ELLIOT

# Détermination du nombre des intégrales abéliennes de première espèce

*Annales scientifiques de l'É.N.S. 2e série*, tome 5 (1876), p. 399-444
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1876_2_5__399_0>

# DÉTERMINATION

DU

# NOMBRE DES INTÉGRALES ABÉLIENNES

## DE PREMIÈRE ESPÈCE,

PAR M. ELLIOT,

PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES AU LYCÉE DE NANCY.

## INTRODUCTION.

1. Étant donnée une équation irréductible de degré $m$,

$$F(x, y) = 0, \tag{1}$$

on appelle *intégrales abéliennes* les intégrales

$$\int \psi(x, y)\, dx, \tag{2}$$

où $\psi(x, y)$ désigne une fonction rationnelle quelconque de $x$ et de $y$.

Abel en a fait le premier l'étude et en a donné une propriété importante dans son Mémoire célèbre : *Recherches sur quelques propriétés générales d'une certaine sorte de fonctions transcendantes*. Riemann a ramené ces intégrales à trois formes simples qui constituent les intégrales abéliennes des trois espèces. Mais, sans entrer dans le détail de cette réduction, qui est étrangère à notre sujet, il suffira de rappeler que l'intégrale de première espèce est

$$\int \frac{N(x, y)\, dx}{F'_y(x, y)}, \tag{3}$$

où $N(x, y)$ désigne un polynôme du degré $m - 3$, dont on a déterminé les coefficients supposés d'abord arbitraires, de façon que l'intégrale reste finie pour toutes les valeurs de $x$ finies ou infinies.

En supposant que la courbe représentée par l'équation (1) ne possède pas d'autres points singuliers que des points doubles et de rebroussement, MM. Clebsch et Gordan ont trouvé que le nombre des intégrales de première espèce est

$$p = \tfrac{1}{2}(m-1)(m-2) - d - r,$$

$d$ désignant le nombre des points doubles, $r$ celui des points de rebroussement, et ils ont reconnu que le nombre des périodes de l'intégrale est $2p$.

Dans leur *Théorie des fonctions elliptiques*, p. 170, MM. Briot et Bouquet ont donné une formule qui représente dans tous les cas le nombre des périodes des intégrales abéliennes. Je me suis proposé de déterminer, dans le cas général, le nombre des intégrales de première espèce et de faire voir qu'il est égal à la moitié de celui des périodes.

Les formules dont je me sers s'accordent avec la relation donnée par M. Halphen (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 1er semestre 1874). J'y arrive par une méthode différente.

Comme application, je donne le caractère que doit présenter l'équation (1) pour que l'intégrale (2) s'exprime : 1° par des fonctions algébriques et logarithmiques ; 2° par ces mêmes fonctions et les intégrales elliptiques des trois espèces. Clebsch a traité l'hypothèse particulière où la courbe (1) n'admet pas d'autres points singuliers que des points doubles et de rebroussement, et a fait voir que le nombre de ceux-ci devait être $\frac{1}{2}(m-1)(m-2)$ dans le premier cas et $\frac{1}{2}m(m-3)$ dans le second.

# PREMIÈRE PARTIE.

## I.

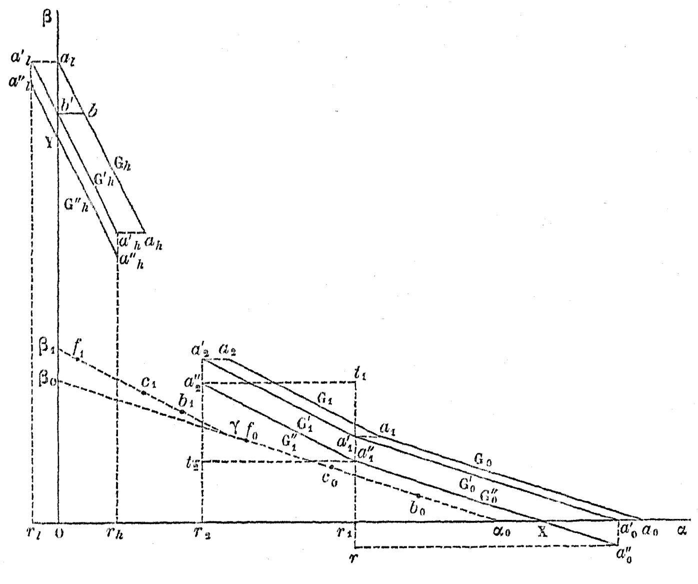
2. Supposons qu'on ait effectué dans l'équation $F(x, y) = 0$ une substitution du premier degré, de manière que les $m$ valeurs de $y$

restent finies pour toutes les valeurs finies de $x$ et que l'intégrale conserve une valeur finie pour les valeurs infinies de $x$. Il suffira de considérer les différents points critiques à distance finie, c'est-à-dire ceux dont les coordonnées vérifient les deux équations

$$F(x, y) = 0 \quad \text{et} \quad F'_y(x, y) = 0.$$

Soient $a, a_1, a_2, \ldots$ ces points. Transportons l'origine des coordonnées en l'un d'eux, $a$. L'intégrale (3) conservera la même forme, et nous supposerons que $x$ et $y$ désignent les nouvelles variables. On sait déterminer le nombre des racines infiniment petites et le degré en $x$ de chacune d'elles par le procédé dû à M. Puiseux. La méthode consiste à chercher les termes du degré le moins élevé de l'équation (1), en regardant $x$ comme du premier ordre et $y$ comme un infiniment petit d'un ordre convenable $\mu$. Pour cela, dans un terme quelconque, $Ay^\alpha x^\beta$, on regarde $\alpha$ comme une abscisse, $\beta$ comme une ordonnée, et l'on construit les points qui répondent aux différents termes. Le degré

Fig. 1.



du terme $Ay^\alpha x^\beta$ est $\mu\alpha + \beta$. En le désignant par D, la relation $\mu\alpha + \beta = D$ montre que les termes du même degré correspondent à des points rangés sur une droite dont le coefficient angulaire changé de signe marquera le degré de $y$ en $x$, et dont l'ordonnée à l'origine indiquera le degré total du terme.

On sait alors que, pour avoir les termes de moindre degré, il faut prendre les points situés sur l'un des côtés d'un polygone $a_0 a_1 \ldots a_l$ (*fig.* 1) convexe vers l'origine, et composé d'un certain nombre de côtés répondant aux groupes suivants, ordonnés suivant les puissances décroissantes de $y$ :

$$\begin{aligned}
G_0 &= A_{n_0} y^n + \Sigma A_{\alpha\beta}\, y^\alpha x^\beta + A_{\alpha_1\beta_1} y^{\alpha_1} x^{\beta_1},\\
G_1 &= A_{\alpha_1\beta_1} y^{\alpha_1} x^{\beta_1} + \Sigma A_{\alpha\beta}\, y^\alpha x^\beta + A_{\alpha_2\beta_2} y^{\alpha_2} x^{\beta_2},\\
G_2 &= A_{\alpha_2\beta_2} y^{\alpha_2} x^{\beta_2} + \Sigma A_{\alpha\beta}\, y^\alpha x^\beta + A_{\alpha_3\beta_3} y^{\alpha_3} x^{\beta_3},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
G_{h-1} &= A_{\alpha_{h-1}\beta_{h-1}} y^{\alpha_{h-1}} x^{\beta_{h-1}} + \Sigma A_{\alpha\beta}\, y^\alpha x^\beta + A_{\alpha_h\beta_h} y^{\alpha_h} x^{\beta_h},\\
G_h &= A_{\alpha_h\beta_h} y^{\alpha_h} x^{\beta_h} + \Sigma A_{\alpha\beta}\, y^\alpha x^\beta + A_{0l}\, x^l;
\end{aligned}$$

$n$ est le nombre des valeurs infiniment petites de $y$ et $A_{\alpha\beta} y^\alpha x^\beta$ désigne un terme intermédiaire d'un groupe quelconque (¹).

Prenons par exemple le second côté. Les termes de $G_1$ seront du même degré, si l'on a

$$\alpha_1\mu + \beta_1 = \alpha\mu + \beta = \alpha_2\mu + \beta_2, \quad \text{d'où} \quad \mu = \frac{\beta - \beta_1}{\alpha_1 - \alpha} = \frac{\beta_2 - \beta_1}{\alpha_1 - \alpha_2} = \frac{q_1}{p_1},$$

les nombres entiers $q_1$ et $p_1$ étant supposés premiers entre eux. On en conclut

$$\begin{aligned}
\beta_2 - \beta_1 &= k_1 q_1, \quad & \alpha_1 - \alpha_2 &= k_1 p_1,\\
\beta - \beta_1 &= k q_1, \quad & \alpha_1 - \alpha &= k p_1;
\end{aligned}$$

en sorte que, si l'on pose $y = v x^\mu$, le groupe $G_1$ deviendra

$$\begin{aligned}
G_1 &= x^{\alpha_1\mu+\beta_1} v^{\alpha_2}\left[A_{\alpha_1\beta_1} v^{\alpha_1-\alpha_2} + \Sigma A_{\alpha\beta}\, v^{\alpha-\alpha_2} + A_{\alpha_2\beta_2}\right]\\
&= x^{\alpha_1\mu+\beta_1} v^{\alpha_2}\left[A_{\alpha_1\beta_1} v^{k_1 p_1} + \Sigma A_{\alpha\beta}\, v^{(k_1-k)p_1} + A_{\alpha_2\beta_2}\right].
\end{aligned}$$

Posons

$$v^{p_1} = \lambda \quad \text{et} \quad A_{\alpha_1\beta_1}\lambda^{k_1} + \Sigma A_{\alpha\beta}\lambda^{k_1-k} + A_{\alpha_2\beta_2} = L_1.$$

Si $\lambda$ est une racine de l'équation $L_1 = 0$ et si $v_1$ désigne une racine

(¹) *Théorie des fonctions elliptiques*, p. 42.

de l'équation $v^{p_1} = \lambda$, on sait que $v_1 x^{\frac{q_1}{p_1}}$ sera la valeur approchée de $p_1$ racines infiniment petites. Je supposerai d'abord que l'équation $L_1 = 0$ et toutes les autres analogues n'aient pas de racines multiples.

**3.** Supposons que dans la dérivée $F'_y(x, y)$ on veuille trouver les termes de moindre degré. Ayant construit le polygone élémentaire $a_0 a_1 \ldots a_l$ de la fonction $F(x, y)$, il est clair que les sommets du polygone élémentaire de la dérivée s'obtiendront en reculant les sommets du premier polygone d'une unité vers les $\alpha$ négatifs; les côtés des deux polygones seront parallèles. Soit $a'_0 a'_1 a'_2 \ldots$ ce polygone que nous appellerons *dérivé*. Il y a toutefois exception pour le dernier côté. S'il y a dans le groupe $G_h$ un terme contenant $y$ à la première puissance et répondant à un point $b$, la dérivée de ce terme par rapport à $y$ en donnera un autre ne contenant plus que $x$, et le polygone dérivé se terminera en $b'$ sur l'axe $o\beta$; il aura alors le même nombre de côtés que le premier. Dans le cas contraire, le polygone dérivé aura ses côtés $G'_0, G'_1, \ldots, G'_{h-1}$ parallèles aux côtés $G_0, G_1, \ldots, G_{h-1}$; mais, à partir du sommet $a'_h$, il pourra présenter un nombre quelconque de côtés. Il suffit, pour notre objet, de remarquer que les coefficients angulaires de ces côtés auront des valeurs absolues égales ou supérieures à celle du côté $G_h$, en sorte qu'il n'y aura aucun point situé au-dessous de la parallèle à ce côté $G_h$ menée par le point $a'_h$.

Imaginons qu'on abaisse d'une unité les sommets $a'_0, a'_1, a'_2, \ldots$ du polygone dérivé. On obtiendra ainsi un nouveau polygone $a''_0 a''_1 a''_2 \ldots$ dont les côtés $G''_0, G''_1, G''_2, \ldots$ seront parallèles à ceux des précédents; mais les ordonnées à l'origine des nouveaux côtés seront respectivement inférieures d'une unité à celles des côtés correspondants du polygone dérivé. Observons qu'à partir du point $a''_h$ nous ne nous occuperons plus des côtés que peut présenter le polygone élémentaire de la dérivée, et nous mènerons simplement par ce point une parallèle au côté $G_h$. Enfin nous supposerons le nouveau polygone terminé à l'axe des $\alpha$ et à l'axe des $\beta$ en X et Y, un point tel que $a''_0$ étant fictif, c'est-à-dire ne correspondant à aucun terme et servant seulement à régulariser la construction des côtés.

Si l'on représente avec la convention déjà indiquée les termes de la fonction arbitraire $N(x, y)$, je dis que l'intégrale (3) ne pourra rester finie pour les valeurs infiniment petites de $x$ que si l'on égale à zéro les coefficients des termes qui répondent à des points situés au-dessous du dernier polygone ou sur ses côtés.

Considérons une racine appartenant au groupe $G_1$ et d'ordre $\mu = \frac{q_1}{p_1}$. Les termes de moindre degré de la dérivée proviennent évidemment du groupe $G'_1$. Quant à la fonction $N(x, y)$, pour obtenir les termes de moindre degré, il faudra faire mouvoir une parallèle au côté $G_1$, en la faisant partir de l'origine, jusqu'à ce qu'elle contienne un ou plusieurs points appartenant à cette fonction. Soit $\Gamma_1$ la position qu'elle aura à ce moment. Tous les termes correspondants auront le même degré égal à l'ordonnée à l'origine de la ligne $\Gamma_1$. Si cette dernière est au-dessous du côté $G''_1$ ou coïncide avec lui, les termes dont on vient de parler devront donner un résultat nul. Autrement, le degré de $N(x, y)$ serait inférieur d'une unité au moins à celui de $F'_y(x, y)$, et l'intégrale (3) serait infinie.

