ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

H. DURRANDE

Essai sur le déplacement d'une figure de forme variable

Annales scientifiques de l'É.N.S. 2e série, tome 2 (1873), p. 81-120
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1873_2_2__81_0>

ESSAI

SUR LE

DÉPLACEMENT D'UNE FIGURE

DE FORME VARIABLE,

PAR M. DURRANDE,

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE RENNES.

INTRODUCTION.

Je me propose d'étudier le déplacement d'une figure dont les diverses parties peuvent se déformer suivant une loi donnée, mais telle cependant, que deux positions de la figure puissent être considérées comme deux figures homographiques. Le mouvement d'un corps solide invariable est un cas particulier de celui que je traite; celui d'un corps naturel en est un également, si l'on suppose les déformations très-petites.

Après avoir établi les formules de la transformation homographique, et les avoir adaptées au cas d'une figure limitée et pour un déplacement infiniment petit, j'exprime les paramètres généraux de la transformation en fonction de nouveaux paramètres, dont l'introduction permet de donner des notions claires du mouvement, dès que la loi de déformation est connue.

La loi de la variation de la déformation autour d'un point est donnée par une certaine surface du second degré que je nomme, à cause de cela, et pour abréger, la *déformatrice;* cette surface joue un rôle trèsimportant dans toute cette théorie, et c'est par rapport aux axes principaux de cette surface, pris comme axes coordonnés, que les composantes de la vitesse ont leur expression la plus simple. Je donne également la loi de la vitesse totale et de ses éléments, et leur représentation géométrique.

La discussion des expressions des vitesses composantes conduit à distinguer trois cas principaux dans le déplacement de la figure. Si le déterminant formé au moyen des coefficients des variables dans les expressions des vitesses n'est pas nul, il y a alors un point sans vitesse pendant le temps dt; je nomme ce point *centre de vitesse*. Dans ce cas, en effet, le mouvement de tout point de la figure peut être considéré comme résultant d'une déformation (dilatation ou contraction) rayonnant du centre, et d'un mouvement angulaire du rayon vecteur. Si le déterminant en question est nul, il peut se faire que les équations obtenues en égalant les vitesses composantes à zéro soient incompatibles ou rentrent les unes dans les autres. Dans le premier cas, il n'y a aucun point sans vitesse : tel est le cas du mouvement d'une figure de forme invariable; si l'une des équations est la conséquence des deux autres, il y a une ligne droite dont tous les points ont des vitesses nulles, et que je nomme *axe de vitesse*.

Après avoir donné une idée de la manière la plus simple de concevoir le mouvement infiniment petit d'un point quelconque de la figure, j'aborde la question de la déformation d'une surface; on trouve immédiatement une surface auxiliaire qui coupe la surface donnée suivant sa caractéristique, et qui n'est autre que le lieu des caractéristiques de toutes les surfaces qui, à l'instant que l'on considère, font partie d'une famille de surfaces homothétiques. Il y a, en outre, une courbe, que je nomme *courbe adjointe*, qui perce la surface proposée en tous les points dont les trajectoires sont normales à la surface, et qui convient également à toutes les surfaces homothétiques de la même famille.

L'étude particulière du mouvement d'un plan fournit un grand nombre de théorèmes remarquables, et qui ont été déjà rencontrés par M. Chasles dans son beau Mémoire sur le déplacement d'une figure invariable [1], et reproduits par différents géomètres, et notamment

[1] *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, juin 1843.

par M. Mannheim qui en a fait le point de départ d'une étude sur le déplacement d'une figure invariable assujettie à certaines conditions [1]. On remarquera une propriété assez intéressante du *foyer* (cinématique) et de la caractéristique d'un plan mobile qui, dans le cas d'une figure de forme invariable, deviennent le *foyer* et la *directrice* d'une série de coniques, lieux des points du plan mobile dont les trajectoires sont également inclinées sur la normale au plan.

Ainsi que je l'ai montré dans une Note présentée à l'Académie des Sciences [2], toutes les relations entre les vitesses des divers points d'un plan ou d'une droite me paraissent dériver très-simplement de l'expression de la vitesse estimée dans une certaine direction en fonction des composantes de la vitesse et des cosinus des angles de la direction donnée avec les axes. Cette expression, d'où l'on déduit immédiatement l'existence du *plan conjugué* et de la *droite adjointe* à la direction donnée, conduit surtout, d'une manière très-simple, à la solution de cette question, la plus importante peut-être de toute cette théorie : *Déterminer la nature et les paramètres du déplacement lorsqu'on connaît les conditions nécessaires à cette détermination.*

Je donne la solution de cette question pour le cas d'une figure de forme invariable lorsqu'on connaît les vitesses de trois points en grandeur et en direction, et, dans le cas général, lorsqu'on connaît les vitesses de quatre points.

Je considère ensuite un autre genre de conditions; je cherche les formules propres à exprimer les déformations d'une surface réglée à génératrices articulées. On a constamment sous les yeux des exemples de ce mode de déformation, et l'on pourra peut-être tirer parti de la méthode que j'indique pour étudier d'une manière beaucoup plus générale les déformations des surfaces à génératrices rectilignes.

Si j'ai tenté ce premier essai, que l'on pourra trouver un peu dénué d'intérêt au point de vue des applications de la Mécanique, et regarder comme un simple exercice géométrique, c'est que je suis de l'avis de ceux qui pensent qu'il y a tout profit à étudier à fond le mouvement indépendamment de ses causes. Je chercherai, dans un second travail,

---

[1] *Journal de l'École Polytechnique*, XXVI^e cahier.

[2] *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 6 mai 1872.

s'il n'y a pas quelques conséquences intéressantes à tirer de celui-ci au point de vue de la Dynamique.

I. — *Formules de transformation.*

1. *Formules de la transformation homographique.* — Considérons une figure variable à la fois en grandeur et en position, avec cette seule restriction que deux positions quelconques se correspondent point par point, ou, en d'autres termes, que les coordonnées (ξ, η, ζ) d'un point de l'une puissent s'exprimer en fractions ayant pour termes des fonctions linéaires des coordonnées (x, y, z) du point correspondant de l'autre, et réciproquement. On aura donc les relations suivantes :

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} \xi &= \frac{Ax + By + Cz + D}{\alpha x + \beta y + \gamma z + 1}, \\ \eta &= \frac{A'x + B'y + C'z + D'}{\alpha x + \beta y + \gamma z + 1}, \\ \zeta &= \frac{A''x + B''y + C''z + D''}{\alpha x + \beta y + \gamma z + 1}. \end{aligned}\right.$$

Dans le cas dont nous allons nous occuper, aucun point à distance finie (x, y, z) ne saurait correspondre à un point (ξ, η, ζ) à l'infini, ce qui exige que le dénominateur commun des valeurs de ces dernières coordonnées se réduise à une constante, sans quoi tout point situé dans le plan

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + 1 = 0$$

correspondrait à un point (ξ, η, ζ) à l'infini.

Les formules (1) deviennent donc

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} \xi &= Ax + By + Cz + D, \\ \eta &= A'x + B'y + C'z + D', \\ \zeta &= A''x + B''y + C''z + D''. \end{aligned}\right.$$

En désignant par Δx, Δy, Δz les différences $\xi - x$, $\eta - y$, $\zeta - z$, qui exprimient les projections du déplacement fini du point (x, y, z), il vient

$$(3)\quad \begin{cases} \Delta x = (A - 1)x + By + Cz + D, \\ \Delta y = A'x + (B' - 1)y + C'z + D', \\ \Delta z = A''x + B''y + (C'' - 1)z + D''. \end{cases}$$

Les coefficients A, B, C, A',... sont des constantes quand on passe d'un point à un autre de la figure; mais ils varient avec le temps.

Comme je vais m'occuper uniquement du déplacement infiniment petit de la figure, je pose

$$\begin{array}{llll} A - 1 = da, & B = db, & C = dc, & D = du, \\ A' = da', & B' - 1 = db', & C' = dc', & D' = du', \\ A'' = da'', & B'' = db'', & C'' - 1 = dc'', & D'' = du''; \end{array}$$

alors les relations (3) deviennent

$$(4)\quad \begin{cases} dx = x\,da + y\,db + z\,dc + du, \\ dy = x\,da' + y\,db' + z\,dc' + du', \\ dz = x\,da'' + y\,db'' + z\,dc'' + du''. \end{cases}$$

Les considérations qui font l'objet de ce numéro ont déjà servi à M. Picart, professeur au lycée Charlemagne, de point de départ pour un travail sur le déplacement d'un solide invariable, publié dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* (1). J'ajouterai même que c'est la lecture de ce travail qui m'a donné l'idée de chercher les propriétés générales du mode de déformation exprimé par les formules (4).

2. *Introduction de nouvelles variables.* — Remplaçons les paramètres généraux de la transformation par d'autres qui mettent bien en évidence la relation entre la nature du mouvement et la loi de la déformation. Pour cela, soit ρ la distance qui sépare deux points (x, y, z), (x', y', z') de la figure au commencement de l'instant dt, et (α, β, γ) les angles de la direction ρ avec les axes coordonnés. On a

$$x - x' = \rho\cos\alpha, \quad y - y' = \rho\cos\beta, \quad z - z' = \rho\cos\gamma,$$

---

(1) *Nouvelles Annales*, 2e série, t. VI, p. 158.

d'où

$$dx - dx' = d\rho \cos\alpha + \rho\, d(\cos\alpha),$$
$$dy - dy' = d\rho \cos\beta + \rho\, d(\cos\beta),$$
$$dz - dz' = d\rho \cos\gamma + \rho\, d(\cos\gamma);$$

des formules (4) appliquées aux deux points (x, y, z), (x', y', z') on tirerait

$$\begin{aligned} dx - dx' &= (x - x')\,da + (y - y')\,db + (z - z')\,dc \\ &= \rho \cos\alpha\, da + \rho \cos\beta\, db + \rho \cos\gamma\, dc; \end{aligned}$$

d'où l'on conclut

$$d\rho \cos\alpha + \rho\, d(\cos\alpha) = \rho \cos\alpha\, da + \rho \cos\beta\, db + \rho \cos\gamma\, dc,$$

avec deux autres équations analogues.

