z_2+\ldots+z_n$.

D'abord, nous avons établi les formules

$$\nu_1(z_1+z_2)=\frac{\mu(z_1)+i\lambda(z_1)\nu(z_2)}{\mu(z_2)-i\lambda(z_2)\nu(z_1)},$$

$$\mu_1(z_1+z_2)=\frac{\nu(z_1)+ki\lambda(z_1)\mu(z_2)}{\nu(z_2)-ki\lambda(z_2)\mu(z_1)},$$

$$\lambda_1(z_1+z_2)=\frac{\nu(z_1)\nu(z_2)+k\mu(z_1)\mu(z_2)}{k'(1+k\lambda(z_1)\lambda(z_2))},$$

$$\mu(z_1+z_2)=\frac{\mu(z_1)\mu(z_2)-\lambda(z_1)\lambda(z_2)\nu(z_1)\nu(z_2)}{\mu^2(z_2)+\lambda^2(z_2)\nu^2(z_1)},$$

$$\lambda(z_1+z_2)=\frac{\mu(z_1)\nu(z_1)\lambda(z_2)+\mu(z_2)\nu(z_2)\lambda(z_1)}{\mu^2(z_2)+\lambda^2(z_2)\nu^2(z_1)},$$

$$\nu(z_1+z_2)=\frac{\nu(z_1)\nu(z_2)-k^2\lambda(z_1)\lambda(z_2)\mu(z_1)\mu(z_2)}{1-k^2\lambda^2(z_1)\lambda^2(z_2)}.$$

Ces dernières formules peuvent se représenter par

$$\lambda(z_1+z_2)=\frac{L_3(z_1 z_2)}{D_4(z_1 z_2)},\quad \mu(z_1+z_2)=\frac{M_4(z_1 z_2)}{D_4(z_1 z_2)},\quad \nu(z_1+z_2)=\frac{N_4(z_1 z_2)}{D_4(z_1 z_2)},$$

le degré de chaque terme se marquant par son indice.

Cela posé, les premières formules donneront

$$\nu_1(z_1+z_2+z_3)=\frac{\mu(z_1+z_2)+i\,\lambda(z_1+z_2)\,\nu(z_3)}{\mu(z_3)-i\,\lambda(z_3)\,\nu(z_1+z_2)},$$

$$\mu_1(z_1+z_2+z_3)=\frac{\nu(z_1+z_2)+ki\,\lambda(z_1+z_2)\,\mu(z_3)}{\nu(z_3)-ki\,\lambda(z_3)\,\mu(z_1+z_2)},$$

$$\lambda_1(z_1+z_2+z_3)=\frac{\nu(z_1+z_2)\,\nu(z_3)+k\,\mu(z_1+z_2)\,\mu(z_3)}{k'[1+k\,\lambda(z_1+z_2)\,\mu(z_3)]};$$

il s'ensuivra donc

$$\nu_1(z_1+z_2+z_3)=\frac{M_4(z_1,z_2)+i\,L_3(z_1,z_2)\,\nu(z_3)}{D_4(z_1,z_2)\,\mu(z_3)-i\,N_4(z_1,z_2)\,\lambda(z_3)},$$

$$\mu_1(z_1+z_2+z_3)=\frac{N_1(z_1,z_2)+ki\,L_3(z_1,z_2)\,\mu(z_3)}{D_4(z_1,z_2)\,\nu(z_3)-ki\,M_4(z_1,z_2)\,\lambda(z_3)},$$

$$\lambda_1(z_1+z_2+z_3)=\frac{N_4(z_1,z_2)\,\nu(z_3)+k\,M_4(z_1,z_2)\,\mu(z_3)}{k'[D_4(z_1,z_2)+k\,L_3(z_1,z_2)\,\lambda(z_3)]},$$

et de là

$$\lambda(z_1+z_2+z_3)=\frac{\lambda(z_3)\,M_4(z_1,z_2)\,N_4(z_1,z_2)+\mu(z_3)\,\nu(z_3)\,D_4(z_1,z_2)\,L_3(z_1,z_2)}{D_4^2(z_1,z_2)\,\mu^2(z_3)+N_4^2(z_1,z_2)\,\lambda^2(z_3)}=\frac{L_9(z_1,z_2,z_3)}{D_8(z_1,z_2,z_3)},$$

$$\mu(z_1+z_2+z_3)=\frac{\mu(z_3)\,M_4(z_1,z_2)\,D_4(z_1,z_2)-\lambda(z_3)\,\nu(z_3)\,L_3(z_1,z_2)\,N_4(z_1,z_2)}{D_8(z_1,z_2,z_3)}=\frac{M_9(z_1,z_2,z_3)}{D_8(z_1,z_2,z_3)},$$

$$\nu(z_1+z_2+z_3)=\frac{\nu(z_3)\,N_4(z_1,z_2)\,D_4(z_1,z_2)-k^2\,\lambda(z_3)\,\mu z_3\,L_3(z_1,z_2)\,M_4(z_1,z_2)}{D_8(z_1,z_2,z_3)}=\frac{N_9(z_1,z_2,z_3)}{D_8(z_1,z_2,z_3)},$$

et ainsi de suite.

Quelques remarques sont à faire sur ces expressions.

Dans $\nu_1(\sigma_{2n})$, $\mu_1(\sigma_{2n})$, $\lambda_1(\sigma_{2n})$, les termes sont du degré $\frac{(2n)^2}{2}=2n^2$; dans $\mu(\sigma_{2n})$ et $\nu(\sigma_{2n})$, ils sont du degré $(2n)^2$, mais dans $\lambda(\sigma_{2n})$ le numérateur est du degré $(2n)^2-1$.