Je dis, d'après cela, que la distance des deux points extrêmes qui se trouvent sur $\Gamma_1$ ne peut être moindre que la longueur du côté $G_1$. Soit $B_0 y^\alpha x^\beta$ le terme qui répond à l'extrémité de $\Gamma_1$ la plus éloignée de l'axe $o\beta$, et concevons les différentes parallèles à l'axe $o\beta$ distantes de l'unité. Quand on remonte le côté $\Gamma_1$ dont le coefficient angulaire est $-\frac{q_1}{p_1}$, il faut s'élever de $\frac{q_1}{p_1}$ pour rencontrer la parallèle qui suit celle du terme initial, de $\frac{2q_1}{p_1}$ pour rencontrer la suivante, etc.... Puisque $q_1$ et $p_1$ sont premiers entre eux, il faudra évidemment traverser $p_1$ de ces parallèles pour arriver à un point du réseau. Le chemin parcouru aura pour projection $p_1$ sur l'axe $o\alpha$ dans le sens négatif et $q_1$ sur l'axe $o\beta$, en sorte que le second terme sera $B_1 y^{\alpha-p_1} x^{\beta+q_1}$, où $B_1$ peut être nul. Le troisième terme sera de même $B_2 y^{\alpha-2p_1} x^{\beta+2q_1}, \ldots$. La projection sur $o\alpha$ du côté $G_1$ est $\alpha_1 - \alpha_2 = k_1 p_1$. Si donc la distance des deux points extrêmes sur $\Gamma_1$ est moindre que le côté $G_1$, le dernier terme que l'on rencontrera sera $B_{k_1-i} y^{\alpha-(k_1-i)p_1} x^{\beta+(k_1-i)q_1}$. Tous ces termes, étant du même degré en $x$ après la substitution $y = v x^{\frac{q_1}{p_1}}$, deviennent

$$x^{\alpha\frac{q_1}{p_1}+\beta} v^{\alpha-(k_1-i)p_1} \left(B_0 v^{(k_1-i)p_1} + B_1 v^{(k_1-i-1)p_1} + \ldots + B_{k_1-i}\right).$$

Le polynôme

$$\varphi(v) = B_0\lambda^{k_1-i} + B_1\lambda^{k_1-i-1} + \ldots + B_{k_1-i} = \Lambda$$

du degré $k_1 - i$ doit s'annuler pour les $k_1$ racines supposées inégales de l'équation $L_1 = 0$, en sorte que tous les coefficients de $\Lambda$ devraient être nuls.

Concevons maintenant l'ensemble des points qui répondent à la fonction $N(x, y)$. Prenons une parallèle au côté $G_0$ passant par l'origine et faisons-la mouvoir parallèlement à elle-même jusqu'à ce qu'elle rencontre des points $b_0, c_0, \ldots, f_0$. Arrêtons-la dans cette position et supposons qu'elle ne soit pas située au-dessus de $G''_0$. Le dernier point qu'on trouvera sur la gauche de cette ligne ne pourra être situé en $\beta_0$ sur l'axe $o\beta$. Car alors, menant par $\beta_0$ une parallèle au côté $G_1$, il n'y aurait qu'un seul point sur cette parallèle, ce qui est impossible. Observons de plus que le dernier point $f_0$ devra être à une distance de $o\alpha$ au moins égale à celle du sommet $a_1$; autrement, la distance $\alpha_0 f_0$ serait moindre que la longueur $G_0$. Faisons maintenant mouvoir une parallèle au côté $G_1$, en partant de l'origine jusqu'à ce qu'elle contienne des points appartenant à $N(x, y)$. Elle en contiendra nécessairement plusieurs, et dans cette position viendra couper la ligne $\alpha_0 f_0$ à gauche de $f_0$ en $\gamma$, ou en $f_0$, puisque $f_0$ est un des points du système. Il en résulte que la nouvelle droite ne sera pas au-dessus de $G''_1$. Elle contiendra les points $b_1, c_1, \ldots, f_1$, dont le dernier ne pourra être en $\beta_1$ sur l'axe $o\beta$ pour la même raison que précédemment. Le dernier point $f_1$ devra être à une distance de $o\alpha$ au moins égale à celle du sommet $a_2$; autrement, la distance $\gamma f_1$ serait inférieure à la longueur du côté $G_1$, En continuant ainsi, on sera amené à tracer une parallèle au dernier côté $G_h$. Mais, le polygone obtenu étant évidemment de périmètre moindre que le polygone élémentaire de la fonction donnée, le dernier côté serait nécessairement plus petit que $G_h$, ce qui est impossible.

Il peut se faire que la parallèle au côté $G_0$ soit au-dessus de $G''_0$; alors il n'y aurait aucun point sur le côté $G''_0$ prolongé ni au-dessous. Il suffira de mener une parallèle au côté $G_1$ et de répéter le raisonnement précédent. Si cette seconde parallèle se trouvait aussi au-dessus de $G''_1$, c'est qu'il n'y aurait aucun point sur les côtés $G''_0$ et $G''_1$ prolongés ni au-dessous de ces lignes. On commencerait alors par mener une parallèle au côté $G_2$, et ainsi de suite. Il est donc nécessaire qu'il n'y ait plus aucun point sur les côtés $G''_0, G''_1, \ldots, G''_h$, ni au-dessous, c'est-à-dire à l'intérieur du polygone $oXa''_1 a''_2 \ldots Yo$ ou sur ses côtés.

Ces conditions sont suffisantes lorsque le degré de $F'_y(x, y)$ pour la racine considérée est bien égal à l'ordonnée à l'origine de la droite $G'_1$. Comme on a

$$\begin{aligned}
G'_1 &= \alpha_1 A_{\alpha_1\beta_1} y^{\alpha_1-1} x^{\beta_1} + \Sigma\alpha A_{\alpha\beta} y^{\alpha-1} x^{\beta} + \alpha_2 A_{\alpha_2\beta_2} y^{\alpha_2-1} x^{\beta_2} \\
&= x^{(\alpha_1-1)\frac{q_1}{p_1}+\beta_1} \left(\alpha_1 A_{\alpha_1\beta_1} v^{\alpha_1-1} + \Sigma\alpha A_{\alpha\beta} v^{\alpha-1} + \alpha_2 A_{\alpha_2\beta_2} v^{\alpha_2-1}\right) \\
&= x^{(\alpha_1-1)\frac{q_1}{p_1}+\beta_1} \frac{d(v^{\alpha_2} L_1)}{dv},
\end{aligned}$$

si l'on remplace $v$ par sa valeur approchée $v_1$, le résultat obtenu sera différent de zéro, puisque $\lambda$ est une racine simple de l'équation $L_1 = 0$.

4. Pour avoir le nombre de conditions imposées à la fonction $N(x, y)$, il faut, d'après ce qui précède, trouver le nombre des points qui se trouvent à l'intérieur du polygone $oXa''_1 a''_2 \ldots Yo$ ou sur ses côtés. Nous chercherons d'abord le nombre des points qui se trouvent à l'intérieur du trapèze $r_1 r_2 a''_1 a''_2$, ou sur ses côtés. La dimension $r_1 r_2$ est égale à $\alpha_1 - \alpha_2$; en sorte que, en comptant $r_1$ et $r_2$, il y a sur cette ligne $\alpha_1 - \alpha_2 + 1$ points. La dimension $a''_1 r_1$ est égale à $\beta_1 - 1$, et il y a $\beta_1$ points sur cette ligne. Le nombre des points qui se trouvent à l'intérieur du rectangle $r_1 r_2 a''_1 t_2$ et sur ses côtés, en ne comptant pas ceux qui sont sur le côté supérieur, sera $(\alpha_1 - \alpha_2 + 1)(\beta_1 - 1)$. Passons au triangle $a''_1 t_2 a''_2$, dont les côtés ont pour dimensions $\alpha_1 - \alpha_2 = k_1 p_1$ et $\beta_2 - \beta_1 = k_1 q_1$. Il y a, comme nous l'avons vu dans le numéro précédent, $k_1 + 1$ points sur le côté $a''_1 a''_2$, en comptant les deux extrémités. Achevons le rectangle $a''_1 t_2 a''_2 t_1$. Il comprendra en tout $(\alpha_1 - \alpha_2 + 1)(\beta_2 - \beta_1 + 1)$ points tant à l'intérieur que sur les côtés. Si nous retranchons $k_1 + 1$ et si nous divisons le résultat par 2, nous aurons évidemment le nombre des points qui se trouvent sur les côtés du triangle $a''_1 t_2 a''_2$ et à son intérieur, à l'exception de ceux qui se trouvent sur $a''_1 a''_2$; ce sera

$$\tfrac{1}{2}[(\alpha_1 - \alpha_2 + 1)(\beta_2 - \beta_1 + 1) - (k_1 + 1)].$$

Mais, comme ces derniers points répondent à des termes qui doivent eux-mêmes disparaître, il faudra ajouter $k_1 + 1$ à l'expression précédente, qui deviendra

$$\tfrac{1}{2}[(\alpha_1 - \alpha_2 + 1)(\beta_2 - \beta_1 + 1) + k_1 + 1];$$

tel est le nombre des points situés sur les côtés du triangle et à son intérieur.

Le nombre des points qui se trouvent à l'intérieur du trapèze $r_1 r_2 a''_1 a''_2$ et sur ses côtés sera donc

$$\tfrac{1}{2}[(\alpha_1 - \alpha_2 + 1)(\beta_2 - \beta_1 + 1) + k_1 + 1] + (\alpha_1 - \alpha_2 + 1)(\beta_1 - 1).$$

La même évaluation se fera pour les autres trapèzes. Mais afin de ne pas répéter les points qui se trouvent sur des côtés communs à deux trapèzes successifs, nous aurons soin de ne prendre dans chacun d'eux que les points situés sur le côté de droite, ceux qui sont situés sur le côté de gauche devant être comptés dans le trapèze suivant. Nous retrancherons donc $\beta_2$ de l'expression précédente, ce qui donnera

$$\tfrac{1}{2}(\alpha_1\beta_1 - \alpha_2\beta_2 + \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 + \beta_1 - \beta_2 - \alpha_1 + \alpha_2 + k_1).$$

Le nombre des points situés à l'intérieur du dernier trapèze $or_h a''_h \mathrm{Y}$ et sur ses côtés résultera sans difficulté de la formule précédente, puisque celle-ci s'applique au trapèze $r_h a''_h r_l a''_l$, dont on supprime les points situés sur le côté de gauche $r_l a''_l$. Il faudra seulement se rappeler que $\beta_{h+1}$ doit être remplacé par $l$, et $\alpha_{h+1}$ par zéro ; on aura ainsi

$$\tfrac{1}{2}(\alpha_h\beta_h + \alpha_h l + \beta_h - l - \alpha_h + k_h).$$

Quant au triangle $r_1 a''_1 \mathrm{X}$, on remarquera que le nombre des points situés à l'intérieur du triangle $a''_0 r a''_1$ et sur ses côtés est, d'après ce qui précède,

$$\tfrac{1}{2}[(n - \alpha_1 + 1)(\beta_1 + 1) + k_0 + 1];$$

il faudra en retrancher d'abord $n - \alpha_1 + 1$, qui est le nombre des points situés sur le côté $ra''_0$, puis $\beta_1$, qui est le nombre des points situés sur le côté $r_1 a''_0$, ce qui donnera

$$\tfrac{1}{2}[(n - \alpha_1 + 1)(\beta_1 + 1) + k_0 + 1] - \beta_1 - [n - \alpha_1 + 1],$$

ou bien

$$\tfrac{1}{2}[(n - \alpha_1 + 1)(\beta_1 - 1) - 2\beta_1 + k_0 + 1],$$

ou enfin

$$\tfrac{1}{2}(n\beta_1 - \alpha_1\beta_1 - \beta_1 - n + \alpha_1 + k_0).$$

Le nombre des termes à faire disparaître sera donc

$$
A_a = \frac{1}{2}\left\{
\begin{array}{llllll}
 & -\alpha_1\beta_1 + n\beta_1 & & -\beta_1 - n & + \alpha_1 + k_0, \\
+\alpha_1\beta_1 & -\alpha_2\beta_2 + \alpha_1\beta_2 & -\alpha_2\beta_1 & +\beta_1 & -\beta_2 - \alpha_1 & +\alpha_2 + k_1, \\
+\alpha_2\beta_2 & -\alpha_3\beta_3 + \alpha_2\beta_3 & -\alpha_3\beta_2 & +\beta_2 & -\beta_3 - \alpha_2 & +\alpha_3 + k_2, \\
\dots\dots & \dots\dots\dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots, \\
+\alpha_{h-1}\beta_{h-1} & -\alpha_h\beta_h + \alpha_{h-1}\beta_h & -\alpha_h\beta_{h-1} & +\beta_{h-1} & -\beta_h - \alpha_{h-1} & +\alpha_h + k_{h-1}, \\
+\alpha_h\beta_h & \qquad\quad + \alpha_h l & & +\beta_h & -l \quad -\alpha_h & \qquad + k_h,
\end{array}\right.
$$

ou bien, en réduisant,

$$
\begin{aligned}
2A_a = n\beta_1 &+ (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1) + (\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2) + \dots \\
&+ (\alpha_{h-1}\beta_h - \alpha_h\beta_{h-1}) + \alpha_h l - n - l + k_0 + k_1 + k_2 + \dots + k_{h-1} + k_h.
\end{aligned}
$$

Si l'on convient de remplacer $\beta_0$ par o et $\alpha_0$ par $n$, $\beta_{h+1}$ par $l$ et $\alpha_{h+1}$ par o, on pourra écrire

$$
(4) \qquad 2A_a = \sum_{i=0}^{i=h} (\alpha_i\beta_{i+1} - \alpha_{i+1}\beta_i + k_i) - [n + l].
$$

**5.** Il sera utile pour la suite de chercher les termes du degré le moins élevé de la fonction $N(x, y)$, quand on l'aura assujettie aux $A_a$ conditions précédentes. Supposons qu'on descende le côté $a''_2 a''_1$, jusqu'à ce qu'on rencontre la $i^{\text{ième}}$ ligne verticale à partir de celle du point $a''_2$; on se sera abaissé de $i\frac{q_1}{p_1}$; si $r_1$ est le reste de la division de $iq_1$ par $p_1$, le point le moins élevé répondant à un terme de $N(x, y)$ qu'on rencontrera sur la $i^{\text{ième}}$ ligne verticale sera au-dessus de $G''_1$ de $\frac{r_1}{p_1}$. Comme $p_1$ et $q_1$ sont premiers entre eux, si l'on fait varier $i$ de 1 à $p_1 - 1$, on trouvera, dans un certain ordre, les restes $1.2\dots(p_1 - 1)$. Le point qu'on trouvera sur la $p_1^{\text{ième}}$ ligne sera de une unité au-dessus de $G''_1$. En faisant varier $i$ de $p_1 + 1$ à $2p_1 - 1$, on retrouvera dans le même ordre les restes $1.2\dots(p_1 - 1)$; de même en faisant varier $i$ entre $2p_1 + 1$ et $3p_1 - 1\dots$, et enfin en faisant varier $i$ de $(k_1 - 1)p_1 + 1$ à $k_1 p_1 - 1$.