Si, par le centre d'une sphère de rayon égal à l'unité, nous menons deux droites respectivement parallèles aux deux positions infiniment voisines de ρ, et si nous désignons par $d\sigma$ l'arc de grand cercle compris entre ces deux droites, et par ξ, η, ζ les angles de $d\sigma$ avec les axes, nous aurons

$$d(\cos\alpha) = d\sigma \cos\xi, \quad d(\cos\beta) = d\sigma \cos\eta, \quad d(\cos\gamma) = d\sigma \cos\zeta,$$

et les dernières équations trouvées prendront la forme

$$\frac{d\rho}{\rho} \cos\alpha + d\sigma \cos\xi = \cos\alpha\, da + \cos\beta\, db + \cos\gamma\, dc;$$

$\frac{d\rho}{\rho}$ est ce que l'on pourrait appeler le coefficient linéaire de la déformation dans la direction (α, β, γ) et relativement au temps dt. Posons

$$\frac{d\rho}{\rho} = \varepsilon\, dt;$$

faisons, en outre,

$$d\sigma = \theta\, dt,$$

et alors les relations ci-dessus prennent définitivement la forme

$$(5)\quad \begin{cases} \varepsilon\cos\alpha + \theta\cos\xi = \dfrac{da}{dt}\cos\alpha + \dfrac{db}{dt}\cos\beta + \dfrac{dc}{dt}\cos\gamma, \\ \varepsilon\cos\beta + \theta\cos\eta = \dfrac{da'}{dt}\cos\alpha + \dfrac{db'}{dt}\cos\beta + \dfrac{dc'}{dt}\cos\gamma, \\ \varepsilon\cos\gamma + \theta\cos\zeta = \dfrac{da''}{dt}\cos\alpha + \dfrac{db''}{dt}\cos\beta + \dfrac{dc''}{dt}\cos\gamma. \end{cases}$$

ε est une vitesse de déformation linéaire, mais rapportée à l'unité de longueur; θ est une vitesse angulaire qui exprime le changement de direction de la distance ρ pendant le temps dt.

3. *Représentation géométrique de la variation de* ε. — *Déformatrice.* — *Expressions nouvelles des vitesses composantes.* — Nous allons déduire des équations (5) quelques relations entre les variables (ε, θ) et les paramètres de la transformation. En multipliant respectivement les deux membres des équations (5) par $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, et observant que les deux directions (α, β, γ), (ξ, η, ζ) sont rectangulaires, il vient, en faisant la somme,

$$(6)\quad \begin{cases} \varepsilon = \left(\dfrac{da}{dt}\right)\cos^2\alpha + \left(\dfrac{db}{dt}\right)\cos^2\beta + \left(\dfrac{dc}{dt}\right)\cos^2\gamma + \left(\dfrac{db}{dt} + \dfrac{da'}{dt}\right)\cos\beta\cos\alpha \\ \qquad + \left(\dfrac{da''}{dt} + \dfrac{dc}{dt}\right)\cos\alpha\cos\gamma + \left(\dfrac{dc'}{dt} + \dfrac{db''}{dt}\right)\cos\gamma\cos\beta. \end{cases}$$

Cette relation donne évidemment la loi de la variation de ε dans les diverses directions, et l'on peut rendre cette loi plus frappante par une représentation géométrique, qui se trouve d'ailleurs tout naturellement indiquée. Observons d'abord que la valeur de ε ne dépend absolument que de la direction (α, β, γ) et nullement de la position du point; on pourrait donc déjà énoncer ce théorème :

Théorème. — *Dans toute figure qui se déplace et se déforme de manière à rester homographique à elle-même, le coefficient de déformation linéaire est le même en tous les points de la figure pour une direction donnée.*

Portons, à partir d'un point quelconque pris pour origine et sur un rayon vecteur de direction (α, β, γ), une longueur R déterminée par la relation

$$R = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}};$$

on aura, pour les coordonnées du point ainsi déterminé,

$$x = R\cos\alpha, \quad y = R\cos\beta, \quad z = R\cos\gamma,$$

et, en éliminant α, β, γ entre ces expressions et l'équation (6), on aura

$$\begin{aligned} 1 = \left(\frac{da}{dt}\right)x^2 + \left(\frac{db'}{dt}\right)y^2 + \left(\frac{dc''}{dt}\right)z^2 \\ + \left(\frac{dc'}{dt} + \frac{db''}{dt}\right)yz + \left(\frac{dc}{dt} + \frac{da''}{dt}\right)zx + \left(\frac{da'}{dt} + \frac{db}{dt}\right)xy, \end{aligned}$$

équation d'une surface à centre du second ordre. Pour qu'elle soit rapportée à ses axes principaux, il faut que l'on ait

$$\frac{dc}{dt} + \frac{db''}{dt} = 0, \quad \frac{da''}{dt} + \frac{dc}{dt} = 0, \quad \frac{db}{dt} + \frac{da'}{dt} = 0;$$

de telle sorte que, si l'on fait

$$\begin{aligned} &\frac{da}{dt} = \varepsilon_1, && \frac{db'}{dt} = \varepsilon_2, && \frac{dc''}{dt} = \varepsilon_3, \\ &\frac{db''}{dt} = -\frac{dc'}{dt} = p, && \frac{dc}{dt} = -\frac{da''}{dt} = q, && \frac{da'}{dt} = -\frac{db}{dt} = r, \end{aligned}$$

l'équation de la surface du second ordre devient

$$\varepsilon_1 x^2 + \varepsilon_2 y^2 + \varepsilon_3 z^2 = 1 \tag{7}$$

avec la relation

$$\varepsilon = \varepsilon_1 \cos^2\alpha + \varepsilon_2 \cos^2\beta + \varepsilon_3 \cos^2\gamma, \tag{8}$$

et les expressions des vitesses composantes d'un point (x, y, z) deviennent, dans ce système d'axes,

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \varepsilon_1 x - ry + qz + \frac{du}{dt}, \\ \frac{dy}{dt} &= rx + \varepsilon_2 y - pz + \frac{du'}{dt}, \\ \frac{dz}{dt} &= -qx + pz + \varepsilon_3 z + \frac{du''}{dt}. \end{aligned} \right. \tag{9}$$

Pour abréger, je donnerai à la surface du second degré, qui exprime la loi de la déformation autour d'un point, le nom de *surface déformatrice*, ou, plus simplement, de *déformatrice*. ε_1, ε_2, ε_3 sont les vitesses principales de déformation; p, q, r sont les composantes d'une vitesse angulaire que, suivant l'usage, je désignerai par ω.

La relation (8) fournit le théorème suivant :

THÉORÈME. — *La somme de trois vitesses de déformation suivant trois directions rectangulaires est constante et égale à la somme des trois vitesses principales, qui forme ainsi un des invariants du déplacement.*

De plus, on peut remarquer que, si l'on multiplie les trois équations (9) respectivement par x, y, z, et qu'on les ajoute, on aura, en désignant par u_1, u_2, u_3 les composantes de la vitesse de translation de l'origine,

$$x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} + z\frac{dz}{dt} = \varepsilon_1 x^2 + \varepsilon_2 y^2 + \varepsilon_3 z^2 + u_1 x + u_2 y + u_3 z.$$

Or, v étant la vitesse totale du point, ρ son rayon vecteur, le premier membre est égal à

$$\rho v \cos(\widehat{v, \rho});$$

de sorte que la surface, qui a pour équation

$$\varepsilon_1 x^2 + \varepsilon_2 y^2 + \varepsilon_3 z^2 + u_1 x + u_2 y + u_3 z = c,$$

est le lieu géométrique des points de la figure pour lesquels

$$\rho v \cos(\widehat{v, \rho}) = c;$$

ce qui veut dire que *le lieu des points du corps pour lesquels la vitesse, estimée dans la direction du rayon vecteur, est en raison inverse de ce rayon vecteur, est une surface homothétique à la déformatrice.*

4. *Représentation géométrique de $\frac{v}{\rho}$ et de θ.* — Les équations (5) du nº 2 peuvent s'écrire maintenant

$$(10)\qquad \begin{cases} \varepsilon\cos\alpha + \theta\cos\xi = \varepsilon_1\cos\alpha - r\cos\beta + q\cos\gamma, \\ \varepsilon\cos\beta + \theta\cos\eta = r\cos\alpha + \varepsilon_2\cos\beta - p\cos\gamma, \\ \varepsilon\cos\gamma + \theta\cos\zeta = -q\cos\alpha + p\cos\beta + \varepsilon_3\cos\gamma; \end{cases}$$

si nous ajoutons membre à membre les carrés de ces équations, nous aurons

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} \varepsilon^3\varepsilon^2+\theta^2 = {} & (\varepsilon_1^2+q^2+r^2)\cos^2\alpha+(p^2+\varepsilon_2^2+r^2)\cos^2\beta+(p^2+q^2+\varepsilon_3^2)\cos^2\gamma \\ & -2[p(\varepsilon_2-\varepsilon_3)+qr]\cos\beta\cos\gamma-2[q(\varepsilon_3-\varepsilon_1)+rp]\cos\gamma\cos\alpha \\ & -2[r(\varepsilon_1-\varepsilon_2)+pq]\cos\alpha\cos\beta. \end{aligned}\right.$$

Le premier membre de cette équation représente le carré du rapport $\frac{v}{\rho}$ de la vitesse du point (x, y, z), relative à l'origine, au rayon vecteur de ce point; car les composantes de cette vitesse peuvent s'exprimer ainsi :

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \varepsilon\rho\cos\alpha+\rho\theta\cos\xi, \\ \frac{dy}{dt} &= \varepsilon\rho\cos\beta+\rho\theta\cos\eta, \\ \frac{dz}{dt} &= \varepsilon\rho\cos\gamma+\rho\theta\cos\zeta, \end{aligned}\right.$$

et l'on en déduit bien

$$V^2 = \rho^2(\varepsilon^2+\theta^2).$$

L'équation (11) donne donc la loi de la variation du rapport de la vitesse, relative à l'origine, au rayon vecteur correspondant. De même que pour ε, nous aurons donc une représentation géométrique simple de cette variation au moyen de la surface du second degré

$$\begin{aligned} & (\varepsilon_1^2+q^2+r^2)x^2+(p^2+\varepsilon_2^2+r^2)y^2+(p^2+q^2+\varepsilon_3^2)z^2 \\ & \quad -2[p(\varepsilon_2-\varepsilon_3)+qr]yz-2[q(\varepsilon_3-\varepsilon_1)+rp]zx-2[r(\varepsilon_1-\varepsilon_2)+pq]xy = 1. \end{aligned}$$

Les rayons vecteurs de cette surface sont égaux à la valeur de $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2+\theta^2}}$ ou de $\frac{\rho}{v}$ correspondant à la direction de ce rayon vecteur; d'où il suit que les points de la figure qui ont même vitesse relative à l'origine sont situés sur une surface homothétique à la surface précédente, qui représente elle-même le lieu des points dont la vitesse est égale à l'unité.