Dans les expressions de $\nu_1(\sigma_n)$, $\mu_1(\sigma_n)$, $\lambda_1(\sigma_n)$, quand n est impair, si n est de la forme $4p-1$, le dénominateur est du degré $\frac{n^2-1}{2}+1$, et le numérateur du degré $\frac{n^2-1}{2}$; et si n est de la forme $4p+1$, les numérateurs sont du degré $\frac{n^2-1}{2}+1$, les dénominateurs du degré $\frac{n^2-1}{2}$. Dans celles de $\lambda(\sigma_n)$, $\mu(\sigma_n)$, $\nu(\sigma_n)$, le dénominateur qui est commun est du degré n^2-1 et les numérateurs sont du degré n^2.

Notons qu'en faisant dans ces formules diverses $z_1 = z = z_2 = z_3 = \ldots$, on retombe sur les valeurs précédemment obtenues pour $\nu_1(nz)$, $\mu_1(nz)$, $\lambda_1(nz)$ et $\lambda(nz)$, $\mu(nz)$, $\nu(nz)$.

La même marche du reste réussit, avec un égal succès, quand on l'applique directement aux formules ordinaires

$$\lambda(z_1+z_2) = \frac{\lambda(z_1)\,\mu(z_2)\,\nu(z_2) + \lambda(z_2)\,\mu(z_1)\,\nu(z_1)}{1-k^2\lambda^2(z_1)\,\lambda^2(z_2)},$$

$$\mu(z_1+z_2) = \frac{\mu(z_1)\,\mu(z_2) - \lambda(z_1)\,\lambda(z_2)\,\nu(z_1)\,\nu(z_2)}{1-k^2\lambda^2(z_1)\,\lambda^2(z_2)},$$

$$\nu(z_1+z_2) = \frac{\nu(z_1)\,\nu(z_2) - k^2\lambda(z_1)\,\mu(z_1)\,\lambda(z_2)\,\mu(z_2)}{1-k^2\lambda^2(z_1)\,\lambda^2(z_2)};$$

soit qu'on veuille calculer $\lambda(\sigma_n)$, $\mu(\sigma_n)$, $\nu(\sigma_n)$, ou $\lambda(nz)$, $\mu(nz)$, $\nu(nz)$.

Par exemple, pour les dernières expressions, si l'on pose d'abord

$$\lambda(2z) = \frac{L_3}{D_4}, \quad \mu(2z) = \frac{M_4}{D_4}, \quad \nu(2z) = \frac{N_4}{D_4},$$

on aura

$$\lambda(3z) = \frac{\lambda(2z)\,\mu(z)\,\nu(z) + \lambda(z)\,\mu(2z)\,\nu(2z)}{1-k^2\lambda^2(z)\,\lambda^2(2z)} = \frac{L_3D_4\mu\nu + \lambda M_4N_4}{D_4^2 - k^2\lambda^2L_3^2} = \frac{L_9}{D_8},$$

$$\mu(3z) = \frac{\mu(2z)\,\mu(z) - \lambda(2z)\,\nu(2z)\,\lambda(z)\,\nu(z)}{1-k^2\lambda^2(z)\,\lambda^2(2z)} = \frac{M_4D_4\mu - \lambda\nu L_3N_4}{D_4^2 - k^2\lambda^2L_3^2} = \frac{M_9}{D_8},$$

$$\nu(3z) = \frac{\nu(2z)\,\nu(z) - k^2\lambda(2z)\,\mu(2z)\,\lambda(z)\,\mu(z)}{1-k^2\lambda^2(z)\,\lambda^2(2z)} = \frac{N_4D_4\nu - k^2\lambda\mu L_3M_4}{D_4^2 - k^2\lambda^2L_3^2} = \frac{N_9}{D_8};$$

puis

$$\lambda(4z) = \frac{2L_3M_4N_4D_4}{D_4^4 - k^2L_3^4} = \frac{L_{15}}{D_{16}},$$

$$\mu(4z) = \frac{M_4^2D_4^2 - L_3^2N_4^2}{D_4^4 - k^2L_3^4} = \frac{M_{16}}{D_{16}},$$

$$\nu(4z) = \frac{N_4^2D_4^2 - k^2L_3^2M_4^2}{D_4^4 - k^2L_3^4} = \frac{N_{16}}{D_{16}};$$

et ensuite

$$\lambda(5z) = \frac{\lambda(3z)\,\mu(2z)\,\nu(2z) + \lambda(2z)\,\mu(3z)\,\nu(3z)}{1 - k^2\lambda^2(3z)\,\lambda^2(2z)} = \frac{L_9 M_4 N_4 D_8 + L_3 M_9 N_9 D_4}{D_4^2 D_8^2 - k^2 L_3^2 L_9^2} = \frac{L_{25}}{D_{24}},$$

$$\mu(5z) = \frac{\mu(3z)\,\mu(2z) - \lambda(3z)\,\nu(3z)\,\lambda(2z\,\nu(2z)}{1 - k^2\lambda^2(3z)\,\lambda^2(2z)} = \frac{M_4 M_9 D_4 D_8 - L_3 L_9 N_4 N_9}{D_{24}} = \frac{M_{25}}{D_{24}},$$

$$\nu(5z) = \frac{\nu(3z)\,\nu(2z) - k^2\lambda(3z)\,\lambda(2z)\,\mu(3z)\,\mu(2z)}{1 - k^2\lambda^2(3z)\,\lambda^2(2z)} = \frac{N_4 N_9 D_4 D_8 - k^2 L_3 L_9 M_4 M_9}{D_{24}} = \frac{N_{25}}{D_{24}}.$$

