

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

E. DUTER

**De la distribution du magnétisme libre sur des plaques
d'acier elliptiques ou circulaires**

Annales scientifiques de l'É.N.S. 2^e série, tome 5 (1876), p. 217-244

[<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1876_2_5_217_0>](http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1876_2_5_217_0)

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1876, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

DE LA
DISTRIBUTION DU MAGNÉTISME LIBRE
SUR
DES PLAQUES D'ACIER ELLIPTIQUES OU CIRCULAIRES,

PAR M. E. DUTER.

AVANT-PROPOS.

Le problème de la distribution du magnétisme libre est loin d'être résolu par la théorie mathématique; en effet, dès que les aimants n'ont pas certaines dimensions très-petites par rapport aux autres, comme il arrive, par exemple, dans les aiguilles d'acier longues et minces, les équations différentielles auxquelles conduit la théorie mathématique sont en général réfractaires à l'intégration. De plus, s'il s'agit d'aimants d'acier et non de fer doux, les équations renferment la force coercitive, qui varie (au moins en direction), d'un point à un autre, suivant des lois que le seul calcul ne peut faire connaître. Il faut nécessairement, pour résoudre la question, avoir recours à l'expérience.

Jusque dans ces dernières années, les plus importantes données expérimentales sur la distribution du magnétisme libre dans les aimants d'acier étaient fournies par les recherches de Coulomb. On sait que ce savant a étudié la distribution du magnétisme sur des aimants prismatiques longs et étroits.

Biot a donné une formule qui résume les résultats de Coulomb. Plus tard Green établit une théorie mathématique fondée seulement sur les lois élémentaires de Coulomb et sur l'hypothèse de la force coercitive.

Récemment, mais dans un genre de questions différentes de celles

qui sont traitées dans ce travail, M. Bouty a vérifié d'importantes formules de Green. En se plaçant au seul point de vue de la distribution du magnétisme libre, les équations différentielles établies par Green ne permettent généralement pas, pour les raisons que j'ai dites plus haut, de résoudre complètement la question. A la fin de son immense travail, l'illustre mathématicien anglais ne peut constater l'accord de ses formules et de l'expérience que dans le seul cas étudié par Coulomb.

D'un autre côté, à la même époque, les données expérimentales étaient bien peu nombreuses.

Le peu de progrès qu'avait fait la question de la distribution du magnétisme était dû à l'insuffisance des procédés expérimentaux : la méthode des oscillations est d'une application restreinte, et la méthode des torsions est extrêmement longue.

Aujourd'hui les recherches sur le magnétisme sont beaucoup plus faciles. Depuis plusieurs années, M. Jamin a, par de nombreux travaux, singulièrement rajeuni et pour ainsi dire transformé le magnétisme; il a de plus mis entre les mains des physiciens un appareil puissant d'investigation, qui permet d'étudier tel point que l'on veut d'un aimant.

M. Jamin a dès lors fait connaître des aimants bien différents de ceux que l'on possédait naguère, et l'illustre physicien a fait voir que l'hypothèse électromagnétique d'Ampère ne suffisait pas à les expliquer. Il considère les aimants comme formés de filets passant à travers la ligne neutre ou ceinture moyenne; mais leur épanouissement aux extrémités, les tensions qui y sont répandues, dépendent essentiellement de la forme des aimants.

J'ai cherché à résoudre la question dans le cas d'aimants d'acier, plats et terminés par des ellipses et des cercles.

But de ce travail.

Ce travail est relatif à l'influence de la forme sur la distribution du magnétisme libre dans les aimants d'acier. J'ai effectué mes recherches sur des plaques de 1 millimètre d'épaisseur taillées dans le même acier et possédant la même trempe.

Ces plaques sont limitées par des ellipses et des cercles de dimensions diverses. Les dimensions des axes de symétrie des courbures limita-

trices des aimants varient entre 10 et 30 centimètres. Tous sont aimantés à saturation dans une très-forte bobine plate, les enveloppant complètement, formée par quatre cents tours d'un fil de cuivre de 2 millimètres de diamètre. Dans le fil circule, pendant l'aimantation, le courant de dix bons éléments de Bunsen. L'un des axes de symétrie de la plaque est la ligne neutre, et je dirai bientôt comment j'ai pu m'assurer que l'aimantation était parfaitement régulière.

Énoncé des résultats.

Les résultats que j'ai obtenus se résument ainsi :

1° *La totalité du magnétisme libre, répandu sur des surfaces elliptiques ou circulaires, est proportionnelle aux surfaces aimantées.*

2° *Ce magnétisme est distribué suivant des filets hyperboliques, ayant tous la perpendiculaire élevée par le centre de la plaque sur la ligne neutre de l'aimant pour axe non transverse en grandeur et en direction.*

Ces hyperboles seront complètement définies, si l'on ajoute que chacune d'elles passe par un point déterminé du contour de la plaque, et que toutes ont en *direction*, pour axe transverse, la ligne neutre.

Sur chaque hyperbole, l'intensité du magnétisme libre en un point considéré est donnée par la formule

$$(1) \quad I = A(a^h - a^{-h});$$

h est la distance du point considéré à la ceinture moyenne, cette distance étant comptée sur l'arc d'hyperbole rectifié où se trouve le point en question. A et a sont deux paramètres qui varient d'un filet à un autre, suivant les deux lois suivantes :

3° *L'intensité I du magnétisme libre à l'extrémité de chaque filet hyperbolique est donnée par la formule*

$$(2) \quad I_1 = \frac{L}{\pi} \arctan \frac{h_1}{k}$$

ou

$$(2 \text{ bis}) \quad \frac{L}{\pi} \arctan \frac{h_1}{\pi} = A(a^{h_1} - a^{-h_1}),$$

h_1 est la longueur de l'arc rectifié d'hyperbole suivi par le filet depuis la ceinture moyenne jusqu'à son extrémité. L est une constante qui ne dépend que de la nature et de la trempe de l'acier employé, et qui, dans toutes mes expériences, s'est trouvée égale à 17,1011. k est une autre constante qui ne dépend encore que de l'acier, à la condition cependant que l'aimant ne devienne pas trop étroit, par rapport à sa longueur.

Dans les plaques dont je m'occupe ici, k oscille très-peu autour de la moyenne 13,213.

4° *La totalité du magnétisme libre, répandu sur chaque filet hyperbolique, est proportionnelle au carré de l'intensité du magnétisme libre à l'extrémité de ce filet, ce qui conduit à la formule*

$$\frac{A}{1-a} (a^h + a^{-h} - 2) = CA^2 (a^h - a^{-h})^2.$$

C est une dernière constante ne dépendant encore que de l'acier, et qui, dans toutes mes recherches, était égale à 0,6491.