En désignant par V le premier membre de l'équation précédente, l'équation

$$(13)\quad V = C$$

sera donc celle du lieu des points dont la vitesse relative à l'origine est constante.

La considération des invariants relatifs à cette surface montre que, pour trois directions rectangulaires, on a la relation

$$\left(\frac{v_1}{\rho_1}\right)^2+\left(\frac{v^2}{\rho_2}\right)^2+\left(\frac{v_3}{\rho_3}\right)^2=\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\varepsilon_3^2+2\,\omega^2;$$

c'est-à-dire que *la somme des carrés des rapports des vitesses relatives aux rayons vecteurs correspondants pour trois directions rectangulaires est constante*.

En désignant par R un rayon vecteur arbitraire porté sur la direction (α, β, γ), on voit aisément que l'équation (11) peut s'écrire

$$\varepsilon^2+\theta^2=\frac{V}{R^2};$$

d'où

$$\theta^2=\frac{V}{R^2}-\varepsilon^2=\frac{V}{R^2}-(\varepsilon_1\cos^2\alpha+\varepsilon_2\cos^2\beta+\varepsilon_3\cos^2\gamma)^2,$$

ou encore

$$\theta^2=\frac{1}{R^2}\left[V-\frac{1}{R^2}(\varepsilon_1 x^2+\varepsilon_2 y^2+\varepsilon_3 z^2)^2\right];$$

de sorte que, si l'on prend ce rayon vecteur arbitraire égal à l'inverse de la valeur de θ correspondant à la direction de ce rayon vecteur, on aura, pour représenter la valeur de cette quantité, la surface du quatrième degré

$$(x^2+y^2+z^2)(V-1)-(\varepsilon_1 x^2+\varepsilon_2 y^2+\varepsilon_3 z^2)^2=0, \tag{14}$$

V ayant la même signification que précédemment.

On peut considérer cette nouvelle surface comme le lieu des courbes d'intersection de deux faisceaux homographiques de quadriques concentriques; car, en désignant par C la fonction $\varepsilon_1 x^2+\varepsilon_2 y^2+\varepsilon_3 z^2$,

$$C=0$$

est l'équation du cône asymptote de la déformatrice, et l'équation (14), que l'on peut écrire

$$R^2(V-1)-C^2=0,$$

résulte des intersections des deux faisceaux

$$R^2 - \lambda C = 0,$$
$$V - 1 - \mu C = 0,$$

λ, μ étant liés par la relation

$$\lambda\mu + 1 = 0.$$

L'un des faisceaux est composé de cônes et l'autre de quadriques concentriques.

Dans le cas d'une déformation que l'on peut appeler *sphérique*, c'est-à-dire, si l'on a

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3,$$

l'équation (14) se décompose en deux équations

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0, \quad (qz - ry)^2 + (rx - pz)^2 + (py - qx)^2 = 1;$$

l'une représente un point-sphère ou un cône imaginaire, la seconde un cylindre ayant pour axe l'axe de rotation

$$\frac{x}{p} = \frac{y}{q} = \frac{z}{r}.$$

5. *Relation entre θ et ω.* — Les formules (12) montrent que la vitesse d'un point relativement à l'origine est la résultante de deux vitesses, savoir : de la vitesse de déformation linéaire $\rho\varepsilon$ dans le sens de la direction (α, β, γ), et d'une vitesse de rotation ou plutôt de *déviation* $\rho\theta$; il n'est peut-être pas inutile de montrer l'influence de la déformation dans l'expression de la variable θ.

Si nous désignons par $(\alpha', \beta', \gamma')$ les angles que la normale au plan passant par le point (x, y, z) et l'axe de rotation $\left(\frac{p}{\omega}, \frac{q}{\omega}, \frac{r}{\omega}\right)$ mené par l'origine fait avec les axes, les formules (10) deviendront

$$(15) \quad \begin{cases} \varepsilon\cos\alpha + \theta\cos\xi = \varepsilon_1\cos\alpha + \omega\sin\left(\widehat{\rho, \omega}\right)\cos\alpha', \\ \varepsilon\cos\beta + \theta\cos\eta = \varepsilon_2\cos\beta + \omega\sin\left(\widehat{\rho, \omega}\right)\cos\beta', \\ \varepsilon\cos\gamma + \theta\cos\zeta = \varepsilon_3\cos\gamma + \omega\sin\left(\widehat{\rho, \omega}\right)\cos\gamma'. \end{cases}$$

La direction $(\alpha', \beta', \gamma')$ est perpendiculaire au rayon vecteur ρ du point (x, y, z); de sorte que, si l'on multiplie les trois équations (15) par $\cos\alpha'$, $\cos\beta'$, $\cos\gamma'$, et qu'on désigne par τ l'angle des deux directions (ξ, η, ζ), $(\alpha', \beta', \gamma')$, on aura, en ajoutant membre à membre,

$$\theta \cos\tau = \omega \sin\left(\widehat{\rho, \omega}\right) + \varepsilon_1 \cos\alpha \cos\alpha' + \varepsilon_2 \cos\beta \cos\beta' + \varepsilon_3 \cos\gamma \cos\gamma'.$$

L'angle τ peut, jusqu'à un certain point, servir de mesure à la déviation de l'arc $\rho\theta$, par suite de la déformation. En effet, dans le cas d'un corps solide invariable, ou même si l'on suppose le cas d'une déformation sphérique $(\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3)$, il vient simplement

$$\theta = \omega \sin\left(\widehat{\rho, \omega}\right),$$

et la vitesse θ est perpendiculaire au plan $\left(\widehat{\rho, \omega}\right)$.

Remarquons en passant que l'équation précédente, considérée comme l'équation d'une courbe en coordonnées polaires, θ étant le rayon vecteur et l'angle $\left(\widehat{\rho, \omega}\right)$ l'angle polaire, représente un système de deux circonférences tangentes, et, dans l'espace par conséquent, un tore ayant pour courbe méridienne l'ensemble de ces deux circonférences. Or si l'on transforme ce tore par rayons vecteurs réciproques, le pôle étant l'origine et la puissance l'unité, on obtient un cylindre de révolution; ce qui explique le résultat obtenu à la fin du numéro précédent.

II. — *Discussion des expressions des vitesses composantes.*

6. *Cas d'un point fixe.* — Considérons d'abord, pour plus de simplicité, une figure dont un des points soit absolument fixe, et prenons ce point comme origine des coordonnées; les expressions des vitesses composantes deviennent

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \varepsilon_1 x - r y + q z = \mathrm{X}, \\[2ex] \dfrac{dy}{dt} = r x + \varepsilon_2 y - p z = \mathrm{Y}, \\[2ex] \dfrac{dz}{dt} = - q x + p y + \varepsilon_3 z = \mathrm{Z}. \end{cases}$$

Il est naturel de se demander si l'origine est le seul point du corps dont la vitesse soit nulle; s'il y a de pareils points, ce sont ceux dont les coordonnées vérifient les équations

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = 0.$$

Or ces équations représentent trois plans qui se couperont en un point unique, l'origine, ou suivant une droite, et qui pourront même se confondre, selon que le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} \varepsilon_1 & -r & q \\ r & \varepsilon_2 & -p \\ -q & p & \varepsilon_3 \end{vmatrix}$$

sera différent de zéro ou nul.

Ce déterminant développé devient

$$\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_1 p^2 + \varepsilon_2 q^2 + \varepsilon_3 r^2;$$

la condition, pour qu'il soit nul, revient à dire que l'axe de rotation $\left(\frac{p}{\omega}, \frac{q}{\omega}, \frac{r}{\omega}\right)$ doit se trouver sur un certain cône du second degré. En effet, en posant

$$\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3}{\omega^2} = k, \quad \frac{p}{\omega} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \ldots,$$

la condition en question se trouve ainsi exprimée

$$(2) \qquad (\varepsilon_1 + k)x^2 + (\varepsilon_2 + k)y^2 + (\varepsilon_3 + k)z^2 = 0,$$

équation d'un cône du second degré réel ou imaginaire.

1° Si le cône est imaginaire, ce qui aura lieu nécessairement si la déformatrice est un ellipsoïde, il n'y a pas d'autre point sans vitesse que l'origine.

Voici quelle est l'idée que l'on peut se faire en ce cas du mouvement de la figure : si l'on part des formules (12) (du § I), on voit que *le déplacement d'un point quelconque peut être considéré comme résultant d'un glissement $\rho\varepsilon$ sur le rayon vecteur et d'un déplacement angulaire θ du rayon vecteur qui décrit un élément de surface conique.*

De plus, si l'on veut connaître la loi de distribution de la vitesse, il faut avoir recours à des relations fort simples, et dont je ferai un usage constant dans toute cette étude. Si l'on désigne par v la vitesse d'un point quelconque de la figure, par φ l'angle que fait cette vitesse avec une certaine direction faisant avec les axes des angles dont les cosinus sont (λ, μ, ν), on aura, et cela dans le cas le plus général, pourvu que les composantes de la vitesse soient des fonctions linéaires des coordonnées,

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} v \cos\varphi &= \lambda X + \mu Y + \nu Z, \\ v \sin\varphi &= \sqrt{\Sigma(\mu Z - \nu Y)^2}. \end{aligned} \right.$$

La première de ces formules, de beaucoup la plus importante, montre que la *vitesse d'un point, estimée dans une certaine direction, est proportionnelle à la distance de ce point au plan ayant pour équation*

$$\lambda x + \mu Y + \nu Z = 0,$$

que j'appellerai le plan conjugué de la direction (λ, μ, ν). Dans les applications géométriques, je m'étendrai davantage sur les conséquences de ces formules (3); celle que je viens d'énoncer va me permettre d'étudier la vitesse des divers points de la figure autour du point fixe.