En général, au cas de $n = 2n' + 1$,

$$\lambda(2nz) = \frac{2 D_{n^2-1} L_{n^2} M_{n^2} N_{n^2}}{D_{n^2-1}^4 - k^2 L_{n^2}^4} = \frac{L_{(2n)^2-1}}{D_{(2n)^2}},$$

$$\mu(2nz) = \frac{D_{n^2-1}^2 M_{n^2}^2 - L_{n^2}^2 N_{n^2}^2}{D_{n^2-1}^4 - k^2 L_{n^2}^4} = \frac{M_{(2n)^2}}{D_{(2n)^2}},$$

$$\nu(2nz) = \frac{D_{n^2-1}^2 N_{n^2}^2 - k^2 L_{n^2}^2 M_{n^2}^2}{D_{n^2-1}^4 - k^2 L_{n^2}^4} = \frac{N_{(2n)^2}}{D_{(2n)^2}};$$

au cas de $n = 2n'$,

$$\lambda(2nz) = \frac{2 D_{n^2} L_{n^2-1} M_{n^2} N_{n^2}}{D_n^4 - k^2 L_{n^2-1}^4} = \frac{L_{(2n)^2-1}}{D_{(2n)^2}},$$

$$\mu(2nz) = \frac{D_{n^2}^2 M_{n^2}^2 - L_{n^2-1}^2 N_{n^2}^2}{D_{(2n)^2}} = \frac{M_{(2n)^2}}{D_{(2n)^2}},$$

$$\nu(2nz) = \frac{D_{n^2}^2 N_{n^2}^2 - k^2 L_{n^2-1}^2 M_{n^2}^3}{D_{(2n)^2}} = \frac{N_{(2n)^2}}{D_{(2n)^2}},$$

puis, au cas de $2n + 1 = 4p - 1$,

$$\lambda(2n+1)z = \frac{L_{(n+1)^2-1} D_{(n+1)^2} M_{n^2} N_{n^2} + L_{n^2} D_{n^2-1} M_{(n+1)^2} N_{(n+1)^2}}{D_{n^2-1}^2 D_{(n+1)^2}^2 - k^2 L_{(n+1)^2-1}^2 L_{n^2}^2} = \frac{L_{(2n+1)^2}}{D_{(2n+1)^2-1}},$$

$$\mu(2n+1)z = \frac{D_{n^2-1} D_{(n+1)^2} M_{(n+1)^2} M_{n^2} - L_{(n+1)^2-1} N_{(n+1)^2} L_{n^2} N_{n^2}}{D_{(2n+1)^2-1}} = \frac{M_{(2n+1)^2}}{D_{(2n+1)^2-1}},$$

$$\nu(2n+1)z = \frac{D_{n^2-1} D_{(n+1)^2} N_{(n+1)^2} N_{n^3} - k^2 L_{(n+1)^2-1} M_{(n+1)^2} L_{n^2} M_{n^2}}{D_{(2n+1)^2-1}} = \frac{N_{(2n+1)^2}}{D_{(2n+1)^2-1}},$$

et, au cas de $2n + 1 = 4p + 1$,

$$\lambda(2n+1)z = \frac{L_{(n+1)^2} D_{(n+1)^2-1} M_{n^2} N_{n^2} + L_{n^2-1} D_{n^2} M_{(n+1)^2} N_{(n+1)^2}}{D^2_{(n+1)^2-1} D^2_{n^2} - k^2 L^2_{n^2-1} L_{(n+1)^2}} = \frac{L_{(2n+1)^2}}{D_{(2n+1)^2-1}},$$

$$\mu(2n+1)z = \frac{D_{n^2} D_{(n+1)^2-1} M_{n^2} M_{(n+1)^2} - L_{(n+1)^2} L_{n^2-1} N_{(n+1)^2} N_{n^2}}{D_{(2n+1)^2-1}} = \frac{M_{(2n+1)^2}}{D_{(2n+1)^2-1}},$$

$$\nu(2n+1)z = \frac{D_{n^2} D_{(n+1)^2-1} N_{n^2} N_{(n+1)^2} - k^2 L_{(n+1)^2} L_{n^2-1} M_{(n+1)^2} M_{n^2}}{D_{(2n+1)^2-1}} = \frac{N_{(nn+1)^2}}{D_{(2n+1)^2-1}}.$$

Sur les expressions de $\nu_1(nz)$, $\mu_1(nz)$, $\lambda_1(nz)$ en fonction de ν_1, de μ_1 et de λ_1.

29. Lorsque n est impair, la valeur de $\nu_1(nz)$ est, comme nous l'avons reconnu, le produit de ν_1 ou de $\frac{1}{\nu_1}$, selon que n est de forme $4n'+1$ ou de forme $4n'-1$, par une fraction ayant pour termes des fonctions entières de λ, μ, ν, qui ne les contiennent qu'à des puissances de degré pair et qui ne diffèrent l'une de l'autre que par le signe de i. Cette fraction peut, en conséquence, s'exprimer rationnellement au moyen de ν_1; si l'on y remplace μ, λ par $\frac{1}{2}\left(\nu_1 + \frac{1}{\nu_1}\right)$, $\frac{1}{2i}\left(\nu_1 - \frac{1}{\nu_1}\right)$, on peut passer d'un terme à l'autre par le changement de ν_1 en $\frac{1}{\nu_1}$. Si les termes se ramènent à être entiers en ν_1, ils sont du degré n^2-1 et des fonctions paires de ν_1. L'expression de $\mu_1(nz)$ présente les mêmes particularités à l'égard de μ_1 Quant à celle de $\lambda_1(nz)$, elle est, pourvu que n soit impair, le produit de λ_1 par une fraction analogue exprimable rationnellement par λ_1.

Mais, quand n est pair, les deux termes de $\nu_1(nz)$ dépendent de ν au premier degré; l'expression n'est plus susceptible d'être rationnelle en ν_1. Il en est de même de $\mu_1(nz)$ à l'égard de μ_1 et de $\lambda_1(nz)$ à l'égard de λ_1.

Ces faits sont aisés à confirmer ou à établir par des considérations directes.

