ÉMILE. PICARD

Application de la théorie des complexes linéaires à l'étude des surfaces et des courbes gauches

Annales scientifiques de l'É.N.S. 2e série, tome 6 (1877), p. 329-366

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1877_2_6__329_0>

APPLICATION

DE LA

THÉORIE DES COMPLEXES LINÉAIRES

A L'ÉTUDE

DES SURFACES ET DES COURBES GAUCHES,

PAR M. ÉMILE PICARD,

ÉLÈVE A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

1. On sait que Plücker a appelé *complexe de droites* l'ensemble des droites de l'espace dont les coordonnées vérifient une relation donnée. Il a examiné particulièrement, dans sa *Nouvelle Géométrie*, les complexes linéaires ou du premier ordre et les complexes du second ordre. L'objet de ce travail est l'application de la théorie des complexes linéaires à l'étude de certaines courbes et de certaines surfaces.

La première Partie est consacrée à l'étude des courbes dont les tangentes appartiennent à un complexe linéaire. Des considérations géométriques me donnent leurs équations générales débarrassées de tout signe d'intégration. Ces courbes possèdent un certain nombre de points remarquables, où le contact de la tangente avec la courbe est du second ordre. Je recherche la forme de la courbe dans le voisinage de ces points. Passant ensuite aux courbes unicursales, je donne les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une courbe plane unicursale puisse être considérée comme la projection d'une courbe gauche unicursale, dont les tangentes font partie d'un complexe linéaire ayant son axe perpendiculaire au plan de la courbe plane.

Dans la seconde Partie, j'étudie les surfaces réglées dont les génératrices appartiennent à un complexe linéaire. Cette étude repose sur une propriété des équations de Riccati. La recherche des lignes asymptotiques d'une surface réglée dont les génératrices appartiennent à un complexe linéaire peut être ramenée à une quadrature. Je fais ensuite des applications à certaines surfaces, en particulier aux surfaces réglées du troisième ordre et à celles du quatrième ordre, ayant pour courbe double une cubique gauche.

Je termine en recherchant les surfaces dont les normales appartiennent à un complexe linéaire, et en indiquant l'analogie qui existe entre l'étude des surfaces réglées et celle des surfaces ayant un système de lignes de courbure circulaires.

PREMIÈRE PARTIE.

2. Soient

$$x = az + p, \qquad y = bz + q \tag{1}$$

les équations d'une droite.

On obtient un complexe linéaire en assujettissant les paramètres variables a, b, p, q à la condition

$$La + Mb + N - Qp + Pq - R(aq - bp) = 0, \tag{2}$$

dans laquelle L, M, N, P, Q et R désignent des constantes.

Un point (x, y, z) étant donné, on sait que toutes les droites du complexe passant par ce point sont dans un plan que l'on appelle le *plan polaire du point*. L'équation du plan polaire du point (x, y, z) est

$$\left\{\begin{aligned}&(L + Qz - Ry)(X - x) + (M + Rx - Pz)(Y - y)\\ &\qquad\qquad + (N + Py - Qx)(Z - z) = 0;\end{aligned}\right. \tag{3}$$

supposons maintenant que, dans les équations (1), a, b, p, q représentent des fonctions d'un paramètre variable α; ces équations détermineront les génératrices d'une surface réglée, et ces génératrices feront partie du complexe, si les fonctions a, b, p, q vérifient la relation (2), quelle que soit la valeur du paramètre α. Nous avons ainsi une surface réglée dont les génératrices font partie d'un complexe linéaire. Le plan tangent en un point de cette surface ne sera pas, en général, le plan correspondant à ce point dans le complexe. Sur chaque génératrice il y a deux points seulement jouissant de cette propriété. Considérons, en effet, un plan variable passant par cette génératrice. Le pôle de ce plan et son point de contact forment sur cette droite deux systèmes de points homographiques. Les deux points doubles de cette homographie sont les points de contact de leur plan polaire avec la surface.

Cherchons l'équation du second degré qui donne ces deux points. Nous exprimerons que le plan polaire du point (x, y, z), donné par l'équation (3), est tangent en ce point à la surface, en écrivant qu'il contient la tangente à la courbe de la surface obtenue en laissant z constant et en faisant varier α; x et y sont alors deux fonctions de α, et l'on a

$$dx = (a'z + p')\,d\alpha, \qquad dy = (b'z + q')\,d\alpha, \qquad dz = 0,$$

a', b', p' et q' étant les dérivées de a, b, p et q par rapport à α.

Remplaçons, dans l'équation (3), $X - x$, $Y - y$, $Z - z$ respectivement par ces valeurs de dx, dy, dz; nous obtenons l'équation

$$(4) \qquad (L + Qz - Ry)(a'z + p') + (M + Rx - Pz)(b'z + q') = 0.$$

Si, dans l'équation (4), on substitue à x et y leurs valeurs (1), on aura l'équation du second degré en z, donnant sur la génératrice déterminée par α les deux points où le plan tangent à la surface coïncide avec le plan polaire.

3. Le lieu des points ainsi obtenus forme sur la surface une courbe telle, que ses tangentes appartiennent au complexe linéaire dont font partie les génératrices de la surface; car la tangente en un point quelconque de la courbe est une droite du plan tangent passant par le foyer de ce plan. Les courbes dont les tangentes font partie d'un complexe linéaire jouissent de cette propriété remarquable : les points de contact de tous les plans osculateurs qu'on peut leur mener par un point quelconque sont dans un même plan passant par ce point. M. Appell a, en effet, montré dans son travail sur les cubiques gauches que, *quand toutes les tangentes d'une courbe appartiennent à un complexe linéaire, le plan polaire de chacun des points de cette courbe lui est en ce point*

osculateur. Il suit de ce théorème que les points de contact des plans osculateurs menés par un point quelconque sont dans le plan correspondant à ce point, car les foyers de tous les plans passant par un point sont situés dans le plan qui lui correspond.

Soit un plan quelconque P. Si A est un point où P rencontre la courbe considérée, le plan polaire de A, ou, ce qui est la même chose, le plan tangent en A à la surface devra passer par le foyer F du plan : donc la droite FA est tangente en A à la section faite par P dans la surface. Réciproquement, soit A le point de contact d'une tangente menée à cette courbe par le foyer F. Le plan mené par AF et la génératrice de la surface passant en A est tangent en ce point à la surface. D'autre part, le pôle de ce plan est le point A, puisque AF et la génératrice passant en A sont deux droites du complexe; A est donc un point de la courbe que nous étudions. Ainsi les points où celle-ci rencontre le plan P sont les points de contact des tangentes menées par le foyer F du plan à la section qu'il fait dans la surface. Dans le cas où la surface et, par suite, la courbe sont algébriques, cette considération permet de déterminer le degré de la courbe : on voit qu'il est égal à la classe d'une section plane quelconque de la surface.

La courbe est une ligne asymptotique de la surface. Le plan osculateur à la courbe en un quelconque de ses points est, en effet, le plan polaire et, par suite, le plan tangent à la surface en ce point.

4. Inversement, toute courbe dont les tangentes font partie d'un complexe linéaire admet le mode précédent de génération. Considérons, en effet, un point quelconque A d'une telle courbe. Menons ce plan osculateur à la courbe en ce point. Ce plan coupe la courbe au moins en un second point B (je laisse de côté la cubique gauche, pour laquelle la propriété se vérifie aisément). Les droites AB sont les génératrices d'une surface réglée. Si nous cherchons sur cette surface la courbe que nous venons de signaler (2), nous trouvons la courbe proposée. En effet, puisqu'il y a sur chaque génératrice de la surface deux points seulement pour lesquels le plan tangent et le plan polaire coïncident, ces deux points sont nécessairement les deux points de la courbe considérée.

Toutes les courbes dont les tangentes appartiennent au complexe défini par les six constantes L, M, N, P, Q et R satisfont à l'équation différentielle

$$(5)\quad (L + Qz - Ry)\,dx + (M + Rx - Pz)\,dy + (N + Py - Qx)\,dz = 0.$$

On obtient cette équation en remplaçant, dans l'équation du plan polaire, les quantités $(X - x)$, $(Y - y)$ et $(Z - z)$ par dx, dy et dz.

La réciproque que nous venons d'établir permet d'intégrer en termes finis l'équation (5), c'est-à-dire de trouver des expressions de x, y, z en fonction d'un paramètre α, débarrassées de tout signe d'intégration et satisfaisant à l'équation précédente. Ces expressions sont données par les équations (1) et (4); a, b, p, q sont des fonctions d'un paramètre variable α, qui sont uniquement assujetties à vérifier la condition (2). On voit que les expressions de x, y, z contiendront deux fonctions arbitraires, car l'une des fonctions pourra être prise pour paramètre variable.

Les considérations suivantes conduisent à des formules ne renfermant qu'une fonction arbitraire. Prenons l'axe des z pour axe du complexe, et soit $aq - bp = k$ l'équation de ce complexe. L'équation du second degré, donnant sur chaque génératrice les points où le plan tangent et le plan polaire coïncident, est, en remplaçant x et y par leurs valeurs,

$$(bz + q)(a'z + p') - (b'z + q')(az + p) = 0.$$

Supposons que nous ayons une surface telle que $ab' - ba' = 0$, c'est-à-dire que $\frac{a}{b} = C$, C étant une constante. L'équation précédente sera du premier degré. La surface est alors une surface réglée à plan directeur; le plan représenté par l'équation $bx - ay = 0$ est, en effet, parallèle à toutes les génératrices de la surface.

Considérons maintenant une courbe dont les tangentes appartiennent à un complexe linéaire. Menons par l'axe de ce complexe un plan P. Soit m un point quelconque de la courbe. Le plan osculateur à celle-ci en m et le plan mené par ce point parallèlement au point P se coupent suivant une droite mn. Le lieu de cette droite est une surface réglée, dont les génératrices font évidemment partie du complexe linéaire : c'est une surface réglée à plan directeur. Si l'on cherche sur cette surface la courbe pour tous les points de laquelle le plan tangent à la surface et le plan polaire coïncident, on trouve la courbe dont nous sommes partis. Elle n'a évidemment qu'un seul point sur chaque génératrice.

Un complexe étant donné, prenons son axe pour axe des z. Considérons les surfaces réglées dont les génératrices font partie de ce complexe et sont toutes parallèles à un plan passant par l'axe du complexe, plan que je puis supposer être le plan des zx. Une telle surface est donnée par les équations

$$x = az + p, \quad y = q, \tag{6}$$

et l'on a $aq = \mathrm{K}$, K étant une constante.

L'équation du premier degré donnant sur chaque génératrice le point où le plan polaire et le plan tangent coïncident est ici

$$q(a'z + p') - q'(az + p) = 0. \tag{7}$$

Les équations (6) et (7) définissent une courbe dont les tangentes appartiennent au complexe linéaire.

Ces équations donnent

$$x = \frac{pq' + p'q}{2q'}, \quad y = q, \quad z = \frac{q(p'q - pq')}{2\mathrm{K}q'};$$

p et q sont deux fonctions arbitraires d'un paramètre α.