5° *Les lignes d'égales tensions ou lignes isodynamiques sont des courbes transcendantes, ayant pour équation*

$$\frac{x^2}{a^2 + b^2} + \frac{h^2}{b^2} = 1,$$

où x est l'abscisse rectiligne du point considéré, et h son ordonnée curviligne comptée sur l'hyperbole (définie plus haut). b est la distance au centre du point où cette courbe isodynamique coupe la ligne de plus grande aimantation, et a est la demi-longueur de la ligne neutre.

Méthode de recherches.

Dans mes recherches, je me suis servi de la méthode d'investigation de M. Jamin : c'est la seule qui permette d'étudier tel point que l'on veut d'un aimant, en mesurant en chaque point la force d'arrachement d'un petit contact sphérique de fer doux; la racine carrée de la force d'arrachement donne l'intensité du magnétisme libre au point considéré.

Pour apprécier la force d'arrachement du petit contact, M. Jamin

l'attache à l'un des plateaux d'une balance sensible, et sous l'autre plateau fixe un ressort à boudin; l'extrémité opposée de ce ressort est reliée par un fil de soie à un treuil micrométrique. On peut dès lors, et cela sans secousse, tendre progressivement le petit ressort, jusqu'au moment où sa tension fait équilibre à la force qui relie le contact à l'aimant. Le micromètre donne l'allongement du ressort; à cet allongement correspond un poids indiqué par une graduation préalable du ressort.

On voit combien est commode ce procédé qui met entre les mains de l'expérimentateur une véritable sonde magnétique. Il a surtout un très-grand avantage, c'est qu'il donne, sans correction aucune, les tensions magnétiques sur les bords des aimants. On sait que, dans la méthode des oscillations, les tensions obtenues en étudiant les régions centrales d'un barreau ne sont pas comparables à celles que l'on obtient vers les extrémités, et qu'une correction est nécessaire.

Il n'en est pas de même dans la méthode de l'arrachement d'un très-petit contact de fer doux. Ce contact est retenu par une force qui ne dépend que du magnétisme libre répandu dans une très-petite région avoisinant le point de contact; l'étendue de cette région est constante pour un même acier, de sorte que, au point de vue des résultats numériques des expériences, il n'y a plus à considérer de points singuliers.

Ainsi on va voir tout à l'heure que les tensions magnétiques mesurées sur les bords de mes aimants (très-minces par rapport à leurs longueurs et à leurs largeurs), on va voir, dis-je, que ces tensions obéissent sans correction aucune aux mêmes lois que celles qui sont répandues sur les parties centrales des plaques.

Pour assurer le succès complet de la méthode, il faut donner aux aimants des surfaces parfaitement polies: la moindre souillure interposée entre le contact et la surface métallique de l'aimant altère de la façon la plus irrégulière les résultats que l'on devrait obtenir.

Il faut aussi donner à l'appareil une base inébranlable, ce que j'ai fait en le plaçant au rez-de-chaussée d'un pavillon isolé dans un jardin. Le support immédiat de ma balance était un très-fort établi de menuisier.

On doit, en outre, observer une autre précaution bien importante, qui consiste à mettre les plaques aimantées à l'abri de tout choc, même le

plus léger en apparence. Je me suis assuré très-souvent, dans mes recherches, que le choc un peu brusque du petit clou d'arrachement retombant sur un point de l'aimant altérerait d'une façon très-notable et permanente la tension magnétique en ce point. Il faut donc, chaque fois que le clou d'arrachement a quitté l'aimant, l'empêcher d'y retomber brusquement.

Cela posé, il va être immédiatement question de mes aimants et principalement :

1° D'une ellipse dont le petit axe, qui est la ligne neutre, a 20 centimètres de longueur et dont le grand axe en a 30;

2° D'une ellipse de mêmes dimensions que la précédente, mais dont le grand axe est la ligne neutre;

3° D'une ellipse dont les axes ont 10 et 30 centimètres de longueur et dont le petit axe est la ligne neutre;

4° D'un cercle de 20 centimètres de diamètre;

5° D'un cercle de 25 centimètres de diamètre;

6° D'un cercle de 30 centimètres de diamètre.

C'est sur cette dernière plaque, la plus vaste de toutes celles que j'ai employées, que j'ai exécuté le plus de recherches. C'est sur elle que je donnerai le plus de résultats numériques.

Toutes mes plaques ont 1 millimètre d'épaisseur.

Les *fig.* 1, 2, 3, 4 et 5 représentent des cadrans de mes aimants; les lignes neutres sont indiquées sur les figures.

Au-dessous du clou d'arrachement et à une distance de ce clou égale à l'épaisseur de la plaque à étudier, j'ai placé un plan poli et horizontal; il est divisé en centimètres carrés, de sorte que j'amène facilement chaque point que je veux étudier, juste dans la verticale du clou et en contact avec lui.

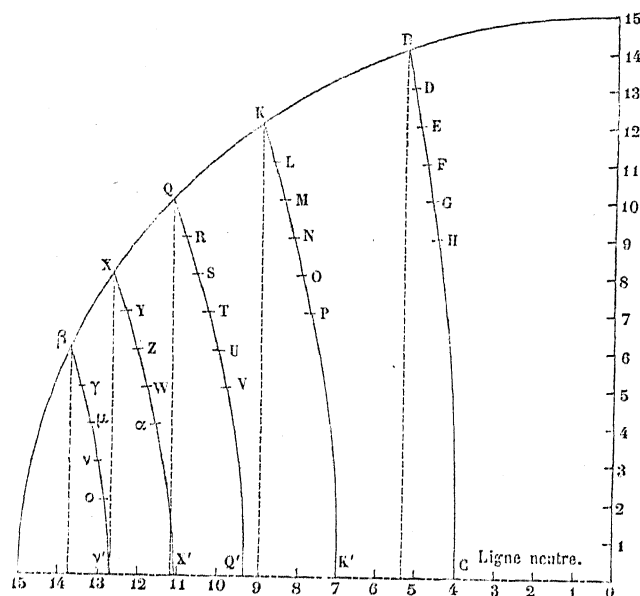
Avant tout, j'ai voulu m'assurer de la régularité de l'aimantation, et, pour y parvenir, j'ai opéré de la façon suivante :

Sur chaque plaque j'ai tracé deux diamètres, l'un incliné à 45 degrés et l'autre à 30 degrés sur la ligne neutre; de plus l'un est dans les angles $\gamma O\alpha$, $\gamma' O\alpha'$ et l'autre dans les angles respectivement adjacents aux deux premiers.