30. *De l'expression de $\nu_1(nz)$ en fonction de ν_1 et cas où n est impair.* — Comme la fonction $\nu_1(nz)$ admet les périodes élémentaires ω, $2\omega'$ de

ν_1, elle peut s'exprimer par ν_1 et sa dérivée $gi\nu\nu_1$ sous la forme

$$\nu_1(nz) = \frac{B + Cgi\nu\nu_1}{A},$$

A, B, C désignant des fonctions entières de ν_1.

Mais, si z se change en $\omega' + \frac{\omega}{2} - z$, ν_1 ne changeant pas, A, B, C restent les mêmes et la fonction $\nu_1(nz)$ ne change pas non plus. Comme ν change de signe, il faut avoir $C = 0$, ce qui donne

$$\nu_1(nz) = \frac{B}{A}.$$

Déterminons l'expression par ses zéros et ses infinis. L'expression générale des zéros de ν_1 étant $a = (4p+1)\frac{\omega'}{2} + q\frac{\omega}{2}$, celle de ses infinis $\alpha = (4p-1)\frac{\omega'}{2} + q\frac{\omega}{2}$, les zéros de $\nu_1(nz)$ sont donnés par $a = \frac{(4p+1)\omega'}{2n} + q\frac{\omega}{2n}$, et ses infinis par $\alpha = \frac{(4p-1)\omega'}{2n} + q\frac{\omega}{2n}$.

Considérons pour $\nu_1(nz)$ et $\nu_1(z)$ le parallélogramme commun $(\omega, 2\omega')$. Tous les zéros de $\nu_1(nz)$ compris dans ce parallélogramme répondent à des valeurs de p égales ou équivalentes suivant le module n à $p = 0, 1, 2, .., n-1$, et à des valeurs de q égales ou équivalentes à $0, 1, 2, \ldots, 2n-1$; ce qui en fait le nombre égal à $2n^2$. Il en est de même des infinis.

Comme l'on a

$$\frac{p}{n}2\omega' + \frac{\omega'}{2n} + \frac{q}{2n}\omega + \frac{p'}{n}2\omega' + \frac{\omega'}{2n} + \frac{q'}{2n}\omega = \omega' + \frac{\omega}{2},$$

par $p + p' = \frac{n-1}{2}$, $q + q' = n$, et

$$\frac{p}{n}2\omega' - \frac{\omega'}{2n} + \frac{q}{2n}\omega + \frac{p'}{n}2\omega' - \frac{\omega'}{2n} + \frac{q'}{2n}\omega = \omega' + \frac{\omega}{2}$$

par $p + p' = \frac{n+1}{2}$, $q + q' = n$, les zéros ainsi que les infinis peuvent *généralement* s'associer deux à deux, de façon qu'il y réponde dans chaque couple la même valeur de $\nu_1(z)$.

Cela posé, distinguons le cas de $n = 4n' + 1$ et celui de $n = 4n' - 1$. Soit d'abord $n = 4n' + 1$.

On a alors, par $p = n'$, $q = 0$ et par $p = n'$, $q = n$, les deux zéros $\frac{\omega'}{2}$, $\frac{\omega'}{2} + \frac{\omega}{2}$ que présente ν_1 dans le parallélogramme considéré. D'un autre côté, on a les deux infinis $3\frac{\omega'}{2}$, $3\frac{\omega'}{2} + \frac{\omega}{2}$, par $p = 3n' + 1$, $q = 0$ et par $p = 3n' + 1$, $q = n$. Quant aux autres zéros et infinis, ils peuvent s'associer par deux de la façon indiquée plus haut.

Désignons par

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{n^2-1},$$

$$\alpha_2,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_{n^2-1}$$

un terme dans chacun de ces couples de zéros ou d'infinis, et prenons

$$\mathrm{M} = [\nu_1 - \nu_1(a_1)]\,[\nu_1 - \nu_1(a_2)]\ldots[\nu_1 - \nu_1(a_{n^2-1})],$$

$$\mathrm{L} = [\nu_1 - \nu_1(\alpha_1)]\,[\nu_1 - \nu_1(\alpha_2)]\ldots[\nu_1 - \nu_2(\alpha_{n^2-1})];$$

l'expression

$$\nu_1\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{L}},$$

qui a, comme $\nu_1(nz)$, ω et $2\omega'$ pour périodes, admet dans le parallélogramme $(\omega, 2\omega')$ les mêmes zéros et les mêmes infinis que cette fonction. Il s'ensuit

$$\nu_1(nz) = \nu_1\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{L}}\mathrm{C},$$

C désignant là une constante convenable.

On voit que M et L sont des fonctions entières de ν_1 du degré $n^2 - 1$. Quand z augmente de $\frac{\omega}{2}$, ν_1 change de signe ainsi que $\nu_1(nz)$; donc $\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{L}}$ ne change pas; et, puisque M et L sont d'un degré pair $n^2 - 1$, ce sont des fonctions paires de ν_1. Le fait résulte bien des expressions précédentes de M et L, car la différence de deux zéros ou de deux infinis étant

$$\frac{p-p'}{n}2\omega' + \frac{q-q'}{n}\frac{\omega}{2}$$

est égale à $\frac{\omega}{2}$ pour $p=p'$, $q-q'=n$; d'où il suit que les quantités $\nu_1(a_1)\ldots\nu_1(a_{n^2-1})$, ainsi que $\nu_1(\alpha_1)\ldots\nu_1(\alpha_{n^2-1})$ sont deux à deux égales et de signes contraires. On peut ainsi poser

$$M = [\nu_1^2 - \nu_1^2(a_1)]\ldots\left[\nu_1^2 - \nu_1^2\left(a_{\frac{n^2-1}{2}}\right)\right],$$

$$L = [\nu_1^2 - \nu_1^2(\alpha_1)]\ldots\left[\nu_1^2 - \nu_1^2\left(\alpha_{\frac{n^2-1}{2}}\right)\right].$$

En outre, les valeurs $\nu_1(\alpha_1)$, ..., $\nu_1(\alpha_{n^2-1})$ sont inverses de celles de $\nu_1(a_1)$, ..., $\nu_1(a_{n^2-1})$, parce que l'on a $a+\alpha=0$ pour $p+p'=0$, $q+q'=0$.

