ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

BOUQUET

Note sur le calcul des accélérations des divers ordres dans le mouvement sur une courbe gauche

Annales scientifiques de l'É.N.S. 2e série, tome 3 (1874), p. 147-150
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1874_2_3__147_0>

NOTE

SUR LE

CALCUL DES ACCÉLÉRATIONS DES DIVERS ORDRES

DANS LE MOUVEMENT D'UN POINT SUR UNE COURBE GAUCHE,

PAR M. BOUQUET,

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS.

Une courbe gauche est complétement déterminée, abstraction faite de sa position dans l'espace, lorsqu'on donne les valeurs du rayon de courbure et du rayon de torsion, en un point quelconque M de cette courbe, en fonction de l'arc $OM = s$ compté à partir d'une origine O prise sur la courbe. Supposons qu'un point mobile parcoure cette courbe et que l'on connaisse l'expression de l'arc s en fonction du temps; il est clair que les valeurs des accélérations des divers ordres, en chaque point de la courbe, sont également déterminées. L'objet de cette Note est d'exposer une méthode simple pour calculer ces accélérations à l'aide des données indiquées.

Imaginons, pour un instant, les points de la courbe rapportés à trois axes de coordonnées rectangulaires, disposés de façon que, pour un observateur placé sur OZ, la rotation de OX vers OY s'effectue dans le sens direct. Menons en un point quelconque M de la courbe: 1° la tangente MT, dans le sens où l'arc s va en croissant; 2° la normale MN, qui passe au centre de courbure; 3° enfin une normale MN_1 au plan osculateur, et dans une direction telle que, pour un observateur placé sur MN_1, la rotation de MT vers MN ait lieu dans le sens direct. Soient (α, β, γ), $(\alpha', \beta', \gamma')$, $(\alpha'', \beta'', \gamma'')$ les cosinus des angles que forment avec les trois axes les directions MT, MN, MN_1, ρ le rayon de courbure, ρ_1 le rayon de torsion affecté du signe $+$ ou du signe $-$, suivant que la droite $M'N'_1$, relative à un point M' voisin de M et déterminé par un accroissement positif de l'arc, fait avec MN un angle aigu ou obtus. On sait que les neuf cosinus vérifient les relations

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d\alpha}{ds} &= \frac{\alpha'}{\rho}, \\ \frac{d\beta}{ds} &= \frac{\beta'}{\rho}, \\ \frac{d\gamma}{ds} &= \frac{\gamma'}{\rho'}, \end{aligned}\right. \qquad (2)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d\alpha''}{ds} &= \frac{\alpha'}{\rho_1}, \\ \frac{d\beta''}{ds} &= \frac{\beta'}{\rho_1}, \\ \frac{d\gamma''}{ds} &= \frac{\gamma'}{\rho_1}, \end{aligned}\right. \qquad (3)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d\alpha'}{ds} &= -\frac{\alpha}{\rho} - \frac{\alpha''}{\rho_1}, \\ \frac{d\beta'}{ds} &= -\frac{\beta}{\rho} - \frac{\beta''}{\rho_1}, \\ \frac{d\gamma'}{ds} &= -\frac{\gamma}{\rho} - \frac{\gamma''}{\rho_1}, \end{aligned}\right.$$

très-utiles dans l'étude des courbes gauches.

Différentions plusieurs fois de suite, par rapport à s, ces formules, et, après chaque différentiation, remplaçons dans les seconds membres les dérivées des cosinus par les valeurs précédentes. Puisque les cosinus α, β, γ sont égaux respectivement à $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$, il est évident que l'on obtiendra pour $\frac{d^n x}{ds^n}$, $\frac{d^n y}{ds^n}$, $\frac{d^n z}{ds^n}$ des expressions de la forme suivante :

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d^n x}{ds^n} &= L_n \alpha + L'_n \alpha' + L''_n \alpha'', \\ \frac{d^n y}{ds^n} &= L_n \beta + L'_n \beta' + L''_n \beta'', \\ \frac{d^n z}{ds^n} &= L_n \gamma + L'_n \gamma' + L''_n \gamma'', \end{aligned}\right.$$

L_n, L'_n, L''_n renfermant ρ et ses dérivées jusqu'à l'ordre $n-2$, ρ_1 et ses dérivées jusqu'à l'ordre $n-3$.

Remarquons que, si l'on prend pour axes les droites analogues à MT, MN, MN_1 relatives au point O, il faudra, pour obtenir les valeurs de $\frac{d^n x}{ds^n}$, $\frac{d^n y}{ds^n}$, $\frac{d^n z}{ds^n}$ en ce point, faire dans les formules précédentes $\alpha = \beta' = \gamma'' = 1$, $\alpha' = \alpha'' = \beta = \beta'' = \gamma = \gamma' = 0$, puis remplacer dans L_n, L'_n, L''_n la variable s par zéro; d'où il résulte que, si l'on développe les coordonnées x, y, z suivant les puissances de l'arc, on aura

$$\begin{aligned} x &= (L_1)_0 \frac{s}{1} + (L_2)_0 \frac{s^2}{1.2} + (L_3)_0 \frac{s^3}{1.2.3} + (L_4)_0 \frac{s^4}{1.2.3.4} + \ldots, \\ y &= (L'_1)_0 \frac{s}{1} + (L'_2)_0 \frac{s^2}{1.2} + (L'_3)_0 \frac{s^3}{1.2.3} + (L'_4)_0 \frac{s^4}{1.2.3.4} + \ldots, \\ z &= (L''_1)_0 \frac{s}{1} + (L''_2)_0 \frac{s^2}{1.2} + (L''_3)_0 \frac{s^3}{1.2.3} + (L''_4)_0 \frac{s^4}{1.2.3.4} + \ldots; \end{aligned}$$