Sur chacun de ces diamètres j'ai étudié, de part et d'autre du centre, des points équidistants de ce centre, et les différences de tensions entre

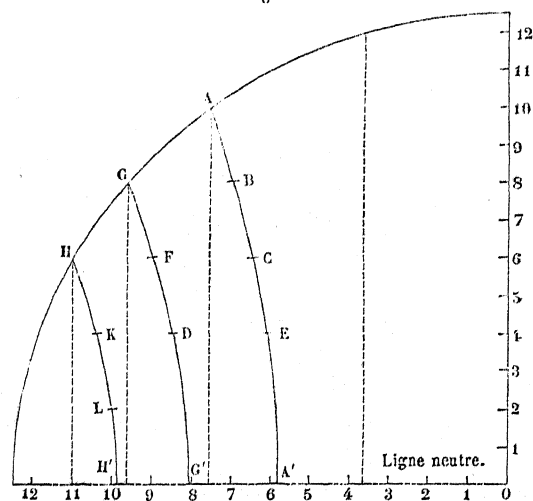
deux points situés sur un même diamètre à égale distance du centre ont toujours été négligeables.

Fig. 1.



Je pouvais donc en toute sécurité me contenter d'étudier un cadran

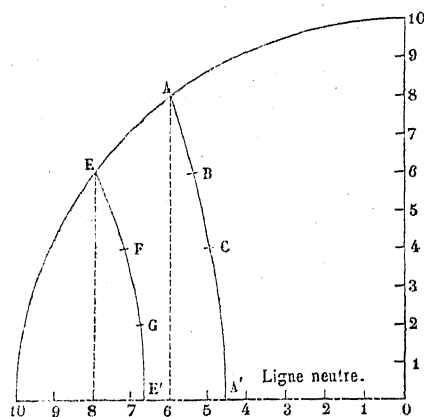
Fig. 2.



de chaque plaque, et étendre aux trois autres les résultats obtenus.

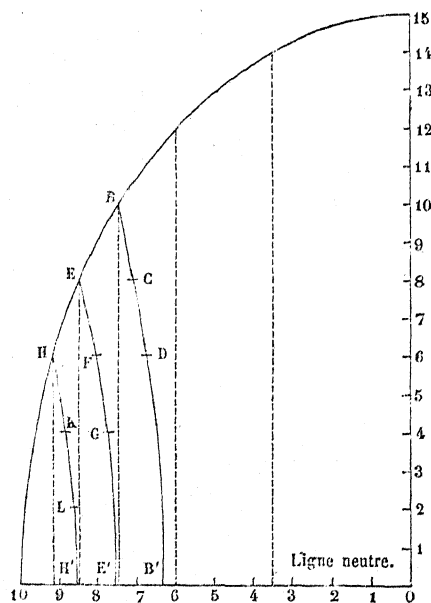
Mais ce n'est pas là tout ce que cette vérification a pu m'offrir; on constate qu'à mesure que les diamètres étudiés se rapprochent de la

Fig. 3.



ligne neutre, les tensions magnétiques y diminuent de plus en plus

Fig. 4.



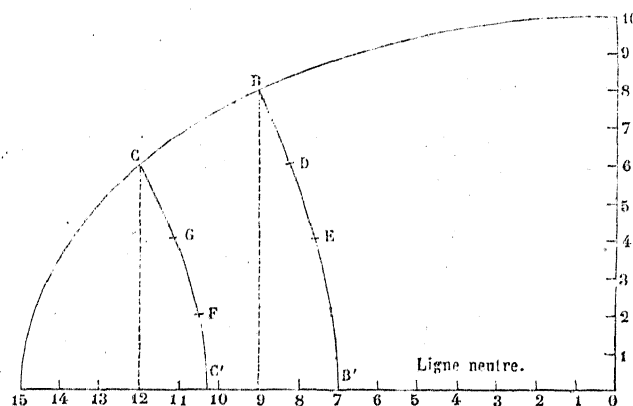
pour des points situés sur les mêmes circonférences; de plus, dans le cas du cercle, cette loi de décroissance est remarquablement simple.

En effet, sur un point quelconque de l'aimant circulaire, dont la distance au centre est ρ , l'intensité du magnétisme libre est donnée par la formule

$$I = A(a^2 - \rho^2).$$

a est absolument constant pour une même plaque; A seulement varie d'un diamètre à un autre, suivant une loi qui se déduit immédiatement de celles que j'ai énoncées en tête de cette étude.

Fig. 5.



En d'autres termes, sur un même diamètre d'un cercle, les tensions magnétiques des divers points *sont dans un rapport constant* avec celles des points situés aux mêmes distances du centre sur l'axe de la plaque perpendiculaire à la ligne neutre.

On va juger de l'exactitude de cette loi par les nombres suivants, empruntés à deux diamètres étudiés sur le cercle de 30 centimètres.

TABLEAU I.

Tensions sur un diamètre incliné de 45 degrés sur la ligne neutre.

Distances au centre.	Tensions mesurées.	Tensions calculées.
15	»	»
14, 14	6, 10	6, 060
11, 31	4, 00	3, 912
8, 48	2, 67	2, 605
5, 65	1, 54	1, 590
2, 82	0, 72	0, 752

TABLEAU II.

Tensions sur un diamètre incliné de 30 degrés sur la ligne neutre.

Distances au centre.	Tensions mesurées.	Tensions calculées.
15	»	»
13,85	3,97	3,932
10,39	2,41	2,484
6,92	1,40	1,452
3,46	0,67	0,669

Après avoir obtenu ces premiers résultats, j'ai étudié le magnétisme libre répandu sur des ordonnées d'égales longueurs prises dans les cercles et les ellipses; j'ai indiqué, dans les *fig.* 1, 2, 3, 4 et 5, ces ordonnées par des lignes ponctuées.

Cette étude m'a fourni les tableaux suivants. Dans ces tableaux, D est la distance en centimètres de chaque point à la ceinture moyenne.

TABLEAU III.

Tensions sur des ordonnées de 15 centimètres.

D	Cercle de rayon 15.	Ellipse $a=10$, $b=15$.
15	9,25	9,31
14	8,12	8,17
13	7,15	7,12
12	6,25	6,19
11	5,55	5,57
10	4,80	4,82
9	4,25	4,21
8	3,51	3,49
7	3,12	3,09
6	2,48	2,50
5	2,11	2,09
4	1,60	1,54
2	0,73	0,75

TABLEAU IV.

Tensions sur des ordonnées de 14 centimètres.

14	8,91	8,97
13	7,49	7,52
12	6,41	6,47
11	5,65	5,60

D	Cercle de rayon 15.	Ellipse $a=10, b=5$.
10	4,89	4,79
9	4,36	4,40
8	3,76	3,77
7	3,25	3,19
6	2,69	2,50
5	2,21	2,19
4	1,68	1,71
2	0,75	0,70

TABLEAU V.

Ordonnées de 12 centimètres.