Soit, en second lieu, $n=4n'-1$. Alors $p=n'$, $q=0$ donnent l'infini $\alpha=\frac{\omega'}{2}$ de $\nu_1(nz)$, ce qui est un infini pour $\frac{1}{\nu_1}$, et $p=3n'-1$, $q=0$ donnent le zéro $\frac{3\omega'}{2}$ de $\nu_1(nz)$ et de $\frac{1}{\nu_1}$; de sorte que les zéros et infinis de $\frac{1}{\nu_1}$ compris dans le parallélogramme $(\omega, 2\omega')$ appartiennent à $\nu_1(nz)$. Si les autres zéros et infinis de $\nu_1(nz)$ s'associent comme précédemment et qu'on pose, suivant les mêmes notations,

$$M = [\nu_1 - \nu_1(a_1)]\ldots[\nu_1 - \nu_1(a_{n^2-1})],$$

$$L = (\nu_1 - \nu_1(\alpha_1)]\ldots[\nu_1 - \nu_1(\alpha_{n^2-1})],$$

il s'ensuivra

$$\nu_1(nz) = C\frac{1}{\nu_1}\frac{M}{L},$$

M et L étant également des fonctions paires du degré n^2-1, dont les racines sont inverses.

Cas où n est pair. — L'expression de $\nu_1(nz)$ en fonction de ν_1 n'est plus rationnelle; elle est de la forme

$$\frac{M + N\, gi\,\nu\nu_1}{L}.$$

Les zéros et les infinis ayant encore pour expressions générales

$$a = \frac{(4p+1)\omega'}{2n} + q\frac{\omega}{2n}, \quad \alpha = \frac{(4p-1)\omega'}{2n} + q\frac{\omega}{2n},$$

chaque zéro peut s'associer à un infini, de façon que leur somme soit $\frac{\omega'}{2}+\frac{\omega}{2}$, car on a

$$\frac{(4p+1)\omega'}{2n}+q\frac{\omega}{2n}+\frac{(4p'-1)\omega'}{2n}+q'\frac{\omega}{2n}=\omega'+\frac{\omega}{2}$$

par $p+p'=\frac{n}{2}=n'$ et $q+q'=n=2n'$. Mais cela ne peut se faire pour deux zéros ou deux infinis. Deux à deux encore, les zéros ainsi que les infinis présentant une différence égale à $\frac{\omega}{2}$ donnent des valeurs de ν_1 égales et de signes contraires. D'après cela, les valeurs de ν_1 sont différentes pour les zéros à part et pour les infinis à part; mais les infinis lui donnent les mêmes valeurs que les zéros. Il n'y a ni aucun infini ni aucun zéro qui appartienne à ν_1, car on ne peut avoir

$$\frac{(4p+1)\omega'}{4n'}+q\frac{\omega}{2n}=\frac{\omega'}{2}\quad \text{ni}\quad \frac{(4p-1)\omega'}{2n'}+q\frac{\omega}{2n}=\frac{3\omega'}{2}.$$

Par suite, M, N et L étant des fonctions entières, les infinis répondent à des zéros de L et les zéros à ceux de $\mathrm{M}+\mathrm{N}gi\nu\nu_1$.

On peut, en conséquence, poser

$$\mathrm{L}=[\nu_1-\nu_1(\alpha_1)][\nu_1-\nu_1(\alpha_2)]\ldots[\nu_1-\nu_1(\alpha_{2n^2})].$$

Comme les infinis font acquérir à ν_1 deux à deux des valeurs égales et de signes contraires, L est une fonction paire de ν_1.

Quand z augmente de $\frac{\omega}{2}$, $\nu_1(nz)$ ne change plus; donc, L ne changeant pas, le numérateur $\mathrm{M}+\mathrm{N}gi\nu\nu_1$ reste de même valeur; or ν_1 change par là de signe, ν ne change pas; donc N change de signe : c'est une fonction impaire de ν_1; par suite, M est une fonction paire.

Pour reconnaître ce que sont les valeurs de M et de N, nous ferons observer que $\mu(nz)$ a les mêmes zéros que M, et $\lambda(nz)$ les mêmes que $\mathrm{N}gi\nu\nu_1$.

Cela posé, les zéros de $\mu(nz)$ sont donnés par

$$a=\frac{\omega}{4n}+\frac{p\omega}{n}+\frac{q}{n}\left(\frac{\omega}{2}+\omega'\right),$$

$$a'=-\frac{\omega}{4n}+\frac{p\omega}{n}+\frac{q}{n}\left(\frac{\omega}{2}+\omega'\right),$$

ou par

$$a = \frac{\omega}{4n} + \frac{2p+q}{2n}\omega + q\frac{\omega'}{n}, \qquad a' = \frac{\omega}{4n} + \frac{2p+q-1}{2n}\omega + q\frac{\omega'}{n}.$$

En faisant $q = 0, 1, 2, \ldots, 2n-1$, $2p+q = 0, 1, 2, \ldots, 2n-1$, et, d'autre part, $q = 0, 1, 2, \ldots, 2n-1$, $2p+q-1 = 0, 1, 2, \ldots, 2n-1$, mais à la condition de ne prendre pour p que des valeurs entières, on aura $4n^2$ zéros dans l'étendue du parallélogramme $(\omega, 2\omega')$. La somme d'un a et d'un a' étant $\frac{\omega}{2} + \omega'$ pour $p + p' = 0$, $q + q' = n$, les valeurs correspondantes de $\nu_1(z)$ sont deux à deux égales; ces valeurs aussi sont deux à deux égales et de signes contraires, car on a $a - a_1 = \frac{\omega}{2}$ pour $p - p_1 = \frac{n}{2}$, $q - q_1 = 0$. D'après quoi

$$\mathrm{M} = [\nu_1 - \nu_1(a_1)]\ldots[\nu_1 - \nu_1(a_{2n^2})]\,\mathrm{C} = [\nu_1^2 - \nu_1^2(a_1)]\ldots[\nu_1^2 - \nu_1^2(a_{n^2})]\,\mathrm{C}.$$

L'expression de N est moins simple à obtenir.

