

# ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

GASTON DARBOUX

**Sur un mode de transformation des figures et son application à la construction de la surface du deuxième ordre déterminée par neuf points**

*Annales scientifiques de l'É.N.S. 1<sup>re</sup> série*, tome 6 (1869), p. 61-68

[http://www.numdam.org/item?id=ASENS\\_1869\\_1\\_6\\_61\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1869_1_6_61_0)

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1869, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

SUR UN MODE  
DE  
TRANSFORMATION DES FIGURES

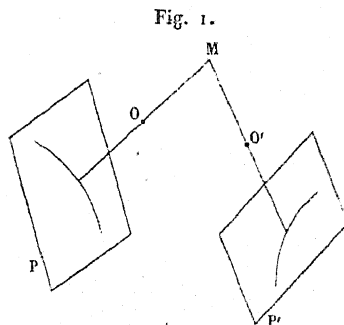
ET SON APPLICATION

A LA CONSTRUCTION DE LA SURFACE DU DEUXIÈME ORDRE  
DÉTERMINÉE PAR NEUF POINTS,

PAR G. DARBOUX,  
ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE.

I.

Soient deux points  $O, O'$  pris sur une surface du second ordre (*fig. 1*). Par ces deux points menons deux droites  $OM, O'M$  se coupant sur la surface. Il est clair qu'à une droite  $OM$  correspondra en général une



droite  $O'M$  et une seule, en sorte qu'à un cône ayant le point  $O$  pour sommet correspondra un cône ayant le point  $O'$  pour sommet et ces deux cônes couperont suivant la même ligne la surface du second ordre.

Maintenant faisons correspondre au point  $O$  un plan fixe  $P$ , et au

point  $O'$  un plan fixe  $P'$ . Tout cône ayant son sommet en  $O$  sera coupé par le plan  $P$  suivant une ligne, et le cône correspondant ayant son sommet au point  $O'$  sera coupé suivant une autre ligne par le plan  $P'$ . Ces deux lignes, situées dans les plans  $P, P'$ , peuvent être considérées comme correspondantes, et l'on obtient ainsi un mode de transformation des figures planes, dans lequel à un point de l'une des figures correspond un seul point de l'autre.

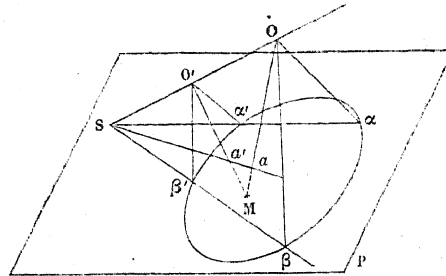
Pour déterminer la propriété fondamentale de ce mode de transformation, nous remarquerons qu'à une droite dans le plan  $P$  correspond une conique dans le plan  $P'$ , et réciproquement. En effet, par le point  $O$  et par la droite faisons passer un plan, ce plan coupera la surface du second ordre suivant une conique; le cône ayant son sommet en  $O'$  et passant par cette conique sera du second ordre et coupera le plan  $P'$  suivant une conique correspondant à la droite considérée. On a donc la réalisation géométrique du mode de transformation étudié pour la première fois par Magnus (*Journal de Crelle*, t. IV), dans lequel à un point répond un seul point et à une droite répond une conique. M. Transon, dans deux articles très-intéressants des *Nouvelles Annales de Mathématiques*, avait montré que la *projection gauche* d'une figure réalise ce mode de transformation. M. Hirst l'a étudié au moyen de la théorie des faisceaux homographiques. Le nouveau mode que je propose permet de réaliser la transformation la plus générale considérée par Magnus, puisqu'il y a neuf constantes dans l'équation de la surface, six dans celles des deux plans, et qu'on peut prendre arbitrairement sur la surface les points  $O, O'$ .

Si, laissant invariables les autres parties de la figure, on déplace le plan  $P'$ , toutes les figures obtenues dans les différents plans  $P'$  seront les perspectives les unes des autres, puisque ce sont des sections planes de cônes ayant leurs sommets en  $O'$ . On pourra donc faire coïncider le plan  $P$  et le plan  $P'$ , et même prendre une position particulière du plan  $P$ . Les résultats les plus généraux se déduiraient de ceux que nous obtiendrons ainsi, en faisant la perspective de l'une ou des deux figures correspondantes.