De là résulte que, si dans $N(x, y)$ on remplace $y$ par $v_1 x^{\frac{q_1}{p_1}}$, les termes du degré le moins élevé répondront à une droite parallèle à $G'''_1$ et dont l'ordonnée à l'origine surpassera celle de $G''_1$ de $\frac{1}{p_1}$. Puis les termes qui ont après les précédents le moindre degré répondront à une autre parallèle, dont l'ordonnée à l'origine surpassera celle de $G''_1$ de $\frac{2}{p_1}, \ldots$ Sur chacune de ces lignes il y aura au moins $k_1$ points séparés les uns des autres par des distances constantes ayant pour projection sur $o\alpha$ la longueur $p_1$. Si l'on considère les points de $N(x,y)$ qui sont en dehors des parallèles $r_1 a''_1$ et $r_2 a''_2$ prolongées, il pourra y avoir sur chacune des parallèles à $G''_1$ plus de $k_1$ points.

Si $p_1$ est égal à l'unité, les parallèles au côté $G''_1$ rencontrent toutes les lignes verticales en des points du réseau sans jamais passer entre deux d'entre eux. Les ordonnées à l'origine de ces parallèles varient chaque fois d'une unité et les termes du moindre degré de $N(x,y)$ correspondent alors à des points situés sur le côté $G'_1$ du polygone dérivé.

Il faut encore ajouter que, s'il s'agit des côtés extrêmes $G_0$ ou $G_h$, on ne pourra plus affirmer sur ces parallèles que l'existence de $k-1$ points. Prenant, par exemple, $G''_0$, on remarquera que la portion $a''_0 X$ qui manque pour notre raisonnement est moindre que la $k_0^{\text{ième}}$ partie de $G_0$, puisque le côté tout entier a pour projection $k_0 q_0$ sur $o\beta$ et que la partie qui manque a pour projection l'unité. Pour le côté $G''_h$, la portion $a''_l Y$ qui manque a pour projection l'unité sur $o\alpha$, le côté tout entier ayant pour projection $k_h p_h$.

Remarquons encore que, si l'on désigne par U l'inverse du coefficient de $dx$ dans l'intégrale (3), c'est-à-dire

$$U = \frac{F'_y(x,y)}{N(x,y)},$$

U sera pour une racine $y$ de l'ordre $\frac{q}{p}$ un infiniment petit du degré $1 - \frac{1}{p}$. Si $p = 1$, U aura une valeur finie différente de zéro : cela résulte immédiatement de ce qui précède.

## II.

6. Supposons qu'une des équations $L_0 = 0$, $L_1 = 0$, ..., $L_h = 0$, que j'appelle $L = 0$, ait une racine multiple d'ordre $n'$, et soit $\frac{q}{p}$

le degré des valeurs de $y$ correspondantes. Posons

$$x = x'^p, \quad \text{d'où} \quad dx = p x'^{p-1} dx',$$

l'intégrale (3) deviendra

$$p \int \frac{N(x'^p, y)\, x'^{p-1}\, dx'}{F'_y(x'^p, y)}.$$

Posons

$$y = v x'^q$$

et soit

$$F(x, y) = x'^{\alpha q + \beta p} \mathcal{F}^{(1)}(x', v),$$

$\alpha$ et $\beta$ désignant les exposants de $y$ et de $x$ dans le premier terme du groupe G. On en conclut

$$\frac{dF}{dv} = \frac{dF}{dy} x'^q = x'^{\alpha q + \beta p} \frac{d.\mathcal{F}^{(1)}(x', v)}{dv}$$

et, par suite,

$$\frac{dF}{dy} = x'^{(\alpha-1)q + \beta p} \frac{d.\mathcal{F}^{(1)}(x', v)}{dv}.$$

Si dans la fonction $N(x, y)$, on a fait disparaître tous les termes qui répondent à des points situés au-dessous du côté G″ et sur ce côté, tous les termes qui restent seront, après la substitution $y = v x'^q$, divisibles par $x'^{(\alpha-1)q + (\beta-1)p + 1}$, comme cela résulte du numéro précédent, et l'on aura

$$N(x, y) = x'^{(\alpha-1)q + (\beta-1)p + 1} \mathfrak{N}^{(1)}(x', v),$$

en sorte que l'intégrale (3) deviendra

$$(5) \qquad p \int \frac{\mathfrak{N}^{(1)}(x', v)\, dx'}{\mathcal{F}^{(1)\prime}_v(x', v)}.$$

Mais il est nécessaire de démontrer que les conditions imposées à la fonction $N(x, y)$, quand les racines de l'équation $L = 0$ sont inégales, doivent être encore remplies dans le cas actuel.

Supposons, en effet, qu'il reste des termes de $N(x, y)$ au-dessous de G″ ou sur ce côté. Soit $\Gamma$ la première rangée de points qu'on rencontre en partant de l'origine sur une même parallèle au côté G. Tout consiste à prouver que la distance des deux points extrêmes qui se trouvent sur $\Gamma$ doit être au moins égale au côté G. Pour cela je vais montrer que l'équation $\Lambda = 0$ du n° 3 a une racine multiple d'ordre $n'$ égale à celle de l'équation $L = 0$. Il en résultera que le polynôme $\Lambda$ doit être encore identiquement nul.

Remarquons que le côté $\Gamma$ ayant une ordonnée à l'origine au plus égale à celle de $G''$, les termes correspondants de $N(x, y)$, après la substitution $y = v x'^q$, seront divisibles par une commune puissance de $x'$ au plus égale à $(\alpha - 1)q + (\beta - 1)p$, et l'intégrale (3) deviendra

$$p \int \frac{\mathfrak{N}(x', v)\, dx'}{x'^h \mathfrak{F}_v^{(1)'}(x', v)},$$

où $h$ sera au moins égale à l'unité.

Soit $v_1$ la valeur approchée de $v$, et posons $v = v_1 + w$. Il faudra, pour que l'intégrale reste finie, que le degré de $\mathfrak{N}(x', v_1 + w)$ soit supérieur à celui de $\mathfrak{F}_w^{(1)'}(x', v_1 + w)$. Pour avoir les valeurs de $w$ en $x'$, on appliquera à la fonction $\mathfrak{F}^{(1)}(x', v_1 + w) = F^{(1)}(x', w)$ la méthode de M. Puiseux. Admettons que les équations $L^{(1)} = 0$ relatives au nouveau polygone qu'on aura à construire n'aient pas de racines multiples. On verra alors, en répétant le raisonnement du n° 3, qu'il faut égaler à zéro les coefficients des termes répondant à des points situés au-dessous du nouveau polygone dérivé et sur ses côtés. Or, parmi les conditions qui en résultent, examinons en particulier celles qui proviennent des termes indépendants de $x'$ dans la fonction $\mathfrak{N}(x', v)$ et, par suite, des termes répondant à $\Gamma$ pour la fonction $N(x, y)$. On a vu, n° 3, que la substitution $y = v x'^q$ dans ces termes donne

$$x'^{\alpha q + \beta p}\, v^{\alpha - (k-i)p}\, \varphi(v);$$

les termes de $\mathfrak{N}(x', v)$ indépendants de $x'$ sont donc

$$v^{\alpha - (k-i)p}\, \varphi(v).$$

En remplaçant $v$ par $v_1 + w$, le terme constant et les coefficients de $w, w^2, \ldots, w^{n'-1}$ doivent être nuls. On pourra faire abstraction du premier facteur et considérer seulement la fonction $\varphi(v'_1 + w)$, ce qui, d'après le développement de Taylor, donnera les conditions

$$\varphi(v_1) = 0 \quad \frac{d\varphi(v_1)}{dv_1} = 0 \ \ldots \ \frac{d^{n'-1}\varphi(v_1)}{dv_1^{n'-1}} = 0.$$

Cela revient évidemment à dire que, pour la racine d'ordre $n'$ de $L = 0$, la fonction $A$ et ses $n' - 1$ premières dérivées doivent s'annuler, ce qui démontre notre proposition.

7. Pour avoir le nombre des conditions relatives au point critique $a$, il faudra donc écrire d'abord un nombre de conditions que j'appelle maintenant [A] et qui sera donné par la formule (4). Puis il faudra ajouter à celles-ci les conditions qui expriment que l'intégrale (5) reste finie, quand, ayant remplacé $v$ par $v_1 + w$, on considère les valeurs infiniment petites de $w$ qui satisfont à l'équation $F^{(1)}(x', w) = 0$.

Pour cela on posera $w = v' x'^{\mu}$. Le degré $\mu = \frac{q}{p'}$ de chaque racine infiniment petite $w$ sera donné par la construction d'un polygone analogue au premier, et les valeurs approchées de $v'^{p'}$ satisferont à des équations telles que $L^{(1)} = 0$, dont on peut supposer d'abord toutes les racines inégales.

Puisque

$$\mathcal{F}^{(1)}(x', v_1 + w) = F^{(1)}(x', w),$$

on aura

$$\mathcal{F}^{(1)\prime}_{w}(x', v_1 + w) = F^{(1)\prime}_{w}(x', w).$$

Soit aussi

$$\mathfrak{N}^{(1)}(x', v_1 + w) = N^{(1)}(x', w),$$

l'intégrale deviendra

$$p \int \frac{N^{(1)}(x', w)\, dx'}{F^{(1)\prime}_{w}(x', w)}.$$

Le nombre des conditions nouvelles que j'appelle $[A]^{(1)}$ s'exprimera par la formule (4), où l'on devra remplacer $n$ par $n'$, et les quantités $\alpha$, $\beta$, $k$, $l$, par les nouvelles valeurs $\alpha'$, $\beta'$, $k'$, $l'$.

8. Il est bon de faire voir comment est composée la fonction $\mathfrak{N}^{(1)}(x', v)$, afin de s'assurer que les nouvelles conditions ne rentrent pas les unes dans les autres, ni dans les précédentes, ce qui arriverait si quelques-uns des termes qu'on veut faire disparaître avaient d'eux-mêmes des coefficients nuls.

D'après ce qui a été dit plus haut, il reste dans la fonction $N(x, y)$, après qu'on l'a assujettie aux conditions [A], $k - 1$ termes au moins qui, après la substitution $y = v x'^{q}$, sont divisibles par $x'^{(\alpha-1)q+\beta p-p+1}$, et qui donneront dans $\mathfrak{N}^{(1)}(x', v)$ des termes indépendants de $x'$. Les exposants de $v$ dans ces termes sont égaux à ceux de $y$ dans les termes correspondants de $N(x, y)$ et varient chaque fois de $p$ unités; mais comme $p$ peut être l'unité, nous dirons simplement que les exposants sont au moins égaux respectivement à $0, 1, 2, \ldots, k-1$. En remplaçant $v$ par $v_1 + w$ et développant par la formule du binôme, on trouvera certainement des termes en $w^0, w^1, \ldots, w^{k-1}$. Leurs coefficients seront des combinaisons linéaires de ceux des termes correspondants de la fonction $N(x, y)$, lesquels sont restés complétement arbitraires. Le nombre $n'$ étant au plus égal à $k$, l'extrémité du polygone dérivé aboutira sur le nouvel axe $o\alpha$ au plus à la $k - 1^{ième}$ division.

Il y aura donc assez de constantes arbitraires pour satisfaire aux conditions. D'après ce qui a été dit plus haut, celles-ci reviennent à exprimer que la fonction $\mathfrak{N}^{(1)}(x', v)$ et un certain nombre de ses dérivées partielles, relatives à $v$, s'annulent pour $x' = 0$, $v = v_1$.