Les zéros de $\lambda(nz)$ ont pour expressions générales

$$a = \frac{p\omega + q\omega'}{2n'}, \qquad a' = \frac{\omega}{4n'} + \frac{p\omega + q\,2\omega'}{2n'},$$

et pour le parallélogramme $(\omega, 2\omega')$, il y a à attribuer à p les valeurs $0, 1, 2, \ldots, n-1$ et à q les valeurs $0, 1, 2, \ldots, 2n-1$, ce qui donnera $4n^2$ zéros.

Il importe d'examiner ce qui regarde quelques-uns de ces couples de valeurs de p et de q. Les résultats sont consignés dans le tableau suivant :

$$p = 0 \begin{cases} q = 0, & a = 0, & \nu_1(0) = 1, \\ q = n', & a = \dfrac{\omega'}{2}, & \nu_1\left(\dfrac{\omega'}{2}\right) = 0, \\ q = 3n', & a = \dfrac{3\omega'}{2}, & \nu_1\left(\dfrac{3\omega'}{2}\right) = \infty; \end{cases}$$

$$p = n' \begin{cases} q = 0, & a = \dfrac{\omega}{2}, & \nu_1\left(\dfrac{\omega}{2}\right) = 1, \\ q = n', & a = \dfrac{\omega + \omega'}{2}, & \nu_1\left(\dfrac{\omega+\omega'}{2}\right) = 0, \\ q = 3n', & a = \dfrac{\omega + 3\omega'}{2}, & \nu_1\left(\dfrac{\omega+3\omega'}{2}\right) = \infty. \end{cases}$$

Au cas de $n' = 2n'' + 1$:

$$p = n'' \begin{cases} q = 0, & a' = \dfrac{\omega}{4}, & \nu_1 = i, \\ q = n', & a' = \dfrac{\omega}{4} + \dfrac{\omega'}{2}, & \nu_1 = \dfrac{ik}{1+k'}, \\ q = -n', & a' = \dfrac{\omega}{4} + \dfrac{3\omega'}{2}, & \nu_1 = \dfrac{ik}{1-k'}, \end{cases}$$

$$p = 3n'' + 1 \begin{cases} q = 0, & a' = \dfrac{3}{4}\omega, & \nu_1 = -i, \\ q = n', & a' = \dfrac{3\omega}{4} + \dfrac{\omega'}{2}, & \nu_1 = -\dfrac{ik}{1+k'}, \\ q = -n', & a' = \dfrac{3\omega}{4} + \dfrac{3\omega'}{2} & \nu_1 = -\dfrac{ik}{1-k'}. \end{cases}$$

Au cas de $n' = 2n''$:

$$\begin{array}{llll} p = n'', & q = 2n'', & a = \dfrac{\omega}{4} + \dfrac{\omega'}{2}, & \nu_1 = \dfrac{ik}{1+k'}, \\ p = -n'', & q = 2n'', & a = \dfrac{3\omega + 2\omega'}{4}, & \nu_1 = -\dfrac{ik}{1+k'}, \\ p = n'', & q = -2n'', & a = \dfrac{\omega + 6\omega'}{4}, & \nu_1 = \dfrac{ik}{1-k'}, \\ p = -n'', & q = -2n'', & a = \dfrac{3\omega + 6\omega'}{4}, & \nu_1 = -\dfrac{ik}{1-k'}, \\ p = n'', & q = 0, & a = \dfrac{\omega}{4}, & \nu_1 = i, \\ p = -n'', & q = 0, & a = \dfrac{3\omega}{4}, & \nu_1 = -i. \end{array}$$

Parmi les $4n^2$ zéros que présente $\lambda(nz)$ dans le parallélogramme $(\omega, 2\omega')$, on voit ainsi les deux zéros de ν_1, $\frac{\omega'}{2}$ et $\frac{\omega'}{2} + \frac{\omega}{2}$, ses deux infinis $\frac{3\omega'}{2}$, $\frac{3\omega'}{2} + \frac{\omega}{2}$, et les quatre zéros de $\nu(z)$ pour lesquels $\nu_1 = \pm \frac{ki}{1+k'}$ et $\nu_1 = \pm \frac{ki}{1-k'}$.

En mettant à part ces huit zéros, observons que les $4(n^2 - 2)$ autres donneront deux à deux la même valeur pour ν_1 et deux à deux des valeurs égales et de signes contraires. Si on les désigne par $a_1, a_2, \ldots, a_{4(n^2-2)}$, soient $a_1, a_2, \ldots, a_{2(n^2-2)}$ des zéros pour lesquels ν_1 ait des valeurs différentes, deux à deux, de signes contraires, et $a_1, a_2, \ldots, a_{n^2-2}$ des zéros pour lesquels ν_1^2 soit de valeurs différentes.

Posons

$$N' = \nu_2[\nu_1^2 - \nu_1^2(a_1)]\ldots[\nu_1^2 - \nu_1^2(a_{n^2-2})],$$

et considérons l'expression

$$\frac{N' gi\nu\nu_1}{L}$$

pour reconnaître qu'elle a les mêmes zéros que $\lambda(nz)$.

