ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

M. NEWENGLOWSKI

Sur les arcs de certaines courbes sphériques

Annales scientifiques de l'É.N.S. 2e série, tome 2 (1873), p. 137-148
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1873_2_2__137_0>

SUR LES

ARCS DE CERTAINES COURBES SPHÉRIQUES,

PAR M. NEWENGLOWSKI,

PROFESSEUR A MONT-DE-MARSAN.

Il existe une relation simple entre l'arc d'une courbe plane et celui de sa perspective sur une sphère dont le centre est dans le plan de la courbe, quand on prend pour point de vue l'une des extrémités du diamètre perpendiculaire à ce plan. Si l'on transforme la courbe plane par rayons vecteurs réciproques, le pôle de transformation étant le centre de la sphère, on peut comparer l'axe de la courbe plane donnée et celui de la perspective de sa transformée; la nouvelle relation est de même forme que la première.

Si l'arc de la courbe plane donnée s'exprime par des intégrales elliptiques, il en sera de même de l'arc des courbes sphériques. Les courbes planes que M. J.-A. Serret a nommées courbes elliptiques de première classe jouissent de cette propriété, que la différence entre leur arc et celui de leur perspective est rectifiable. Ce théorème est la traduction géométrique d'une formule de transformation d'une intégrale elliptique de troisième espèce particulière en une autre de première espèce. Tel est, dans son ensemble, l'objet de la présente Note.

I. — *Formules de transformation.*

Soient $\alpha\mu$ une courbe plane quelconque (*fig.* 1), $\alpha'\mu'$ la courbe inverse, AM, A'M' leurs perspectives sur une sphère (dont nous prendrons le rayon pour unité). Si l'on pose

$$u = \mathrm{O}\mu, \quad u' = \mathrm{O}\mu', \quad \rho = \mathrm{PM}, \quad \rho' = \mathrm{PM}',$$

on aura

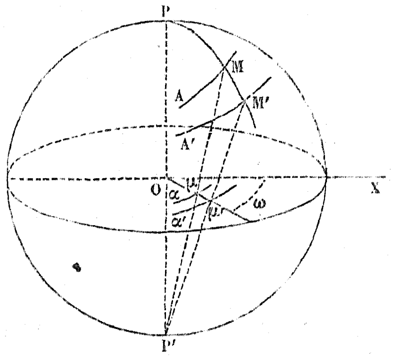
$$u = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\rho, \quad u' = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\rho',$$

et si m est la puissance de la transformation par rayons vecteurs réciproques, on aura

$$(1) \qquad uu' = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\rho \times \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\rho' = m.$$

Cela posé, rapportons les courbes planes à la droite OX prise comme

Fig. 1.



axe polaire, et soit ω l'angle μOX; si l'on appelle σ l'arc de la courbe $\alpha\mu$, s celui de sa perspective, on a

$$d\sigma^2 = du^2 + u^2 d\omega^2,$$
$$ds^2 = d\rho^2 + \sin^2\rho\, d\omega^2.$$

En se rappelant que

$$u = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\rho,$$

on trouve facilement

$$(2) \qquad ds = \frac{2\,d\sigma}{1 + u^2}.$$

Soient pareillement σ', s' les arcs des courbes $\alpha'\mu'$, A'M'; on a d'abord, comme on sait,

$$(3) \qquad d\sigma' = \frac{m\,d\sigma}{u^2};$$

puis, en vertu de (2)

$$ds' = \frac{2\,d\sigma'}{1+u'^2};$$

et par conséquent, en remplaçant $d\sigma'$ et u' par leurs expressions en $d\sigma$ et u,

$$ds' = \frac{2m\,d\sigma}{m^2 + u^2}. \tag{4}$$

Les formules (2) et (4) sont bien de la même forme; il suffit, en effet, de donner à m la valeur numérique 1 pour passer de la formule (4) à la formule (2).

Il faut remarquer, d'ailleurs, que pour $m = \pm 1$ la perspective de la courbe $\alpha'\mu'$ est égale à celle de la courbe $\alpha\mu$. En effet, on passe directement de AM à A'M' au moyen de la relation (1)

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\rho \times \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\rho' = m.$$

Si $m = \pm 1$, les deux courbes AM, A'M' sont évidemment symétriques et les deux courbes inverses de $\alpha\mu$ égales entre elles.