On voit déjà, par exemple, que les plans $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$ sont les plans conjugués des trois axes coordonnés; ainsi la vitesse d'un point, estimée parallèlement à l'axe des x, est proportionnelle à la distance de ce point au plan $X = 0$; et, pour les points de l'axe des x en particulier, elle est proportionnelle à la variable x. Du reste la vitesse estimée suivant le rayon vecteur même du point ayant pour expression $\rho\varepsilon$ croît bien proportionnellement au rayon vecteur; mais la première des formules (3) nous montre que *toutes les vitesses estimées parallèlement* sont proportionnelles aux distances de leurs points d'application à un plan fixe.

2° Si le cône représenté par l'équation (2) est réel, c'est-à-dire si le déterminant Δ est nul, il y a une infinité de points situés en ligne droite dont la vitesse est nulle. Dans le cas d'une figure invariable, c'est ce qui arrive toujours si la figure a un point fixe; seulement il y a généralement une différence entre les deux cas. La droite dont tous les points ont une vitesse nulle, et que je nommerai un *axe des vitesses*, n'est pas un *axe de rotation*, sauf dans certains cas particuliers. Pour nous rendre compte de ce qui se passe dans le mouvement de la figure, je prendrai l'*axe des vitesses* pour axe des z. Je remarque d'abord que les expressions des vitesses composantes (1) sont particulières à un choix d'axes coordonnés parallèles aux axes principaux de la déformatrice. Si l'on prend un nouveau système d'axes rectangulaires, défini par le tableau suivant :

	x'	y'	z'
x	a	b	c
y	a'	b'	c'
z	a''	b''	c''

$a, b, c, \ldots$ étant les neuf cosinus d'une substitution orthogonale ; si de plus on pose

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} \varepsilon'_1 &= a^2\varepsilon_1 + b^2\varepsilon_2 + c^2\varepsilon_3,\\ \varepsilon'_2 &= a'^2\varepsilon_1 + b'^2\varepsilon_2 + c'^2\varepsilon_3,\\ \varepsilon'_3 &= a''^2\varepsilon_1 + b''^2\varepsilon_2 + c''^2\varepsilon_3,\end{aligned}\right.$$

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} \mathrm{A} &= bc\,\varepsilon_1 + b'c'\,\varepsilon_2 + b''c''\,\varepsilon_3,\\ \mathrm{B} &= ca\,\varepsilon_1 + c'a'\,\varepsilon_2 + c''a''\,\varepsilon_3,\\ \mathrm{C} &= ab\,\varepsilon_1 + a'b'\,\varepsilon_2 + a''b''\,\varepsilon_3,\end{aligned}\right.$$

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} p' &= ap + bq + cr,\\ q' &= a'p + b'q + c'r,\\ r' &= a''p + b''q + c''r,\end{aligned}\right.$$

les composantes de la vitesse suivant les nouveaux axes auront pour expressions

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned} \mathrm{X}' &= \varepsilon'_1 x' + (\mathrm{C} - r')y' + (\mathrm{B} + q')z',\\ \mathrm{Y}' &= (\mathrm{C} + r')x' + \varepsilon'_2 y' + (\mathrm{A} - p')z',\\ \mathrm{Z}' &= (\mathrm{B} - q')x' + (\mathrm{A} + p')y' + \varepsilon'_3 z'.\end{aligned}\right.$$

Pour la question qui nous occupe, il faut exprimer que les trois plans

$$\mathrm{X}' = 0,\quad \mathrm{Y}' = 0,\quad \mathrm{Z}' = 0$$

passent tous trois par l'axe des z, qui est l'*axe des vitesses;* pour cela, il suffit de faire

$$B + q' = 0, \quad A + p' = 0, \quad \varepsilon'_3 = 0;$$

les expressions des vitesses composantes deviendront, en supprimant les accents,

$$(8) \qquad \begin{aligned} X &= \varepsilon_1 x + (C - r)y, \\ Y &= (C + r)x + \varepsilon_2 y, \\ Z &= 2(py - qx), \end{aligned}$$

et l'équation de la déformatrice

$$\varepsilon_1 x^2 + \varepsilon_2 y^2 + 2z(py - qx) + 2Cxy = 1;$$

en choisissant pour axes des x et des y les axes principaux de la section de la déformatrice par le plan des xy, les expressions précédentes se simplifient encore, et l'on a

$$(9) \qquad \begin{cases} X = \varepsilon_1 x - ry, \\ Y = rx + \varepsilon_2 y, \\ Z = 2(py - qx). \end{cases}$$

Ces formules nous expliquent fort simplement la distribution des vitesses autour de l'*axe des vitesses*.

D'abord on voit que la *déformatrice* est un hyperboloïde à une nappe, et que l'*axe des vitesses* est une génératrice du cône asymptote de cette surface; c'est ce qui explique pourquoi le *plan conjugué* de l'*axe des vitesses*, qui est en même temps, et par exception, un plan diamétral conjugué de la déformatrice par rapport à cet axe, contient cet axe.

En second lieu, les expressions des vitesses (8) montrent que la vitesse d'un point quelconque de la figure ne dépend que de la position de la projection de ce point sur le plan des xy, ce qui veut dire que *tous les points d'une même droite parallèle à l'axe des vitesses ont des vitesses égales et parallèles*.

De plus, *les points dont les vitesses totales sont égales se trouvent distribués sur des cylindres droits elliptiques ou hyperboliques, ayant pour axe commun l'axe des vitesses*.

Si, dans le cas d'un point fixe, on convient d'appeler *vitesse rayonnante* la vitesse $\rho\varepsilon$, dirigée suivant le rayon vecteur issu du point fixe, on voit sans peine que *le lieu des points d'égale vitesse rayonnante est la transformée par rayons vecteurs réciproques d'une surface homothétique à la déformatrice.*

Il en sera exactement de même pour les *vitesses rayonnantes* dont les directions rayonnent autour de l'axe des vitesses dans des plans perpendiculaires à cet axe.

Enfin, *les points qui ont la même vitesse estimée parallèlement à l'axe des vitesses sont situés dans des plans parallèles à la fois à l'axe des vitesses et à l'axe de rotation, et en particulier cette vitesse est nulle pour tous les points du plan qui contient ces deux axes.*

Cette dernière composante de la vitesse devient nulle pour tous les points de la figure si l'axe de rotation se confond avec l'axe des vitesses, c'est-à-dire si l'on a $p = 0$, $q = 0$.

7. *Autre manière de concevoir le déplacement de la figure. — Rôle de l'axe de rotation.* — On peut arriver à concevoir le déplacement de la figure en interprétant les seconds membres des équations (1) du numéro précédent. Les projections de la vitesse sur les axes se composent de deux parties :

$$\varepsilon_1 x, \quad \varepsilon_2 y, \quad \varepsilon_3 z$$

et

$$qz - ry, \quad rx - pz, \quad py - qx.$$

On connaît bien la signification de ces derniers termes; pour avoir celle des premiers, faisons passer par le point (x, y, z) une surface

$$f(x, y, z) = \varepsilon_1 x^2 + \varepsilon_2 y^2 + \varepsilon_3 z^2 = c$$

homothétique à la déformatrice, et soit $\Delta_1 f$ son paramètre différentiel du premier ordre, on a d'abord

$$\varepsilon_1 x = \frac{1}{2}\frac{df}{dx}, \quad \varepsilon_2 y = \frac{1}{2}\frac{df}{dy}, \quad \varepsilon_3 z = \frac{1}{2}\frac{df}{dz};$$

or, si dn est le déplacement du point (x, y, z) estimé normalement à la surface $f(x, y, z) = c$, et dx_1, dy_1, dz_1 les projections de ce déplacement sur les axes, il vient

$$\frac{df}{dx} = \frac{dx_1}{dn}\Delta_1 f, \quad \frac{df}{dy} = \frac{dy_1}{dn}\Delta_1 f, \quad \frac{df}{dz} = \frac{dz_1}{dn}\Delta_1 f,$$

d'où

$$\varepsilon_1 x = \frac{1}{2}\frac{dx_1}{dn}\Delta_1 f, \quad \varepsilon_2 y = \frac{1}{2}\frac{dy_1}{dn}\Delta_1 f, \quad \varepsilon_3 z = \frac{1}{2}\frac{dz_1}{dn}\Delta_1 f.$$

Donc :

La vitesse d'un point quelconque de la figure peut être considérée comme la résultante de la vitesse de rotation qu'aurait le point autour de l'axe $\left(\frac{p}{\omega}, \frac{q}{\omega}, \frac{r}{\omega}\right)$, *si la figure ne se déformait pas, et d'une vitesse normale à la surface homothétique à la déformatrice passant par le point et égale au demi-paramètre différentiel de cette surface en ce point.*

En d'autres termes :

Imaginons tous les points du corps situés sur une surface homothétique à la déformatrice; en vertu de la déformation, ils se transportent normalement à cette surface avec une vitesse égale au demi-paramètre différentiel du premier ordre relatif à chacun d'eux, pendant que la surface elle-même tourne avec une vitesse angulaire ω *autour de l'axe de rotation.*

8. *Cas où la figure n'a aucun point fixe.* — Reprenons les formules générales

$$\left\{\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \varepsilon_1 x - ry + qz + u_1 = \mathrm{X}, \\ \frac{dy}{dt} &= rx + \varepsilon_2 y - pz + u_2 = \mathrm{Y}, \\ \frac{dz}{dt} &= -qx + py + \varepsilon_3 z + u_3 = \mathrm{Z}. \end{aligned}\right.$$

Les trois plans, ayant pour équations

$$\mathrm{X} = 0, \quad \mathrm{Y} = 0, \quad \mathrm{Z} = 0,$$

peuvent se couper en un seul point; ce point, qui aura une vitesse nulle pendant le temps dt, je le nommerai *centre des vitesses*, et il jouera le même rôle pendant l'instant dt que le point fixe du n° 6; en second lieu, ils peuvent passer par une même droite, qui sera alors un *axe des* *vitesses;* enfin ils peuvent être parallèles à une même direction : on peut dire alors que la figure a un centre de vitesse à l'infini.