5. Le plan osculateur en un point d'une courbe gauche a, en général, avec cette courbe un contact du second ordre. Pour certains points de la courbe, le contact peut être du troisième ordre. En ces points le plan osculateur a quatre points confondus communs avec la courbe. Les coordonnées x, y, z d'un point quelconque de la courbe étant exprimées au moyen d'un paramètre, les valeurs de ce paramètre correspondant aux points où le plan osculateur est stationnaire sont données par l'équation

$$\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \\ d^3x & d^3y & d^3z \end{vmatrix} = 0. \tag{8}$$

Or supposons maintenant que les tangentes de la courbe appartiennent à un complexe ayant pour axe l'axe des z, c'est-à-dire que

$$x\,dy - y\,dx = \mathrm{K}\,dz,$$

on aura

$$d^2z = \frac{1}{\mathrm{K}}(x\,d^2y - y\,d^2x), \quad d^3z = \frac{1}{\mathrm{K}}(x\,d^3y - y\,d^3x + dx\,d^2y - dy\,d^2x).$$

Substituons ces valeurs de dz, d^2z et d^3z dans l'équation (8); elle devient

$$\begin{vmatrix} dx & dy & x\,dy - y\,dx \\ d^2x & d^2y & x\,d^2y - y\,d^2x \\ d^3x & d^3y & x\,d^3y - y\,d^3x + dx\,d^2y - dy\,d^2x \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$\begin{vmatrix} dx & dy & x\,dy - y\,dx \\ d^2x & d^2y & x\,d^2y - y\,d^2x \\ d^3x & d^3y & x\,d^3y - y\,d^3x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} dx & dy & 0 \\ d^2x & d^2y & 0 \\ d^3x & d^3y & dx\,d^2y - dy\,d^2x \end{vmatrix} = (dx\,d^2y - dy\,d^2x)^2 = 0$$

Nous voyons que l'équation qui donne les points cherchés a pour premier membre un carré parfait.

La tangente en un point d'une courbe gauche où le plan osculateur est stationnaire n'a pas, en général, avec la courbe un contact d'un ordre plus élevé qu'en un point quelconque, c'est-à-dire que ce contact est du premier ordre. Nous allons montrer qu'aux points donnés par l'équation (8), dans le cas où les tangentes de la courbe font partie d'un complexe linéaire, le contact de la tangente avec la courbe est du second ordre. La tangente en un point (x, y, z) d'une courbe a avec celle-ci un contact du second ordre, si

$$\frac{dx}{d^2x} = \frac{dy}{d^2y} = \frac{dz}{d^2z}. \tag{9}$$

On exprime ainsi que les projections de la courbe sur deux quelconques des plans de coordonnées ont en ce point avec leur tangente un contact du second ordre. Or, pour les points correspondant aux racines de l'équation (8), on a

$$dx\,d^2y - dy\,d^2x = 0.$$

Mais

$$x\,dy - y\,dx = \mathrm{K}\,dz, \quad \text{et, par suite,} \quad x\,d^2y - y\,d^2x = \mathrm{K}\,d^2z;$$

donc

$$dz\,d^2y - dy\,d^2z = 0.$$

Les conditions (9) sont vérifiées.

6. Prenons un point d'une courbe gauche où le plan osculateur soit stationnaire, mais où la tangente n'ait pas avec la courbe un contact du second ordre. Projetons orthogonalement la courbe sur un plan perpendiculaire à la tangente en ce point, que nous désignerons par A, et proposons-nous de voir ce que sera sur cette projection le point a, projection de A. Au point A le plan osculateur ne traverse pas la courbe; par conséquent, si nous désignons par $a\omega$ la trace du plan osculateur sur le plan de projection, la courbe projection sera tout entière du même côté de $a\omega$, dans le voisinage de a. Ce point est un point double pour la projection, car tout plan passant par la tangente a en A un point double de rencontre avec la courbe. D'autre part, la tangente en ce point est unique : c'est la trace $a\omega$ du plan osculateur. Le point a est un point de rebroussement de seconde espèce.

Pour le démontrer en toute rigueur, prenons le point a pour origine, la droite aA pour axe des z, $a\omega$ pour axe des y, et une seconde droite quelconque dans le plan de projection pour axe des x.

Les coordonnées x, y et z d'un point de la courbe sont des fonctions d'un paramètre h, que l'on peut supposer tellement choisi, que pour $h = 0$ on ait le point A. Dans le voisinage de A, x, y et z peuvent être développés en séries suivant les puissances de h; on aura

$$(10) \qquad \begin{cases} x = \mathrm{A}h^4 + \mathrm{A}_1 h^5 + \ldots, \\ y = \mathrm{B}h^2 + \mathrm{B}_1 h^3 + \ldots, \\ z = \mathrm{C} + \mathrm{C}_1 h + \ldots. \end{cases}$$

On doit avoir en effet h^4 en facteur, dans l'expression de x, puisque le plan des zy a au point A quatre points confondus communs avec la courbe.

La seconde des équations (10) permet de développer h suivant les puissances croissantes de $y^{\frac{1}{2}}$,

$$h = \alpha y^{\frac{1}{2}} + \ldots.$$

En substituant dans la première équation, on obtient pour x le développement suivant :

$$x = My^2 + Ny^{\frac{5}{2}} + \ldots;$$

c'est la forme du développement, relative au point de rebroussement de seconde espèce.

Passons au cas d'un point où la tangente a avec la courbe un contact du second ordre. Tout plan passant par la tangente a avec la courbe un point triple de rencontre au point de contact. Projetons la courbe comme précédemment, et choisissons les mêmes axes de coordonnées. Les formes des développements de x et de y seront

$$x = Ah^4 + A_1 h^5 + \ldots, \qquad y = Bh^3 + B_1 h^4 + \ldots.$$

L'origine est un point triple pour la courbe plane représentée par ces deux équations. La seconde équation permet de développer h suivant les puissances de $y^{\frac{1}{3}}$.

On a

$$h = \alpha y^{\frac{1}{3}} + \ldots;$$

donc

$$x = My^{\frac{4}{3}} + \ldots.$$

Il ne passe à l'origine qu'une seule branche réelle, car, sur les trois déterminations de $y^{\frac{1}{3}}$, il n'y en a qu'une seule de réelle. Dans les deux cas que nous venons de traiter, la projection permet de se représenter nettement la forme de la courbe dans le voisinage du point A.

7. Nous allons considérer une classe particulière de courbes dont les tangentes appartiennent à un complexe linéaire, les courbes unicursales.

Revenons aux formules du n° 4,

$$(11) \qquad x = \frac{p'q + pq'}{q'}, \quad y = q, \quad z = \frac{q(p'q - pq')}{Kq'}.$$

On obtient des courbes unicursales dont les tangentes font partie du complexe linéaire défini par l'axe des z et la constante K, en mettant à la place de p et de q des fonctions rationnelles du paramètre α. On peut voir qu'on les obtient toutes de cette manière.

Soient, en effet,

$$x = \varphi(\alpha), \quad y = \varphi_1(\alpha), \quad z = \varphi_2(\alpha)$$

les équations d'une courbe unicursale appartenant au complexe. Nous supposons que φ, φ_1 et φ_2 sont des fonctions rationnelles de α.

Prenons $q = \varphi_1(\alpha)$, et voyons si l'on peut déterminer p de manière que

$$(12) \qquad pq' + p'q = q'\varphi(\alpha), \quad q(p'q - pq') = \mathrm{K}q'\varphi_2(\alpha).$$

Retranchons ces équations membre à membre, nous avons

$$2pq' = q'\varphi(\alpha) - \frac{\mathrm{K}q'}{q}\varphi_2(\alpha) \quad \text{ou} \quad p = \frac{\varphi(\alpha)}{2} - \frac{\mathrm{K}\varphi_2(\alpha)}{2\varphi_1(\alpha)}.$$

La fonction rationnelle p de α, ainsi déterminée, satisfait aux équations (12), si l'on a égard à ce que

$$\mathrm{K}\varphi'_2(\alpha) = \varphi_1(\alpha)\varphi'(\alpha) - \varphi(\alpha)\varphi'_1(\alpha).$$

Calculons, en effet, $pq' + p'q$; nous aurons

$$pq' + p'q = \varphi'_1(\alpha)\left[\frac{\varphi(\alpha)}{2} - \frac{\mathrm{K}\varphi_2(\alpha)}{2\varphi_1(\alpha)}\right] + \varphi_1(\alpha)\left[\frac{\varphi'(\alpha)}{2} - \frac{\mathrm{K}\varphi'_2(\alpha)\varphi_1(\alpha) - \varphi_2(\alpha)\varphi'_1(\alpha)}{2\varphi_1^2(\alpha)}\right]$$
$$= \frac{\varphi'_1(\alpha)\varphi(\alpha)}{2} + \frac{\varphi_1(\alpha)\varphi'(\alpha)}{2} - \frac{\mathrm{K}\varphi'_2(\alpha)}{2} = \varphi(\alpha)\varphi'_1(\alpha).$$

La première des équations (11) est donc vérifiée; il en sera, par suite, de même de la seconde.

Soient

$$(13) \qquad p = \frac{a_0\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + \ldots}{\mathrm{A}\alpha^n + \mathrm{A}_1\alpha^{n-1} + \ldots}, \quad q = \frac{b_0\alpha^n + b_1\alpha^{n-1} + \ldots}{\mathrm{A}\alpha^n + \mathrm{A}_1\alpha^{n-1} + \ldots},$$

et supposons que les coefficients des différentes puissances de α soient quelconques; la courbe représentée par les équations (11) n'aura aucun point multiple. En effet, cette courbe aura un point double si, pour deux valeurs du paramètre α, les coordonnées x, y et z reprennent la même valeur. Or

$$x = \left(\frac{p'}{q'}\right)q + p, \quad z = \frac{q}{\mathrm{K}}\left(\frac{p'}{q'}\right) - \frac{pq}{\mathrm{K}};$$

q devant reprendre la même valeur, on voit qu'il en sera de même de p et de $\frac{p'}{q'}$. Si donc on considère p et q comme les coordonnées d'un point quelconque d'une courbe unicursale plane, qui serait représentée par les équations (13), cette courbe aurait, au point correspondant, un point double, et, les deux valeurs de $\frac{p'}{q'}$ étant égales, ce point ne serait pas un point double ordinaire; or la courbe (13) ne peut avoir que des points doubles ordinaires, si, comme nous l'avons supposé, les coefficients des puissances de α sont absolument arbitraires.

8. Démontrons maintenant que la projection de toute courbe unicursale de degré m, dont les tangentes font partie d'un complexe linéaire, sur un plan perpendiculaire à l'axe de ce complexe, a m points d'inflexion à l'infini.

Prenons l'axe du complexe pour axe des z.