II. — *Application des formules précédentes.*

La courbe plane satisfait à l'équation

$$d\sigma = a\frac{du}{\mathrm{U}},$$

dans laquelle u est le rayon vecteur et U *un radical du deuxième degré portant sur un polynôme du quatrième degré en u.*

Le polynôme du quatrième degré sous le radical U peut avoir cinq formes différentes, que nous partagerons en deux séries.

Première série. — U est de l'une des deux formes suivantes :

$$\mathrm{U} = \sqrt{(u^2 - p^2)(u^2 - q^2)},$$
$$\mathrm{U} = \sqrt{-(u^2 + p^2)(u^2 - q^2)}.$$

Dans ces deux cas, l'arc s' dépendra d'une intégrale de troisième espèce et l'arc σ d'une intégrale de première espèce.

Prenons, par exemple, la première de ces deux formes.

En supposant $p^2 < q^2$, on fera

$$\frac{p^2}{q^2} = e^2 < 1, \quad u = px, \quad \mathrm{X} = \sqrt{(1 - x^2)(1 - e^2x^2)},$$

et l'on aura

$$\frac{du}{\mathrm{U}} = \frac{1}{q}\frac{dx}{\mathrm{X}},$$

et ds sera de la forme

$$ds' = \mathrm{A}\int \frac{dx}{(1+nx^2)\mathrm{X}},$$

A et n étant des constantes faciles à déterminer.

De même pour le second cas.

On a ainsi une infinité de représentations géométriques de l'intégrale de troisième espèce.

Deuxième série. — Le radical U a l'une des trois valeurs suivantes :

$$\mathrm{U} = \sqrt{(u^2+p^2)(u^2-q^2)},$$
$$\mathrm{U} = \sqrt{(u^2+p^2)(u^2+q^2)},$$
$$\mathrm{U} = \sqrt{-(u^2-p^2)(u^2-q^2)}.$$

Dans cette seconde série, l'arc σ est exprimé par une intégrale de première espèce, et l'arc s' par une intégrale de première et une de troisième espèce.

Soit, par exemple,

$$\mathrm{U} = \sqrt{(u^2+p^2)(u^2-q^2)};$$

en posant

$$u^2 = \frac{q^2}{1-x^2}, \quad \frac{p^2}{p^2+q^2} = e^2 < 1,$$

on trouve

$$\frac{du}{\mathrm{U}} = \frac{e}{q}\frac{dx}{\mathrm{X}} \quad \text{et} \quad ds' = \mathrm{A}\,\frac{(1-x^2)\,dx}{(1+nx^2)\mathrm{X}}.$$

Si l'arc σ était donné par la formule

$$d\sigma = a\,\frac{u^2\,du}{\mathrm{U}},$$

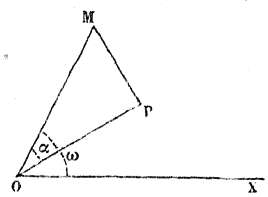
s' serait exprimable au moyen d'une intégrale unique de troisième espèce.

Dans les deux autres cas, le calcul serait tout à fait analogue; mais nous allons étudier plus particulièrement le dernier, qui correspond aux courbes elliptiques (première classe) de M. Serret.

Je rappellerai d'abord la définition géométrique de ces courbes. (*Voir*, par exemple, J.-A. SERRET, *Traité de Calcul différentiel et intégral*, t. II.)

Soit n un nombre entier, fractionnaire ou même incommensurable (*fig.* 2), et construisons le triangle OMP tel que $OP = \sqrt{n}$, $MP = \sqrt{n+1}$;

Fig. 2.



puis imaginons que, le sommet O restant fixe, le triangle varie de telle sorte que le cosinus de l'angle formé par le seul côté variable, avec une droite fixe, soit constamment égal au cosinus de l'angle

$$n\,\mathrm{MOP} - (n+1)\,\mathrm{OMP}.$$

Le point M engendrera une courbe dont l'arc sera exprimable en fonction du rayon vecteur par une intégrale elliptique de première espèce réductible au module $\sqrt{\frac{n}{n+1}}$.