Remarque. — Les trois plans $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$ ne peuvent se confondre; car, parmi les conditions que cela nécessite, on trouve les suivantes :

$$\varepsilon_2\varepsilon_3 = -p^2, \quad \varepsilon_3\varepsilon_1 = -q^2, \quad \varepsilon_1\varepsilon_2 = -r^2,$$

qui sont évidemment incompatibles.

Les deux premiers cas ne présentent pas d'autres particularités que celles que nous avons étudiées dans les nos 6 et 7. Le seul qui présente quelque intérêt est celui dans lequel les trois plans conjugués des axes sont parallèles à une même direction; c'est à celui-là, en effet, que se rattache le déplacement d'une figure de forme invariable.

D'abord il est bien évident que le plan conjugué d'une direction quelconque (λ, μ, ν), ayant pour équation

$$\lambda X + \mu Y + \nu Z = 0,$$

sera parallèle à la direction commune (X, Y, Z). Il est donc naturel, en procédant comme au n° 6 (2), de prendre la direction parallèle à tous les plans conjugués pour axe des z, et pour axes des x et des y les axes principaux de la section de la déformatrice par le plan des xy, l'origine étant d'ailleurs indéterminée. Les équations des vitesses deviendront

$$(10) \qquad \begin{cases} X = \varepsilon_1 x - ry + u_1, \\ Y = rx + \varepsilon_2 y + u_2, \\ Z = 2(py - qx) + u_3; \end{cases}$$

mais il est évident que, sans changer la direction des axes, je puis disposer de l'origine de manière à supprimer les termes indépendants des variables dans les valeurs de X et de Y, et l'on aura enfin les expressions suivantes :

$$(10\ bis) \qquad \begin{cases} X = \varepsilon_1 x - ry, \\ Y = rx + \varepsilon_2 y, \\ Z = 2(py - qx) + u_3. \end{cases}$$

dans lesquelles les coefficients n'ont plus évidemment les mêmes valeurs que dans les formules (10) et (9); c'est pour simplifier que je supprime les accents.

La possibilité de passer des formules (10) aux formules (10 *bis*) exige une condition, c'est que le déterminant

$$\varepsilon_1 \varepsilon_2 + r^2$$

ne soit pas nul. Cette condition est essentiellement remplie dans le cas d'une figure invariable de forme, puisque le déterminant se réduit à $+ r^2$; elle l'est encore si la section de la déformatrice par le plan des xy est une ellipse. En général donc, les expressions des vitesses pourront prendre la forme (10 *bis*). Examinons alors la distribution des vitesses dans les divers points de la figure.

Puisque les trois composantes de la vitesse ne dépendent que des coordonnées x et y et d'une vitesse de translation qui est la même pour tous les points, il en résulte que tous les points d'une droite parallèle à l'axe des z ont des vitesses égales et parallèles. En particulier, tous les points de l'axe des z ont une vitesse commune de glissement u_3; nous conserverons à cette droite le nom d'*axe glissant des vitesses*. Il faut bien remarquer que ce sera la seule droite de la figure qui jouira de cette propriété. Nous pourrons donc énoncer cette propriété importante : *Lorsque, dans le déplacement de la figure, il n'y a ni* CENTRE *ni* AXE DE VITESSE, *tous les plans conjugués des diverses directions sont parallèles à une même droite; tous les points d'une même droite parallèle à celle-ci ont des vitesses égales et parallèles, et enfin, entre toutes ces droites, il en est une dont tous les points ont une vitesse commune de glissement dans la direction de cette droite elle-même.*

Enfin, pour compléter l'étude de la distribution des vitesses, remarquons encore que la déformatrice, dont l'équation est

$$\varepsilon_1 x^2 + \varepsilon_2 y^2 + 2z(py - qx) + u_3 z = 1,$$

est un hyperboloïde à une nappe, à moins que le déterminant

$$\varepsilon_1 p^2 + \varepsilon_2 q^2$$

ne soit nul, auquel cas elle a la forme d'un cylindre.

Les points de même vitesse totale sont distribués sur des cylindres du second degré

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = c,$$

et les points d'égale vitesse rayonnante autour de l'axe glissant sur des cylindres du quatrième degré ayant pour trace, sur le plan des xy, la transformée par rayons vecteurs réciproques de la section de la déformatrice par le même plan.

Si, par cas, le déterminant $\varepsilon_1 \varepsilon_2 + r^2$ était nul, les résultats précédents seraient modifiés; car il pourra arriver, ou bien qu'il n'y ait plus d'*axe glissant*, ou bien qu'il y en ait une infinité.

III. — *Déplacement et déformation d'une surface algébrique.*

9. *Déplacement d'une surface. — Caractéristique. — Surface auxiliaire. — Foyers. — Courbe adjointe.* — Le déplacement d'une figure étant régi par les formules (9) du paragraphe précédent, il est intéressant de rechercher ce que deviennent les points situés à l'instant t sur une surface donnée par son équation

$$f(x, y, z) = 0. \tag{1}$$

Pour cela, désignons par (x_1, y_1, z_1) les nouvelles valeurs des coordonnées du point (x, y, z) après le temps $t + dt$; en désignant par X_1, Y_1, Z_1 ce que deviennent les valeurs de X, Y, Z lorsqu'on y remplace x, y, z par x_1, y_1, z_1, on aura d'abord

$$x_1 = x + X\,dt, \quad y_1 = y + Y\,dt, \quad z_1 = z + Z\,dt,$$

et, par suite, en négligeant les termes du second ordre,

$$x = x_1 - X_1\,dt, \quad y = y_1 - Y_1\,dt, \quad z = z_1 - Z_1\,dt;$$

donc, en substituant ces valeurs de (x, y, z) dans l'équation (1) de la surface, on aura une équation

$$f(x_1 - X_1\,dt, y_1 - Y_1\,dt, z_1 - Z_1\,dt) = 0, \tag{2}$$

qui représente évidemment le lieu des points (x_1, y_1, z_1) qui étaient primitivement sur la surface proposée; c'est donc bien l'équation de la surface transformée.

L'équation (2) nous montre, ce que nous savions déjà, que *le degré de la surface proposée n'est pas altéré dans ce genre de déplacement et de déformation.*

Si l'on développe l'équation (2) en ne conservant que les termes du premier ordre, il vient, en supprimant les indices,

$$f(x, y, z) - \left(X \frac{df}{dx} + Y \frac{df}{dy} + Z \frac{df}{dz}\right) dt = 0; \tag{3}$$

et, sous cette forme, on voit que cette nouvelle surface passe par la courbe représentée par les deux équations

$$\left\{ \begin{array}{c} f(x, y, z) = 0, \\ X \dfrac{df}{dx} + Y \dfrac{df}{dy} + Z \dfrac{df}{dz} = 0. \end{array} \right. \tag{4}$$

Cette courbe est donc l'intersection de la surface primitive et de sa transformée infiniment voisine; c'est la *caractéristique* de la surface.

Je désignerai sous le nom de *surface auxiliaire* la surface, représentée par la seconde des équations (4), qui coupe la surface proposée suivant la caractéristique.

A cette surface correspond une courbe ayant pour équations

$$X : \frac{df}{dx} = Y : \frac{df}{dy} = Z : \frac{df}{dz}, \tag{5}$$

que je nommerai la *courbe adjointe* à la surface proposée.

Pour montrer le rôle de la *surface auxiliaire* et de la *courbe adjointe* dans le déplacement de la surface, proposons-nous de résoudre la question suivante :

Quel est le lieu géométrique des points de la surface mobile dont les trajectoires font un angle donné φ avec la normale correspondant à la surface?

Or on trouvera facilement que

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{\sqrt{\left(Y \dfrac{df}{dz} - Z \dfrac{df}{dy}\right)^2 + \left(Z \dfrac{df}{dx} - X \dfrac{df}{dz}\right)^2 + \left(X \dfrac{df}{dy} - Y \dfrac{df}{dx}\right)^2}}{X \dfrac{df}{dx} + Y \dfrac{df}{dy} + Z \dfrac{df}{dz}};$$

par suite, les points cherchés seront sur la courbe d'intersection de la surface proposée avec la surface représentée par l'équation

$$\left(Y\frac{df}{dz}-Z\frac{df}{dy}\right)^2+\left(Z\frac{df}{dx}-X\frac{df}{dz}\right)^2 \\ +\left(X\frac{df}{dy}-Y\frac{df}{dx}\right)^2-\text{tang}^2\varphi\left(X\frac{df}{dx}+Y\frac{df}{dy}+Z\frac{df}{dz}\right)^2=0.$$

Si l'on suppose en particulier $\varphi=0$, c'est-à-dire si l'on cherche les points dont les trajectoires sont normales à la surface proposée, on voit qu'ils sont les points d'intersection de la surface proposée avec la *courbe adjointe*. Nous pourrons, en empruntant à un travail bien connu, de M. Chasles ([1]), cette dénomination, appeler *foyer* (cinématique) d'une surface mobile tout point de cette surface dont l'élément de trajectoire sera normal à la surface.

Les foyers d'une surface résultent en définitive des intersections de trois surfaces de même degré; par conséquent, si m est le degré de la surface proposée, on voit que cette surface pourra avoir m^3 foyers.

Si l'on suppose $\varphi=\frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire si l'on cherche les points qui commencent à se déplacer sur la surface elle-même, on trouve tous les points de la caractéristique.

Si l'on considère en outre toute une famille de surfaces homothétiques

$$f(x,y,z)=c,$$

elles ont toutes même *surface auxiliaire* et même *courbe adjointe. La surface auxiliaire est le lieu des caractéristiques, et la courbe adjointe, le lieu des foyers de toutes ces surfaces.*

On voit en outre que, lorsque, dans le déplacement de la figure, il y a des points sans vitesse, ils appartiennent à la fois à la surface auxiliaire et à la *courbe adjointe;* et s'il n'y a pas de point sans vitesse, cette surface et cette courbe renferment la droite parallèle à la direction commune de tous les plans conjugués.

([1]) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 26 juin 1843.