Soient

$$x = \frac{a_1\alpha^m + b_1\alpha^{m-1} + \ldots}{A\alpha^m + B\alpha^{m-1} + \ldots}, \quad y = \frac{a_2\alpha^m + b_2\alpha^{m-1} + \ldots}{A\alpha^m + B\alpha^{m-1} + \ldots}, \quad z = \frac{a_3\alpha^m + b_3\alpha^{m-1} + \ldots}{A\alpha^m + B\alpha^{m-1} + \ldots}$$

les équations de la courbe. Toutes les tangentes de cette courbe appartenant à un complexe linéaire ayant Oz pour axe, on ne devra pas trouver de termes logarithmiques en intégrant $x\,dy - y\,dx$.

Posons

$$x = \frac{P}{R}, \quad y = \frac{Q}{R},$$

on a

$$x\,dy - y\,dx = \frac{PQ' - P'Q}{R^2}\,d\alpha,$$

soit

$$R = (\alpha - \alpha_1)(\alpha - \alpha_2)\ldots(\alpha - \alpha_m).$$

Décomposons la fraction rationnelle $\frac{PQ' - P'Q}{R^2}$ en fractions simples

$$\frac{PQ' - P'Q}{R^2} = \frac{K}{(\alpha - \alpha_1)^2} + \frac{K_1}{(\alpha - \alpha_1)} + \ldots.$$

Toutes les quantités K_i doivent être nulles.

Or on peut écrire cette identité de la manière suivante :

$$\frac{PQ' - P'Q}{\left(\frac{R}{\alpha - \alpha_1}\right)^2} = K + K_1(\alpha - \alpha_1) + \ldots .$$

Différentions et faisons $\alpha = \alpha_1$; il ne restera dans le second membre que K_1. Le premier membre différentié devient

$$\left[(PQ'' - P''Q)\frac{R}{\alpha - \alpha_1} - 2(PQ' - P'Q)\frac{R'(\alpha - \alpha_1) - R}{(\alpha - \alpha_1)^2}\right]\frac{1}{\left(\frac{R}{\alpha - \alpha_1}\right)^3};$$

faisons $\alpha = \alpha_1$, et égalons à zéro; nous aurons

$$(PQ'' - P''Q)R' + (P'Q - PQ')R'' = 0, \quad \text{pour} \quad \alpha = \alpha_1.$$

De même cette quantité doit s'annuler pour $\alpha = \alpha_2, \ldots, \alpha_m$.

D'autre part, les points d'inflexion de la courbe unicursale représentée par les équations

$$x = \frac{P}{R}, \quad y = \frac{Q}{R}$$

sont donnés par l'équation du degré $3(m - 2)$

$$R(P'Q'' - P''Q') + R'(P''Q - PQ'') + R''(PQ' - P'Q) = 0.$$

Nous venons de voir que toutes les racines du polynôme R annulent le polynôme $R'(P''Q - PQ'') + R''(PQ' - P'Q)$.

L'équation, donnant les valeurs de α correspondant aux points d'inflexion, admet donc pour racines $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$. Par conséquent, la courbe a m points d'inflexion à l'infini.

La réciproque de ce théorème est vraie : *Si une courbe unicursale d'ordre m, située dans un plan perpendiculaire à l'axe d'un complexe, a m points d'inflexion à l'infini, elle peut être considérée comme la projection d'une courbe gauche d'ordre m, dont les tangentes font partie de ce complexe.*

En effet, si $R'(P''Q - PQ'') + R''(PQ' - P'Q)$ s'annule pour $\alpha = \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, les termes $\frac{1}{\alpha - \alpha_1}, \frac{1}{\alpha - \alpha_2}, \ldots$ auront des coefficients nuls dans le développement de $\frac{PQ' - P'Q}{R^2}$. On aura donc

$$K\,dz = \frac{PQ' - P'Q}{R^2}\,d\alpha = \sum \frac{A_1\,d\alpha}{(\alpha - \alpha_1)^2}.$$

Par suite, z aura la même forme que x et y : la courbe plane considérée sera la projection d'une courbe d'ordre m.

Nous pouvons alors énoncer le théorème suivant, dont un cas particulier, relatif aux courbes du troisième ordre, a été donné par M. Appell :

Pour qu'une courbe plane unicursale d'ordre m puisse être considérée comme la projection d'une courbe de degré m, dont les tangentes appartiennent à un complexe linéaire ayant son axe perpendiculaire au plan de la courbe plane, il faut et il suffit que celle-ci ait m points d'inflexion à l'infini.

Outre ces m points à l'infini, la courbe en a $2(m-3)$ autres : ce sont les projections des points de la courbe gauche, où elle a avec sa tangente un contact du second ordre. Nous pouvons donc dire qu'*une courbe unicursale d'ordre m, sans singularité, dont les tangentes font partie d'un complexe linéaire, possède* $2(m-3)$ *points où la tangente a avec elle un contact du second ordre.*

SECONDE PARTIE.

9. Avant de nous occuper des surfaces réglées dont les génératrices font partie d'un complexe linéaire, nous allons faire connaître une propriété des équations de Riccati, c'est-à-dire des équations différentielles de la forme

$$\frac{dy}{dx} + X_1 y^2 + X_2 y + X_3 = 0,$$

où les X sont des fonctions quelconques de la variable x.

C'est, comme on sait, une équation dont l'intégration est ramenée à des quadratures, quand on en connaît une solution.

Si l'on prend quatre solutions quelconques y_1, y_2, y_3, y_4 de cette équation différentielle, le rapport anharmonique $\frac{y_1-y_2}{y_1-y_4}:\frac{y_3-y_2}{y_3-y_4}$ de ces quatre fonctions de x est une constante.

Nous aurons, en effet,

$$\frac{dy_1}{dx}+X_1y_1^2+X_2y_1+X_3=0,$$

$$\frac{dy_2}{dx}+X_1y_2^2+X_2y_2+X_3=0,$$

$$\frac{dy_3}{dx}+X_1y_3^2+X_2y_3+X_3=0,$$

$$\frac{dy_4}{dx}+X_1y_4^2+X_2y_4+X_3=0;$$

par conséquent,

$$\begin{vmatrix} \frac{dy_1}{dx} & y_1^2 & y_1 & 1 \\ \frac{dy_2}{dx} & y_2^2 & y_2 & 1 \\ \frac{dy_3}{dx} & y_3^2 & y_3 & 1 \\ \frac{dy_4}{dx} & y_4^2 & y_4 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

Développons ce déterminant; nous aurons

$$\begin{aligned}\frac{dy_1}{dx}(y_2-y_3)(y_2-y_4)(y_3-y_4)+\frac{dy_2}{dx}&(y_3-y_4)(y_3-y_1)(y_4-y_1)\\ +\frac{dy_3}{dx}&(y_4-y_1)(y_4-y_2)(y_1-y_2)\\ +\frac{dy_4}{dx}&(y_1-y_2)(y_1-y_3)(y_2-y_3)=0\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}&(y_1-y_2)(y_3-y_4).d[(y_1-y_4)(y_3-y_2)]\\ &-(y_1-y_4)(y_3-y_2).d[(y_1-y_2)(y_3-y_4)]=0,\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\frac{(y_1-y_2)(y_3-y_4)}{(y_1-y_4)(y_3-y_2)} = \frac{y_1-y_2}{y_1-y_4} : \frac{y_3-y_2}{y_3-y_4} = \text{const.}$$

Le théorème est donc démontré. On aurait pu démontrer autrement ce théorème, en exprimant les trois solutions y_2, y_3, y_4 au moyen de y_1 et d'une exponentielle. Il n'y a alors qu'à faire une simple vérification.

La réciproque est vraie : *Toute équation différentielle du premier ordre telle, que le rapport anharmonique de quatre quelconques de ses solutions soit constant, est une équation de Riccati.*

Désignons, en effet, par y_1, y_2, y_3 trois solutions, et soit y une solution quelconque. On aura

$$\frac{y-y_1}{y-y_3} : \frac{y_2-y_1}{y_2-y_3} = \mathrm{K},$$

K ne dépendant pas de x, ou

$$\frac{y-y_1}{y-y_3} = \mathrm{K}\frac{y_2-y_1}{y_2-y_3} = \mathrm{K}\Omega.$$

En différentiant, nous avons

$$\left(\frac{dy}{dx}-\frac{dy_1}{dx}\right)(y-y_3)-\left(\frac{dy}{dx}-\frac{dy_3}{dx}\right)(y-y_1)=\mathrm{K}\frac{d\Omega}{dx}(y-y_3)^2=(y-y_1)(y-y_3)\frac{\frac{d\Omega}{dx}}{\Omega}.$$

En égalant la première expression à la troisième, nous voyons de suite que y satisfait à une équation de Riccati. Ainsi la constance du rapport anharmonique de quatre solutions quelconques est caractéristique de ce genre d'équations différentielles.

Cela posé, considérons une surface réglée quelconque. Une telle surface peut être définie par les équations

$$x = x_1 + l\alpha, \quad y = y_1 + l\beta, \quad z = z_1 + l\gamma,$$

x_1, y_1 et z_1 sont des fonctions données d'un paramètre t; α, β et γ désignent les cosinus des angles que fait avec les axes la génératrice passant par le point (x_1, y_1, z_1); ce sont aussi des fonctions de t. A une valeur du paramètre l correspond, sur la génératrice, un point dont la distance au point (x_1, y_1, z_1) est égale à l. Toute ligne de la surface est déterminée par une relation entre l et t. La relation différentielle donnant les lignes asymptotiques a la forme

$$\frac{dl}{dt} + X_1 l^2 + X_2 l + X_3 = 0,$$

comme l'a montré pour la première fois M. Bonnet. De ce fait résulte une propriété des lignes asymptotiques de la surface. Prenons quatre solutions quelconques l_1, l_2, l_3 et l_4. D'après le théorème précédent, le rapport anharmonique de ces quatre fonctions de t est indépendant de t. Nous en déduisons qu'*une génératrice quelconque rencontre quatre lignes asymptotiques données sur la surface en quatre points dont le rapport anharmonique est constant.*

Dans le cas où l'on connaît sur une surface réglée trois lignes asymptotiques, toutes les autres sont connues immédiatement, sans qu'il y ait aucune intégration à effectuer. Conservons les variables que nous avons choisies plus haut. Nous avons, en désignant par l_1, l_2, l_3 les trois intégrales connues, c'est-à-dire les valeurs de l donnant les trois lignes asymptotiques, l'intégrale générale

$$\frac{l - l_1}{l - l_3} : \frac{l_2 - l_1}{l_2 - l_3} = \text{const.},$$

qui exprime la constance du rapport anharmonique.

10. Supposons maintenant que nous connaissions deux lignes asymptotiques d'une surface réglée. On aura, dans ce cas, deux solutions de l'équation différentielle de Riccati. La connaissance de ces deux solutions permet de ramener à une quadrature la recherche de l'intégrale générale. On peut, dans ce cas, opérer de la manière suivante la séparation des variables :

Désignons par μ le paramètre dont dépend la position d'une génératrice.