Nous supposerons le centre de notre sphère placé au point O. En conservant toujours les mêmes notations, on a (voir *loc. cit.*)

$$d\sigma = 2\sqrt{n(n+1)}\,\frac{du}{\mathrm{U}},$$

où

$$\mathrm{U} = \sqrt{-u^4 + 2(2n+1)u^2 - 1},$$

et par suite

$$ds' = \frac{4m\sqrt{n(n+1)}}{\mathrm{U}(m^2+u^2)}\,du.$$

Or on peut écrire

$$\mathrm{U} = \sqrt{-(u^2-p^2)(u^2-q^2)},$$

en posant

$$p^2 = 2n+1 - 2\sqrt{n(n+1)},$$
$$q^2 = 2n+1 + 2\sqrt{n(n+1)}.$$

Faisons maintenant

$$\frac{q^2 - p^2}{q^2} = c^2,$$

$$u^2 = q^2(1 - c^2x^2),$$

on aura, en appliquant la formule (4) et posant $\nu = \dfrac{-q^2c^2}{m^2 + q^2}$,

$$ds' = \frac{4m\sqrt{n(n+1)}}{q(m^2+q^2)} \frac{dx}{(1+\nu x^2)\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}}.$$

Posons maintenant $x = \sin\varphi$.

Pour que l'angle φ soit réel, il faut que l'on ait $x^2 < 1$. La formule précédente devient

$$(5) \qquad ds' = \frac{4m\sqrt{n(n+1)}}{q(m^2+q^2)} \frac{d\varphi}{(1+\nu\sin^2\varphi)\sqrt{1-c^2\sin^2\varphi}}.$$

Cela posé, si l'on désigne par e le rapport $\sqrt{\dfrac{n}{n+1}}$ et par α l'angle MOP, on trouve

$$\sin\alpha = \frac{U}{2u\sqrt{n}}$$

et

$$(6) \qquad d\sigma = \sqrt{n}\,\frac{d\alpha}{\sqrt{1-e^2\sin^2\alpha}}.$$

On peut ramener le module c de la formule (5) au module e qui entre dans la formule (6).

On remarque d'abord facilement que les deux relations

$$c = \frac{2\sqrt{e}}{1+e},$$

$$\sin(2\varphi - \alpha) = e\sin\alpha$$

sont satisfaites. Donc, en posant

$$\Delta\varphi = \sqrt{1 - c^2\sin^2\varphi}, \quad \Delta\alpha = \sqrt{1 - e^2\sin^2\alpha},$$

on a, par une transformation bien connue,

$$\frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = \frac{1+e}{2}\frac{d\alpha}{\Delta\alpha},$$

ce que l'on peut d'ailleurs vérifier directement.

Si maintenant, dans (5), on remplace $\sin^2\varphi$ par

$$\frac{1}{2}(1 + e\sin^2\alpha - \cos\alpha\Delta\alpha),$$

on obtient

$$ds' = \frac{4m\sqrt{n(n+1)}(1+e)}{q(m^2+q^2)}\,\frac{d\alpha}{[2+\nu(1+e\sin^2\alpha - \cos\alpha\,\Delta\alpha)]\,\Delta\alpha}.$$

En posant

$$\nu' = \frac{\nu^2(1+e^2+2e)+4\nu e}{4+4\nu},$$

la formule précédente peut s'écrire

$$ds' = \frac{m\sqrt{n(n+1)}(1+e)}{q(m^2+q^2)(1+\nu)}\,\frac{2+\nu+\nu e\sin^2\alpha}{(1+\nu'\sin^2\alpha)\Delta\alpha}\,d\alpha.$$

Enfin, par une transformation facile, ds' peut se mettre définitivement sous la forme suivante :

$$(7)\quad ds' = \frac{m\sqrt{n(n+1)}(1+e)}{q(m^2+q^2)(1+\nu)}\left[\frac{\nu e}{\nu'}\,\frac{d\alpha}{\Delta\alpha} + \frac{(2+\nu)\nu' - \nu e}{\nu'}\,\frac{d\alpha}{(1+\nu'\sin^2\alpha)\Delta\alpha} + \frac{\nu\cos\alpha\,d\alpha}{(1+\nu'\sin^2\alpha}\right].$$

De cette façon, ds' s'exprime par une différentielle elliptique de première espèce, une de troisième (*toutes deux de module e*) et une partie algébrique.