Revenant à la fonction $N(x, y)$ et prenant les points qui sont situés sur la parallèle suivante au côté G, on en trouvera au moins $k - 1$ qui, après la substitution $y = vx'^q$, donneront des termes contenant la première puissance de $x'$ en facteur. En posant $v = v_1 + w$ et développant les puissances des binômes, on trouvera donc des termes en $x', x'w, \ldots, x'w^{k-1}$, dont les coefficients contiendront linéairement au moins $k - 1$ constantes arbitraires nouvelles. Le nombre des termes qui doivent disparaître ne pouvant que diminuer quand on passe d'une ligne horizontale du nouveau réseau à une ligne supérieure, comme le montre la forme convexe vers l'origine du nouveau polygone, il y aura assez de constantes pour les conditions relatives à la deuxième ligne horizontale du nouveau polygone. Elles consisteront à écrire que la fonction $\frac{d.\mathfrak{N}^{(1)}(x', v)}{dx'}$ et un certain nombre de ses dérivées partielles par rapport à $v$ s'annulent pour $x' = 0$, $v = v_1$. On continuera le même raisonnement pour les autres lignes.

9. Il est important d'observer que les conditions trouvées conviendront à toutes les racines de l'équation $v^p = \lambda$, dès qu'on les aura écrites pour l'une d'elles, ou mieux ces conditions ne dépendent que de $\lambda$. Par exemple, dans la fonction $\mathfrak{N}^{(1)}(0, v)$, les exposants de $v$ va-

rient chaque fois de $p$ unités. On pourra donc écrire

$$\mathfrak{M}^{(1)}(o, v) = v^h \varphi(v),$$

où $\varphi(v)$ ne dépend que de $v^p = \lambda$. On a à égaler à zéro les coefficients des puissances successives de $w$, après avoir posé $v = v_1 + w$. Comme on peut faire abstraction du facteur $(v_1 + w)^h$, on trouvera

$$\varphi(v_1) = o, \quad \frac{d\varphi(v_1)}{dv_1} = o, \quad \frac{d^2\varphi(v_1)}{dv_1^2} = o, \quad \ldots .$$

Posons

$$\varphi(v) = \psi(\lambda).$$

On aura finalement à exprimer que la fonction $\psi(\lambda)$ et un certain nombre de ses dérivées s'annulent pour $\lambda = v_1{}^p$.

On répétera le même raisonnement pour les conditions qui se rapportent aux termes contenant $x'$.

**10.** Si l'équation $L = o$ a plusieurs racines multiples d'ordres $n'$, $n'_1$, $n'_2$, ou bien si plusieurs équations $L = o$ admettent des racines multiples, il faudra construire autant de nouveaux polygones et répéter pour chacun d'eux ce qui a été dit plus haut.

Les conditions relatives aux termes indépendants de $x'$ dans la fonction $\mathfrak{M}^{(1)}(x', v)$, c'est-à-dire à ceux qui répondent aux premières lignes horizontales des nouveaux polygones, porteront toutes sur les termes de la fonction $\mathfrak{M}^{(1)}(o, v)$. Leur nombre sera au plus $n' - 1$ pour le premier polygone nouveau, $n'_1 - 1$ pour le second, $n'_2 - 1$ pour le troisième, etc. Pour un même côté G de l'ancien polygone, la somme des degrés de multiplicité $n'$, $n'_1$, $n'_2, \ldots$ est au plus égale à $k$. Il y aura donc en tout $k - 1$ conditions au plus, et, par suite, un nombre suffisant de constantes arbitraires pour les exprimer toutes. De même, les conditions relatives aux termes qui contiennent la première puissance de $x'$, c'est-à-dire à ceux qui répondent aux deuxièmes lignes horizontales des nouveaux polygones, seront en nombre au plus égal à celui des conditions précédentes, et, par suite, au plus égal à $k - 1$, et ainsi de suite pour les autres lignes.

On voit, d'après cela, que, si dans l'ancien polygone on prolonge les droites $r_1 a'_1$, $r_2 a'_2$, elles comprendront entre elles des points répondant à des termes de $N(x, y)$, dont les coefficients sont arbitraires et en nombre suffisant pour exprimer toutes les conditions de la deuxième approximation, relatives au côté $G_1$.

Le nombre des conditions sera ainsi $[A] + \Sigma[A]^{(1)}$. On aura, pour trouver $\Sigma[A]^{(1)}$, à appliquer la formule (4) autant de fois que l'on trouvera de racines multiples dans les équations $L = 0$.

**11.** Admettons maintenant que l'une des équations $L^{(1)} = 0$ de la deuxième approximation ait une racine multiple d'ordre $n''$.

Posons

$$x' = x''^{p'}, \quad w = v' x''^{q'};$$

on aura, comme précédemment,

$$F^{(1)}(x', w) = x''^{\alpha' q' + \beta' p'} \mathfrak{F}^{(2)}(x'', v'),$$
$$F_w^{(1)'}(x', w) = x''^{(\alpha'-1)q' + \beta' p'} \mathfrak{F}_{v'}^{(2)'}(x'', v').$$

Si l'on admet, pour un moment, que les conditions $[A] + \Sigma[A]^{(1)}$, trouvées plus haut, sont encore nécessaires, on aura

$$N^{(1)}(x', w) = x''^{(\alpha'-1)q' + \beta' p' - p' + 1} \mathfrak{N}^{(2)}(x'', v'),$$

et l'intégrale

$$\int \frac{N^{(1)}(x', w)\, dx'}{F_w^{(1)'}(x', w)}$$

deviendra

$$\int \frac{\mathfrak{N}^{(2)}(x'', v')\, dx''}{\mathfrak{F}_{v'}^{(2)'}(x'', v')},$$

et il faudra ajouter aux conditions précédentes celles qui expriment que cette dernière intégrale est finie pour $x'' = 0$.

Pour cela, on posera

$$v' = v'_1 + w',$$

$v'_1$ étant la valeur approchée de $v'$.

Soient

$$\mathfrak{F}^{(2)}(x'', v'_1 + w') = F^{(2)}(x'', w')$$

et

$$\mathfrak{N}^{(2)}(x'', v'_1 + w') = N^{(2)}(x'', w'),$$

l'intégrale deviendra

$$\int \frac{N^{(2)}(x'', w')\, dx''}{F_{w'}^{(2)'}(x'', w')}.$$

On sera ainsi ramené aux cas précédents. En posant $w' = v''x''^{\mu}$, le nombre des racines infiniment petites $w'$ et leurs degrés $\mu = \frac{p''}{q''}$ en $x''$ seront donnés par la méthode de M. Puiseux. Les valeurs approchées $v''_1$ de $v''$ satisferont à des équations $L^{(2)} = 0$, qu'on peut d'abord supposer n'avoir aucune racine multiple. En appliquant la formule (4) au nouveau polygone, on trouvera un nombre de conditions que j'appelle $[A]^{(2)}$, et qu'il faudra ajouter aux précédentes.

Pour montrer que celles-ci sont nécessaires, revenons à l'intégrale

$$\int \frac{\mathfrak{M}^{(1)}(x', v)\,dx'}{\mathfrak{F}_v^{(1)'}(x', v)}.$$

Les valeurs infiniment petites de $w = v - v_1$ sont distinctes après deux approximations successives seulement. Il faut donc (n$^{os}$ 6 et 7) que tous les termes répondant à des points situés au-dessous du polygone dérivé abaissé d'une unité et sur ses côtés dans les conditions $[A]^{(1)}$ et $[A]^{(2)}$ aient des coefficients nuls. Or il résulte du n° 6 que cela entraîne les conditions $[A]$.

Les conditions $[A]^{(2)}$ consisteront à écrire que la fonction $\mathfrak{M}^{(2)}(x'', v')$ et un certain nombre de ses dérivées prises par rapport à $v'$ s'annulent pour $x'' = 0$, $v' = v'_1$; puis, que la fonction $\mathfrak{M}_{x''}^{(2)'}(x'', v')$ et un certain nombre de ses dérivées prises par rapport à $v'$ s'annulent pour les mêmes valeurs des variables, et ainsi de suite.

Ce qui a été dit dans la deuxième approximation s'appliquant ici sans changement, il y aura assez de constantes pour vérifier les conditions nouvelles, et celles-ci ne dépendront que de $v_1'^{p'}$.

Si l'équation $L^{(1)} = 0$ a plusieurs racines multiples, ou bien si plusieurs équations $L^{(1)} = 0$ ont des racines multiples, il faudra former autant de polygones relatifs à la troisième approximation et appliquer autant de fois la formule (4).

Le nombre des conditions sera ainsi

$$[A] + \Sigma[A]^{(1)} + \Sigma[A]^{(2)}.$$

**12.** D'une manière générale, supposons que l'on trouve des racines multiples jusque dans les équations $L^{(r-1)} = 0$, l'une d'elles ayant une racine d'ordre de multiplicité $n^{(r)}$.

On posera, en adoptant une loi de notation évidente,

$$x^{(r-1)} = x^{(r)p^{(r-1)}}, \quad w^{(r-2)} = v^{(r-1)} x^{(r)q^{(r-1)}},$$

$$F^{(r-1)}(x^{(r-1)}, w^{(r-2)}) = x^{(r)\alpha^{(r-1)}q^{(r-1)}+\beta^{(r-1)}p^{(r-1)}} \mathfrak{F}^{(r)}(x^{(r)}, v^{(r-1)}).$$

Si l'on admet que les conditions $[A] + \Sigma[A]^{(1)} + \ldots + \Sigma[A]^{(r-1)}$, nécessaires quand les équations $L^{(r-1)} = 0$ ont leurs racines distinctes, le sont encore quand plusieurs de ces racines sont égales, on pourra écrire

$$N^{(r-1)}(x^{(r-1)}, w^{(r-2)}) = x^{(r)[\alpha^{(r-1)}-1]q^{(r-1)}+\beta^{(r-1)}p^{(r-1)}-p^{(r-1)}+1} \mathfrak{N}^{(r)}(x^{(r)}, v^{(r-1)}),$$

et l'intégrale se réduira à

$$\int \frac{\mathfrak{N}^{(r)}(x^{(r)}, v^{(r-1)})\, dx^{(r)}}{\mathfrak{F}^{(r)\prime}_{v^{(r-1)}}(x^{(r)}, v^{(r-1)})}.$$

$v_1^{(r-1)}$ étant une des valeurs approchées de $v^{(r-1)}$, on posera

$$v^{(r-1)} = v_1^{(r-1)} + w^{(r-1)}.$$

Les valeurs infiniment petites de $w^{(r-1)}$ seront fournies par l'équation

$$\mathfrak{F}^{(r)}(x^{(r)}, v_1^{(r-1)} + w^{(r-1)}) = F^{(r)}(x^{(r)}, w^{(r-1)}) = 0.$$

En désignant $\mathfrak{N}^{(r)}(x^{(r)}, v_1^{(r-1)} + w^{(r-1)})$ par $N^{(r)}(x^{(r)}, w^{(r-1)})$, l'intégrale deviendra enfin

$$\int \frac{N^{(r)}(x^{(r)}, w^{(r-1)})\, dx^{(r)}}{F^{(r)\prime}_{w^{(r-1)}}(x^{(r)}, w^{(r-1)})},$$

et, en appliquant la formule (4) au polygone correspondant, on trouvera un nombre $[A]^{(r)}$ de conditions qu'il faudra ajouter aux précédentes.

En répétant de proche en proche le raisonnement qui a été fait plus haut, on se convaincra immédiatement que les conditions

$$[A] + \Sigma[A]^{(1)} + \ldots + \Sigma[A]^{(r-1)}$$

sont nécessaires.

Ajoutons enfin qu'il y aura à former autant de polygones de cette dernière série, qu'on trouvera de racines multiples dans les équations $L^{(r-1)} = 0$.

Le nombre total des conditions relatives au point critique $a$ sera donc

$$A_a = [A] + \Sigma[A]^{(1)} + \ldots + \Sigma[A]^{(r)}.$$

## III.

**13.** Supposons que l'on élimine $y$ entre les deux équations $F(x, y) = 0$, $F'_y(x, y) = 0$. Je dis que l'équation finale en $x$ sera du degré $m(m-1)$. C'est ce qui a lieu, comme on sait, quand l'équation $F(x, y) = 0$ est la plus générale de son degré.

Supposons qu'on altère les coefficients de l'équation générale, de manière à obtenir l'équation particulière donnée. Observons que les valeurs de $x$, qui sont racines de l'équation finale, ne peuvent correspondre qu'à des points de la courbe où la tangente est parallèle à l'axe des $y$ ou bien à des points multiples. Or, à cause de la substitution du premier degré, qui a été faite au commencement, on peut supposer que la courbe n'a pas de directions asymptotiques parallèles à l'axe des $y$, et que les points à l'infini sont des points simples. Le degré $m(m-1)$ de l'équation finale ne sera donc pas abaissé.

Les abscisses des points critiques $a, a_1, a_2, \ldots$ sont les racines de cette équation. Nous allons voir comment on peut déterminer, pour chaque racine, le degré de multiplicité.

**14.** Transportons l'origine des coordonnées au point critique $a$. Désignons par $y_1, y_2, \ldots, y_m$ les valeurs de $y$ tirées de l'équation $F(x, y) = 0$. Le résultat de l'élimination pourra s'écrire

$$F'_y(x, y_1) F'_y(x, y_2) \ldots F'_y(x, y_m) = 0.$$

Si la courbe proposée n'a pas d'autres points critiques que l'origine sur le nouvel axe des $y$, il est clair que les seules racines infiniment petites $y_1, y_2, \ldots, y_n$ rendront infiniment petits les facteurs correspondants du produit précédent. Appelons $\Delta_a$ la somme des degrés de ces facteurs qui est toujours, comme nous verrons, un nombre entier. L'équation finale admettra la racine $x = 0$ au degré $\Delta_a$ de multiplicité.