D	Cercle de rayon 15. Tensions.	Ellipse $a=10, b=15$. Tensions.	Cercle de rayon 12,5. Tensions.
12	8,08	8,12	8,05
11	6,95	6,80	6,91
10	6,00	6,11	6,11
9	5,29	5,32	5,22
8	4,55	4,47	4,41
7	3,95	3,90	3,90
6	2,75	2,80	2,68
5	2,20	2,15	2,19
4	1,67	1,61	1,69
2	0,81	0,88	0,79

TABLEAU VI.

Ordonnées de 10 centimètres.

D	Cercle de rayon 15. Tensions.	Ellipse $a=10, b=15$. Tensions.	Ellipse $a=15, b=10$. Tensions.	Cercle de rayon 12,5. Tensions.	Cercle de rayon 10. Tensions.
10	7,16	7,17	7,10	7,15	7,11
9	6,02	6,11	6,00	6,03	6,04
8	5,00	5,09	4,89	5,02	5,08
7	4,49	4,52	4,45	4,41	4,48
6	3,79	3,81	3,70	3,72	3,70
5	3,01	3,04	2,94	3,00	2,98
4	2,24	2,26	2,21	2,19	2,18
2	1,11	1,09	1,15	1,07	1,10

TABLEAU VII.

Ordonnées de 8 centimètres.

D.	Cercle de rayon 15. Tensions.	Ellipse $a = 10, b = 15.$ Tensions.	Ellipse $a = 15, b = 10.$ Tensions.	Cercle de rayon 12,5. Tensions.	Cercle de rayon 10. Tensions.
8	6,05	6,11	6,14	6,09	6,c8
7	5,25	5,37	5,39	5,29	5,31
6	4,61	4,59	4,60	4,60	4,63
5	3,90	3,88	3,80	3,83	3,92
4	2,38	2,40	2,41	2,41	2,44
3	1,63	1,60	1,65	1,67	1,60
1	0,61	0,64	0,59	0,58	0,60

TABLEAU VIII.

Ordonnées de 6 centimètres.

6	4,71	4,60	4,89	4,77	4,75
5	4,11	4,11	4,17	4,20	4,10
4	3,61	3,60	3,64	3,62	3,60
3	2,80	2,71	2,80	2,78	2,84
2	1,99	2,00	2,02	2,00	2,05
1	0,93	0,90	0,95	0,89	0,91

Interprétation des résultats numériques.

Une fois en possession de ces résultats, il s'agissait de les rassembler et de les interpréter. Pour y parvenir, j'ai employé un procédé essentiellement physique : je veux parler des constructions graphiques. Toutes ces constructions ont d'abord été faites sur un excellent papier quadrillé au millimètre et en prenant 50 millimètres pour unité.

J'ai choisi alors des axes de coordonnées rectangulaires, en prenant pour abscisses les points étudiés sur chaque ordonnée de mes plaques, et en élevant sur chaque point de division des perpendiculaires proportionnelles aux intensités mesurées.

Je n'avais plus qu'à joindre ces perpendiculaires par un trait continu pour avoir des courbes représentant la variation du magnétisme libre sur chaque ordonnée étudiée de chaque plaque.

Les aires comprises entre ces courbes et leurs axes de coordonnées,

évaluées avec les soins les plus minutieux, m'ont donné la totalité du magnétisme libre répandu sur la totalité d'une ordonnée.

On peut remarquer tout d'abord, en se reportant aux tableaux III, IV, V, etc., que pour les cercles et les ellipses qui ont même axe magnétique, les tensions sur des ordonnées de mêmes longueurs, voisines de l'axe, peuvent être considérées comme étant exactement les mêmes; ainsi, pour des ordonnées de 15, 14 et même de 12 centimètres, on obtient sur chaque ordonnée de longueur déterminée les mêmes courbes pour les cercles et les ellipses; mais, à mesure qu'on s'écarte des axes des aimants, les différences relatives entre les courbes construites sur les mêmes ordonnées vont en croissant tout en restant faibles.

Aussi semble-t-il au premier abord que, dans les aimants dont je m'occupe, le magnétisme soit distribué suivant des filets perpendiculaires à la ceinture moyenne, et que la loi de distribution des tensions sur chaque filet ne dépende que de leur longueur. Le problème serait alors singulièrement simplifié; en effet, si pour un acier d'épaisseur, de trempe et de nature déterminées, la totalité du magnétisme sur une ordonnée de longueur déterminée est donnée par une fonction $f(y)$ de cette ordonnée, on arrive aux conséquences suivantes.

Le magnétisme répandu entre deux ordonnées infiniment voisines est $f(y) dx$ et, si $x = \varphi(y)$ est l'équation de la courbe limitatrice de l'aimant, on a

$$f(y) dx = f(y) \varphi'(y) dy,$$

de sorte que le magnétisme total répandu entre deux ordonnées y_1 et y_2 serait

$$\int_{y_1}^{y_2} f(y) \varphi'(y) dy.$$

Un examen attentif fait voir que le problème est bien autrement compliqué. En effet, dans les régions axiales d'un aimant, l'influence de la forme est peu sensible, à moins que l'aimant ne se termine par des pointes aiguës; mais, à mesure que l'on s'éloigne de l'axe, la distribution est différente suivant les différentes formes et c'est ce que montrent les tableaux VI, VII et VIII. On doit prendre d'autant plus garde aux différences de ces tensions que leurs valeurs absolues sont plus petites.

Cela posé, j'ai étudié les totalités du magnétisme répandu sur chaque plaque; pour cela, j'ai pris des axes de coordonnées rectangulaires, et sur l'axe des abscisses j'ai porté des longueurs proportionnelles aux ordonnées étudiées; par chaque point de division j'ai élevé des perpendiculaires proportionnelles aux aires des courbes qui donnent la totalité du magnétisme répandu sur les ordonnées des plaques.

Je donne, dans le tableau n° IX, les nombres qui ont servi à cette construction.

TABLEAU IX.

Ordonnées.	Abscisses.					Cercle de rayon 15.	Ellipse $a=10$, $b=15$.	Ellipse $a=15$, $b=10$.	Cercle de rayon 12,5.	Cercle de rayon 10.
						Aires.	Aires.	Aires.	Aires.	Aires.
15	0	0	»	»	»	55,55	56,26	»	»	»
14	5,38	3,52	»	»	»	49,21	49,26	»	»	»
12	9	6	»	»	»	41,18	42,12	»	44,50	»
10	11,18	7,45	0	7,50	0	32,49	32,55	32,10	33,49	33,00
8	12,68	8,46	9	9,59	6	24,37	24,48	25,09	24,36	24,30
6	13,74	9,15	12	10,96	8	15,96	16,00	15,01	15,90	15,89

En faisant la quadrature des aires comprises entre les axes de coordonnées et les courbes représentant la variation du magnétisme répandu sur toute l'ordonnée d'un point quelconque du bord de chaque plaque, j'ai obtenu les totalités du magnétisme libre répandu sur chaque plaque.