Soient $x = M_1$, $y = M_2$, $z = M_3$, $t = M_4$ les valeurs fixant le point de la première ligne asymptotique sur la génératrice correspondant à la valeur μ du paramètre; les M sont des fonctions de ce paramètre.

Soient de même $x = N_1$, $y = N_2$, $z = N_3$, $t = N_4$ les valeurs des coordonnées du point de la seconde ligne asymptotique sur la même génératrice; les N sont des fonctions de μ.

La position d'un point quelconque sur la génératrice peut être fixée par les équations

$$x = M_1 + \nu N_1, \quad y = M_2 + \nu N_2, \quad z = M_3 + \nu N_3, \quad t = M_4 + \nu N_4.$$

En faisant varier μ et ν, on aura tous les points de la surface. La relation différentielle entre μ et ν, donnant les lignes asymptotiques de cette surface, est, comme on le reconnaît sans peine,

$$\begin{vmatrix} M_1 & N_1 & \frac{dM_1}{d\mu} + \nu \frac{dN_1}{d\mu} & \frac{d^2M_1}{d\mu^2} + \nu \frac{d^2N_1}{d\mu^2} + 2 \frac{d\nu}{d\mu} \frac{dN_1}{d\mu} \\ M_2 & N_2 & \frac{dM_2}{d\mu} + \nu \frac{dN_2}{d\mu} & \frac{d^2M_2}{d\mu^2} + \nu \frac{d^2N_2}{d\mu^2} + 2 \frac{d\nu}{d\mu} \frac{dN_2}{d\mu} \\ M_3 & N_3 & \frac{dM_3}{d\mu} + \nu \frac{dN_3}{d\mu} & \frac{d^2M_3}{d\mu^2} + \nu \frac{d^2N_3}{d\mu^2} + 2 \frac{d\nu}{d\mu} \frac{dN_3}{d\mu} \\ M_4 & N_4 & \frac{dM_4}{d\mu} + \nu \frac{dN_4}{d\mu} & \frac{d^2M_4}{d\mu^2} + \nu \frac{d^2N_4}{d\mu^2} + 2 \frac{d\nu}{d\mu} \frac{dN_4}{d\mu} \end{vmatrix} = 0;$$

c'est une équation de Riccati.

Les hypothèses faites sur les lignes M et N vont nous permettre de la simplifier. On a, en effet,

$$\begin{vmatrix} M_1 & N_1 & \frac{dM_1}{d\mu} & \frac{d^2M_1}{d\mu^2} \\ M_2 & N_2 & \frac{dM_2}{d\mu} & \frac{d^2M_2}{d\mu^2} \\ M_3 & N_3 & \frac{dM_3}{d\mu} & \frac{d^2M_3}{d\mu^2} \\ M_4 & N_4 & \frac{dM_4}{d\mu} & \frac{d^2M_4}{d\mu^2} \end{vmatrix} = 0 \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} M_1 & N_1 & \frac{dN_1}{d\mu} & \frac{d^2N_1}{d\mu^2} \\ M_2 & N_2 & \frac{dN_2}{d\mu} & \frac{d^2N_2}{d\mu^2} \\ M_3 & N_3 & \frac{dN_3}{d\mu} & \frac{d^2N_3}{d\mu^2} \\ M_4 & N_4 & \frac{dN_4}{d\mu} & \frac{d^2N_4}{d\mu^2} \end{vmatrix} = 0.$$

L'équation différentielle peut alors s'écrire

$$\nu \left\{ \begin{vmatrix} M_1 & N_1 & \frac{dN_1}{d\mu} & \frac{d^2M_1}{d\mu^2} \\ M_2 & N_2 & \frac{dN_2}{d\mu} & \frac{d^2M_2}{d\mu^2} \\ M_3 & N_3 & \frac{dN_3}{d\mu} & \frac{d^2M_3}{d\mu^2} \\ M_4 & N_4 & \frac{dN_4}{d\mu} & \frac{d^2M_4}{d\mu^2} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} M_1 & N_1 & \frac{dM_1}{d\mu} & \frac{d^2N_1}{d\mu^2} \\ M_2 & N_2 & \frac{dM_2}{d\mu} & \frac{d^2N_2}{d\mu^2} \\ M_3 & N_3 & \frac{dM_3}{d\mu} & \frac{d^2N_3}{d\mu^2} \\ M_4 & N_4 & \frac{dM_4}{d\mu} & \frac{d^2N_4}{d\mu^2} \end{vmatrix} \right\} + 2 \frac{d\nu}{d\mu} \begin{vmatrix} M_1 & N_1 & \frac{dM_1}{d\mu} & \frac{dN_1}{d\mu} \\ M_2 & N_2 & \frac{dM_2}{d\mu} & \frac{dN_2}{d\mu} \\ M_3 & N_3 & \frac{dM_3}{d\mu} & \frac{dN_3}{d\mu} \\ M_4 & N_4 & \frac{dM_4}{d\mu} & \frac{dN_4}{d\mu} \end{vmatrix} =$$

Nous la mettrons sous la forme

$$(14)\quad d\mu \begin{vmatrix} M_1 & N_1 & \frac{d(M_1+N_1)}{d\mu} & \frac{d^2(M_1+N_1)}{d\mu^2} \\ M_2 & N_2 & \frac{d(M_2+N_2)}{d\mu} & \frac{d^2(M_2+N_2)}{d\mu^2} \\ M_3 & N_3 & \frac{d(M_3+N_3)}{d\mu} & \frac{d^2(M_3+N_3)}{d\mu^2} \\ M_4 & N_4 & \frac{d(M_4+N_4)}{d\mu} & \frac{d^2(M_4+N_4)}{d\mu^2} \end{vmatrix} + 2\frac{d\nu}{\nu} \begin{vmatrix} M_1 & N_1 & \frac{dM_1}{d\mu} & \frac{dN_1}{d\mu} \\ M_2 & N_2 & \frac{dM_2}{d\mu} & \frac{dN_2}{d\mu} \\ M_3 & N_3 & \frac{dM_3}{d\mu} & \frac{dN_3}{d\mu} \\ M_4 & N_4 & \frac{dM_4}{d\mu} & \frac{dN_4}{d\mu} \end{vmatrix} = 0.$$

La recherche des lignes asymptotiques est donc ramenée à une seule quadrature.

Considérons une surface réglée dont les génératrices fassent partie d'un complexe linéaire. Nous avons montré (2) comment on pouvait obtenir immédiatement une ligne asymptotique de cette surface; mais, et c'est là le point important, cette ligne asymptotique rencontrant chaque génératrice en deux points, nous devons la compter pour deux. Par conséquent, la recherche des lignes asymptotiques de toute surface réglée, dont les génératrices font partie d'un complexe linéaire, dépend d'une quadrature.

Il peut arriver que les génératrices d'une surface réglée appartiennent à une infinité de complexes linéaires. Une ligne asymptotique correspond alors sur la surface à chacun de ces complexes. On a, dans ce cas, toutes les lignes asymptotiques. Les tangentes d'une quelconque de ces courbes appartiennent à un complexe linéaire. On sait que toutes les droites qui font partie d'une congruence rencontrent deux mêmes droites. Sur les surfaces réglées dont nous parlons se trouvent donc deux droites singulières rencontrant toutes les génératrices. La possibilité de trouver les lignes asymptotiques d'une surface réglée possédant deux droites singulières a été signalée pour la première fois par M. Cremona.

11. Je vais appliquer les résultats généraux que je viens d'indiquer à certaines surfaces réglées unicursales.

Je commence par rappeler quelques considérations sur les surfaces unicursales, qui ont été étudiées par M. Clebsch (*Math. Annalen*, 1869).

Soient x, y, z, t les coordonnées homogènes d'un point de la surface. Nous avons pour cette surface

$$x = f_1(\alpha, \beta, \gamma), \quad y = f_2(\alpha, \beta, \gamma), \quad z = f_3(\alpha, \beta, \gamma), \quad t = f_4(\alpha, \beta, \gamma),$$

égalités où les f désignent des fonctions entières, homogènes et de degré n de α, β et γ. A un point représenté dans un plan en coordonnées homogènes par (α, β, γ) correspond sur la surface le point (x, y, z, t), et réciproquement, à un point donné sur la surface ne correspond, en général, qu'un point sur ce plan, que M. Clebsch appelle le *plan de la représentation*.

On exprime aisément le degré N de la surface. Considérons, à cet effet, les courbes planes

$$f_1(\alpha, \beta, \gamma) = 0, \quad f_2(\alpha, \beta, \gamma) = 0, \quad f_3(\alpha, \beta, \gamma) = 0, \quad f_4(\alpha, \beta, \gamma) = 0.$$

Soient x_1 le nombre de leurs points simples communs; x_2 celui de leurs points doubles communs, ...; x_K celui de leurs points multiples d'ordre K communs. Je suppose qu'en aucun de ces points les quatre courbes n'aient de branche ayant même tangente. Le degré N de la surface s'exprime par la formule

$$N = n^2 - x_1 - 4x_2 - \ldots - K^2 x_K.$$

Si les quatre courbes f ont un point multiple d'ordre $(n-1)$ commun, la surface sera une surface réglée unicursale. Réciproquement, toute surface réglée unicursale peut être obtenue au moyen de quatre courbes ayant un point multiple commun, dont l'ordre est inférieur d'une unité à celui de la courbe.

Nous n'emploierons pas dorénavant, dans le plan de la représentation, les coordonnées homogènes; nous désignerons les axes auxquels nous rapportons les points de ce plan par $O\lambda$ et $O\mu$.

Supposons que le point multiple commun aux quatre courbes soit à l'infini sur l'axe des λ. Les équations des courbes servant à définir la surface auront la forme $A\lambda + B = 0$, où A et B sont deux polynômes en μ.