On reconnaît immédiatement que l'intégrale de troisième espèce disparaîtra dans l'expression de s', si l'on choisit m de telle sorte que

$$\nu' = \frac{\nu e}{2+\nu};$$

c'est-à-dire en remplaçant ν' par sa valeur

$$\nu^2 + 2\nu + \frac{4e}{(1+e)^2} = 0.$$

Les racines de cette équation sont

$$\nu_1 = \frac{-2e}{1+e}, \quad \nu_2 = \frac{-2}{1+e}.$$

Si l'on substitue ces valeurs dans l'égalité

$$\nu = -\frac{q^2 c^2}{m^2 + q^2},$$

on trouve pour $\nu = \nu_2$

$$m^2 = q^2 \frac{e - 1}{e + 1},$$

valeur inadmissible; car elle revient à $m^2 = -1$.

Pour $\nu = \nu_1$, on trouve

$$m^2 = 1 \quad \text{ou} \quad m = \pm 1.$$

Donc l'arc de la perspective de la courbe elliptique s'exprime par l'intégrale elliptique de troisième espèce seule.

Dans la valeur générale de ds', faisons $m = 1$. Si l'on remarque que, pour cette valeur de m, $\nu' = -e^2$, on aura, toutes réductions faites,

$$ds = \sqrt{n}\left[\frac{d\alpha}{\Delta\alpha} - \frac{d(e \sin\alpha)}{1 - e^2 \sin^2\alpha}\right];$$

Or (6)

$$d\sigma = \sqrt{n}\,\frac{d\alpha}{\Delta\alpha};$$

donc

$$d(s - \sigma) = -\sqrt{n}\,\frac{d(e \sin\alpha)}{1 - e^2 \sin^2\alpha},$$

ou, en posant

$$\cos\psi = e \sin\alpha,$$

$$d(s - \sigma) = \sqrt{n}\, d(\log \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\psi),$$

ou enfin

$$(8) \qquad s - \sigma = \sqrt{n} \log \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\psi + C.$$

Prenons pour origines des arcs s et σ les points correspondant à la valeur o de l'angle α.

Pour $\alpha = 0$,

$$\cos\psi = 0 \quad \text{ou} \quad \psi = \frac{\pi}{2};$$

donc

$$0 = \sqrt{n} \log \operatorname{tang} \frac{\pi}{4} + C;$$

par suite $C = 0$, et l'on aura simplement

$$s = \sigma + \sqrt{n} \log \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} \psi. \tag{9}$$

On peut encore remarquer que la relation

$$\cos\psi = e \sin\alpha = \sin(2\varphi - \alpha)$$

donne

$$\psi = \frac{\pi}{2} + \alpha - \varphi,$$

et par conséquent (9) peut s'écrire

$$s = \sigma + \sqrt{n} \log \operatorname{tang} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} - \varphi\right), \tag{10}$$

les angles α et φ étant liés par l'équation

$$\sin(2\varphi - \alpha) = e \sin\alpha.$$

Les formules précédentes expriment que la différence $s - \sigma$ est rectifiable; elles s'appliquent d'ailleurs aux perspectives des transformées d'une courbe elliptique par rayons vecteurs réciproques, en prenant pour puissance $m = \pm 1$. Enfin on peut remarquer que le cas de $n = 1$ correspond à la lemniscate.

Des calculs précédents résulte l'identité suivante :

$$\frac{2(1-e)}{1+e} \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\left(1 - \frac{2e}{1+e}\sin^2\varphi\right)\sqrt{1 - \frac{4e}{(1+e)^2}\sin^2\varphi}}$$
$$= \int_0^\alpha \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - e^2\sin^2\alpha}} + \log \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} - \varphi\right),$$

avec la condition

$$\sin(2\varphi - \alpha) = \sin\alpha \quad (e < 1).$$

Nous avons rejeté la valeur $m^2 = -1$, comme ne représentant rien géométriquement; mais, comme nous n'avons opéré que par des identités, on peut néanmoins continuer le calcul avec cette valeur. D'ailleurs m disparaît comme facteur, et l'on a l'identité suivante :

$$\frac{2(1-e)}{1+e}\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\left(1-\frac{2}{1+e}\sin^2\varphi\right)\sqrt{1-\frac{4e}{(1+e)^2}\sin^2\varphi}}$$
$$=\log\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)-e\int_0^{\alpha}\frac{d\alpha}{\sqrt{1-e^2\sin^2\alpha}},$$

avec la même condition que plus haut

$$\sin(2\varphi-\alpha)=e\sin\alpha.$$

III. — *Autres exemples.*

J'indiquerai encore deux cas intéressants : celui de l'hyperbole et celui de l'ovale de Cassini.