Comme le résultat que j'ai obtenu m'a causé une surprise extrême, j'ai recommencé ces opérations avec le plus grand soin. Voici les nombres qui mesurent la totalité du magnétisme répandu sur chaque plaque:

Pour le cercle de rayon 15.....	583,785
Pour l'ellipse $a=10$, $b=15$	391,124
Pour l'ellipse $a=15$, $b=10$	388,012
Cercle de rayon 12,5.....	403,370
Cercle de rayon 10.....	258,400

Or, si l'on divise ces nombres par les carrés des rayons pour les cercles, et par les produits des moitiés des axes pour les ellipses, on

trouve les quotients successifs :

$$\frac{583,785}{225} = 2,594,$$

$$\frac{391,124}{150} = 2,607,$$

$$\frac{388,012}{150} = 2,586,$$

$$\frac{403,370}{156,25} = 2,577,$$

$$\frac{258,400}{100} = 2,584.$$

Enfin une dernière ellipse très-allongée (30 centimètres pour le grand axe, et 10 pour le petit) donne comme totalité du magnétisme 193,807, nombre qui, divisé par 75, donne encore le même quotient 2,584. Ainsi, dans les aimants circulaires et elliptiques, la totalité du magnétisme répandu sur chaque plaque est proportionnelle aux aires sur lesquelles il est répandu : il reste à voir comment est distribué ce magnétisme sur les différentes plaques.

Forme hyperbolique des filets magnétiques dans les aimants circulaires et elliptiques.

Si l'on se reporte aux tableaux précédents donnant les tensions magnétiques sur des ordonnées d'égales longueurs, on voit que, pour les mêmes ordonnées étudiées sur des plaques différentes, ces tableaux diffèrent très-peu ; mais, à mesure qu'on s'éloigne des axes des aimants, les différences s'accroissent ; en voici la raison :

Dans tous les aimants que je considère dans ce travail, les tensions I sont données sur la ligne axiale par la formule

$$(m) \quad I = A (a^z - a^{-z}),$$

dans laquelle z est la distance d'un point quelconque au centre de l'aimant. A et a sont deux paramètres qui, pour un même acier, ne dépendent sensiblement que de la longueur de l'axe, pourvu cependant que la courbe limitatrice de l'aimant n'ait ni points d'inflexion, ni

points anguleux et que ses dimensions transversales ne soient pas trop faibles par rapport à son axe longitudinal.

Les deux quantités A et a varient avec la longueur de l'axe suivant deux lois que je vais établir tout à l'heure.

Si, après avoir vérifié que la formule (m) s'applique parfaitement aux tensions répandues sur l'axe de l'aimant, on vient à l'essayer pour des ordonnées de plus en plus marginales, les différences relatives entre les résultats du calcul et ceux de l'expérience sont de plus en plus marquées.

Il en est de même de tous les essais que l'on fait pour trouver des lois simples représentant la distribution magnétique sur des *ordonnées rectilignes*, perpendiculaires à la ligne neutre.

Mais toute difficulté disparaît si l'on considère sur la surface des aimants une série d'hyperboles ainsi définies.

Que par *chaque point* du contour de la plaque on trace une hyperbole ayant son axe transverse dirigé suivant la ligne neutre, et ayant l'axe de la plaque perpendiculaire à la ligne neutre pour axe non transverse *en grandeur* et *en direction*, on aura une série de lignes où l'intensité du magnétisme libre en un point quelconque est donnée par la formule

$$I = A (a^h - a^{-h}),$$

dans laquelle h est la longueur de l'arc rectifié d'hyperbole sur laquelle se trouve le point considéré; cette longueur est comptée à partir du point où l'hyperbole coupe la ceinture moyenne.

Quant à A et a , je vais bientôt donner les lois de leurs variations. Voici une série de seize tableaux donnant, avec les tensions mesurées sur des points déterminés des hyperboles, des tensions calculées d'après la formule $I = A (a^h - a^{-h})$; à ces tableaux correspondent les *fig.* 1, 2, 3, 4, 5, où les hyperboles sont tracées en lignes pleines. Les points étudiés portent les mêmes lettres sur les figures que dans les tableaux.

TABLEAU X.

Ligne axiale. Cercle de rayon 15.

$$A = 1,625, \quad a = 1,1251, \quad I = A(a^z - a^{-z}).$$

z.	I mesuré.	I calculé.
15	9,25	9,244
14	8,12	8,142
12	6,25	6,290
10	4,80	4,781
8	3,51	3,536
6	2,48	2,494

TABLEAU XI.

Cercle de rayon 15 (fig. 1). Hyperbole BC.

$$I = A(a^h - a^{-h}), \quad A = 1,836, \quad a = 1,1217.$$

Points étudiés.	Ordonnées.	Abscisses.	h.	I mesuré.	I calculé.
B	14	5,38	CB = 14,094	8,91	8,900
D	13	5,21	CD = 13,078	7,87	7,835
E	12	5,04	CE = 12,064	6,81	6,878
F	11	4,86	CF = 11,051	5,95	6,014
G	10	4,73	CG = 10,042	5,28	5,237
H	9	4,59	CH = 9,032	4,56	4,529

TABLEAU XII.

Cercle de rayon 15 (fig. 1). Hyperbole K'K.

$$I = A(a^h - a^{-h}), \quad A = 2,128, \quad a = 1,1212.$$

K	12	9	K'K = 12,195	8,08	8,051
L	11	8,71	K'L = 11,154	7,00	7,003
M	10	8,44	K'M = 10,119	6,14	6,095
N	9	8,19	K'N = 9,089	»	»
O	8	7,96	K'O = 8,066	4,52	4,504
P	7	7,74	K'P = 7,045	3,85	3,810

TABLEAU XIII.

Cercle de rayon 15 (fig. 1). Hyperbole $\varphi'\varphi$.

$$I = A(a^h - a^{-h}), \quad A = 3,3000, \quad a = 1,0964.$$

Q	10	11,18	Q'Q = 10,219	7,16	7,166
R	9	10,84	Q'R = 9,163	6,25	6,207
S	8	10,54	Q'S = 8,119	5,43	5,403
T	7	10,26	Q'T = 7,081	4,58	4,612
U	6	10,01	Q'U = 6,051	3,80	3,841
V	5	9,80	Q'V = 5,030	2,48	2,439

TABLEAU XIV.

Cercle de rayon 15 (*fig. 1*). Hyperbole X'X.

$$I = A(a^h - a^{-h}), \quad A = 3,930, \quad a = 1,0901.$$

Points étudiés.	Ordonnées.	Abscisses.	h .	I mesuré.	I calculé.
X	8	12,68	$XX' = 8,184$	6,05	6,036
Y	7	12,35	$X'Y = 7,121$	5,15	5,138
Z	6	12,05	$X'Z = 6,077$	4,33	4,292
W	5	11,80	$X'W = 5,047$	3,50	3,531
z	4	11,59	$X'z = 4,026$	2,79	2,785

TABLEAU XV.