IV. — *Étude spéciale du déplacement des points situés dans un même plan.*

10. Si l'on suppose que la surface que nous venons de considérer devienne un plan ayant pour équation

$$\lambda x + \mu y + \nu z - \varpi = 0, \tag{1}$$

(λ, μ, ν) étant les cosinus des angles de la perpendiculaire au plan avec les axes, et ϖ la distance de l'origine au plan, on voit que ce que nous appelions la *surface auxiliaire* a pour équation

$$\lambda X + \mu Y + \nu Z = 0; \tag{2}$$

c'est donc le *plan conjugué* de la direction (λ, μ, ν) (*voir* n° 6).

Le plan représenté par l'équation (2) *est le lieu de tous les points de la figure dont les vitesses ont des directions perpendiculaires à la direction* (λ, μ, ν) *et par conséquent parallèles au plan* (1).

C'est ce qui explique pourquoi le *plan conjugué d'une direction* (λ, μ, ν) *coupe tout plan perpendiculaire à cette direction suivant sa caractéristique.*

Les caractéristiques de tous les plans parallèles sont parallèles.

La courbe adjointe devient, dans le cas du plan, une ligne droite ayant pour équations

$$\frac{X}{\lambda} = \frac{Y}{\mu} = \frac{Z}{\nu}, \tag{3}$$

que je nommerai la *droite adjointe* à la direction (λ, μ, ν).

En se reportant à la seconde des formules (3) du n° 6, on voit que *la droite adjointe à une direction* (λ, μ, ν) *est le lieu des points dont les vitesses sont parallèles à cette direction.*

Il s'ensuit que *la droite adjointe à une direction est le lieu des foyers de tous les plans perpendiculaires à cette direction.*

Les foyers de tous les plans parallèles à une même direction ont des vitesses perpendiculaires à cette direction; ils sont donc tous situés dans le plan conjugué de cette direction; donc :

Le plan conjugué d'une direction est le lieu des foyers et, par suite, des droites adjointes de tous les plans parallèles à cette direction.

Si nous considérons deux directions rectangulaires A et B, on remarque que les points dont les vitesses sont parallèles à B et, par suite, perpendiculaires à A, sont à la fois sur la *droite adjointe* de B et le *plan conjugué* de A; donc :

La droite adjointe à une direction est l'intersection commune de tous les plans conjugués aux directions perpendiculaires à la première.

11. Si l'on prend tous les plans qui passent par une même droite, nous savons déjà que leurs foyers sont dans un même plan; mais on peut se demander quel est le lieu géométrique de ces foyers.

En remarquant que tout plan est normal à la trajectoire de son foyer, cela revient à chercher *quels sont les points de la figure tels, que les plans normaux à leurs trajectoires passent par une même droite.*

Or l'équation d'un plan normal à la trajectoire d'un point (x', y', z') est

$$(x - x')\,dx' + (y - y')\,dy' + (z - z')\,dz' = 0$$

ou

$$(x - x')X' + (y - y')Y' + (z - z')Z' = 0.$$

Les conditions qui exprimeront que ce plan normal passe par une droite ayant pour équations

$$\frac{x - x_1}{\lambda} = \frac{y - y_1}{\mu} = \frac{z - z_1}{\nu} = \rho$$

sont, en supprimant les accents de x', y', z', X', Y', Z',

$$(4)\qquad \left\{ \begin{aligned} &\lambda X + \mu Y + \nu Z = 0, \\ &(x_1 - x)X + (y_1 - y)Y + (z_1 - z)Z = 0, \end{aligned} \right.$$

et elles expriment que les points cherchés sont, d'une part, dans le plan conjugué de la droite et, d'autre part, sur une surface du second degré semblable à la déformatrice. Donc *le lieu des foyers des plans qui passent par une droite est une conique intersection d'une surface du second degré semblable à la déformatrice par le plan conjugué de la droite donnée.*

12. A cette courbe, lieu des foyers des plans qui passent par une droite donnée, correspond une surface réglée du second degré, lieu des caractéristiques correspondantes; en effet, P et P′ désignant deux fonctions linéaires des coordonnées, les équations

$$P = 0, \quad P' = 0$$

représentent une droite, et

$$P - kP' = 0 \tag{5}$$

l'équation de tous les plans passant par cette droite; l'équation du plan conjugué sera de la forme

$$\lambda X + \mu Y + \nu Z - k(\lambda' X + \mu' Y + \nu' Z) = 0, \tag{6}$$

et l'ensemble de ces deux équations pour une même valeur de k représente la caractéristique de celui des plans (5) qui correspond à cette valeur de k. En éliminant ce paramètre variable entre les équations (5) et (6), on aura donc l'équation du lieu des caractéristiques

$$(\lambda P' - \lambda' P)X + (\mu P' - \mu' P)Y + (\nu P' - \nu' P)Z = 0, \tag{7}$$

laquelle représente bien une surface réglée du second degré; en général, cette surface sera un hyperboloïde à une nappe. Ainsi *les caractéristiques de tous les plans passant par une droite donnée sont situées sur une surface réglée du second degré.*

La courbe lieu des foyers et la surface lieu des caractéristiques des plans passant par une droite donnée ne sont autres choses que la *courbe adjointe* et la *surface auxiliaire* d'une famille de plans. Pour que l'équation des plans passant par la droite ($P = 0$, $P' = 0$) rentre dans le type

$$f(x, y, z) = c,$$

il faut l'écrire

$$\frac{P}{P'} = k;$$

en prenant les dérivées partielles du premier membre et substituant dans l'équation (5) et la seconde des équations (4) du n° 9, on aurait les équations trouvées par d'autres considérations.

Si la droite par laquelle passent tous les plans s'éloigne à l'infini, la courbe adjointe devient la droite adjointe, et la surface auxiliaire, le plan conjugué de la direction de la droite.

13. Je n'ai rien supposé jusqu'à présent relativement aux plans $X = o$, $Y = o$, $Z = o$, que l'on pourrait bien appeler pour abréger les plans des vitesses coordonnées; mais on voit aisément que si ces trois plans se coupent en un seul point, c'est-à-dire s'il y a un *centre des vitesses, tous les plans conjugués aux diverses directions, toutes les droites adjointes passent par le centre des vitesses.*

S'il y a un axe des vitesses, *tous les plans conjugués aux diverses directions passent par cet axe, et toutes les droites adjointes se confondent avec lui.*

Enfin *si les plans des vitesses coordonnées sont parallèles à une même direction, il en sera de même de tous les plans conjugués et de toutes les droites adjointes.*

14. Je n'insisterai pas sur une foule de théorèmes concernant les plans conjugués et les droites adjointes; il suffit de lire le Mémoire de M. Chasles que j'ai déjà cité, et un Mémoire de M. Mannheim, publié dans le 26[e] Cahier du *Journal de l'École Polytechnique*, et d'étendre les théorèmes qui s'y trouvent démontrés dans le cas d'une figure invariable au cas plus général où la figure subit une déformation homographique. Je passe à une propriété beaucoup moins remarquée, si même elle l'a été.

Cherchons le lieu des points de la figure mobile dont les trajectoires ou les vitesses sont inclinées d'un angle donné φ sur une direction fixe (λ, μ, ν).

En divisant membre à membre les expressions de $v \sin\varphi$, $v \cos\varphi$ trouvées au n° 6 (équat. 3), on trouve

$$(8) \qquad \Sigma[(\mu Z - \nu Y)^2] - \tang^2\varphi(\lambda X + \mu Y + \nu Z)^2 = o$$

(le Σ comprend trois termes analogues à celui qui est écrit); cette équation montre que *le lieu des points cherchés est un cône du second degré.*

De plus, la forme même de l'équation de ce cône montre que *la droite adjointe et le plan conjugué de la direction fixe sont la polaire et le plan de contact communs à tous les cônes compris dans l'équation* (8), *quand on y donne à l'inclinaison φ toutes les valeurs possibles.*

Il résulte évidemment de là que, dans un plan, *le lieu des points dont les vitesses ou les trajectoires sont également inclinées sur la normale au* *plan est une conique, et que le foyer cinématique du plan est le pôle de la caractéristique, par rapport à toutes les coniques correspondant aux diverses inclinaisons des vitesses.*

Dans le cas particulier où la figure est invariable, la propriété que je viens d'énoncer prend une forme plus frappante encore. Les expressions des vitesses, dans ce cas, deviennent

$$X = qz - ry + u_1, \quad Y = rx - pz + u_2, \quad Z = py - qx + u_3;$$

si l'on prend pour plan des xy le plan mobile lui-même, pour origine son foyer, pour *axe* des z sa normale et pour plan des zx le plan passant par la normale et la direction de l'axe de rotation, cela revient à faire

$$\lambda = 0, \quad \mu = 0, \quad \nu = 1, \quad q = 0, \quad u_1 = 0, \quad u_2 = 0;$$

or l'équation du cône (8) se réduit à

$$X^2 + Y^2 - \operatorname{tang}^2\varphi Z^2 = 0,$$

et, en remplaçant X, Y, Z par leurs expressions simplifiées, on trouve, en y faisant $z = 0$,

$$r^2(x^2 + y^2) - \operatorname{tang}^2\varphi(py + u_3)^2 = 0, \tag{9}$$

ce qui est bien l'équation d'une conique ayant pour *foyer* l'origine, c'est-à-dire le foyer cinématique du plan, et pour *directrice* sa caractéristique.

Ainsi, *dans le cas d'une figure de forme invariable, les diverses coniques, lieux des points d'un plan dont les vitesses ont une inclinaison donnée sur la normale au plan, ont pour foyer commun le foyer cinématique du plan et pour directrice sa caractéristique.*

Soient ρ le rayon vecteur d'un point du plan mobile par rapport à son foyer; ψ l'inclinaison de l'axe spontané sur la normale; δ la distance du point à la caractéristique; l'équation (9) se transforme en la suivante

$$\frac{\rho}{\delta} = \operatorname{tang}\psi \operatorname{tang}\varphi,$$

ce qui exprime que *le rapport des distances d'un point du plan mobile au foyer et à la caractéristique est égal au produit des tangentes de l'inclinai-*

son de la vitesse et de l'inclinaison de l'axe de rotation sur la normale au plan (figure de forme invariable).