S'il y a sur l'axe des $y$ un autre point critique $a_1$, dont l'ordonnée est actuellement $b_1 - b$, les racines $y$ infiniment peu différentes de $b_1 - b$ rendront aussi infiniment petits les facteurs qui leur correspondent. En désignant par $\Delta_{a_1}$ la somme des degrés relatifs à ces racines, l'équation finale aura une racine $x = 0$ du degré $\Delta_a + \Delta_{a_1}$.

Dans tous les cas, si l'on évalue la somme des valeurs de $\Delta$ pour tous les points critiques, la somme de ces valeurs sera égale au degré de l'équation finale, c'est-à-dire à $m(m-1)$.

**15.** Pour déterminer $\Delta_a$, reprenons le polygone élémentaire du n° **2**, et supposons d'abord que les équations $L = 0$ n'aient pas de racines multiples.

Au groupe $G_1$, par exemple, correspondent $\alpha_1 - \alpha_2$ valeurs de $y$ de l'ordre $\frac{\beta_2 - \beta_1}{\alpha_1 - \alpha_2}$. Une de ces racines, substituée dans la dérivée $F'_y(x, y)$, donnera le degré d'un terme de $G'_1$, c'est-à-dire

$$\frac{\beta_2 - \beta_1}{\alpha_1 - \alpha_2}(\alpha_1 - 1) + \beta_1$$

et comme il y a $\alpha_1 - \alpha_2$ de ces racines, on aura pour ce groupe

$$(\beta_2 - \beta_1)(\alpha_1 - 1) + \beta_1(\alpha_1 - \alpha_2) = \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 + \beta_1 - \beta_2.$$

En répétant le même raisonnement pour tous les groupes, on trouvera

$$\begin{array}{llllll}
G_0 & = n\beta_1 & & & & -\beta_1, \\
G_1 & = \alpha_1\beta_2 & -\alpha_2\beta_1 & +\beta_1 & -\beta_2, & \\
G_2 & = \alpha_2\beta_3 & -\alpha_3\beta_2 & +\beta_2 & -\beta_3, & \\
\multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\
G_{h-1} & = \alpha_{h-1}\beta_h & -\alpha_h\beta_{h-1} & +\beta_{h-1} & -\beta_h, & \\
G_h & = \alpha_h l & & +\beta_h & -l, &
\end{array}$$

et en faisant la somme

$$\Delta_a = n\beta_1 + (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1) + (\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2) + \ldots + (\alpha_{h-1}\beta_h - \alpha_h\beta_{h-1}) + \alpha_h l - l,$$

qu'on peut écrire ainsi

$$(6) \qquad \Delta_a = \sum_{i=0}^{i=h} (\alpha_i\beta_{i+1} - \alpha_{i+1}\beta_i) - l$$

Rapprochant ce résultat de la formule (4), nous en conclurons

$$2A_a = \Delta_a - n + \sum_{i=0}^{i=h} k_i.$$

Les $n$ racines relatives au point critique $a$ se partagent en $k_0$ systèmes circulaires de $p_0$ racines pour le groupe $G_0$, en $k_1$ systèmes de $p_1$ racines pour le groupe $G_1$, etc. A chaque système circulaire de $p$ racines correspondent $p$ lacets binaires que l'on peut réduire à $p-1$ d'entre eux (¹). En supprimant ainsi l'un des lacets binaires de chaque système circulaire et désignant par $N_a$ le nombre des lacets relatifs au point critique $a$, on aura

$$N_a = \sum_{i=0}^{i=h} k_i(p_i - 1) = n - \sum_{i=0}^{i=h} k_i,$$

et la relation précédente devient

$$(7) \qquad 2A_a + N_a = \Delta_a.$$

**16.** L'évaluation de $\Delta_a$ qui vient d'être faite suppose que les équations $L = 0$ n'ont pas de racines multiples. On a vu, en effet, que par la substitution $y = vx'^q$ la fonction $F'_y(x, y)$ devenait $x'^{(\alpha-1)q+\beta p}\,\mathfrak{F}^{(1)'}_v(x', v)$. La somme des degrés $(\alpha - 1)\frac{q}{p} + \beta$ relatifs à $x$ et effectuée pour toutes les racines infiniment petites donne le nombre fourni par la formule (6) et que nous appellerons maintenant $[\Delta]$. Mais il faut ajouter à $[\Delta]$ la somme des degrés que donnent dans le second facteur $\mathfrak{F}^{(1)'}_v(x', v)$, les valeurs de $v$ répondant à des racines multiples des équations $L = 0$.

Si $v_1$ est la valeur approchée de $v$, la dérivée précédente deviendra après la substitution $v = v_1 + w$, $F^{(1)'}_w(x', w)$, les valeurs de $w$ satisfaisant à l'équation $F^{(1)}(x', w) = 0$. On est alors ramené au cas précédent. En faisant $w = v'x'^{\frac{q'}{p'}}$, on pourra d'abord supposer que les équations $L^{(1)} = 0$ qui donnent les valeurs approchées de $v'^{p'}$ n'ont pas de racines multiples. Dans ce cas il suffira d'ajouter à $[\Delta]$ des nombres analogues

---

(¹) Briot et Bouquet, *Théorie des fonctions elliptiques*, p. 55.

donnés par la formule (6), mais relatifs aux polygones de la deuxième approximation. Soit $[\Delta]^{(1)}$ un de ces nombres; on aura pour le degré total

$$[\Delta] + \Sigma[\Delta]^{(1)}.$$

Observons que, l'évaluation des $[\Delta]^{(1)}$ s'effectuant avec la variable $x' = x^{\frac{1}{p}}$, le résultat devrait être divisé par $p$ pour revenir à la variable indépendante $x$. Mais à chaque valeur de $\lambda$ répondent $p$ valeurs de $y$; on devra donc conserver le résultat obtenu comme représentant un degré relatif à $x$.

Si les équations $L^{(1)} = 0$ ont des racines multiples, on fera les substitutions

$$x' = x''^{p'}, \quad w = v' x''^{q'}.$$

On a vu que

$$F_w^{(1)\prime}(x', w) = x''^{(\alpha'-1)q' + \beta' p'} \mathfrak{F}_{v'}^{(2)\prime}(x'', v').$$

La somme des degrés répondant au premier facteur a été faite dans les quantités $[\Delta]^{(1)}$. Mais il faut y ajouter maintenant les degrés relatifs au second facteur. On les évaluera comme précédemment et l'on sera conduit à ajouter aux quantités précédentes des nombres $[\Delta]^{(2)}$ fournis par la formule (6), mais relatifs à tous les polygones de la troisième approximation.

Les nombres $[\Delta]^{(2)}$, bien qu'évalués avec la variable $x'' = x^{\frac{1}{pp'}}$, doivent être considérés comme donnant un degré relatif à $x$; car à chaque valeur infiniment petite $w' = v' - v'_1$ correspondent $pp'$ valeurs de $y$.

Il est clair que, si l'on trouve des racines multiples jusque dans les équations $L^{(r-1)} = 0$ inclusivement, la somme des degrés relatifs à toutes les racines $y$ infiniment petites ou $\Delta_a$ sera exprimée par la formule suivante :

$$\Delta_a = [\Delta] + \Sigma[\Delta]^{(1)} + \Sigma[\Delta]^{(2)} + \ldots + \Sigma[\Delta]^{(r)}.$$

**17.** On peut conclure de ce qui précède que la formule (7) est générale.

D'après les définitions des quantités $[A]^{(i)}$ et $[\Delta]^{(i)}$, on a

$$2[A]^{(i)} = [\Delta]^{(i)} - n^{(i)} + \Sigma k^{(i)},$$

$n^{(i)}$ étant le nombre de racines infiniment petites répondant au polygone considéré et $\Sigma k^{(i)}$ se rapportant à tous les nombres $k$ que l'on rencontre dans la construction de ce polygone. En faisant la somme de toutes les égalités analogues, on trouvera

$$2A_a = \Delta_a - n - \Sigma n' - \Sigma n'' - \ldots - \Sigma n^{(r)} + \Sigma k + \Sigma k' + \Sigma k'' + \ldots + \Sigma k^{(r)},$$

où $\Sigma n^{(i)}$ et $\Sigma k^{(i)}$ s'étendent maintenant aux nombres que l'on rencontre dans tous les polygones de la $(i+1)^{ième}$ approximation. Nous allons voir que la quantité qui suit $\Delta_a$ dans le second membre de l'égalité précédente représente, quand on change son signe, le nombre $N_a$ des lacets répondant à chaque système circulaire quand on a supprimé l'un d'eux, comme il a été dit plus haut.

Admettons d'abord que l'une des équations $L = 0$ seulement ait des racines multiples. L'équation $L_1 = 0$, par exemple, aura une racine d'ordre $n'$. Le partage des racines en systèmes circulaires se fera comme précédemment, à l'exception des racines qui répondent à la valeur multiple. Ayant posé $v = v_1 + w$ les valeurs infiniment petites de $w$ se partageront en $k'_0$ groupes de $p'_0 - 1$ quantités, $k'_1$ groupes de $p'_1 - 1$ quantités, etc. On sait alors que les valeurs de $y$ correspondantes se partagent en $k'_0$ groupes de $p_1 p'_0$ quantités, en $k'_1$ groupes de $p_1 p'_1$ quantités, etc.

En supprimant un des lacets dans chaque système circulaire, on trouvera donc

$$\begin{aligned} N_a = k_0(p_0 - 1) + (k_1 - n')(p_1 - 1) + k_2(p_2 - 1) + \ldots \\ + k_h(p_h - 1) + \Sigma k'(p_1 p' - 1) \end{aligned}$$

et, comme $\Sigma kp = n$ et $\Sigma k'p' = n'$, on aura

$$N_a = n + n' - \Sigma k - \Sigma k'.$$

Il est clair que, si l'équation $L_1 = 0$ a plusieurs racines multiples ou si plusieurs équations $L = 0$ ont des racines multiples, on aura

$$N_a = n + \Sigma n' - \Sigma k - \Sigma k',$$

où $\Sigma n'$ est la somme des multiplicités des racines dans toutes les équations $L = 0$ et où $\Sigma k'$ s'étend à toutes les quantités $k$ qu'on rencontre dans les polygones de la deuxième approximation.

Supposons, d'une manière générale, qu'ayant trouvé des racines multiples jusque dans les équations $L^{(r-2)} = 0$, on ait vérifié que le nombre $N_a$ des lacets binaires réduits comme on l'a vu est donné par l'expression suivante :

$$\begin{gathered}\Sigma k(p-1) + \Sigma k'(pp'-1) + \ldots + \Sigma k^{(r-1)}[pp'\ldots p^{(r-1)} - 1] \\ = n + \Sigma n' + \ldots + \Sigma n^{(r-1)} - \Sigma k - \Sigma k' - \ldots - \Sigma k^{(r-1)}.\end{gathered}$$

Je dis que la même loi s'étendra au cas où une des équations $L^{(r-1)} = 0$ aurait des racines multiples. Admettons que l'une d'elles admette une racine d'ordre $n^{(r)}$. Les valeurs de $y$ correspondantes se partageront en systèmes circulaires de $pp'\ldots p^{(r-1)}p^{(r)}$ quantités. On devra donc retrancher de l'expression précédente $n^{(r)}(pp'\ldots p^{(r-1)}p^{(r)} - 1)$ unités, puis y ajouter les lacets nouveaux au nombre de

$$\Sigma k^{(r)}[pp'\ldots p^{(r-1)}p^{(r)} - 1].$$

Cette dernière expression peut s'écrire

$$pp'\ldots p^{(r-1)}\Sigma k^{(r)}p^{(r)} - \Sigma k^{(r)},$$

et, comme $\Sigma k^{(r)}p^{(r)}$ est égale à $n^{(r)}$, il faudra en définitive modifier la formule précédente en lui ajoutant $n^{(r)} - \Sigma k^{(r)}$, ce qui démontre la généralité de l'expression trouvée. Ainsi l'on a, dans tous les cas,

$$2A_a + N_a = \Delta_a.$$

**18.** Le nombre des intégrales de première espèce se déduit aisément de ce qui précède.

Soit A la somme des nombres $A_a$, $A_{a_1}, \ldots$ relatifs à tous les points critiques et N la somme $N_a + N_{a_1} + \ldots$. On sait que la somme des nombres $\Delta_a$, $\Delta_{a_1}, \ldots$ (n° **14**) est égale à $m(m-1)$. On aura donc

$$2A + N = m(m-1).$$

La fonction $N(x, y)$, étant du degré $m-3$, contient $\frac{1}{2}(m-1)(m-2)$ paramètres arbitraires. Quand on l'aura assujettie aux A conditions trouvées plus haut, elle renfermera donc encore un nombre de paramètres variables égal à

$$p = \tfrac{1}{2}(m-1)(m-2) - A = \frac{N}{2} - (m-1).$$

C'est le nombre des intégrales de première espèce.

Quant au nombre P des périodes de l'intégrale, MM. Briot et Bouquet ont démontré [1] qu'il est égal à

$$P = N - 2(m - 1),$$

ce qui donne la relation

$$P = 2p.$$

**19.** Comme application, supposons que la courbe $F(x, y) = 0$ ait un point singulier tel, qu'en y transportant l'origine, les termes du degré le moins élevé soient

$$y^\alpha - a x^\beta.$$

Appelons $k$ le plus grand commun diviseur de $\alpha$ et $\beta$. La formule générale (4) donnera

$$2 A_a = \alpha\beta - \alpha - \beta + k.$$

Si l'origine est un point de rebroussement de première espèce, en prenant la tangente comme axe des $x$, les termes du degré le moins élevé seront $y^2 - ax^3$ et l'on aura $A_a = 1$.