D'abord les $4(n^2-2)$ zéros dont il vient d'être question lui appartiennent par le facteur N'. Sur les huit autres, ceux de ν_1 sont encore par N', mais ne s'y trouvent pas par $\nu\nu_1$, car $\frac{\omega'}{2}$ et $\frac{\omega'}{2}+\frac{\omega}{2}$, étant des infinis de ν et des zéros de ν_1, ne sont point tels pour le produit $\nu\nu_1$. Les deux infinis de ν_1, $\frac{3\omega'}{2}$ et $\frac{3\omega'}{2}+\frac{\omega}{2}$ sont des zéros de l'expression, parce que le numérateur y est en ν_1 du degré $2n^2-1$, inférieur d'une unité à celui de L. Enfin, les quatre autres zéros, étant ceux de ν, sont des zéros de l'expression par le facteur ν lui-même. Il n'y a pas d'ailleurs à s'occuper des infinis de ce facteur ν, puisque deux d'entre eux $\frac{\omega'}{2}$, $\frac{\omega}{2}+\frac{\omega}{2}$ neutralisent deux zéros de ν_1 et que les deux autres $\frac{3\omega'}{2}$, $\frac{3\omega'}{2}+\frac{\omega}{2}$ deviennent des zéros de l'expression. Comme les zéros de L sont d'autre part les infinis de $\lambda(nz)$, il est ainsi reconnu que la fonction $\lambda(nz)$ et l'expression $\frac{N' gi\nu\nu_1}{L}$ ont, dans le parallélogramme $(\omega, 2\omega')$, mêmes zéros et mêmes infinis. En conséquence, on a

$$\lambda(nz) = \frac{N' gi\nu\nu_1}{L}C';$$

c'est-à-dire que, dans l'expression $\frac{M + N gi\nu\nu_1}{L}$ de $\nu_1(nz)$, on a

$$N = \nu_1[\nu_1^2 - \nu_1^2(a_1)]\ldots[\nu_1^2 - \nu_1^2(a_{n^2-2})]\,C'.$$

On voit que N est une fonction impaire de ν_1 du degré $2n^2-3$. Il s'y trouve toujours, d'après ce qui précède, les deux facteurs binômes ν_1^2-1, ν_1^2+1.

En fonction de ν_1, la valeur de $\nu_1(2z)$, par exemple, est

$$\nu_1(2z)=\frac{\nu_1+\frac{1}{\nu_1}+\left(\nu_1-\frac{1}{\nu_1}\right)\nu}{\frac{1}{\nu_1}+\nu_1+\left(\frac{1}{\nu_1}-\nu_1\right)\nu}=\frac{\nu_1^2+1+(\nu_1^2-1)\nu}{1+\nu_1^2+(1-\nu_1^2)\nu}=\frac{\nu_1(\nu_1^2+1)+(\nu_1^2-1)\nu\nu_1}{\nu_1(1+\nu_1^2)+(1-\nu_1^2)\nu\nu_1}$$

$$=\frac{\nu_1(\nu_1^2+1)+(\nu_1^2-1)\sqrt{\nu_1^2+\frac{k^2}{4}(\nu_1^2-1)^2}}{\nu_1(1+\nu_1^2)+(1-\nu_1^2)\sqrt{\nu_1^2+\frac{k^2}{4}(\nu_1^2-1)^2}}=\frac{\left[\nu_1(\nu_1^2+1)+(\nu_1^2-1)\sqrt{\nu_1^2+\frac{k^2}{4}(\nu_1^2-1)^2}\right]^2}{\nu_1^2(1+\nu_1^2)^2-(1-\nu_1^2)^2\left[\nu_1^2+\frac{k^2}{4}(\nu_1^2-1)^2\right]}.$$

L'expression de $\nu_1(3z)$ est

$$\nu_1(3z)=\frac{1}{\nu_1}\,\frac{\left(\nu_1+\frac{1}{\nu_1}\right)^2+\left(\nu_1-\frac{1}{\nu_1}\right)^2\nu^2+2\left(\nu_1+\frac{1}{\nu_1}\right)\left(\nu_1-\frac{1}{\nu_1}\right)\nu^2}{\left(\frac{1}{\nu_1}+\nu_1\right)^2+\left(\frac{1}{\nu_1}-\nu_1\right)^2\nu^2+2\left(\frac{1}{\nu_1}+\nu_1\right)\left(\frac{1}{\nu_1}-\nu_1\right)\nu^2},$$

ν^2 étant $1+\frac{k^2}{4}(\nu'_1-\nu_1)^2$.

Des considérations du même genre pourraient se développer à l'égard de la question d'exprimer $\mu_1(nz)$ au moyen de μ_1. Il nous semble inutile de nous y arrêter.

31. Pour ce qui concerne $\lambda_1(nz)$, nous nous bornerons à quelques observations.

Soit n impair. D'abord $\lambda_1(nz)$ peut se considérer sous la forme

$$\lambda_1(nz)=\frac{M_1+N\lambda'_1}{L}=\frac{M_1-Nkg\lambda\lambda_1}{L},$$

L, M_1, N étant des fonctions entières de λ_1.