Cercle de rayon 15 (*fig. 1*). Hyperbole $\beta\nu$.

β	6	13,74	$\nu'\beta = 6,111$	4,71	4,71
γ	5	13,45	$\nu'\gamma = 5,070$	3,87	3,90
μ	4	13,21	$\nu'\mu = 4,042$	2,72	2,78
ν	3	13,01	$\nu'\nu = 3,022$	2,30	2,32
o	2	12,80	$\nu'o = 2,002$	»	»

TABLEAU XVI.

Ellipse $a = 10$, $b = 15$ (*fig. 4*). Hyperbole B'B.

B	10	7,45	$BB' = 10,095$	7,17	7,10
C	8	7,02	$B'C = 8,047$	5,40	5,38
D	6	6,68	$B'D = 6,019$	3,74	3,79

TABLEAU XVII.

Ellipse $a = 10$, $b = 15$ (*fig. 4*). Hyperbole E'E.

E	8	8,46	$E'E = 8,178$	6,11	6,04
F	6	7,90	$E'F = 6,066$	4,23	4,29
G	4	7,80	$E'G = 4,017$	3,51	3,52

TABLEAU XVIII.

Ellipse $a = 10$, $b = 15$ (*fig. 4*). Hyperbole B'B.

H	6	9,16	$H'H = 6,074$	4,60	4,68
K	4	8,80	$H'K = 4,040$	2,75	2,72
L	2	8,58	$H'L = 2,001$	»	1,54

TABLEAU XIX.

Ellipse $a = 15$, $b = 10$ (fig. 5). Hyperbole BB'.

Points étudiés.	Ordonnées.	Abscisses.	h .	I mesuré.	I calculé.
B	8	9	B'B = 8,297	6,14	6,13
D	6	8,19	B'D = 6,144	4,31	4,37
E	4	7,56	B'D = 4,044	2,77	2,79

TABLEAU XX.

Ellipse $a = 15$, $b = 10$ (fig. 5). Hyperbole C'C.

C	6	12	C'C = 6,299	4,89	4,85
G	4	11,08	C'G = 4,098	2,77	2,75
F	2	10,49	C'F = 2,088	1,70	1,76

TABLEAU XXI.

Cercle de rayon 12,5 (fig. 2). Hyperbole AA'.

A	10	7,50	AA' = 10,179	7,15	7,13
B	8	6,94	A'B = 8,013	5,39	5,33
C	6	6,49	A'C = 6,053	3,82	3,80
D	4	6,09	A'D = 4,014	»	»

TABLEAU XXII.

Cercle de rayon 12,5 (fig. 2). Hyperbole G'G.

G	8	9,59	G'G = 8,179	6,00	6,04
F	6	8,97	G'F = 6,104	4,25	4,29
D	4	8,48	G'D = 4,045	2,78	2,79

TABLEAU XXIII.

Cercle de rayon 12,5 (fig. 2). Hyperbole G'G.

H	6	10,96	H'H = 6,119	4,77	4,72
K	4	10,38	H'K = 4,043	2,75	2,79
L	2	10,01	H'L = 2,034	1,07	1,00

TABLEAU XXIV.

Cercle de rayon 10 (fig. 3). Hyperbole AA'.

A	8	6	A'B = 8,140	6,08	6,02
B	6	5,46	A'B = 6,071	4,23	4,28
C	4	5,04	A'C = 4,027	2,71	2,78

TABLEAU XXV.

Cercle de rayon 10 (*fig.* 3). Hyperbole EE'.

Points étudiés.	Ordonnées.	Abscisses.		I mesuré.	I calculé.
E	6	»	EE'	4,75	4,71
F	4	»	E'F	2,67	2,71
G	2	»	E'G	»	»

Ainsi donc les lignes où se retrouve la loi de distribution donnée par la formule

$$(1) \quad I = A (a^h - a^{-h})$$

sont bien les hyperboles que j'ai définies plus haut. On sait que la formule (1) représente la loi de distribution du magnétisme sur un barreau mince et de longueur finie; elle a été donnée par Biot à la suite des recherches expérimentales de Coulomb.

Depuis, Green l'a retrouvée comme conséquence de sa théorie mathématique, et les récents travaux de M. Jamin la rendent définitive.

Je me propose maintenant de rechercher les lois qui président aux variations de A et α , à mesure que l'on s'éloigne des axes des aimants. On voit déjà par les nombres des tableaux précédents que α est d'autant plus grand que le filet est plus long, et A est au contraire d'autant plus petit; mais l'expérience prouve que ces deux coefficients tendent vers une limite quand la longueur de l'aimant croît indéfiniment, et M. Jamin en a récemment donné la valeur pour des aciers déterminés.

A mesure que le filet hyperbolique diminue, α diminue et tend vers l'unité et A vers l'infini. On sait que M. Jamin, en augmentant l'épaisseur des aimants, a pu en construire dans lesquels α atteignait une valeur égale à l'unité pour des longueurs finies de l'aimant: c'est l'aimant normal ou mieux l'aimant saturé.

Maintenant que l'on sait dans quel sens varient A et α , je me propose d'établir les lois précises de leurs variations dans les aimants elliptiques et circulaires.

Lois des variations des coefficients A et a.

1° Les tensions I du magnétisme libre aux extrémités de chaque filet hyperbolique sont données par la formule

$$I_1 = \frac{L}{\frac{\pi}{2}} \operatorname{arc tang} \frac{h_1}{k} = A(a^{h_1} - a^{-h_1}).$$

Dans cette formule, h_1 est la longueur de l'arc d'hyperbole rectifié, mesuré depuis la ceinture moyenne jusqu'au bord de la plaque. L représente la tension à l'extrémité d'un filet de longueur infinie; dans toutes mes expériences, cette constante s'est trouvée égale à 17,1011.

Quant au coefficient k , il n'est absolument que *pour une plaque donnée*; mais ses variations sont si faibles avec les plaques que j'ai étudiées, qu'il est impossible d'en donner la loi.

C'est précisément une question dont je m'occupe : en étudiant des aimants dont les dimensions transversales prennent des valeurs de plus en plus petites, j'ai déjà reconnu que k diminuait en même temps que les dimensions transversales des aimants.

Ainsi la formule

$$(\alpha) \quad I_1 = \frac{L}{\frac{\pi}{2}} \operatorname{arc tang} \frac{h_1}{k},$$

qui convient parfaitement pour une plaque unique, devient empirique quand on essaye de l'étendre à des plaques de formes et de dimensions diverses.

Pour les plaques dont il est question dans ce Mémoire, k oscille très-peu autour de la moyenne 13,213.