La surface sera définie par les équations

$$x = \frac{A_1\lambda + B_1}{A\lambda + B}, \quad y = \frac{A_2\lambda + B_2}{A\lambda + B}, \quad z = \frac{A_3\lambda + B_3}{A\lambda + B}.$$

Pour une valeur constante donnée à μ, on obtient, en faisant varier λ, une génératrice rectiligne. Nous avons

$$\lambda(\mathrm{A}x - \mathrm{A}_1) = \mathrm{B}_1 - \mathrm{B}x, \quad \lambda(\mathrm{A}y - \mathrm{A}_2) = \mathrm{B}_2 - \mathrm{B}y, \quad \lambda(\mathrm{A}z - \mathrm{A}_3) = \mathrm{B}_3 - \mathrm{B}z,$$

d'où

$$x = \frac{\mathrm{AB}_1 - \mathrm{A}_1\mathrm{B}}{\mathrm{AB}_3 - \mathrm{A}_3\mathrm{B}} z + \frac{\mathrm{A}_1\mathrm{B}_3 - \mathrm{A}_3\mathrm{B}_1}{\mathrm{AB}_3 - \mathrm{A}_3\mathrm{B}}, \qquad y = \frac{\mathrm{AB}_2 - \mathrm{A}_2\mathrm{B}}{\mathrm{AB}_3 - \mathrm{A}_3\mathrm{B}} z + \frac{\mathrm{A}_2\mathrm{B}_3 - \mathrm{A}_3\mathrm{B}_2}{\mathrm{AB}_3 - \mathrm{A}_3\mathrm{B}}.$$

Les équations d'une droite étant $x = az + p$, $y = bz + q$, nous avons écrit l'équation d'un complexe sous la forme

$$\mathrm{L}a + \mathrm{M}b + \mathrm{N} - \mathrm{Q}p + \mathrm{P}q - \mathrm{R}(aq - bp) = 0.$$

Les génératrices de notre surface réglée appartiendront à un complexe linéaire, si l'on peut trouver des quantités L, M, N, P, Q et R telles, que l'on ait identiquement

$$(15)\quad \left\{ \begin{aligned} &\mathrm{L}(\mathrm{AB}_1 - \mathrm{A}_1\mathrm{B}) + \mathrm{M}(\mathrm{AB}_2 - \mathrm{A}_2\mathrm{B}) + \mathrm{N}(\mathrm{AB}_3 - \mathrm{A}_3\mathrm{B}) \\ &\qquad + \mathrm{P}(\mathrm{A}_2\mathrm{B}_3 - \mathrm{A}_3\mathrm{B}_2) + \mathrm{Q}(\mathrm{A}_3\mathrm{B}_1 - \mathrm{A}_1\mathrm{B}_3) + \mathrm{R}(\mathrm{A}_1\mathrm{B}_2 - \mathrm{A}_2\mathrm{B}_1) = 0. \end{aligned} \right.$$

12. Parmi les surfaces réglées unicursales, nous rencontrons les surfaces gauches du troisième ordre. Toute surface gauche du troisième ordre est unicursale. Considérons, en effet, une conique tracée sur la surface. Par chacun des points de cette courbe passe une génératrice; comme la conique est une courbe unicursale, il s'ensuit que chaque génératrice est déterminée individuellement.

Toute surface réglée du troisième ordre peut être définie (*Borchardt's Journal,* Band 67) par les équations

$$x = \frac{\mathrm{A}_1\lambda + \mathrm{B}_1}{\mathrm{A}\lambda + \mathrm{B}}, \quad y = \frac{\mathrm{A}_2\lambda + \mathrm{B}_2}{\mathrm{A}\lambda + \mathrm{B}}, \quad z = \frac{\mathrm{A}_3\lambda + \mathrm{B}_3}{\mathrm{A}\lambda + \mathrm{B}},$$

où $\mathrm{A} = a\mu^2 + b\mu + c$, $\mathrm{B} = d\mu + e$, $\mathrm{A}_1 = a_1\mu^2 + \ldots$.

Sur le plan de la représentation, c'est-à-dire sur le plan des $\lambda\mu$, à une génératrice de la surface correspond une parallèle à l'axe $\mathrm{O}\lambda$; nous obtenons, en effet, une génératrice de la surface en donnant à μ une valeur constante.

Une surface gauche du troisième ordre a une droite double. Elle possède en outre une seconde droite singulière qui rencontre toutes les génératrices. Nous obtenons cette droite en faisant $\lambda = 0$. Elle correspond, par conséquent, à l'axe $O\mu$.

Le premier membre de la relation (15) du n° **11** est ici un polynôme du troisième degré. Nous n'aurons que quatre équations homogènes entre les six quantités L, M, N, P, Q et R. Les génératrices de la surface appartiennent donc à une infinité de complexes linéaires. Un des rapports reste arbitraire.

Le fait était d'ailleurs évident *a priori*, car tous les complexes, ayant pour droites conjuguées la droite double et la droite singulière de la surface, répondent à la question. On sait, en effet, que toute droite rencontrant deux droites conjuguées par rapport à un complexe appartient elle-même au complexe.

Cela posé, considérons un des complexes auxquels appartiennent les génératrices de la surface. A ce complexe correspond, sur la surface, une courbe dont il est facile de trouver le degré. Celui-ci est, en effet, égal (3) à la classe d'une section plane quelconque. Or cette section est une courbe du troisième degré ayant un point double. Sa classe est donc égale à quatre. Nous avons donc sur la surface une courbe gauche du quatrième ordre. Cette courbe est une courbe asymptotique de la surface (3). C'est un fait dont on peut se rendre compte ici de la manière suivante : Prenons, en effet, un point quelconque A de la courbe, et menons le plan polaire de ce point, c'est-à-dire le plan tangent en ce point à la surface. Ce plan coupe la surface suivant la génératrice D passant en A, et suivant une conique C passant aussi par A. Cherchons les points où la courbe gauche du quatrième ordre rencontre le plan considéré. Ce sont, comme nous l'avons démontré (3), les points de contact des tangentes menées par le foyer A du plan à la section faite dans la surface par ce plan. Or, si du point A on mène les tangentes à cette section, trois des quatre tangentes que l'on peut mener, en général, viennent confondre leur point de contact en A. Le plan a donc en A trois points de rencontre avec la courbe confondus. Il est osculateur en ce point à la courbe. Le quatrième point d'intersection est le point A′, second point de la courbe gauche située sur la génératrice D.

13. Proposons-nous de rechercher l'équation de la courbe qui, dans le plan $\lambda\mu$, représente une de ces courbes du quatrième ordre. Considérons donc un des complexes auxquels appartiennent les génératrices de la surface. Le plan polaire du point (x, y, z) est

$$(\mathrm{L}+\mathrm{Q}z-\mathrm{R}y)(\mathrm{X}-x)+(\mathrm{M}+\mathrm{R}x-\mathrm{P}z)(\mathrm{Y}-y)+(\mathrm{N}+\mathrm{P}y-\mathrm{Q}x)(\mathrm{Z}-z)=0.$$

Nous voulons avoir la courbe telle, que le plan polaire de chacun de ses points soit en ce point tangent à la surface. Il nous suffira pour cela d'écrire que ce plan contient la tangente à la courbe décrite par le point (x, y, z) donné par les formules

$$x=\frac{\mathrm{A}_1\lambda+\mathrm{B}_1}{\mathrm{A}\lambda+\mathrm{B}},\quad y=\frac{\mathrm{A}_2\lambda+\mathrm{B}_2}{\mathrm{A}\lambda+\mathrm{B}},\quad z=\frac{\mathrm{A}_3\lambda+\mathrm{B}_3}{\mathrm{A}\lambda+\mathrm{B}},$$

lorsque, laissant λ constant, on fait varier μ.

Désignons par ∂x, ∂y, ∂z les différentielles de x, y, z prises par rapport à μ. Le plan polaire de x, y, z contenant la tangente à la courbe que nous venons de définir, on aura

$$(\mathrm{L}+\mathrm{Q}z-\mathrm{R}y)\,\partial x+(\mathrm{M}+\mathrm{R}x-\mathrm{P}z)\,\partial y+(\mathrm{N}+\mathrm{P}y-\mathrm{Q}x)\,\partial z=0,$$

c'est-à-dire, en remplaçant ∂x, ∂y, ∂z par leurs valeurs,

$$\begin{aligned}&(\mathrm{L}+\mathrm{Q}z-\mathrm{R}y)[(\mathrm{A}'_1\lambda+\mathrm{B}'_1)(\mathrm{A}\lambda+\mathrm{B})-(\mathrm{A}'\lambda+\mathrm{B}')(\mathrm{A}_1\lambda+\mathrm{B}_1)]\\+&(\mathrm{M}+\mathrm{R}x-\mathrm{P}z)[(\mathrm{A}'_2\lambda+\mathrm{B}'_2)(\mathrm{A}\lambda+\mathrm{B})-(\mathrm{A}'\lambda+\mathrm{B}')(\mathrm{A}_2\lambda+\mathrm{B}_2)]\\+&(\mathrm{N}+\mathrm{P}y-\mathrm{Q}x)[(\mathrm{A}'_3\lambda+\mathrm{B}'_3)(\mathrm{A}\lambda+\mathrm{B})-(\mathrm{A}'\lambda+\mathrm{B}')(\mathrm{A}_3\lambda+\mathrm{B}_3)]=0.\end{aligned}$$

Si nous substituons à x, y et z leurs valeurs, nous avons la relation entre λ et μ donnant la ligne de la surface correspondant au complexe défini par L, M, N, P, Q et R, ces six quantités satisfaisant, bien entendu, aux quatre équations que l'on obtient, en écrivant que l'équation (15) est identiquement vérifiée.

$$(16)\quad\left\{\begin{aligned}&\mathrm{L}[(\mathrm{A}'_1\lambda+\mathrm{B}'_1)(\mathrm{A}\lambda+\mathrm{B})-(\mathrm{A}'\lambda+\mathrm{B}')(\mathrm{A}_1\lambda+\mathrm{B}_1)]\\+&\mathrm{M}[(\mathrm{A}'_2\lambda+\mathrm{B}'_2)(\mathrm{A}\lambda+\mathrm{B})-(\mathrm{A}'\lambda+\mathrm{B}')(\mathrm{A}_2\lambda+\mathrm{B}_2)]\\+&\mathrm{N}[(\mathrm{A}'_3\lambda+\mathrm{B}'_3)(\mathrm{A}\lambda+\mathrm{B})-(\mathrm{A}'\lambda+\mathrm{B}')(\mathrm{A}_3\lambda+\mathrm{B}_3)]\\+&\mathrm{P}[(\mathrm{A}_2\lambda+\mathrm{B}_2)(\mathrm{A}'_3\lambda+\mathrm{B}'_3)-(\mathrm{A}_3\lambda+\mathrm{B}_3)(\mathrm{A}'_2\lambda+\mathrm{B}'_2)]\\+&\mathrm{Q}[(\mathrm{A}_3\lambda+\mathrm{B}_3)(\mathrm{A}'_1\lambda+\mathrm{B}'_1)-(\mathrm{A}_1\lambda+\mathrm{B}_1))\mathrm{A}'_3\lambda+\mathrm{B}'_3)]\\+&\mathrm{R}[(\mathrm{A}_1\lambda+\mathrm{B}_1)(\mathrm{A}'_2\lambda+\mathrm{B}'_2)-(\mathrm{A}_2\lambda+\mathrm{B}_2)(\mathrm{A}'_1\lambda+\mathrm{B}'_1)]=0.\end{aligned}\right.$$

Cette relation est du quatrième degré en λ et μ. On peut l'écrire

$$U\lambda^2 + V\lambda + W = 0;$$

on a

$$U = L(AA'_1 - A_1A') + M(AA'_2 - A_2A') + \ldots + R(A_1A'_2 - A_2A'_1).$$

Les A étant des polynômes du second degré, on voit que U est aussi un polynôme du second degré en μ,

$$W = L(BB'_1 - B_1B') + \ldots + R(B_1B'_2 - B_2B'_1).$$

B étant du premier degré, W se réduit à une constante.