V. — *Détermination géométrique et analytique des paramètres du déplacement.*

15. *Cas d'une figure de forme invariable.* — Je prends d'abord ce cas fort simple où la connaissance des vitesses de trois points en grandeur et en direction suffit à la détermination complète du déplacement de la figure. Soient v, v', v'' les vitesses de trois points donnés; φ, φ', φ'' leurs inclinaisons sur la normale au plan de ces points; (ρ, δ), (ρ', δ'), (ρ'', δ'') leurs distances au foyer et à la caractéristique; on aura trois couples de relations telles que les suivantes (n° 14, ψ désignant toujours l'inclinaison de l'axe de rotation sur la normale) :

$$v \cos\varphi = \delta\omega \sin\psi, \quad v \sin\varphi = \rho\omega \cos\psi;$$

donc les distances des trois points donnés à la caractéristique de leur plan sont liées par les équations

$$\frac{\delta}{v \cos\varphi} = \frac{\delta'}{v' \cos\varphi'} = \frac{\delta''}{v'' \cos\varphi''};$$

donc cette caractéristique n'est autre chose que *l'axe d'homothétie de trois cercles dont on connaît les centres et les rayons*.

De même, pour les distances des trois points au foyer, on a

$$\frac{\rho}{v \sin\varphi} = \frac{\rho'}{v' \sin\varphi'} = \frac{\rho''}{v'' \sin\varphi''};$$

donc le foyer est connu, puisqu'il est *à l'intersection de deux cercles, lieux des points dont les rapports des distances à deux points donnés sont connus*.

Quand on a ainsi le foyer et la caractéristique du plan des trois points, on a, par la relation

$$\frac{\rho}{\delta} = \operatorname{tang}\varphi \operatorname{tang}\psi,$$

l'inclinaison ψ de l'axe spontané glissant sur la normale à ce plan. La trace de cet axe est sur la plus courte distance du foyer à la caractéristique; cela résulte des expressions des vitesses composantes dans le dernier système de coordonnées que nous avons pris; on a alors, pour un point quelconque du plan des xy,

$$X = -ry, \quad Y = rx, \quad Z = py + u_3.$$

(On doit se rappeler que l'origine est le foyer du plan xy, et que l'axe ox est parallèle à la caractéristique.) Pour le pied de l'axe spontané qui ne peut se mouvoir que dans la direction de cet axe, parallèle au plan de zx, la composante Y de la vitesse est nulle, donc $x = 0$; ce point est donc bien sur la plus courte distance du foyer à la caractéristique. Comme sa vitesse fait un angle ψ avec la normale, on aura donc, pour déterminer sa position, la relation

$$\frac{\rho}{\delta} = \operatorname{tang}^2\psi.$$

Enfin on a

$$\omega = \frac{v}{\sqrt{\rho^2\cos^2\psi + \delta^2\sin^2\psi}},$$

v, ρ, δ se rapportant à un des points donnés. On a donc ainsi résolu complétement la question de la détermination de l'axe spontané glissant. Quant à la translation suivant cet axe, si on la désigne par U, on a

$$u_3 = U\cos\psi;$$

u_3 est le déplacement du foyer; comme c'est une rotation autour de la caractéristique, si l'on appelle δ_0 la distance du foyer à la caractéristique, il vient

$$u_3 = \delta_0\,\omega\sin\psi,$$

d'où

$$U = \delta_0\,\omega\operatorname{tang}\psi,$$

expression qui donne le rapport $\frac{}{\omega} = \delta_0 \operatorname{tang}\psi$. Tout ce qui concerne le déplacement est donc parfaitement déterminé d'après la connaissance des vitesses de trois points en grandeur et en direction.

16. *Cas général.* — Dans le cas général du déplacement que nous étudions, les fonctions X, Y, Z renferment douze paramètres; il ne suffit

donc plus de connaître les vitesses de trois points en grandeur et en direction pour déterminer ces paramètres: il faut quatre groupes de relations, c'est-à-dire avoir les coordonnées et les vitesses de quatre points.

La solution géométrique de la question est tout aussi simple que celle que je viens d'exposer pour le cas d'une figure invariable de forme. Les quatre points dont on connaît les vitesses v_1, v_2, v_3, v_4 sont les sommets d'un tétraèdre; or, si l'on estime les vitesses de ces quatre points suivant une direction normale à l'une des faces, le plan conjugué à cette direction sera déterminé par les rapports des distances des sommets du tétraèdre à ce plan, lesquelles sont proportionnelles aux vitesses ainsi estimées. Cela revient à dire encore que si l'on imagine quatre sphères ayant pour centres les sommets du tétraèdre et pour rayons les vitesses de ces quatre points estimées dans une certaine direction, le plan conjugué à cette direction est le plan d'homothétie des quatre sphères. En répétant la construction pour les directions normales aux quatre faces, on aura quatre plans conjugués. De plus on aura la droite adjointe correspondant à chaque face, en la considérant comme l'intersection des plans conjugués des côtés de cette face. Si tous les plans conjugués se coupent en un même point, il y a un *centre des vitesses;* s'ils se coupent suivant une même droite, il y a un *axe des vitesses;* enfin s'ils sont parallèles à une même direction, le centre des vitesses est à l'infini; dans ce dernier cas, on aura l'axe spontané glissant, en menant un plan perpendiculaire à cette direction parallèle à tous les plans conjugués, et en déterminant le foyer de ce plan, qui sera le pied de l'axe spontané.

Le déplacement de la figure est donc complétement déterminé, puisqu'on pourra trouver la vitesse d'un point quelconque de la figure, ainsi que je l'ai déjà indiqué dans la Note insérée aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (¹). Et réciproquement on pourra dire quels sont les points de la figure doués d'une vitesse assignée d'avance en grandeur et en direction.

17. *Solution analytique de la question.* — Nous prendrons trois axes rectangulaires quelconques; comme ils ne coïncident pas avec les axes principaux de la déformatrice, il faut prendre les formules les plus gé-

(¹) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences,* 6 mai 1872.

nérales du déplacement, qui seront, d'après ce qui a été dit au n° 6 (2),

$$(1)\qquad \begin{cases} X = \varepsilon'_1 x + (C - r')y + (B + q')z + u_1, \\ Y = (C + r')x + \varepsilon'_2 y + (A - p')z + u_2, \\ Z = (B - q')x + (A + p')y + \varepsilon'_3 z + u_3, \end{cases}$$

et nous aurons quatre groupes semblables à celui-ci, ce qui fera bien douze équations pour déterminer les douze quantités ε'_1, ε'_2, ε'_3, p', q', r', A, B, C, u_1, u_2, u_3, et, par suite, ε_1, ε_2, ε_3, p, q, r et les directions des déformations principales.

Soient donc (X_i, Y_i, Z_i), (x_i, y_i, z_i) les vitesses composantes et les coordonnées des quatre points donnés; l'indice i pouvant prendre les quatre valeurs 1, 2, 3, 4, la considération des quatre vitesses composantes suivant l'axe des x fournira un premier groupe de quatre équations, telles que

$$(2)\qquad X_i = \varepsilon'_1 x_i + (C - r')y_i + (B + q')z_i + u_1 \; (i = 1, 2, 3, 4).$$

Le déterminant

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}$$

représente, comme on sait, six fois le volume V du tétraèdre des quatre points; et si l'on désigne par f_i l'aire de la face opposée au sommet (x_i, y_i, z_i), par $(\lambda_i, \mu_i, \nu_i)$ les cosinus des angles de la normale n_i à cette face avec les axes, on déduira facilement de l'expression du déterminant

$$V = \tfrac{1}{3}\Sigma x_i \lambda_i f_i = \tfrac{1}{3}\Sigma y_i \mu_i f_i = \tfrac{1}{3}\Sigma z_i \nu_i f_i.$$

De plus les déterminants partiels qui multiplient les termes de la quatrième colonne verticale représentent six fois les volumes des tétraèdres ayant pour sommet commun l'origine et pour bases les quatre faces f_i du tétraèdre des quatre points; de sorte que, si δ_i désigne la distance de l'origine à la face f_i, chacun de ces déterminants partiels représentera l'une des quatre valeurs de $2 f_i \delta_i$, et, par suite, on aura encore

$$V = \tfrac{1}{3}\Sigma f_i \delta_i;$$

ceci rappelé, la résolution des équations du groupe (2) donnera

$$\varepsilon'_1 = \frac{1}{3V}\Sigma X_i\lambda_i f_i, \quad C - r' = \frac{1}{3V}\Sigma X_i\mu_i f_i, \quad B + q' = \frac{1}{3V}\Sigma X_i\nu_i f_i,$$

$$u_1 = \frac{1}{3V}\Sigma X_i\delta_i f_i.$$

En résolvant de même les équations des deux autres groupes Y_i, Z_i, et combinant au besoin les solutions, on aura, en introduisant les quatre hauteurs h_i du tétraèdre et remplaçant $3V$ par $f_i h_i$,

$$(3)\qquad \begin{cases} u_1 = \sum X_i \dfrac{\delta_i}{h_i}, \\ u_2 = \sum Y_i \dfrac{\delta_i}{h_i}, \\ u_3 = \sum Z_i \dfrac{\delta_i}{h_i}; \end{cases}$$

$$(4)\qquad \begin{cases} \varepsilon'_1 = \sum \dfrac{\lambda_i X_i}{h_i}, \\ \varepsilon'_2 = \sum \dfrac{\mu_i Y_i}{h_i}, \\ \varepsilon'_3 = \sum \dfrac{\nu_i Z_i}{h_i}; \end{cases}$$

$$(5)\qquad \begin{cases} A = \sum \left[\dfrac{1}{h_i}(\mu_i Z_i + \nu_i Y_i)\right], \\ B = \sum \left[\dfrac{1}{h_i}(\nu_i X_i + \lambda_i Z_i)\right], \\ C = \sum \left[\dfrac{1}{h_i}(\lambda_i Y_i + \mu_i X_i)\right]; \end{cases}$$

$$(6)\qquad \begin{cases} p' = \sum \left[\dfrac{1}{h_i}(\mu_i Z_i - \nu_i Y_i)\right], \\ q' = \sum \left[\dfrac{1}{h_i}(\nu_i X_i - \lambda_i Z_i)\right], \\ r' = \sum \left[\dfrac{1}{h_i}(\lambda_i Y_i - \mu_i X_i)\right]. \end{cases}$$

Nous avons donc ainsi des expressions très-symétriques des paramètres du déplacement en fonction des vitesses données et des éléments du tétraèdre des quatre points.