Considérons encore le cas où $\beta = 1$. L'origine est un point simple; mais l'axe des $y$, qui est la tangente, a, avec la courbe, un contact d'ordre plus élevé. La formule précédente donne $A_a = 0$. Ces points n'exigent aucune condition.

**20.** Admettons que l'origine soit un point de rebroussement de deuxième espèce, c'est-à-dire que la tangente y rencontre la courbe en quatre points confondus. Prenant comme axe des $x$ la tangente de rebroussement, le terme en $x^3$ devra manquer, et l'équation s'écrira

$$F(x, y) = y^2 + ax^2y + bxy^2 + cy^3 + dx^4 + ex^3y + \ldots = 0.$$

Il est facile de voir que le polygone élémentaire se réduit ici à une ligne droite répondant aux termes

$$y^2 + ax^2y + dx^4;$$

---

[1] *Théorie des fonctions elliptiques*, p. 181.

on aura donc $\alpha = 2$, $\beta = 4$, $k = 2$, et l'on en conclura

$$A_a = 2$$

si l'équation $v^2 + av + d = 0$ a ses racines inégales.

**21.** Considérons la courbe

$$F(x, y) = y^3 + 3x^2y^2 - (x^2 - y^2)^2y^2 - 4x^6 = 0$$

et étudions le point triple qui est à l'origine. On voit aisément que les termes du moindre degré sont

$$y^3 + 3x^2y^2 - 4x^6 = (y - x^2)(y + 2x^2)^2.$$

Ayant posé $y = vx^\mu$, on aura $\mu = 2$ et $v_1$ satisfera à l'équation

$$L = v^3 + 3v^2 - 4 = (v - 1)(v + 2)^2.$$

Le polygone élémentaire se réduira à une ligne droite, et l'on aura

$$[A] = \tfrac{1}{2}(3 \times 6 - 3 - 6 + 3) = 6.$$

L'équation $L = 0$ ayant une racine double, il faudra (n° 6) poser $y = vx^2$; après avoir supprimé le facteur $x^6$, il restera

$$\mathfrak{F}^{(1)}(x, v) = v^3 + 3v^2 - 4 - v^2(x - v^2x^3)^2.$$

Posons $v = -2 + w$, on aura

$$F^{(1)}(x, w) = w^2(w - 3) - (w - 2)^2[x - (w - 2)^2x^3]^2 = 0.$$

On s'assure aisément que le nouveau polygone élémentaire se réduit à une ligne droite et que les termes du degré le moins élevé sont

$$-3w^2 - 4x^2.$$

On en conclut $[A]^{(1)} = 1$, et, par suite,

$$A_a = [A] + [A]^{(1)} = 7.$$

# SECONDE PARTIE.

22. On peut tirer de la théorie générale deux corollaires qui nous seront utiles pour la suite.

1° Nous avons vu au n° 5 que, si les équations $L = 0$ n'ont pas de racines multiples, la fonction

$$U = \frac{F'_y(x, y)}{N(x, y)}$$

était un infiniment petit d'ordre $1 - \frac{1}{p}$, pour une racine $y$ appartenant à un système circulaire de $p$ quantités. Cette propriété est générale.

Par la substitution $x = x'^p$, $y = vx'^q$, U devient

$$\frac{x'^{(\alpha-1)q+\beta p}\mathcal{F}_v^{(1)\prime}(x', v)}{x'^{(\alpha-1)q+\beta p-p+1}\mathfrak{N}^{(1)}(x', v)} = x'^{p-1}\frac{\mathcal{F}_v^{(1)\prime}(x', v)}{\mathfrak{N}^{(1)}(x', v)},$$

et, en posant $v = v_1 + w$,

$$U = x'^{p-1}\frac{F_w^{(1)\prime}(x', w)}{N^{(1)}(x', w)}.$$

$w$ étant une fonction de $x'$ de l'ordre $\frac{q'}{p'}$, si l'on admet d'abord que les équations $L^{(1)} = 0$ n'aient pas de racines multiples, le second facteur sera en $x'$ de l'ordre $1 - \frac{1}{p'}$; U sera donc de l'ordre $p - \frac{1}{p'}$ et par rapport à $x$ de l'ordre $1 - \frac{1}{pp'}$.

Si les équations $L^{(1)} = 0$ ont des racines multiples, on posera

$$x' = x''^{p'}, \quad w = v' x''^{q'},$$

et U deviendra

$$x''^{pp'-p'}\frac{x''^{(\alpha'-1)q'+\beta' p'}\mathcal{F}_{v'}^{(2)\prime}(x'', v')}{x''^{(\alpha'-1)q'+\beta' p'-p'+1}\mathfrak{N}^{(2)}(x'', v')} \quad \text{ou} \quad x''^{pp'-1}\frac{\mathcal{F}_{v'}^{(2)\prime}(x'', v')}{\mathfrak{N}^{(2)}(x'', v')}.$$

En posant maintenant $v' = v'_1 + w'$, on aura

$$U = x''^{pp'-1} \frac{F_{w'}^{(2)\prime}(x'', w')}{N^{(2)}(x'', w')}.$$

$w'$ étant une fonction de $x''$ de l'ordre $\frac{q''}{p''}$, si l'on admet que les équations $L^{(2)} = 0$ n'aient pas de racines multiples, le second facteur sera de l'ordre $1 - \frac{1}{p''}$ en $x''$, et U de l'ordre $pp' - \frac{1}{p''}$, c'est-à-dire par rapport à $x$ de l'ordre $1 - \frac{1}{pp'p''}$.

Il est évident que cette loi est générale.

**23.** 2° Supposons que l'on élimine $y$ entre les deux équations

$$F(x, y) = 0, \quad N(x, y) = 0,$$

la fonction $N(x, y)$, qui est ici d'un degré quelconque, égal ou supérieur à $m - 3$, ayant été assujettie aux A conditions trouvées plus haut. Les abscisses des points critiques $a, a_1, \ldots$ seront des racines de l'équation finale. Je dis que la somme des multiplicités de ces racines est 2A.

Le résultat de l'élimination peut s'écrire

$$N(x, y_1) N(x, y_2) \ldots N(x, y_m) = 0.$$

Admettons, comme précédemment, que l'origine ait été transportée en un point critique $a$, et cherchons la somme des degrés que donnent les $n$ racines infiniment petites répondant à ce point. Rappelons que, si l'on fait $x = x'^p$, $y = vx'^q$, on aura

$$F'_y(x, y) = x'^{(\alpha-1)q+\beta p} \mathcal{F}_v^{(1)\prime}(x', v),$$
$$N(x, y) = x'^{(\alpha-1)q+\beta p-p+1} \mathfrak{N}^{(1)}(x', v).$$

Il est clair que, si les équations $L = 0$ n'ont pas de racines multiples, une racine infiniment petite $y$ donnera dans $N(x, y)$ un degré inférieur de $1 - \frac{1}{p}$ à celui de la substitution dans $F'_y(x, y)$, $x$ étant la variable indépendante. La somme des degrés que donnent dans cette dérivée les $n = \Sigma kp$ racines infiniment petites étant $\Delta_a$ (n° 15), la somme des degrés pour la fonction $N(x, y)$ sera

$$\Delta_a - \Sigma k p \left(1 - \frac{1}{p}\right) = \Delta_a - n + \Sigma k = \Delta_a - N_a = 2A_a.$$

Si les équations $L = 0$ ont des racines multiples, il faudra ajouter au degré précédent, que nous désignons par $2[A]$, d'autres nombres qu'on obtiendra en cherchant les degrés des fonctions telles que $\mathfrak{N}^{(1)}(x', v)$ pour les racines $v = v_1 + w$, dont les valeurs approchées sont multiples. Ayant posé $\mathfrak{N}^{(1)}(x', v_1 + w) = N^{(1)}(x', w)$, on trouvera, comme plus haut, qu'il faut ajouter

$$[\Delta]^{(1)} - n^{(1)} + \Sigma k^{(1)} = 2[A]^{(1)}.$$

S'il y a plusieurs racines multiples dans les équations $L^{(1)} = 0$, on aura de même pour le degré

$$2[A] + 2\Sigma[A]^{(1)} \quad \text{ou bien} \quad 2A_a.$$

On voit suffisamment que ce résultat est général. En étendant ce raisonnement à tous les points critiques, on trouvera $2A$ pour la somme des multiplicités.

En s'appuyant sur ces deux propositions, on peut étendre au cas général les théorèmes donnés par Clebsch dans le cas particulier des points doubles, relativement aux courbes pour lesquelles A a les valeurs

$$\tfrac{1}{2}(m-1)(m-2) \quad \text{ou bien} \quad \tfrac{1}{2}m(m-3).$$

### *Cas où* A *est égal à* $\frac{1}{2}(m-1)(m-2)$.

**24.** Il n'y a pas alors d'intégrales de première espèce; mais toutes les intégrales où le coefficient différentiel est une fonction rationnelle des deux variables $x$ et $y$ liées par l'équation $F(x, y) = 0$ se ramènent aux fonctions algébriques et logarithmiques. Je dis, en effet, que la courbe $F(x, y) = 0$ est unicursale.

Prenons une courbe d'ordre $m - 1$ complétement arbitraire, et assujettissons-la aux A conditions précédentes. Le nombre des paramètres qui entrent dans l'équation de la courbe étant $\frac{1}{2}(m-1)(m+2)$, il restera encore

$$\tfrac{1}{2}(m-1)(m+2) - \tfrac{1}{2}(m-1)(m-2) = 2m - 2$$

paramètres variables. Choisissons arbitrairement $2m - 3$ points sur la courbe $F(x, y) = 0$, et écrivons les conditions qui expriment que ces points appartiennent à la courbe d'ordre $m - 1$. Il restera dans l'équation un paramètre variable, en sorte que l'on aura un faisceau de courbes dont l'équation sera

$$\varphi(x, y) + \lambda\varphi_1(x, y) = 0,$$

en désignant par $\varphi(x, y) = 0$ et $\varphi_1(x, y) = 0$ deux courbes particulières satisfaisant aux conditions énoncées.

Si maintenant on élimine $y$ entre l'équation $F(x, y) = 0$ et celle des courbes du faisceau, l'équation finale en $x$ sera du degré $m(m-1)$, puisqu'on a effectué dans la fonction $F(x, y)$ une substitution linéaire. Les abscisses des points critiques y figureront comme racines avec des multiplicités dont la somme est $2A = (m-1)(m-2)$. Les abscisses des $2m - 3$ points choisis sur la courbe proposée seront aussi des racines, ce qui donnera pour la somme des degrés de tous ces points

$$(m-1)(m-2) + 2m - 3 = m(m-1) - 1.$$

Une seule des racines de l'équation finale dépendra de $\lambda$, et il est facile de voir qu'elle est une fonction rationnelle de $\lambda$. Il suffit pour s'en convaincre de donner à $\lambda$ une autre valeur, $\lambda'$, et de remarquer que les deux équations en $x$ ont un plus grand commun diviseur du degré $m(m-1) - 1$. D'après la théorie du plus grand commun diviseur, ce facteur, et celui qui reste après sa suppression, sont rationnels.

On démontrera de même que $y$ s'exprime rationnellement en $\lambda$. Donc la courbe proposée est unicursale (¹).

### *Cas où* A *est égal à* $\frac{1}{2}m(m-3)$.

**25.** Le nombre des intégrales de première espèce se réduit alors à l'unité. Cette intégrale sera

$$z = \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{U}, \quad \text{où} \quad U = \frac{F'_y(x, y)}{N(x, y)}.$$

(¹) Le fond de ce raisonnement appartient à Clebsch (*Journal de Crelle*, t. LXIV, p. 44).

U est une fonction algébrique de $x$, et, en considérant $x$ comme donné, les valeurs de U seront distinctes, excepté pour les points critiques $a$, $a_1$,.... On n'a pas à s'occuper des valeurs infinies des variables $x$ et $y$, à cause de la substitution linéaire supposée effectuée dans la fonction $F(x, y)$. Considérant l'un des points critiques et une racine correspondante $y$, appartenant à un système circulaire de $p$ quantités, on sait que U sera, pour l'abscisse du point critique, un infiniment petit de l'ordre $1 - \frac{1}{p}$ (n° 22). Si $p = 1$, U conserve une valeur finie et est évidemment une fonction monodrome de $x$ pour la valeur de $y$ considérée.

Je dis maintenant que U ne peut devenir infini pour aucune valeur finie de $x$; car, en éliminant $y$ entre les deux équations $F(x, y) = 0$, $N(x, y) = 0$, les abscisses des points critiques seront racines de l'équation finale avec des multiplicités dont la somme est $2A$, ou bien $m(m-3)$, c'est-à-dire qu'il n'y aura pas d'autres racines; et, comme U ne devient pas infini pour les points critiques, il restera fini pour toutes les valeurs finies de $x$.

De là, en appliquant deux théorèmes donnés par MM. Briot et Bouquet [1], on conclura que $x$ est une fonction monodrome et doublement périodique de $z$. D'après un théorème connu de M. Liouville, $x$ s'exprimera rationnellement à l'aide d'une fonction elliptique $\lambda(z)$ et de sa dérivée.

Prenons maintenant $y$ comme variable indépendante. On a identiquement

$$F'_x(x, y)\,dx + F'_y(x, y)\,dy = 0;$$

d'où

$$\frac{dx}{F'_y(x, y)} = -\frac{dy}{F'_x(x, y)}$$

et, par suite,

$$-z = \int_{y_0}^{y} \frac{N(x, y)\,dy}{F'_x(x, y)}.$$

En répétant le raisonnement précédent pour la fonction

$$V = \frac{F'_x(x, y)}{N(x, y)},$$

[1] *Théorie des fonctions elliptiques*, p. 381 et 387.

on verra que $y$ est une fonction rationnelle d'une certaine fonction elliptique $\lambda_1(z)$ et de sa dérivée.