Si l'on remplace z par $-z$, λ_1 ne changeant pas, ces fonctions restent les mêmes; mais λ changeant de signe, tandis que $\lambda_1(nz)$ ne change pas, il faut $N=0$, ce qui donne

$$\lambda_1(nz)=\frac{M_1}{L}.$$

Les zéros de $\lambda_1(nz)$ sont donnés par

$$a = \frac{(2p+1)\frac{\omega'}{2} + (2q+1)\frac{\omega}{2}}{n} = \frac{p\omega'}{n} + \frac{q\omega}{n} + \frac{\omega+\omega'}{2n}$$

et les infinis par

$$\alpha = \frac{(2p+1)\frac{\omega'}{2} + q\omega}{n} = \frac{p\omega'}{n} + \frac{q\omega}{n} + \frac{\omega'}{2n}.$$

Pour avoir ceux que comprend le parallélogramme $(\omega, 2\omega')$, il faut attribuer à p les valeurs $0, 1, 2, \ldots, 2n-1$ et à q les valeurs $0, 1, 2, \ldots, n-1$, ce qui porte les uns et les autres au nombre de $2n^2$.

Les zéros et les infinis de λ_1 dans ce parallélogramme y figurent, les zéros $\frac{\omega'+\omega}{2}$, $\frac{3\omega'+\omega}{2}$ par $p = \frac{n-1}{2}$, $q = \frac{n-1}{2}$ et $p = \frac{3n-1}{2}$, $q = \frac{n-1}{2}$, les infinis $\frac{\omega'}{2}$, $3\frac{\omega'}{2}$ par $p = \frac{n-1}{2}$, $q = 0$, et $p = \frac{3n-1}{2}$, $q = 0$. Les $2(n^2-1)$ autres zéros peuvent se répartir en couples où les deux termes font acquérir à λ_1 la même valeur, car on a

$$\lambda_1\left(p\frac{\omega'}{n} + q\frac{\omega}{n} + \frac{\omega+\omega'}{2n}\right) = \lambda_1\left(p'\frac{\omega'}{n} + q'\frac{\omega}{n} + \frac{\omega'+\omega}{2n}\right),$$

par $p' = 2n-1-p$ et $q' = n-1-q$. Les autres infinis sont dans le même cas. C'est pourquoi, si un terme de chaque couple de zéros se désigne par $a_1, a_2, \ldots, a_{n^2-1}$, un terme de chaque couple d'infinis par $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n^2-1}$, et qu'on pose

$$\begin{aligned} \mathrm{M} &= [\lambda_1 - \lambda_1(a_1)]\ldots[\lambda_1 - \lambda_1(a_{n^2-1})], \\ \mathrm{L} &= [\lambda_1 - \lambda_1(\alpha_1)]\ldots[\lambda_1 - \lambda_1(\alpha_{n^2-1})], \end{aligned}$$

l'expression

$$\lambda_1\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{L}}$$

présente les mêmes zéros et les mêmes infinis que $\lambda(nz)$ dans le parallélogramme $(\omega, 2\omega')$; d'où il résulte que l'on a

$$\lambda_1(nz) = \lambda_1\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{L}}.$$

Il y a, de plus, à remarquer que les valeurs de $\lambda_1(\alpha)$ sont inverses à celles de $\lambda_1(a)$, parce que l'on a

$$\lambda_1\left(p\frac{\omega'}{n}+q\frac{\omega}{n}+\frac{\omega+\omega'}{2n}\right)=\lambda_1\left(p'\frac{\omega'}{n}+q'\frac{\omega}{n}+\frac{\omega'}{2n}+\frac{\omega}{2}\right)$$

moyennant $p'=p$, $q'=q-\frac{n-1}{2}$, ce qui s'accorde avec le fait que $\lambda_1(nz)$ s'est présenté sous la forme du produit de λ_1 par une fraction où l'on passe d'un terme à l'autre par le simple changement de k en $-k$.

32. *Remarque.* — Les formules connues

$$\lambda(z,k)=\frac{1}{k}\lambda\left(kz,\frac{1}{k}\right),$$

$$\mu(z,k)=\nu\left(kz,\frac{1}{k}\right),$$

$$\nu(z,k)=\mu\left(kz,\frac{1}{k}\right)$$

donnent

$$\nu_1(z,k)=\mu_1\left(kz,\frac{1}{k}\right),$$

$$\mu_1(z,k)=\nu_1\left(kz,\frac{1}{k}\right),$$

$$\lambda_1(z,k)=i\lambda_1\left(kz,\frac{1}{k}\right).$$

D'après cela, quand on pose

$$\nu_1(nz)=f(\nu_1,\nu),$$

on a

$$\mu_1(nz)=\nu_1\left(knz,\frac{1}{k}\right)=\nu_1\left(nkz,\frac{1}{k}\right)=f\left[\nu_1\left(kz,\frac{1}{k}\right),\nu\left(kz,\frac{1}{k}\right)\right]$$
$$=f[\mu_1(z,k),\mu(z,k)]=f(\mu_1,\mu),$$

et si l'on pose

$$\nu_1(nz)=\varphi(\nu_1,k^2),$$

on a

$$\mu_1(nz)=\varphi\left[\nu_1\left(kz,\frac{1}{k}\right),\frac{1}{k^2}\right]=\varphi\left(\mu_1,\frac{1}{k^2}\right).$$

Pareillement, si l'on pose

$$\nu(nz) = f(\nu, k'^2),$$

on a

$$\mu(nz) = f(\mu, -\eta^2),$$

η désignant le rapport $\frac{k'}{k}$; car on a

$$\mu(nz, k) = \nu\left(knz, \frac{1}{k}\right) = f\left[\nu\left(kz, \frac{1}{k}\right), 1 - \frac{1}{k^2}\right] = f(\mu, -\eta^2).$$

Ajoutons que la formule

$$\nu(iz, k') = \frac{\nu(z, k)}{\mu(z, k)} = \frac{1}{\lambda\left(\frac{\omega}{4} + z, k\right)}$$

donne encore

$$\frac{1}{\lambda\left(\frac{\omega}{4} + nz, k\right)} = \nu(niz, k') = f[\nu(iz, k'), k^2] = f\left[\frac{1}{\lambda\left(\frac{\omega}{4} + z, k\right)}, k^2\right].$$