2° Si l'on mesure les aires comprises entre les courbes $I = A(a^h - a^{-h})$ et les axes de coordonnées, ces aires

$$\int_0^{h_1} A(a^h - a^{-h}) = \frac{A}{L_a} (a^{h_1} + a^{-h_1} - 2)$$

représentent la totalité du magnétisme libre répandu sur chaque filet; si, dis-je, on mesure ces aires, on trouve qu'elles sont toujours propor-

tionnelles aux carrés des tensions I du magnétisme libre à l'extrémité de chaque filet, ce qui conduit à la formule

$$(\beta) \quad \frac{A}{L_a} (a^{h_1} + a^{-h_1} - 2) = CI_1^2 = CA^2 (a^{h_1} - a^{-h_1})^2.$$

Dans toutes mes expériences, C a conservé la valeur 0,6491, de sorte que l'on a finalement

$$\frac{a^{h_1} + a^{-h_1} - 2}{L_a} = 0,6491 + A (a^{h_1} - a^{-h_1}).$$

Les deux formules (α) et (β) déterminent complètement les valeurs de A et a qui correspondent à un filet quelconque de longueur h_1 .

Ici une remarque est nécessaire; on a vu que dans le cercle la loi de distribution sur un rayon quelconque est donnée par la formule

$$I = A(a^r - a^{-r});$$

il semblerait donc que les rayons obéiraient à la loi de distribution trouvée par Coulomb, et qu'il n'y aurait pas de raison pour donner aux hyperboles qui viennent d'être étudiées le nom de *filets magnétiques* plutôt que de ne pas étendre aussi cette dénomination aux diamètres des cercles.

Il est facile de voir qu'il existe une différence capitale entre les lois de distribution sur les hyperboles en question, et que je nommerai désormais lignes *homomagnétiques*, et les diamètres.

En effet, sur tous les diamètres des cercles, a est constant et A ne varie que suivant une loi qui n'est pas la même que celles des variations de A sur les hyperboles, mais qui s'en déduit. Les hyperboles homomagnétiques jouissent d'une propriété essentielle, caractéristique des filets magnétiques : c'est que la totalité du magnétisme répandu sur chacune d'elles est pour un même acier proportionnelle au carré de la tension existant à son extrémité.

Cette loi est très-importante : j'ai tout lieu d'espérer de pouvoir l'étendre aux autres aimants, et elle ne se retrouve nullement sur les diamètres des cercles aimantés.

Cela posé, je donne deux séries de tableaux : dans la première, formée

des cinq premiers, on trouve la vérification de la formule

$$I_1 = \frac{L}{\pi} \frac{\pi}{2} \text{ arc tang } \frac{h_1}{k}.$$

Dans les cinq tableaux qui suivent, se trouvent les aires calculées par la formule

$$(\beta) \quad \text{aire} = 0,6491 I_1^2,$$

et en regard les aires données par la formule

$$(\gamma) \quad \text{aire} = \frac{A}{L_a} (\alpha^{h_1} + \alpha^{-h_1} - 2).$$

Cercle de rayon 15.

Longueur de l'hyperbole rectifiée.	Abscisse de l'extrémité de l'hyperbole.	Ordonnée de l'extrémité de l'hyperbole.	Tensions extrêmes	
			mesurées.	calculées.
15	0	15	9,25	9,25
14,094	5,38	14	8,91	8,90
12,195	9	12	8,08	8,05
10,219	6,18	10	7,16	7,16
8,184	12,68	8	6,05	6,03
6,111	13,74	6	4,71	4,71

Ellipse $a = 10$, $b = 15$.

15	0	15	9,31	9,25
10,095	7,45	10	7,17	7,10
6,074	9,16	6	4,60	4,58

Ellipse $a = 15$, $b = 10$.

10	0	10	7,00	7,05
8,297	9	8	6,14	6,10
6,299	12	6	4,89	4,83

Cercle de rayon 10.

10	0	10	7,11	7,05
8,140	6	8	6,08	6,01
6,105	8	6	4,75	4,71

Cercle de rayon 12,5.

Longueur de l'hyperbole rectifiée.	Abscisse de l'extrémité de l'hyperbole.	Ordonnée de l'extrémité de l'hyperbole.	Tensions extrêmes	
			mesurées.	calculées.
12,5	0	12,5	8,28	8,22
10,179	7,50	10	7,15	7,14
8,179	9,59	8	6,09	6,00
6,119	10,96	6	4,77	4,71

Cercle de rayon 15.

Longueur de l'hyperbole rectifiée.	Aires d'après la formule β .	Aires d'après la formule γ .
15	55,55	55,55
14,094	51,84	51,41
12,195	42,42	42,37
10,219	33,03	33,32
8,184	23,66	23,75
6,111	14,39	14,99

Ellipse $a = 10$, $b = 15$.

15	55,65	56,26
10,095	32,91	33,00
6,074	14,01	13,73

Ellipse $a = 15$, $b = 10$.

10	32,10	31,80
8,297	24,22	24,15
6,299	15,11	15,14

Cercle de rayon 12,1.

12,5	44,23	44,50
10,179	33,39	33,19
8,179	23,42	23,36
6,119	14,41	14,99

Cercle de rayon 10.

10	33,00	33,81
8,140	24,29	24,14
6,105	14,39	14,99

Des lignes isodynamiques dans les aimants circulaires et elliptiques.

On vient de voir dans les pages précédentes que, pour résoudre d'une façon simple le problème de la distribution du magnétisme libre dans les aimants circulaires et elliptiques, il a suffi d'introduire la considération de *coordonnées curvilignes* hyperboliques, que je nomme *lignes homomagnétiques*.

Mais ce n'est pas là, à beaucoup près, le seul avantage de ces lignes; elles donnent en outre, avec la plus grande facilité, les équations des courbes isodynamiques, qu'il ne serait peut-être pas possible d'obtenir par toute autre considération.

En effet, si l'on cherche à représenter par une équation algébrique les lignes isodynamiques de l'aimant circulaire, on est arrêté par des difficultés aussi grandes que celles qui se présentent quand on cherche une loi simple exprimant la distribution du magnétisme, suivant des ordonnées rectilignes perpendiculaires à la ligne neutre; mais, si l'on vient à prendre pour ordonnées curvilignes les hyperboles définies plus haut, le problème se réduit à une simplicité inespérée.