Appelons $\omega$ et $\omega'$ un système de périodes de la fontion $\lambda(z)$, $\omega_1$ et $\omega'_1$ un système de périodes de la fonction $\lambda_1(z)$. Les systèmes de parallélogrammes correspondants auront un réseau de points communs; sans cela à des valeurs de $z$ de la forme $z + m\omega + m'\omega'$ répondraient une seule valeur de $x$ et une infinité de valeurs de $y$, ce qui est impossible, $x$ et $y$ étant liés par une équation algébrique.

Soit $\varepsilon$, $\varepsilon'$ un système de périodes répondant à ce réseau, en sorte que

$$\varepsilon = a\omega + b\,\omega', \quad \varepsilon = a_1\,\omega_1 + b_1\,\omega'_1,$$
$$\varepsilon' = a'\omega + b'\omega', \quad \varepsilon' = a'_1\,\omega_1 + b'_1\,\omega'_1.$$

Appelons $\lambda_2(z)$ une fonction elliptique dont les périodes soient $\varepsilon$, $\varepsilon'$. On sait que $\lambda(z)$ s'exprime rationnellement par rapport à $\lambda_2(z+\alpha)$, où $\alpha$ est une constante convenablement choisie [1]; $\lambda(z)$ sera donc une fonction rationnelle de $\lambda_2(z)$ et de sa dérivée. Il en sera de même de $\lambda'(z)$. On verra de la même façon que $\lambda_1(z)$ et sa dérivée s'expriment rationnellement en $\lambda_2(z)$ et $\lambda'_2(z)$. On en conclura que la même propriété a lieu pour $x$ et $y$, en d'autres termes que $x$ et $y$ peuvent s'exprimer en fonction d'une variable auxiliaire $u = \lambda_2(z)$ par des formules ne contenant d'autre irrationnelle qu'un radical carré portant sur une expression du quatrième degré en $u$.

Il en résulte que toute intégrale dans laquelle le coefficient différentiel est une fonction rationnelle de $x$ et $y$ s'exprimera par des fonctions algébriques et logarithmiques, et les intégrales elliptiques des trois espèces.

**26.** Nous n'avons pas eu à nous occuper, jusqu'à présent, des valeurs infinies des variables, à cause de la substitution linéaire supposée faite dans la fonction $F(x, y)$. Cette substitution revient à considérer une projection conique ou perspective de la courbe proposée. En vue de l'application aux cas particuliers, voici la remarque qu'on peut faire.

Rendons l'équation homogène et posons

$$t^m F\left(\frac{x}{t}, \frac{y}{t}\right) = F(x, y, t).$$

---

(1) *Théorie des fonctions elliptiques*, p. 276.

L'équation $F(x, y, t) = 0$ peut être envisagée de deux manières distinctes : 1° elle représente la courbe en coordonnées homogènes; 2° $x$, $y$, $t$ étant regardées comme coordonnées trilinéaires, l'équation représentera une perspective de la courbe proposée. Les points à l'infini de cette dernière répondront à des points de la perspective situés sur le côté $t = 0$ du triangle de référence. On cherchera les points singuliers situés sur ce côté; et, pour trouver la valeur de $A_a$, on fera $x = 1$ ou $y = 1$, ce qui reviendra à considérer une nouvelle perspective de la courbe : on appliquera alors la formule (4). Nous allons faire l'application à plusieurs exemples.

**27.** MM. Briot et Bouquet ont démontré que, parmi les équations différentielles de la forme

$$\left(\frac{du}{dz}\right)^m = f(u),$$

où $f(u)$ désigne un polynôme, il y en a onze seulement qui sont susceptibles d'une intégrale monodrome et doublement périodique. Ce sont :

1° $$\left(\frac{du}{dz}\right)^2 = g(u-a)(u-a_1)(u-a_2);$$

2° $$\left(\frac{du}{dz}\right)^2 = g(u-a)(u-a_1)(u-a_2)(u-a_3);$$

3° $$\left(\frac{du}{dz}\right)^3 = g(u-a)^2(u-a_1)^2;$$

4° $$\left(\frac{du}{dz}\right)^3 = g(u-a)^2(u-a_1)^2(u-a_2)^2;$$

5° $$\left(\frac{du}{dz}\right)^4 = g(u-a)^2(u-a_1)^3;$$

6° $$\left(\frac{du}{dz}\right)^4 = g(u-a)^3(u-a_1)^3;$$

7 $$\left(\frac{du}{dz}\right)^4 = g(u-a)^2(u-a_1)^3(u-a_2)^3;$$

8° $$\left(\frac{du}{dz}\right)^6 = g(u-a)^3(u-a_1)^4;$$

9° $$\left(\frac{du}{dz}\right)^6 = g(u-a)^3(u-a_1)^5;$$

10° $$\left(\frac{du}{dz}\right)^6 = g(u-a)^4(u-a_1)^5;$$

11° $$\left(\frac{du}{dz}\right)^6 = g(u-a)^3(u-a_1)^4(u-a_2)^5.$$

Il est facile de vérifier que, dans ces onze cas, la courbe $y^m = f(x)$ a des points singuliers tels que $A = \frac{1}{2}k(k-3)$, $k$ étant le degré de la courbe. Nous pourrons en conclure que toutes les intégrales pour lesquelles le coefficient différentiel est une fonction rationnelle des coordonnées d'un point de la courbe s'expriment par les fonctions algébriques et logarithmiques et par les intégrales elliptiques des trois espèces.

Les points singuliers sont tous de la nature de celui qui a été étudié au n° 19. Je me borne à quelques cas.

1° La courbe $y^2 = g(x-a)(x-a_1)(x-a_2)$ est du troisième ordre et n'a pas de points multiples.

2° La courbe $y^2 = g(x-a)(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)$ n'a pas de point singulier à distance finie. Rendons l'équation homogène

$$y^2t^2 = g(x-at)(x-a_1t)(x-a_2t)(x-a_3t).$$

Pour $t=0$, on a $x^4=0$. Afin d'étudier ce point, je fais $y=1$.

$$t^2 = g(x-at)(x-a_1t)(x-a_2t)(x-a_3t).$$

L'origine actuelle est un point de rebroussement de deuxième espèce qui équivaut (20) à deux conditions. On a donc $A=2$, ce qui est la valeur de $\frac{1}{2}m(m-3)$ pour $m=4$.

3° La courbe $y^3 = g(x-a)^2(x-a_1)^2$ présente à distance finie deux points de rebroussement de première espèce. On voit aisément que le point à l'infini est un point simple.

4° La courbe $y^3 = g(x-a)^2(x-a_1)^2(x-a_2)^2$ présente trois points de rebroussement de première espèce. Rendons l'équation homogène :

$$y^3t^3 = g(x-at)^2(x-a_1t)^2(x-a_2t)^2.$$

Pour $t = 0$ on a $x^6 = 1$. Faisons $y = 1$,

$$t^3 = g(x - at)^2(x - a_1 t)^2(x - a_2 t)^2.$$

On voit aisément que les termes de moindre degré sont

$$t^3 - gx^6.$$

Ce point exige un nombre de conditions égal à

$$\tfrac{1}{2}(3 \times 6 - 3 - 6 + 3) = 6.$$

On aura donc

$$A = 9,$$

ce qui est bien la valeur de $\frac{1}{2}m(m - 3)$ pour $m = 6$.

Je me contenterai d'examiner encore le dernier cas :

11° $$y^6 = g(x - a)^3(x - a_1)^4(x - a_2)^5.$$

On aura

$$A_a = \tfrac{1}{2}(6 \times 3 - 6 - 3 + 3) = 6,$$
$$A_{a_1} = \tfrac{1}{2}(6 \times 4 - 6 - 4 + 2) = 8,$$
$$A_{a_2} = \tfrac{1}{2}(6 \times 5 - 6 - 5 + 1) = 10.$$

Rendons l'équation homogène, et faisons ensuite $y = 1$,

$$t^6 = g(x - at)^3(x - a_1 t)^4(x - a_2 t)^5.$$

Les termes du degré le moins élevé sont

$$t^6 - gx^{12},$$

ce qui donnera pour le nombre de conditions

$$\tfrac{1}{2}(6 \times 12 - 6 - 12 + 6) = 30.$$

Ainsi

$$A = 6 + 8 + 10 + 30 = 54,$$

ce qui est bien la valeur de $\frac{1}{2}m(m - 3)$ pour $m = 12$.

Remarquons à ce propos combien l'étude des intégrales qui nous occupent est facilitée par l'existence de ces points singuliers. Si une courbe possédait en effet cinquante-quatre points doubles distincts, il serait à peu près impossible de calculer leurs coordonnées et le nombre de conditions correspondantes.

**28.** Considérons l'équation différentielle

$$\left(\frac{du}{dz}\right)^3 + 3u^2\left(\frac{du}{dz}\right)^2 + (u^2 - 1)^2 - 4u^6 = 0.$$

MM. Briot et Bouquet ont prouvé que l'intégrale est monodrome et doublement périodique [1].

Cherchons les points singuliers de la courbe

$$F(x, y) = y^3 + 3x^2y^2 - (x^2 - 1)^2 - 4x^6 = 0.$$

On a

$$F'_y = 3y^2 + 6x^2y, \qquad F'_x = 6xy^2 - 4x(x^2 - 1) - 24x^5.$$

La première de ces équations admet la solution $y = 0$, et la seconde donne $x = 0$ ou bien $6x^4 + x^2 - 1 = 0$.

La solution $y = 0$, $x = 0$ ne convient pas, puisque la courbe ne passe pas par l'origine des coordonnées. Voyons l'autre : $y = 0$ avec $6x^4 + x^2 - 1 = 0$. L'équation proposée donne, pour $y = 0$, $4x^6 + (x^2 - 1)^2 = 0$. On s'assure aisément que les deux équations en $x$ n'admettent pas de racines communes.

Reprenons l'équation $F'_y = 0$, qui est satisfaite pour $y = -x^2$. Substituant dans F, on trouve $-(x^2 - 1)^2$, et dans $F'_x$, on trouve $-2(x^2 - 1)$. Il y a donc deux points multiples à distance finie $x = \pm 1$, $y = -2$. On vérifie en transportant l'origine en chacun de ces points que ce sont des points doubles ordinaires.

Rendons l'équation homogène :

$$y^3t^3 + 3x^2y^2t^2 - (x^2 - t^2)^2t^2 - 4x^6 = 0.$$

Pour $t = 0$, on a $x = 0$. Faisons $y = 1$, il viendra

$$t^3 + 3x^2t^2 - (x^2 - t^2)^2t^2 - 4x^6 = 0.$$

Ce point a été étudié au n° **21**; il exige sept conditions. On a donc

$$A = 7 + 2 = 9.$$

C'est la valeur de $\frac{1}{2}m(m - 3)$ pour $m = 6$.

---

(1) *Théorie des fonctions elliptiques*, p. 414.

29. Soit encore l'équation différentielle

$$\left(\frac{du}{dz}\right)^3 - \left(\frac{du}{dz}\right)^2 - \tfrac{4}{27}(1 - 2u^2 + 2u^3)^2 + \tfrac{4}{27} = 0.$$

dont l'intégrale est monodrome et simplement périodique ([1]).

Considérons la courbe

$$F(x, y) = y^3 - y^2 - \tfrac{4}{27}(1 - 2x^2 + 2x^3)^2 + \tfrac{4}{27} = 0.$$

On a

$$F'_x = -\tfrac{8}{27}(1 - 2x^2 + 2x^3)(6x^2 - 4x), \qquad F'_y = 3y^2 - 2y.$$

On voit aisément que les seules valeurs de $x$ et $y$ satisfaisant à la fois aux trois équations sont

$$x = 0 \quad \text{avec} \quad y = 0$$

et

$$1 - 2x^2 + 2x^3 = 0 \quad \text{avec} \quad y = \tfrac{2}{3}.$$

En transportant successivement l'origine en ces quatre points, on s'assure que ce sont des points doubles ordinaires.

Rendons l'équation homogène, on aura

$$y^3 t^3 - y^2 t^4 - - \tfrac{4}{27}(t^3 - 2tx^2 + 2x^3)^2 + \tfrac{4}{24} t^6 = 0.$$

Pour $t = 0$, on a $x = 0$. Faisons $y = 1$, on aura

$$t^3 - t^4 - \tfrac{4}{27}(t^3 - 2tx^2 + 2x^3)^2 + \tfrac{4}{27} t^6 = 0.$$

Les termes du moindre degré sont

$$t^3 - \tfrac{16}{27} x^6.$$

Le nombre des conditions correspondantes est donc

$$\tfrac{1}{2}(3 \times 6 - 6 - 3 + 3) = 6;$$

donc

$$A = 4 + 6 = 10.$$

C'est la valeur de $\frac{1}{2}(m-1)(m-2)$ pour $m = 6$.

On en conclut que la courbe représentée par l'équation $F(x, y) = 0$ est unicursale.

---

([1]) *Théorie des fonctions elliptiques*, p. 396.

*Courbes du troisième et du quatrième degré.*

Quand la courbe $F(x, y) = 0$ est du troisième ou du quatrième degré, on peut vérifier, par une substitution simple, quelques-unes des propriétés démontrées dans la théorie générale.

**30.** Si la courbe est du troisième degré et n'a pas de point double, le nombre des intégrales de première espèce est égal à l'unité.