Hyperbole. — Soit une hyperbole ayant son centre au centre de la sphère. On peut choisir la forme d'équation suivante :

$$u^2=a^2\operatorname{coséc}^2\varphi+b^2\cot^2\varphi;$$

en posant

$$x=a\operatorname{coséc}\varphi,\quad y=b\cot\varphi,$$

on aura tous les points de la moitié d'une branche en faisant varier φ de $\frac{\pi}{2}$ à o.

On trouve aisément, en suivant toujours les mêmes notations,

$$d\sigma=-\frac{\sqrt{a^2+b^2-a^2\sin^2\varphi}}{\sin^2\varphi}\,d\varphi,$$

$$ds'=-\frac{2mk}{a}\,\frac{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}{1+n\sin^2\varphi}\,d\varphi,$$

avec

$$k=\frac{a^2}{a^2+b^2},\quad n=\frac{m^2-b^2}{a^2+b^2}.$$

Dans l'expression de s', il entrera une intégrale de troisième espèce et une de première, si l'on choisit pour m la valeur

$$m=\sqrt{b^2-a^2};$$

l'intégrale elliptique de troisième espèce disparaît, et l'on a

$$s' = \frac{2\sqrt{b^2 - a^2}}{\sqrt{b^2 + a^2}} \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}},$$

en comptant s' à partir du point P' de la sphère, qui correspond à l'infini dans le plan.

Pour que la transformation précédente soit possible, il faut

$$b^2 > a^2,$$

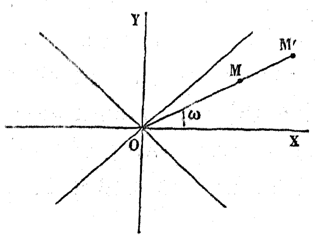
c'est-à-dire que l'angle 2α des asymptotes de l'hyperbole soit obtus. La valeur de s' peut se mettre sous la forme

$$(11) \qquad s' = 2\sqrt{-\cos^2\alpha} \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \cos^2\alpha \sin^2\varphi}}.$$

On peut remarquer que, pour une même valeur de φ, cette intégrale ne dépend que de α et reste la même pour toutes les hyperboles semblables. C'est ce qu'il est facile de démontrer *a priori*.

Considérons une hyperbole quelconque, et soit M un point quelconque de la courbe; si l'angle $\text{MOX} = \omega$ reste invariable, tous les

Fig. 3.



points des hyperboles homothétiques situés sur OM correspondent au même angle φ; car on a

$$\operatorname{tang}\omega = \frac{b}{a} \frac{\cos^2\varphi}{\sin\varphi}.$$

Cela posé, transformons une quelconque de ces hyperboles par rayons vecteurs réciproques en prenant pour puissance

$$m = \sqrt{b^2 - a^2} = a\sqrt{\operatorname{tang}^2\alpha - 1} \quad (\text{si } b > a),$$

ou plus généralement

$$m = af(\alpha).$$

Au point M correspondra M', tel que

$$\overline{\mathrm{OM'}}^2 \times \overline{\mathrm{OM}}^2 = a^2[f(\alpha)]^2;$$

or

$$\frac{1}{\overline{\mathrm{OM}}^2} = \frac{\cos^2\omega}{a^2} - \frac{\sin^2\omega}{b^2};$$

donc

$$\overline{\mathrm{OM'}}^2 = [f(\alpha)]^2\left(\cos^2\omega - \frac{\sin^2\omega}{\tang^2\alpha}\right).$$

La position de M' est donc indépendante de celle du point M, et par suite la perspective de la courbe, lieu de M', reste invariable.

Remarquons (11) qu'il y a une infinité de courbes sphériques dont l'arc représente, à un facteur constant près, une intégrale elliptique de première espèce, à module moindre que $\sqrt{\frac{1}{2}}$.

Ovale de Cassini. — Pour terminer cette Note, déjà trop longue, j'ajouterai, sans développer les calculs, qui ne présentent d'autre difficulté que leur longueur, que la perspective sphérique d'une lemniscate ou d'une ovale quelconque de Cassini, ou plus généralement d'une transformée quelconque de ces courbes, par rayons vecteurs réciproques, jouit absolument des mêmes propriétés que ces courbes, savoir : qu'un arc (lemniscate) ou la somme et la différence de deux arcs (ovale) s'expriment par une intégrale elliptique qui est de troisième espèce sur la sphère, au lieu d'être de première espèce, comme dans le plan.