En effet, sur les cercles et les ellipses les lignes isodynamiques sont les courbes transcendantes représentées par l'équation

$$(p) \quad \frac{x^2}{r^2 + b^2} + \frac{h^2}{b^2} = 1.$$

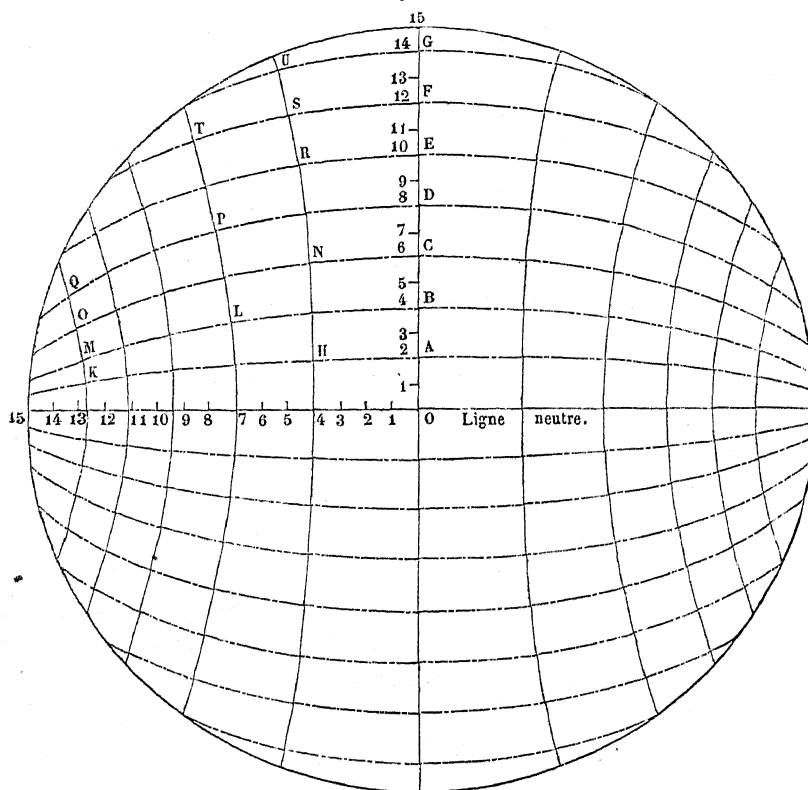
x est une abscisse rectiligne ordinaire comptée parallèlement à la ligne neutre, h est une ordonnée curviligne comptée sur l'hyperbole homomagnétique, depuis le point étudié jusqu'à la ceinture moyenne, r est, dans le cas du cercle, le rayon et dans les ellipses la moitié de la ligne neutre, b est la distance du centre de la plaque au point où la courbe isomagnétique coupe l'axe de l'aimant perpendiculaire à la ligne neutre.

Je termine ce travail en y ajoutant :

1° La *fig. 6*, figurant un cercle de 30 centimètres de diamètre, où la ligne neutre est indiquée en toutes lettres, les hyperboles en traits pleins et les lignes isodynamiques en ponctué mixte.

2° Un tableau contenant les nombres correspondant à dix-neuf points pris sur les régions les plus diverses d'un quart de l'aimant, ces points

Fig. 6.



sont marqués par des lettres sur la figure. En regard de chacune de ces lettres se trouvent les nombres qui donnent les tensions magnétiques d'une part, et de l'autre le résultat de la substitution des coordonnées de chacun de ces points dans le premier membre de l'équation

$$(p) \quad \frac{x^2}{r^2 + b^2} + \frac{h^2}{b^2} = 1.$$

Ce résultat diffère assez peu de l'unité pour que les différences puissent rentrer dans les erreurs dues à l'expérience et au calcul toujours approximatif des coordonnées curvilignes.

Enfin, j'ai réuni dans une accolade les points qui se trouvent sur une même ligne isomagnétique.

Tensions.	Points étudiés.	Abscisses de ces points.	Ordonnées hyperboliques de ces points.	Résultats de la substitution de x et de h dans le premier membre de l'équation (p).
$\left\{ \begin{array}{l} 0,75 \\ 0,77 \\ 0,73 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} A \\ H \\ K \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 4,000 \\ 12,802 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 2 \\ 1,892 \\ 1,101 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 1,000 \\ 0,959 \\ 1,018 \end{array} \right.$
$\left\{ \begin{array}{l} 1,54 \\ 1,60 \\ 1,60 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} B \\ L \\ M \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 7,263 \\ 13,005 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 4 \\ 3,415 \\ 2,001 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 1,000 \\ 0,946 \\ 0,975 \end{array} \right.$
$\left\{ \begin{array}{l} 2,49 \\ 2,58 \\ 2,51 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} C \\ N \\ O \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 4,237 \\ 13,270 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 6 \\ 5,712 \\ 3,218 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 1,000 \\ 0,974 \\ 0,963 \end{array} \right.$
$\left\{ \begin{array}{l} 3,51 \\ 3,53 \\ 3,51 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} D \\ P \\ Q \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 7,756 \\ 13,404 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 8 \\ 7,129 \\ 4,554 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 1,000 \\ 1,002 \\ 0,945 \end{array} \right.$
$\left\{ \begin{array}{l} 4,80 \\ 4,90 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} E \\ R \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 4,451 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 10 \\ 9,713 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 1,000 \\ 1,005 \end{array} \right.$
$\left\{ \begin{array}{l} 6,25 \\ 6,30 \\ 6,31 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} F \\ S \\ T \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 4,898 \\ 8,537 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 12 \\ 11,514 \\ 10,580 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 1,000 \\ 0,985 \\ 0,974 \end{array} \right.$
$\left\{ \begin{array}{l} 8,12 \\ 8,12 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} G \\ U \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 5,255 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 14 \\ 13,412 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 1,000 \\ 0,983 \end{array} \right.$

CONCLUSION.

Le problème de la distribution du magnétisme libre dans les aimants circulaires et elliptiques est résolu par les lois dont la recherche fait l'objet de cette étude.

Cependant je ne puis quitter la question qui vient de m'occuper sans remarquer que la marche que j'ai suivie peut être susceptible de généralisation. On peut, pour d'autres aimants que les circulaires et les elliptiques, rechercher les lignes homomagnétiques, et trouver l'explication de ces phénomènes de distribution si peu étudiés et connus sous le nom d'*influence des bords et des angles*.

Une remarque analogue peut être faite au sujet des lignes isodynamiques : remarquons que, dans le cas des ellipses, ces courbes seraient

toutes des ellipses homofocales, ayant pour foyers les deux extrémités de la ligne neutre, si l'ordonnée hyperbolique h était une ordonnée rectiligne y .

Ainsi une relation intime existe entre la forme de la courbe algébrique qui termine l'aimant elliptique et celle des courbes transcendantes qui sont les lignes isodynamiques, à la condition de remplacer les ordonnées rectilignes par des ordonnées curvilignes comptées sur les hyperboles homomagnétiques.

Il ne serait peut-être pas téméraire d'espérer pouvoir résoudre, par des considérations analogues, le problème de la distribution du magnétisme sur des plaques d'acier, terminées par des courbes de formes diverses, mais géométriquement définies.