les valeurs des fonctions L jusqu'au quatrième ordre étant

$$
\begin{array}{llll}
L_1 = 1, & L_2 = 0, & L_3 = -\dfrac{1}{\rho^2}, & L_4 = \dfrac{3}{\rho^3}\dfrac{d\rho}{ds}, \\
L'_1 = 0, & L'_2 = \dfrac{1}{\rho}, & L'_3 = -\dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{d\rho}{ds}, & L'_4 = -\dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{d^2\rho}{ds^2} + \dfrac{2}{\rho^3}\left(\dfrac{d\rho}{ds}\right) - \dfrac{1}{\rho^3} - \dfrac{1}{\rho\rho_1^2}, \\
L''_1 = 0, & L''_2 = 0, & L''_3 = -\dfrac{1}{\rho\rho_1}, & L''_4 = \dfrac{2}{\rho^2\rho_1}\dfrac{d\rho}{ds} + \dfrac{1}{\rho\rho_1^2}\dfrac{d\rho_1}{ds}.
\end{array}
$$

L'expression de z montre que, pour une valeur positive très-petite de s, le signe de cette coordonnée est contraire à celui de ρ_1. Or, dans le voisinage d'un point quelconque, on peut assimiler l'arc de la courbe à un arc d'hélice; on en conclut que la valeur de ρ_1 en un point est positive ou négative, suivant que l'arc de la courbe, dans le voisinage de ce point, est *dextrorsum* ou *sinistrorsum*.

Prenons maintenant les formules

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{dx}{ds}v, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{dy}{ds}v, \quad \frac{dz}{dt} = \frac{dz}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{dz}{ds}v,$$

et différentions chacune d'elles plusieurs fois de suite par rapport à t; on a

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2x}{ds^2}v^2 + \frac{dx}{ds}\frac{dv}{dt},$$

$$\frac{d^3x}{dt^3} = \frac{d^3x}{ds^3}v^3 + 3\frac{d^2x}{ds^2}v\frac{dv}{dt} + \frac{dx}{ds}\frac{d^2v}{dt^2},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots;$$

de même,

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2y}{ds^2}v^2 + \frac{dy}{ds}\frac{dv}{dt},$$

$$\dots\dots\dots\dots,$$

et

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{d^2z}{ds^2}v^2 + \frac{dz}{ds}\frac{dv}{dt};$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

Si l'on remplace dans les seconds membres les dérivées $\frac{d^px}{ds^p}$, $\frac{d^py}{ds^p}$, $\frac{d^pz}{ds^p}$ par leurs valeurs (4), on obtient pour $\frac{d^nx}{dt^n}$, $\frac{d^ny}{dt^n}$, $\frac{d^nz}{dt^n}$ des expressions de la forme

$$(5) \qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d^n x}{dt^n} &= G_n\alpha + G'_n\alpha' + G''_n\alpha'', \\ \frac{d^n y}{dt^n} &= G_n\beta + G'_n\beta' + G''_n\beta'', \\ \frac{d^n z}{dt^n} &= G_n\gamma + G'_n\gamma' + G''_n\gamma'', \end{aligned}\right.$$

dans lesquelles G_n, G'_n, G''_n renferment ρ et ses dérivées par rapport à s jusqu'à l'ordre $n-2$, ρ_1 et ses dérivées par rapport à s jusqu'à l'ordre $n-3$, enfin v et ses dérivées par rapport à t jusqu'à l'ordre $n-1$. Supposons, comme précédemment, que les axes soient les droites MT, MN, MN_1 relatives au point O, on aura

$$\left(\frac{d^n x}{dt^n}\right)_0 = (G_n)_0, \quad \left(\frac{d^n y}{dt^n}\right)_0 = (G'_n)_0, \quad \left(\frac{d^n z}{dt^n}\right)_0 = (G''_n)_0;$$

c'est-à-dire que G_n, G'_n, G''_n sont les projections de l'accélération de l'ordre $n-1$ sur les trois droites MT, MN, MN_1. Voici les valeurs de ces projections pour les trois premiers ordres :

$$1^{\text{er}} \text{ ordre.} \left\{\begin{aligned} &\frac{dv}{dt}, \\ &\frac{v^2}{\rho}, \\ &0; \end{aligned}\right. \qquad 2^{\text{e}} \text{ ordre.} \left\{\begin{aligned} &\frac{d^2 v}{dt^2} - \frac{v^3}{\rho^2}, \\ &\frac{3}{\rho} v \frac{dv}{dt} - \frac{1}{\rho^2}\frac{d\rho}{ds} v^3, \\ &-\frac{1}{\rho\rho_1} v^3; \end{aligned}\right.$$

$$3^{\text{e}} \text{ ordre.} \left\{\begin{aligned} &\frac{d^3 v}{dt^3} - \frac{6}{\rho^2} v^2 \frac{dv}{dt} + \frac{3}{\rho^3}\frac{d\rho}{ds} v^4, \\ &\frac{4}{\rho} v \frac{d^2 v}{dt^2} + \frac{3}{\rho}\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 - \frac{6}{\rho^2}\left(\frac{d\rho}{ds}\right) v^2 \frac{dv}{dt} + \left[-\frac{1}{\rho^2}\frac{d^2\rho}{ds^2} + \frac{2}{\rho^3}\left(\frac{d\rho}{ds}\right)^2 - \frac{1}{\rho^3} - \frac{1}{\rho\rho_1^2}\right] v^4, \\ &-\frac{6}{\rho\rho_1} v^2 \frac{dv}{dt} + \left[\frac{2}{\rho^2\rho_1}\frac{d\rho}{ds} + \frac{1}{\rho\rho_1^2}\frac{d\rho_1}{ds}\right] v^4. \end{aligned}\right.$$