Écrivons l'équation sous la forme

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} F(x, y) = x^3 + (ay + b)x^2 + (cy^2 + dy + e)x \\ + (fy^2 + gy + h)(y - \beta) = 0, \end{aligned} \right.$$

en mettant en évidence dans le terme constant une quelconque des racines $\beta$. Posons

$$(2) \qquad x = (y - \beta)x',$$

$$(3) \qquad F(x, y) = (y - \beta) f(x', y),$$

$f(x', y)$ est un trinôme du second degré en $y$.

$$(4) \qquad f(x', y) = My^2 + Ny + P,$$

où les coefficients M, N, P ont les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned} M &= x'^3 + ax'^2 + cx' + f, \\ N &= -2\beta x'^3 + (b - a\beta)x'^2 + dx' + g, \\ P &= \beta^2 x'^3 - b\beta x'^2 + ex' + h. \end{aligned}$$

Désignons par R la quantité $N^2 - 4MP$. On s'assure immédiatement que R est un polynôme du quatrième degré en $x'$. L'équation $f(x', y) = 0$ donnera alors pour $y$ une fonction rationnelle de $x'$ et de $\sqrt{R}$. Il en sera de même de $x$ d'après la formule (2), et, par suite, de $dx$.

Toutes les intégrales dans lesquelles le coefficient différentiel sera une fonction rationnelle de $x$ et $y$ se ramèneront donc à d'autres où le coefficient différentiel sera une fonction rationnelle de $x'$ et $\sqrt{R}$. On pourra, par suite, les exprimer par des fonctions algébriques et logarithmiques et les intégrales elliptiques des trois espèces.

Par exemple, on réduira de cette façon les intégrales où le coefficient différentiel est une fonction rationnelle de $x$ et $\sqrt[3]{P}$, P étant un polynôme du troisième degré au plus. Si $P = (x-a)(x-a_1)(x-a_2)$, on choisira naturellement la substitution $y = (x-a)y'$ pour réduire l'équation $y^3 = (x-a)(x-a_1)(x-a_2)$ au deuxième degré en $x$.

**31.** Les intégrales elliptiques disparaîtraient si le polynôme qui est soumis au radical se réduisait au second degré. Cela peut se présenter de deux manières : ou bien le polynôme R contient un facteur double qui sort du radical, ou bien dans ce polynôme, les termes du troisième et du quatrième degré ont un coefficient nul. Je n'examinerai que le premier cas qui est le plus général, et je dis que la courbe aura un point double.

Par la décomposition en carrés, l'équation (4) peut s'écrire ainsi

$$f(x', y) = \mathrm{M}\left[\left(y + \frac{\mathrm{N}}{2\mathrm{M}}\right)^2 - \frac{\mathrm{R}}{4\mathrm{M}^2}\right].$$

Il est clair que, si R contient le facteur $(x' - x'_0)^2$, la courbe $f(x', y) = 0$ présentera un point double dont les coordonnées seront

$$x' = x'_0 \quad \text{et} \quad y = -\left[\frac{\mathrm{N}}{2\mathrm{M}}\right]_{x'=x'_0}:$$

en sorte que pour ces coordonnées les deux dérivées partielles $f'_x(x, y)$ et $f'_y(x', y)$ doivent s'annuler. Or, en en différentiant les formules (3), on aura

$$\mathrm{F}'_x(x, y) = (y - \beta) f'_{x'}(x', y) \frac{1}{y - \beta} = f'_{x'}(x', y),$$

$$\begin{aligned} \mathrm{F}'_y(x, y) &= (y - \beta)\left[f'_y(x', y) - \frac{x}{(y-\beta)^2} f'_{x'}(x', y)\right] \\ &= (y - \beta) f'_y(x', y) - x' f'_{x'}(x', y). \end{aligned}$$

Ces formules montrent que les deux dérivées partielles de la fonction $\mathrm{F}(x, y)$ s'annulent en même temps que celles de $f(x', y)$. La courbe $\mathrm{F}(x, y) = 0$ admettra donc un point double.

**32.** L'intégrale de première espèce, dans le cas d'une courbe du troisième degré quelconque, est

$$z = \int_{x_0}^{x} \frac{C\,dx}{F'_y(x, y)},$$

où C est une constante.

Reprenons la transformation $x = (y - \beta)\,x'$, d'où

$$dx = (y - \beta)\,dx' + x'\,dy,$$

on aura

$$z = \int_{x'_0}^{x'} \frac{C\left(y - \beta + x'\dfrac{dy}{dx'}\right)dx'}{(y - \beta)\,f'_y(x', y) - x' f'_{x'}(x', y)},$$

et comme

$$\frac{dy}{dx'} = -\frac{f'_{x'}(x', y)}{f'_y(x', y)},$$

l'intégrale deviendra

$$z = \int_{x'_0}^{x'} \frac{C\,dx'}{f'_y(x', y)};$$

Or

$$f(x', y) = My^2 + Ny + P,$$
$$f'_y(x', y) = 2My + N = \sqrt{R};$$

donc enfin

$$z = \int_{x'_0}^{x'} \frac{C\,dx'}{\sqrt{R}}.$$

On en conclut que $x'$ sera une fonction monodrome et doublement périodique de $z$. Il en sera de même de $\frac{1}{C}\sqrt{R}$, qui est la dérivée de $x'$. Mais $y$ est une fonction rationnelle de $x'$ et de $\sqrt{R}$; il aura donc la même propriété que $x'$. Enfin il en sera de même de $x$, à cause de la relation $x = (y - \beta)\,x'$.

**33.** Reprenons l'intégrale de première espèce

$$z = \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{U}, \quad \text{où} \quad U = F'_y(x, y),$$

en supposant égale à l'unité, pour simplifier, la constante qui provient de $N(x, y)$, et ordonnons l'équation de la courbe par rapport à $y$.

$$F(x, y) = y^3 + Ay^2 + By + C = 0.$$

A, B, C sont des polynômes en $x$, dont les degrés sont au plus 1, 2, 3. Proposons-nous de trouver la relation qui existe entre $x$ et U. On aura

$$U = F'_y(x, y) = 3y^2 + 2Ay + B.$$

L'élimination de $y$ entre cette équation et $F(x, y) = 0$ donne

$$(AU + 9C - AB)^2 = (3U + 6B - 2A^2)(U^2 + BU + 6AC - 2B^2),$$

ou en ordonnant

$$(5) \qquad U^3 + (3B - A^2)U^2 + 18ABC + A^2B^2 - 4B^3 - 4A^3C - 27C^2 = 0.$$

Ainsi, A étant un polynôme quelconque du premier degré, B du second, C du troisième, l'équation (5) aura une intégrale monodrome et doublement périodique.

On peut constater aisément que cette équation satisfait aux conditions données par MM. Briot et Bouquet. (*Théorie des fonctions elliptiques*, p. 381 et suiv.)

Si l'on cherche la condition pour que l'équation (5) ait une racine double, on trouve

$$4(3B - A^2)^3 + 27(18ABC + A^2B^2 - 4B^3 - 4A^3C - 27C^2) = 0,$$

qu'on peut écrire

$$(2A^3 - 9AB + 27C)^2.$$

Représentons par 3F le polynôme $3B - A^2$ (ce qui revient à supposer A nul); on mettra alors l'équation (5) sous la forme

$$U^3 + 3FU - 4F^3 + 27G^2 = 0,$$

où G est un polynôme du troisième degré et F un polynôme du second degré. C'est précisément l'équation trouvée par MM. Briot et Bouquet, comme la plus générale du troisième degré susceptible d'une intégrale monodrome et doublement périodique.

*Courbes du quatrième degré.*

34. Le nombre des intégrales de première espèce sera l'unité si $A = \frac{1}{2}.4(4-3) = 2$. La courbe aura alors deux points doubles ou un point de rebroussement de deuxième espèce; elle sera unicursale si $A = 3$.

Dans le premier cas, prenons comme axe des $y$ la droite joignant les deux points doubles, et comme origine l'un de ces points; l'équation aura cette forme

$$\begin{aligned} F(x,y) = x^4 + (ay+b)x^3 + (cy^2+dy+e)x^2 \\ + (fy+g)y(y-\beta)x + h^2y^2(y-\beta)^2 = 0. \end{aligned}$$

Posons

$$x = (y-\beta)\,x',$$

on aura

$$\begin{aligned} F(x,y) &= (y-\beta)^2 f(x',y), \\ f(x',y) &= My^2 + Ny + P, \end{aligned}$$

où M, N, P ont les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned} M &= x'^4 + ax'^3 + cx'^2 + fx' + h, \\ N &= -2\beta x'^4 + (b - a\beta)\,x'^3 + dx'^2 + gx', \\ P &= \beta^2 x'^4 - b\beta x'^3 + ex'^2. \end{aligned}$$

Si l'on forme la quantité $N^2 - 4MP$, on voit que les coefficients de $x'^8$ et de $x'^7$ sont nuls; en outre, l'expression qui reste est divisible par $x'^2$. On pourra donc poser

$$N^2 - 4MP = x'^2 R,$$

R étant un polynôme du quatrième degré. En cherchant les valeurs de $y$ en $x'$, on aura

$$y = \frac{-N \pm x'\sqrt{R}}{2M}.$$

A cause de la relation $x = (y-\beta)\,x'$, on voit que toutes les intégrales où le coefficient différentiel sera une fonction de $x$ et $y$ se ramèneront à d'autres où le coefficient de $dx'$ sera une fonction rationnelle de $x'$ et $\sqrt{\mathrm{R}}$, en sorte qu'elles se réduiront aux fonctions élémentaires et aux trois intégrales elliptiques.

On verra, comme pour les courbes du troisième degré, que R ne peut admettre un facteur double que si la courbe $f(x', y) = 0$, et par suite la courbe proposée, présente un autre point double.

**35.** Pour obtenir l'intégrale de première espèce, on remarquera que la fonction $\mathrm{N}(x, y)$ est ici du premier degré. En l'égalant à zéro, on obtient une droite, et les deux conditions consistent ici à faire passer la droite par les deux points doubles, c'est-à-dire à la faire coïncider avec l'axe $\mathrm{O}y$. On aura donc

$$z = \int_{x_0}^{x} \frac{\mathrm{C}x\,dx}{\mathrm{F}'_y(x, y)}.$$

Prenons encore la transformation

$$x = (y - \beta)x', \quad \mathrm{F}(x, y) = (y - \beta)^2 f(x', y),$$

on aura

$$dx = (y - \beta)\,dx' + x'dy = \left( y - \beta - \frac{x}{y - \beta} \frac{\dfrac{df}{dx'}}{\dfrac{df}{dy}} \right) dx'$$

ou

$$dx = \left[ (y - \beta)^2 \frac{df}{dy} - x \frac{df}{dx'} \right] \frac{dx'}{(y - \beta)\dfrac{df}{dy}}.$$

On a maintenant

$$\mathrm{F}'_y = (y - \beta)^2 \left[ \frac{-x}{(y - \beta)^2} \frac{df}{dx'} + \frac{df}{dy} \right] = -x \frac{df}{dx'} + (y - \beta)^2 \frac{df}{dy},$$

en remarquant que $f(x', y)$ est nul pour les valeurs de $y$ que nous considérons. L'intégrale deviendra alors

$$z = \int_{x'_0}^{x'} \frac{\mathrm{C}x'dx'}{f'_y(x', y)};$$

or

$$f'_y(x', y) = 2\mathrm{M}y + \mathrm{N} = x'\sqrt{\mathrm{R}};$$

donc enfin

$$z = \int_{x'_0}^{x'} \frac{C\,dx'}{\sqrt{R}},$$

d'où l'on conclura que $x'$ et, par suite, $y$ et $x$ sont des fonctions monodromes et doublement périodiques de $z$.

**36.** Si la courbe proposée $F(x, y) = 0$ a trois points doubles, elle est unicursale. Remarquons d'abord que ces trois points ne peuvent être en ligne droite, la courbe étant seulement du quatrième ordre. En les supposant tous trois à distance finie, je les choisis comme sommets d'un triangle de référence.

On exprimera dans l'équation générale du quatrième ordre homogène et à trois variables que les sommets du triangle sont des points doubles, et l'on arrivera immédiatement à l'équation

$$ay^2z^2 + bx^2z^2 + cx^2y^2 = xyz(\alpha x + \beta y + \gamma z).$$

En résolvant par rapport à $y$, on aura

$$y = \frac{-xz(\alpha x + \gamma z) \pm xz\sqrt{(\alpha x + \gamma z)^2 - 4b(az^2 + cx^2 - \beta xz)}}{2(az^2 + cx^2 - \beta xz)}.$$

Si l'on remplace $z$ par $1$, on substituera à la courbe une de ses projections coniques. L'ordonnée de la nouvelle courbe s'exprimera en fonction de l'abscisse par une formule qui ne contient d'autre irrationnelle qu'un radical carré portant sur un trinôme du second degré. Les intégrales dont le coefficient différentiel sera une fonction rationnelle de $x$ et $y$ se réduiront donc aux fonctions élémentaires.

**37.** Si, dans l'équation $F(x, y) = 0$ du n° 34, on fait tendre $\beta$ vers zéro, l'origine devient, comme on le voit immédiatement, un point de rebroussement de deuxième espèce. La droite $N(x, y) = 0$ doit être dirigée dans ce cas suivant la tangente de rebroussement.

Nous avons déjà remarqué que la courbe

$$y^2 = g(x-a)(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)$$

n'a pas de points multiples à distance finie et possède à l'infini un point de rebroussement de deuxième espèce. La fonction $N(x, y) = 0$ se réduira alors à une constante, et l'intégrale de première espèce sera

$$\int \frac{C\,dx}{y} = \int \frac{C\,dx}{\sqrt{g(x-a)(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)}}.$$

C'est l'intégrale qui sert de point de départ à la théorie des fonctions elliptiques.