Enfin

$$V = L(AB'_1 - B'A_1 + BA'_1 - B_1A') + \ldots + R(A_1B'_2 - B'_1A_2 + B_1A'_2 - B_2A'_1);$$

or on a identiquement, d'après l'équation (15),

$$L(AB'_1 - B'A_1) + M(AB'_2 - B'A_2) + \ldots = -[L(B_1A' - BA'_1) + \ldots];$$

par suite, on peut écrire

$$V = 2[L(AB'_1 - B'A_1) + \ldots + R(A_1B'_2 - B'_1A_2)].$$

On voit que V est un polynôme du premier degré en μ.

L'équation (16) est du quatrième degré par rapport à λ et μ. En changeant λ en $\frac{1}{\lambda}$, on obtient une relation qui est seulement du second degré; λ et μ peuvent donc s'exprimer rationnellement en fonction d'un paramètre. Il s'ensuit que la courbe gauche du quatrième ordre est une courbe unicursale. Les lignes asymptotiques des surfaces gauches du troisième ordre rentrent, par conséquent, dans la famille des courbes unicursales du quatrième ordre, étudiées par M. Appell (*Comptes rendus*, 18 décembre 1876). Chacune de ces lignes possède deux points où le contact de la tangente avec la courbe est du second ordre, ce qui est d'accord avec la formule générale $N = 2(m - 3)$, que nous avons donnée (8) comme expression du nombre des points de cette nature pour une courbe unicursale d'ordre m, dont les tangentes font partie d'un complexe linéaire.

14. Nous considérerons comme application la surface du troisième ordre donnée par les équations

$$x = \mu\lambda, \quad y = \lambda, \quad z = \mu^2;$$

cette surface du troisième ordre est la surface gauche générale du troisième ordre : nous voulons dire que, par des transformations homographiques convenables, on peut ramener à cette surface une surface gauche quelconque du troisième ordre (CLEBSCH, *Journal de Crelle*, t. 67).

On a ici

$$A = 0, \quad A_1 = \mu, \quad A_2 = 1, \quad A_3 = 0,$$
$$B = 1, \quad B_1 = 0, \quad B_2 = 0, \quad B_3 = \mu^2;$$

l'équation (15) se réduit à

$$- L\mu - M + P\mu^2 - Q\mu^3 = 0;$$

donc

$$L = 0, \quad M = 0, \quad P = 0, \quad Q = 0,$$

et l'équation (16) devient

$$- R\lambda^2 + 2N\mu = 0;$$

on a donc pour les lignes asymptotiques

$$\lambda^2 = C\mu,$$

C étant une constante arbitraire. Les deux points d'une quelconque des lignes asymptotiques, où la tangente a, avec la courbe, un contact du second ordre, sont situés sur la droite double de la surface. Ce sont l'origine et le point à l'infini sur l'axe Oz. Les deux génératrices, passant en chacun de ces points, sont confondues et sont les génératrices d'inflexion de la surface. Elles sont tangentes à toutes les lignes asymptotiques.

Une génératrice quelconque rencontre en deux points chaque ligne asymptotique. Le milieu de la distance de ces deux points est situé sur Oz. On le reconnaît en considérant les équations d'une ligne asymptotique

$$x = \frac{\lambda^3}{C}, \quad y = \lambda, \quad z = \frac{\lambda^4}{C^2}.$$

Une génératrice $z = \mu^2, \frac{y}{x} = \mu$ coupe cette courbe en deux points pour lesquels les x et les y sont égaux et de signe contraire. On peut donc dire, en remarquant que toutes les génératrices sont parallèles au plan des xy et que la droite singulière de la surface est à l'infini dans ce plan, qu'une génératrice quelconque rencontre une ligne asymptotique en deux points conjugués harmoniques par rapport aux points de rencontre de cette génératrice avec la droite double et la droite singulière. Cette propriété, qui se conserve par des transformations homographiques, appartient par suite à toute surface gauche du troisième ordre. Les deux points de rencontre d'une génératrice avec une ligne asymptotique variable forment sur cette droite deux divisions homographiques en involution. Il suit de ce que nous venons de dire que les deux points doubles de cette involution sont les points de rencontre de la génératrice avec la droite double et la droite singulière.

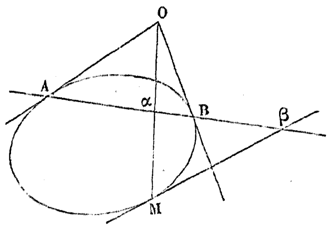
On peut trouver les lignes asymptotiques d'une surface réglée du troisième ordre par les considérations géométriques dont s'est servi M. Darboux (*Bulletin de la Société philomathique*) pour trouver les lignes asymptotiques de la surface de Steiner. On démontre aisément qu'une surface réglée du troisième ordre peut être donnée par les équations

$$x = f_1(\lambda, \mu), \quad y = f_2(\lambda, \mu), \quad z = f_3(\lambda, \mu), \quad t = f_4(\lambda, \mu),$$

où les courbes $f_1(\lambda, \mu) = 0$, ... représentent des coniques passant par un point fixe O, et divisant harmoniquement un segment de droite AB. Cela posé, une section plane quelconque de la surface, qui est donnée par l'équation

$$A f_1(\lambda, \mu) + B f_2(\lambda, \mu) + C f_3(\lambda, \mu) + D f_4(\lambda, \mu) = 0,$$

est représentée par une conique passant en O et partageant harmoniquement AB. Soit M un point quelconque du plan de la représentation.



A ce point correspond un point M′ sur la surface. Toutes les sections planes de la surface, passant en M′, sont représentées par des coniques passant en M et en O, et divisant harmoniquement AB. La section de la surface, par le plan tangent en M′, aura pour représentation une conique ayant un point double en M. Celle-ci se composera donc de la droite MO et d'une seconde droite $M\beta$ coupant AB en un point β conjugué harmonique par rapport à A et B du point de rencontre α de MO avec AB. La droite MO correspond à la génératrice passant en M′; $M\beta$ est la représentation de la conique qui complète l'intersection de la surface par le plan tangent. La tangente en M′ à cette conique est tangente à la seconde ligne asymptotique passant en M′; donc la représentation de cette ligne asymptotique sera une courbe tangente en M à $M\beta$. Nous avons donc à chercher des courbes telles que leur tangente en un point quelconque M soit la droite $M\beta$ conjuguée de MO par rapport aux droites MA et MB. On voit que la famille des coniques tangentes en A et B à AO et BO répond à la question. On a donc ainsi immédiatement les lignes asymptotiques de la surface.

15. Passons maintenant aux surfaces réglées unicursales du quatrième ordre ayant pour courbe double une cubique gauche. On peut remarquer que toute surface du quatrième ordre ayant pour courbe double une cubique gauche est nécessairement une surface réglée unicursale. Prenons, en effet, un point quelconque sur la surface. On peut, par ce point, faire passer une sécante double de la cubique gauche: cette droite rencontrant la surface en cinq points est située tout entière sur elle. D'autre part, chaque génératrice est déterminée individuellement, une section plane quelconque de la surface étant une courbe unicursale.

Ces surfaces peuvent être obtenues par les équations (Clebsch, *Math. Annalen*, 1870)

$$x=\frac{A_1\lambda+B_1}{A\lambda+B},\quad y=\frac{A_2\lambda+B_2}{A\lambda+B},\quad z=\frac{A_3\lambda+B_3}{A\lambda+B}, \tag{17}$$

où

$$A=a\mu^2+b\mu+c,\quad B=d\mu^2+e\mu+f,\quad A_1=a_1\mu^2+\ldots;$$

chacun des binômes AB_1-A_1B, ... entrant dans le premier membre de l'égalité (15) est du quatrième degré. Pour que cette égalité soit identiquement satisfaite, nous aurons cinq relations homogènes et linéaires entre L, M, N, P, Q et R. Il y aura une solution et en général une seule. Par suite, il y a en général un complexe et un seul dont font partie les génératrices d'une surface réglée unicursale du quatrième ordre ayant pour courbe double une cubique gauche. Signalons une propriété de la surface résultant immédiatement de ce fait. Il existe sur la surface quatre génératrices parallèles à un plan quelconque. Des deux droites s'appuyant sur ces quatre génératrices, l'une est à l'infini, l'autre est indépendante de la direction du plan. Considérons, en effet, les plans parallèles au plan donné passant par chacune de ces quatre génératrices. Les pôles de ces quatre plans, respectivement situés sur ces génératrices, sont en ligne droite, et celle-ci est le diamètre correspondant à la direction du plan. La seconde droite s'appuyant sur les quatre génératrices est la droite conjuguée de ce diamètre: elle est donc à l'infini. De plus, tous les diamètres étant parallèles, on voit que la première droite a une direction constante, celle de l'axe du complexe.

16. Considérons la courbe de la surface correspondant au complexe dont font partie ses génératrices. Le degré de cette courbe est égal (3) à la classe d'une section plane quelconque de la surface. Or toute section plane est une courbe du quatrième ordre avec trois points doubles (les trois points où elle rencontre la cubique double); elle est donc de la sixième classe. La courbe gauche est par suite du sixième ordre. Cherchons la courbe qui la représente sur le plan des $\lambda\mu$. Nous avons vu d'une manière générale (13) que cette équation était

$$L[(A'_1\lambda + B'_1)(A\lambda + B) - (A'\lambda + B')(A_1\lambda + B_1)] + \ldots = 0;$$

A et B étant ici deux polynômes du second degré, cette relation est du quatrième degré par rapport à λ et à μ.

Écrivons cette équation sous la forme

$$U\lambda^2 + V\lambda + W = 0;$$

on voit que U, V et W sont des polynômes du second degré en μ.

La courbe représentée par cette équation entre λ et μ a deux points doubles, un à l'infini sur l'axe $O\lambda$ et le second à l'infini sur $O\mu$. Elle est donc du genre un. Il en est par suite de même de notre courbe gauche du sixième ordre. L'équation du second degré en λ permet d'exprimer λ rationnellement au moyen de μ et de la racine carrée d'un polynôme du quatrième degré en μ. Nous pouvons donc avoir aisément les coordonnées d'un point quelconque de la courbe gauche du sixième ordre, exprimées rationnellement au moyen d'un paramètre μ et de la racine carrée d'un polynôme du quatrième degré en μ, propriété caractéristique des courbes dont le genre est un.

17. La détermination des autres lignes asymptotiques de la surface est ramenée (**10**) à une quadrature.

Soient λ' et λ'' les deux racines de l'équation

$$U\lambda^2 + V\lambda + W = 0.$$

Nous prendrons, en faisant usage des notations dont nous nous sommes servis précédemment (**10**),

$$\begin{aligned}
M_1 &= A_1\lambda'' + B_1, & N_1 &= A_1\lambda' + B_1,\\
M_2 &= A_2\lambda'' + B_2, & N_2 &= A_2\lambda' + B_2,\\
M_3 &= A_3\lambda'' + B_3, & N_3 &= A_3\lambda' + B_3,\\
M_4 &= A\lambda'' + B, & N_4 &= A\lambda' + B.
\end{aligned}$$

Reportons-nous à la relation différentielle (14) entre μ et ν. Le multiplicateur de $\dfrac{d\nu}{\nu}$ sera une fonction rationnelle de μ, car il est symétrique par rapport à λ' et à λ''; il ne change pas en effet quand on change M en N et inversement.