18. *Discussion des expressions des u_j.* — Il faut d'abord savoir à quel type de déplacement se rattache le cas proposé; pour cela, il faut avoir recours aux expressions des composantes u_j de la vitesse de translation de l'origine ($j = 1, 2, 3$).

Pour qu'il y ait un *centre des vitesses,* il faut pouvoir déterminer un point tel, que ses distances δ_i aux faces du tétraèdre donné vérifient les trois équations

$$u_j = 0,$$

et aussi la relation

$$\Sigma f_i \delta_i = 3V,$$

ou

$$\sum \frac{\delta_i}{h_i} = 1;$$

de sorte que, en prenant pour inconnues les rapports $\frac{\delta_i}{h_i}$, le dénominateur commun des valeurs de ces inconnues sera le déterminant

$$\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 & 1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 & 1 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 & 1 \\ X_4 & Y_4 & Z_4 & 1 \end{vmatrix} = 6V';$$

si l'on convient de regarder les composantes des vitesses comme des coordonnées orthogonales, V' sera le volume d'un tétraèdre dont les sommets (X_i, Y_i, Z_i) seront parfaitement déterminés, et dont on connaîtra, par conséquent, les faces f'_i, les hauteurs h'_i et les distances δ'_i de l'origine aux faces f'_i.

Cela posé, si V' n'est pas nul, il y aura un *centre de vitesse,* et il sera déterminé par les quatre équations

$$\frac{\delta_i}{h_i} = \frac{\delta'_i}{h'_i} \, (i = 1, 2, 3, 4);$$

mais, si $V' = 0$, on doit avoir $h'_i = 0$, et alors, si les δ'_i sont tous nuls, il y aura un *axe des vitesses,* tandis que, si l'un au moins est différent de zéro, le centre des vitesses passe à l'infini.

19. L'équation de la déformatrice rapportée aux axes actuels est

$$\varepsilon'_1 x^2 + \varepsilon'_2 y^2 + \varepsilon'_3 z^2 + 2Ayz + 2Bzx + 2Cxy = 1;$$

si nous voulons la rapporter à ses axes principaux, qui sont les directions des déformations principales, on a à résoudre l'équation du troisième degré en ε

$$\begin{vmatrix} \varepsilon'_1 - \varepsilon & C & B \\ C & \varepsilon'_2 - \varepsilon & A \\ B & A & \varepsilon'_3 - \varepsilon \end{vmatrix} = 0;$$

les trois racines de cette équation sont les déformations principales, et, une fois déterminées, elles fourniront les directions des axes principaux.

Quelques-uns des coefficients de l'équation du troisième degré en ε s'expriment assez simplement en fonction des données; telle est, par exemple, la somme

$$\varepsilon'_1 + \varepsilon'_2 + \varepsilon'_3 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3.$$

On trouvera que cet invariant représente *la somme des rapports des quatre vitesses données estimées normalement aux faces, aux quatre hauteurs correspondantes du tétraèdre*. On trouverait de même que *le carré de la vitesse angulaire ω est égal à la somme des carrés des rapports des quatre vitesses données estimées parallèlement aux faces du tétraèdre, aux quatre hauteurs correspondantes, plus la somme des doubles produits de ces mêmes rapports deux à deux par les cosinus des angles formés par les normales aux plans déterminés par les vitesses et les normales aux faces.*

On voit donc que l'on peut déterminer avec une grande facilité tous les éléments du déplacement infiniment petit de la figure, dès que l'on connaît les vitesses de quatre de ses points en grandeur et en direction.

20. *Déformation d'une surface réglée à génératrices articulées.* — Pour donner un autre exemple de la détermination des paramètres du déplacement d'une figure d'après la connaissance de certaines conditions, considérons une surface réglée qui se déforme homographiquement, et cherchons quelle doit être la loi de déformation pour que deux points situés sur une même génératrice restent à une distance invariable l'un de l'autre. On a un exemple de ce genre de déformation dans ces petits systèmes de tiges articulées ayant à peu près la forme d'un cône tronqué, et dont on se sert pour entourer les vases de fleurs (cache-pots).

Soit, à l'instant t,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=k^2$$

l'équation d'un hyperboloïde à une nappe; au bout du temps $t+dt$, les points qui sont actuellement sur cette surface seront sur une surface voisine

$$\frac{x}{a^2}(x+\mathrm{X}\,dt)+\frac{y}{b^2}(y+\mathrm{Y}\,dt)-\frac{z}{c^2}(z+\mathrm{Z}\,dt)=k\left(k+\frac{dk}{dt}dt\right);$$

les fonctions linéaires X, Y, Z sont représentées par les formules générales

$$\left\{\begin{aligned}\mathrm{X}&=\varepsilon_1 x+(\mathrm{C}-r)y+(\mathrm{B}+q)z,\\ \mathrm{Y}&=(\mathrm{C}+r)x+\varepsilon_2 y+(\mathrm{A}-p)z,\\ \mathrm{Z}&=(\mathrm{B}-q)x+(\mathrm{A}+p)y+\varepsilon_3 z,\end{aligned}\right.$$

en considérant les vitesses relatives au centre de la surface que l'on pourra supposer fixe.

Les équations d'une génératrice de la surface sont

$$(\mathrm{G})\qquad\left\{\begin{aligned}\frac{y}{b}-\frac{z}{c}&=\lambda\left(k-\frac{x}{a}\right),\\ \frac{y}{b}+\frac{z}{c}&=\frac{1}{\lambda}\left(k+\frac{x}{a}\right).\end{aligned}\right.$$

Il est aisé de voir que le plan conjugué de la direction de cette génératrice a pour équation

$$2a\lambda\mathrm{X}+b(1-\lambda^2)\mathrm{Y}+c(1+\lambda^2)\mathrm{Z}=0,$$

et que, par suite, la vitesse d'un point de la génératrice estimée dans la direction de cette génératrice est

$$v\cos\varphi = \frac{2a\lambda X + b(1-\lambda^2)Y + c(1+\lambda^2)Z}{\sqrt{4a^2\lambda^2 + b^2(1-\lambda^2)^2 + c^2(1+\lambda^2)^2}}.$$

Pour satisfaire à la question proposée, il faut rendre cette expression indépendante de la position du point sur la génératrice; pour cela, je remplace X, Y, Z par leurs expressions ci-dessus, et j'élimine y et z de l'expression de $v\cos\varphi$ au moyen des équations de la génératrice; le résultat devra être indépendant de x, ce qui donnera l'équation de condition

$$\begin{aligned} 2a\lambda[2a\lambda\varepsilon_1 + b(1-\lambda^2)(C-r) + c(1+\lambda^2)(B+q)] \\ + b(1-\lambda^2)[2a\lambda(C+r) + b(1-\lambda^2)\varepsilon_2 + c(1+\lambda^2)(A-p)] \\ + c(1+\lambda^2)[2a\lambda(B-q) + b(1-\lambda^2)(A+p) + c(1-\lambda^2)\varepsilon_3] = 0. \end{aligned}$$

Mais cette relation doit être vérifiée, quelle que soit la valeur de λ; de sorte que, comme elle est du quatrième degré en λ, elle se décompose en cinq équations de conditions qui sont les suivantes :

$$\begin{aligned} &b^2\varepsilon_2 - 2bcA + c^2\varepsilon_3 = 0, \\ &acB - abC = 0, \\ &2a^2\varepsilon_1 - b^2\varepsilon_2 + c^2\varepsilon_3 = 0, \\ &acB + abC = 0, \\ &b^2\varepsilon_2 + 2bcA + c^2\varepsilon_3 = 0, \end{aligned}$$

et l'on en déduit à vue

$$A = 0, \quad B = 0, \quad C = 0;$$

ce qui prouve déjà que les axes principaux de la déformatrice coïncident avec les axes principaux de la surface proposée; de plus, on a entre les déformations principales les deux relations

$$\varepsilon_1 a^2 = \varepsilon_2 b^2 = -\varepsilon_3 c^2;$$

de sorte que les formules qui donneront la vitesse d'un point quelconque de la figure seront

$$X = \varepsilon_1 x - ry + qz,$$

$$Y = rx + \frac{a^2\varepsilon_1}{b^2} y - pz,$$

$$Z = -qx + py - \frac{a^2\varepsilon_1}{c^2} z.$$

Avec un mode de déformation indiqué par les formules qui précèdent, deux points, pris à volonté sur une génératrice quelconque de la surface de l'un ou l'autre système de génération, resteront à la même distance. Par suite, les quatre points d'intersection de deux génératrices d'un système avec deux génératrices de l'autre formeront un quadrilatère dont les côtés pourront être articulés, tout en satisfaisant aux formules précédentes du déplacement. Toutefois la nécessité, pour un point commun à deux génératrices de systèmes différents, de se mouvoir à la fois sur les deux génératrices entraîne des relations entre les composantes de la vitesse angulaire; ces relations s'obtiennent très-simplement en identifiant les expressions de la vitesse d'un point commun à deux génératrices de la surface, et l'on trouve pour conditions

$$\frac{p}{a} = \frac{q}{b} = \frac{r}{c\sqrt{-1}};$$

la seule solution acceptable est donc

$$p = 0, \quad q = 0, \quad r = 0,$$

et les formules qui expriment la déformation de la surface réglée sont donc enfin

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon_1 x,$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{a^2\varepsilon_1}{b^2} y,$$

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{a^2\varepsilon_1}{c^2} z.$$

On en conclut, pour la vitesse totale d'un point quelconque de la surface,

$$v = a^2\varepsilon_1 \sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}} = a^2\varepsilon_1 \frac{1}{2}\Delta_1,$$

Δ_1 n'étant autre chose que le paramètre différentiel du premier ordre. *La vitesse est donc normale en chaque point à la surface, qui se déforme, et proportionnelle à la valeur du paramètre différentiel du premier ordre en ce point.*

Comme j'ai supposé le centre de la surface fixe, et que, par suite des liaisons du système, les points de la figure se trouvent toujours sur une surface de même nature, les formules ci-dessus ne renferment qu'un seul paramètre; il suffira donc de connaître une seule vitesse en un point connu pour pouvoir assigner la vitesse d'un autre point quelconque de la figure.