Quant au multiplicateur de $d\mu$, il peut s'écrire

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix}
M_1 - N_1 & M_1 + N_1 & \dfrac{d(M_1+N_1)}{d\mu} & \dfrac{d^2(M_1+N_1)}{d\mu^2}\\
M_2 - N_2 & M_2 + N_2 & \dfrac{d(M_2+N_2)}{d\mu} & \dfrac{d^2(M_2+N_2)}{d\mu^2}\\
M_3 - N_3 & M_3 + N_3 & \dfrac{d(M_3+N_3)}{d\mu} & \dfrac{d^2(M_3+N_3)}{d\mu^2}\\
M_4 - N_4 & M_4 + N_4 & \dfrac{d(M_4+N_4)}{d\mu} & \dfrac{d^2(M_4+N_4)}{d\mu^2}
\end{vmatrix},$$

en ayant égard à ce que les lignes M et N sont des lignes asymptotiques.

Tous les termes des trois dernières colonnes seront évidemment des fonctions rationnelles de μ. Nous avons, d'autre part,

$$\begin{aligned}
M_1 - N_1 &= A_1(\lambda'' - \lambda'),\\
M_2 - N_2 &= A_2(\lambda'' - \lambda'),\\
M_3 - N_3 &= A_3(\lambda'' - \lambda'),\\
M_4 - N_4 &= A(\lambda'' - \lambda').
\end{aligned}$$

Nous aurons donc comme coefficient de $d\mu$ une fonction rationnelle de μ, multipliée par $(\lambda'' - \lambda')$, c'est-à-dire une fonction rationnelle de μ, multipliée par la racine carrée d'un polynôme du quatrième degré en μ. La recherche des lignes asymptotiques sera ramenée, par suite, à une intégrale elliptique.

18. Nous avons démontré qu'en général toutes les génératrices d'une surface réglée unicursale du quatrième ordre, représentée par les équations (17), pouvaient appartenir à un seul complexe linéaire. Mais si l'on suppose vérifiées certaines relations entre les coefficients, les génératrices appartiendront à une infinité de complexes linéaires. Dans ce cas, la surface ne peut avoir pour courbe double une cubique gauche, car, lorsqu'il en est ainsi, un plan quelconque coupe la cubique gauche en trois points, et les plans qui contiennent les couples de génératrices passant par chacun de ces trois points déterminent nécessairement le foyer du plan considéré. Ce foyer étant ainsi déterminé d'une manière unique, les génératrices de la surface ne peuvent appartenir à une infinité de complexes. Il est nécessaire, dans ce cas, que la surface ait une droite triple. Elle possède, en outre, une seconde droite singulière rencontrant toutes les génératrices. En un point quelconque de la droite triple passent trois génératrices qui sont situées dans un même plan, le plan de ce point et de la droite singulière. Nous trouvons dans ce cas, où la surface présente la plus grande analogie avec la surface du troisième ordre, toutes les lignes asymptotiques, qui sont des courbes du sixième ordre, dont le genre est un.

Parmi les surfaces dont les génératrices font partie d'une infinité de complexes linéaires, ou rencontrent toutes deux droites, nous signalerons la classe des surfaces conoïdes. On sait intégrer l'équation des lignes asymptotiques d'un conoïde quelconque. La méthode conduit donc sous ce rapport à un résultat connu. Elle donne une propriété des lignes asymptotiques d'un conoïde : ce sont des courbes dont les tangentes appartiennent à un complexe linéaire.

19. Nous indiquerons maintenant une classe étendue de surfaces réglées algébriques, dont toutes les lignes asymptotiques sont algébriques. Nous nous proposons de former toutes les surfaces réglées dont les génératrices appartiennent à un complexe linéaire, et dont toutes les lignes asymptotiques sont algébriques. Considérons un complexe linéaire, et prenons une courbe algébrique quelconque. Soit M un point de la courbe; dans le plan osculateur en M à la courbe se trouve une droite MN appartenant au complexe. Le lieu de la droite MN est une surface réglée. Démontrons que toutes ses lignes asymptotiques sont algébriques. Nous voyons d'abord que la courbe dont nous sommes partis est une ligne asymptotique de la surface, puisqu'en chacun de ses points le plan osculateur à la courbe est tangent à la surface. D'autre part nous connaissons sur la surface une seconde ligne asymptotique, puisque toutes les génératrices appartiennent à un complexe linéaire, et, comme nous savons que nous pouvons compter pour deux cette seconde ligne asymptotique, nous connaissons trois lignes asymptotiques de la surface. Nous avons donc toutes les autres sans aucune intégration; or les trois premières ainsi que la surface étant algébriques, il en est de même de toutes les autres lignes asymptotiques. Nous nous servirons pour les obtenir de la propriété relative au rapport anharmonique (9). Soient, sur la génératrice MN, A et B les deux points où le plan polaire et le plan tangent à la surface coïncident. Nous obtiendrons sur chaque génératrice un point d'une ligne asymptotique, en écrivant que le rapport anharmonique des quatre points P, A, B, M a une valeur constante C. On voit ainsi qu'il y aura sur chaque génératrice deux points d'une même ligne asymptotique, car on ne peut pas distinguer A de B. Nous pouvons donc dire que toutes les lignes asymptotiques de la surface sont algébriques et rencontrées en deux points par une génératrice quelconque, sauf toutefois la ligne dont nous sommes partis, qui ne sera rencontrée en général qu'en un seul point. On voit, sans qu'il soit nécessaire d'insister, que, réciproquement, toute surface réglée dont les génératrices font partie d'un

complexe linéaire, et dont les lignes asymptotiques sont algébriques, admet le mode précédent de génération.

20. Nous allons maintenant chercher les surfaces dont les normales font partie d'un complexe linéaire. Cette recherche est un problème de Calcul intégral, qui revient à l'intégration d'une équation linéaire aux dérivées partielles. Nous nous proposons de montrer ici comment des considérations géométriques peuvent mener au résultat.

Traitons d'abord le problème suivant : *Un complexe linéaire étant donné, trouver les courbes telles, que le plan correspondant à chaque point de la courbe soit normal à celle-ci.*

Prenons pour axe des z l'axe du complexe. Les équations des droites ayant la forme normale, l'équation du complexe est $aq - bp = k$.

Le plan correspondant au point x, y, z a pour équation

$$-(X-x)y + (Y-y)x + k(Z-z) = 0;$$

on aura donc pour tous les points de la courbe cherchée

$$\frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x} = \frac{dz}{k},$$

c'est-à-dire, a étant une constante ainsi que C,

$$x^2 + y^2 = a^2, \qquad z + C = k \arcsin \frac{y}{a}.$$

Toutes ces courbes sont des hélices tracées sur des cylindres de révolution ayant pour axe l'axe du complexe, et dont le pas est constant.

Cela posé, considérons deux surfaces dont les normales font partie d'un même complexe. Soit M un point de leur courbe d'intersection. Menons les normales MN, MN′ à ces deux surfaces. Ces deux droites font partie du complexe. Le plan MNN′ a donc pour pôle dans ce complexe le point M. Or ce plan est normal à la courbe d'intersection des surfaces, puisque les droites MM et MN′ sont évidemment normales à cette courbe : donc, en chaque point de celle-ci, le plan correspondant lui est normal; par conséquent la courbe d'intersection ne peut être qu'une ou plusieurs hélices correspondant au complexe. Nous remarquerons que le raisonnement précédent se trouverait en défaut si la courbe C d'intersection était une courbe de contact des deux surfaces; car alors, les deux normales MN et MN′ coïncidant, on ne pourrait plus dire que le plan correspondant à M est normal à la courbe.

Les surfaces les plus simples que nous puissions trouver, dont les normales font partie d'un complexe linéaire donné, sont les cylindres de révolution ayant pour axe l'axe du complexe. Considérons une surface dont les normales fassent partie de ce complexe, et cherchons son intersection avec un quelconque de ces cylindres. Cette intersection est une hélice d'après ce que nous venons de dire.

21. Nous pouvons maintenant démontrer la proposition suivante : *Pour que les normales d'une surface appartiennent toutes à un complexe linéaire, il faut et il suffit que cette surface soit une surface hélicoïde.*

Démontrons d'abord que la condition est suffisante. Nous prenons donc une surface hélicoïde. Toutes les hélices tracées sur cette surface ont même pas; il existe, par suite, un complexe linéaire ayant pour axe l'axe de l'hélicoïde, dans lequel le plan correspondant à chaque point de la surface est normal à l'hélice passant par ce point. Toutes les normales de la surface appartiennent à ce complexe. En effet, la normale en un point quelconque de la surface, étant normale à l'hélice de la surface passant par ce point, est située dans le plan normal à cette hélice; elle passe de plus par le foyer de ce plan, qui est le point considéré : c'est donc une droite du complexe.

En second lieu, la condition est nécessaire. Prenons, en effet, une surface dont les normales appartiennent à un complexe linéaire. Nous avons dit qu'un cylindre quelconque de révolution ayant pour axe l'axe du complexe coupait cette surface suivant une ou plusieurs hélices. Par chaque point de la surface nous pouvons alors faire passer une hélice, et toutes les hélices ainsi obtenues ont même pas. Par l'axe du complexe faisons passer un plan quelconque. La section de ce plan dans la surface est le lieu des deux points de rencontre du plan avec toutes les hélices tracées sur la surface. Il est clair que la forme de la section et sa position dans son plan par rapport à l'axe du complexe sont indépendantes de la position de ce plan, puisque toutes les hélices ont même pas. On peut donc considérer la surface comme engendrée par le mouvement d'un profil plan de forme invariable, dont le plan passe constamment par l'axe du complexe et dont tous les points décrivent des hélices correspondant au complexe. Le théorème est par suite démontré.

22. Cherchons les courbes de cette surface dont les tangentes font partie du complexe auquel appartiennent les normales de la surface : ces lignes sont des lignes géodésiques de la surface. Le plan correspondant en chacun de leur point est en effet le plan osculateur à la courbe, et il contient la normale à la surface, puisque cette droite appartient au complexe. Mais cette propriété ne caractérise pas les lignes dont nous parlons. En voici une autre qui les définira nettement. Prenons un point M d'une de ces lignes C. Par ce point on peut faire passer une hélice située sur la surface. La tangente en M à cette hélice est perpendiculaire à toutes les droites du complexe passant par M et notamment à la tangente en M à la courbe C. Donc les lignes de la surface hélicoïde dont les tangentes appartiennent au complexe linéaire correspondant à la surface sont les trajectoires orthogonales de la famille d'hélices de même pas tracées sur la surface.

On sait que toute surface hélicoïde est applicable sur une surface de révolution dont le méridien est convenablement choisi. Dans cette déformation, les hélices de la surface hélicoïde deviennent des parallèles de la surface de révolution. Cherchons ce que deviennent sur cette surface les courbes dont nous venons de parler. L'angle de deux lignes tracées sur une surface se conserve quand on la déforme. Les courbes précédentes deviendront donc sur la surface de révolution les trajectoires orthogonales des parallèles, c'est-à-dire les méridiens. Ainsi les méridiens de la surface de révolution sur laquelle est applicable la surface hélicoïde deviennent sur celle-ci des courbes dont les tangentes font partie du complexe linéaire correspondant à l'hélicoïde.

De la propriété caractéristique des surfaces hélicoïdes on peut déduire que toutes les normales menées par un point quelconque à une de ces surfaces sont dans un même plan.

23. Nous terminerons en donnant quelques propriétés des surfaces, dont un des systèmes de lignes de courbure est circulaire, c'est-à-dire des surfaces enveloppes d'une série de sphères dépendant d'un paramètre arbitraire.

Nous avons démontré (9) que, dans toute surface réglée, une génératrice quelconque rencontre quatre lignes asymptotiques données sur la surface en quatre points dont le rapport anharmonique est constant. Considérons maintenant, sur une surface dont un des systèmes de lignes de courbure est circulaire, quatre lignes de courbure de l'autre système; un quelconque des cercles du premier système rencontre ces quatre lignes en quatre points dont le rapport anharmonique est constant. On sait qu'on appelle *rapport anharmonique de quatre points sur un cercle* celui du faisceau des quatre droites joignant ces points à un point quelconque de ce cercle.

Soit

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2-R^2=0 \tag{1}$$

l'équation de la sphère dont la surface est l'enveloppe; a, b, c et R sont des fonctions données quelconques d'un paramètre t. La caractéristique, qui est, comme on sait, une ligne de courbure de la surface, est définie par l'équation (1) et par l'équation (2)

$$(x-a)\frac{da}{dt}+(y-b)\frac{db}{dt}+(z-c)\frac{dc}{dt}+R\frac{dR}{dt}=0. \tag{2}$$

Soient x, y et z les coordonnées d'un point de la surface; les équations de la normale en ce point à la surface sont

$$\frac{X-x}{x-a}=\frac{Y-y}{y-b}=\frac{Z-z}{z-c}$$

ou

$$X=Z\frac{x-a}{z-c}+\frac{az-cx}{z-c}, \quad Y=Z\frac{y-b}{z-c}+\frac{bz-cy}{z-c}.$$

L'équation différentielle des lignes de courbure sera donc

$$d\left(\frac{x-a}{z-c}\right)d\left(\frac{bz-cy}{z-c}\right)-d\left(\frac{y-b}{z-c}\right)d\left(\frac{az-cx}{z-c}\right)=0$$

ou

$$\left\{\begin{aligned} &da[(z-c)\,d(y-b)-(y-b)\,d(z-c)]\\ &+db[(x-a)\,d(z-c)-(z-c)\,d(x-a)]\\ &+dc[(y-b)\,d(x-a)-(x-a)\,d(y-b)]=0. \end{aligned}\right. \tag{3}$$

Cette équation, jointe aux équations (1) et (2), définit en fonction du paramètre t les coordonnées x, y et z d'un point d'une ligne de courbure.

Prenons, pour fixer la position d'un point du cercle défini par les équations (1) et (2), l'angle que fait le rayon passant par ce point avec une direction quelconque du plan du cercle. Nous choisirons, pour cette direction, la droite du plan du cercle parallèle au plan des xy.

Soit $Ax + By + Cz = 0$ l'équation d'un plan, et considérons dans ce plan un cercle de rayon r, ayant l'origine pour centre. Si x, y et z désignent les coordonnées d'un point du cercle, et θ l'angle que fait le rayon passant par ce point avec la droite du plan du cercle, située dans le plan des xy, on a

$$x = -\frac{ACr\sin\theta}{\sqrt{(A^2+B^2)(A^2+B^2+C^2)}} + \frac{Br\cos\theta}{\sqrt{A^2+B^2}},$$
$$y = -\frac{BCr\sin\theta}{\sqrt{(A^2+B^2)(A^2+B^2+C^2)}} - \frac{Ar\cos\theta}{\sqrt{A^2+B^2}},$$
$$z = \sqrt{\frac{A^2+B^2}{A^2+B^2+C^2}}\, r\sin\theta.$$

Dans notre problème, les coordonnées du centre défini par les équations (1) et (2) sont

$$x = a - \frac{R\,dR\,da}{da^2+db^2+dc^2}, \quad y = b - \frac{R\,dR\,db}{da^2+db^2+dc^2}, \quad z = c - \frac{R\,dR\,dc}{da^2+db^2+dc^2};$$

le rayon r du cercle est donné par la formule

$$r^2 = R^2 - \frac{R^2\,dR^2}{da^2+db^2+dc^2};$$

enfin on a

$$A = da, \qquad B = db, \qquad C = dc;$$

donc les coordonnées d'un point du cercle (1), (2) peuvent s'exprimer par les formules

$$x = a - \frac{R\,dR\,da}{da^2+db^2+dc^2} - \frac{da\,dc.r\sin\theta}{\sqrt{(da^2+db^2)(da^2+db^2+dc^2)}} + \frac{db.r\cos\theta}{\sqrt{da^2+db^2}},$$
$$y = b - \frac{R\,dR\,db}{da^2+db^2+dc^2} - \frac{db\,dc.r\sin\theta}{\sqrt{(da^2+db^2)(da^2+db^2+dc^2)}} - \frac{da.r\cos\theta}{\sqrt{da^2+db^2}},$$
$$z = c - \frac{R\,dR\,dc}{da^2+db^2+dc^2} + \sqrt{\frac{da^2+db^2}{da^2+db^2+dc^2}}\, r\sin\theta.$$

En remplaçant, dans l'équation (3), x, y et z par ces valeurs, on obtient une équation différentielle entre θ et t, qui est l'équation différentielle des lignes de courbure. Après de nombreuses réductions, qui s'offrent d'elles-mêmes, cette équation prend la forme

$$\mathrm{M}\frac{d\theta}{dt}+\mathrm{N}\sin\theta+\mathrm{P}\cos\theta+\mathrm{Q}=0. \tag{4}$$

M, N, P et Q sont des fonctions de t.

Prenons $\tang\frac{\theta}{2}$ au lieu de θ pour fonction inconnue.

Soit $\tang\frac{\theta}{2}=u$, on a

$$\sin\theta=\frac{2u}{1+u^2},\qquad \cos\theta=\frac{1-u^2}{1+u^2}.$$

L'équation (4) devient alors

$$2\mathrm{M}\frac{du}{dt}+2\mathrm{N}u+\mathrm{P}(1-u^2)+\mathrm{Q}(1+u^2)=0.$$

C'est une équation de Riccati.

Par conséquent, d'après le théorème du n° 9, le rapport anharmonique de quatre solutions ne dépend pas de t. Soient θ_1, θ_2, θ_3, θ_4 quatre solutions; le rapport anharmonique de $\tang\frac{\theta_1}{2}$, $\tang\frac{\theta_2}{2}$, $\tang\frac{\theta_3}{2}$ et $\tang\frac{\theta_4}{2}$ est constant, c'est-à-dire

$$\frac{\tang\frac{\theta_1}{2}-\tang\frac{\theta_3}{2}}{\tang\frac{\theta_1}{2}-\tang\frac{\theta_4}{2}}:\frac{\tang\frac{\theta_2}{2}-\tang\frac{\theta_3}{2}}{\tang\frac{\theta_2}{2}-\tang\frac{\theta_4}{2}}=\text{const.}$$

ou

$$\frac{\sin\frac{\theta_1-\theta_3}{2}}{\sin\frac{\theta_1-\theta_4}{2}}:\frac{\sin\frac{\theta_2-\theta_3}{2}}{\sin\frac{\theta_2-\theta_4}{2}}=\text{const.}$$

Cette dernière égalité exprime le théorème que nous avons énoncé; car le premier membre est le rapport anharmonique de quatre points situés sur un cercle, tels que les rayons passant par ces points fassent respectivement des angles égaux à θ_1, θ_2, θ_3, θ_4 avec une même direction.

24. De ce théorème résultent les mêmes conséquences que celles qui ont été signalées pour la recherche des lignes asymptotiques des surfaces réglées.

La connaissance d'une ligne de courbure ramènera la recherche des autres à deux quadratures. Si l'on connaît deux lignes de courbures, on pourra obtenir les autres par une seule quadrature. Enfin la connaissance de trois lignes de courbure permet d'obtenir les autres sans aucune intégration.

Il existe une classe de surfaces ayant un système de lignes de courbure circulaires dont on connaît *a priori* une ligne de courbure du second système. Ce sont les surfaces enveloppes d'une série de sphères coupant une sphère fixe sous un angle constant. Il y a plus : la connaissance de cette ligne de courbure équivaut à deux, car elle coupe chacun des cercles du premier système en deux points; donc, dans ces surfaces, la recherche des lignes de courbure du second système est ramenée à une quadrature. On voit l'analogie qui se présente entre ces surfaces et les surfaces réglées dont les génératrices font partie d'un complexe linéaire. Considérons d'abord une surface enveloppe d'une série de sphères coupant un plan donné sous un angle constant. L'enveloppe des cercles suivant lesquels la sphère mobile coupe le plan est une ligne de courbure de la surface. Cette ligne est, en effet, une ligne de courbure pour le plan : celui-ci d'ailleurs coupe la surface sous un angle constant. La ligne considérée est donc aussi une ligne de courbure pour la surface, d'après un théorème dû à Joachimstal. On voit, en outre, que chacun des cercles du premier système rencontre en deux points cette ligne de courbure.

Le raisonnement est identique dans le cas où, au lieu d'un plan fixe, on a une sphère. L'enveloppe des cercles de cette sphère, suivant lesquels la coupe la sphère mobile, est une ligne de courbure de la surface, que rencontre en deux points chaque cercle du premier système.

Nous avons considéré des surfaces dont les génératrices faisaient partie de deux et par suite d'une infinité de complexes linéaires. Nous obtiendrons ici des surfaces analogues en prenant des surfaces enveloppes d'une série de sphères coupant deux sphères données sous des angles constants. Toutes les sphères qui coupent deux sphères données sous des angles constants coupent également, sous un angle constant, une sphère quelconque passant par l'intersection des deux premières. Cela nous montre que nous pourrons considérer d'une infinité de manières notre surface comme l'enveloppe d'une série de sphères coupant une sphère donnée sous un angle constant. Nous pourrons donc avoir immédiatement toutes les lignes de courbure du second système de cette surface. Ces lignes seront des courbes sphériques situées sur des sphères passant par l'intersection des deux premières sphères. Chaque ligne de courbure du second système rencontre en deux points les cercles de courbure du premier, et deux lignes de courbure du second système sont rencontrées par un cercle quelconque du premier système en quatre points, dont le rapport anharmonique est constant.