Soit  $S$  (*fig. 2*) le point de rencontre de la droite  $OO'$  et du plan  $P$ . Un point  $M$  de la surface du second ordre donnera deux points  $a, a'$  situés sur une droite passant par le point  $S$ . Ces deux points coïncideront quand

le point M sera dans le plan P, et, par suite, le lieu des points qui coïncident avec leurs homologues est la section de la surface dans le plan P. Les points  $\alpha$ ,  $\alpha'$  forment sur chaque droite  $Saa'$  des divisions homographiques dont les points doubles sont les intersections de la droite et de la conique que j'appellerai *conique principale*.

Fig. 2.



A un point  $\alpha$  ne correspond en général qu'un point  $\alpha'$ , parce que la droite  $O\alpha$  ne coupe la surface qu'en un point. Mais si la droite  $O\alpha$  est située tout entière sur la surface, à un point  $\alpha$  correspondent une infinité de points  $\alpha'$  en ligne droite.

Considerons les plans tangents à la surface en O et en  $O'$ ; ils coupent la surface suivant des droites  $O\alpha$ ,  $O\beta$ ,  $O'\alpha'$ ,  $O'\beta'$ .  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\alpha'$ ,  $\beta'$  désignent les intersections de ces droites par le plan P. Il est clair que les droites  $\alpha\alpha'$ ,  $\beta\beta'$  vont passer par le point S.

Au point  $\alpha$  considéré comme appartenant à la première figure correspondent tous les points de la droite  $S\alpha$ , etc. On peut donc former le tableau suivant :

Première figure.	Deuxième figure.	Deuxième figure.	Première figure.
Points $\alpha$	Droites $S\alpha'$	Points $\alpha'$	Droites $S\alpha$
» $\beta$	» $S\beta'$	» $\beta'$	» $S\beta$
» S	» $\alpha'\beta'$	» $\gamma'$	» $\alpha\beta$

Donc, à toute droite de la première figure, correspond une conique passant par les trois points  $\alpha'$ ,  $\beta'$ , S et par les deux points d'intersection de la droite et de la conique principale; et réciproquement, à toute droite de la seconde figure correspond, dans la première, une conique passant par les points  $\alpha$ ,  $\beta$ , S.

Voici du reste un tableau, s'appliquant à toutes les courbes, et que

nous empruntons à l'article de M. Hirst. Désignons par  $n, n'$  les ordres des courbes correspondantes, par  $a, b, s, a', b', s'$  le nombre de fois qu'elles passent la première par les points  $\alpha, \beta, S$ , la seconde par les points  $\alpha', \beta', S$ . On a

$$\begin{aligned} a' &= n - a - s, & a &= n' - a' - s', \\ b' &= n - b - s, & b &= n' - b' - s', \\ s' &= n - a - b, & s &= n' - a' - b', \\ n' &= 2n - a - b - s, & n &= 2n' - a' - b' - s'. \end{aligned}$$

Comme application considérons une droite passant par le point  $\alpha$

$$n = 1, \quad a = 1, \quad b = 0,$$

on trouve

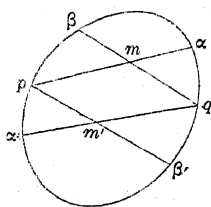
$$n' = 1, \quad a' = 0, \quad b' = 1, \quad s' = 0.$$

Ainsi à ces droites passant par le point  $\alpha$  correspondent des droites passant par le point  $\beta'$ , ce qui du reste est évident géométriquement.

Il suffit de considérer une génératrice rectiligne de la surface. Si l'on fait passer des plans par cette génératrice et par les points  $O, O'$ , ils couperont le plan  $P$  suivant les deux droites correspondantes  $\alpha p, \beta' p$ . Ces droites se couperont en  $p$ , trace de la génératrice rectiligne sur la conique principale.

Il résulte de là un moyen très-simple de trouver, par des constructions effectuées dans le plan, l'homologue d'un point. Soit en effet un point  $m$  (*fig. 3*). A la droite  $\alpha m$  correspond la droite  $\beta' p$  venant couper

Fig. 3.



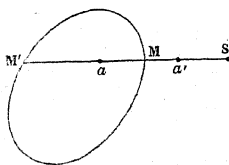
la première au point  $p$  situé sur la conique principale. De même à la droite  $\beta m$  correspond la droite  $\alpha' q$ . Le point d'intersection  $m'$  des droites  $\alpha' q, \beta' p$  est donc l'homologue du point  $m$ , et la droite  $mm'$  devra aller passer par le point  $S$ .

Considérons maintenant deux courbes correspondantes passant l'une au point  $m$ , l'autre au point  $m'$ . Il sera facile de déduire la tangente en  $m'$  de la tangente en  $m$ . Soit en effet le point  $M$  de la surface qui fournit le couple de points homologues  $m, m'$ . Dans le voisinage de ce point  $M$ , on peut remplacer la surface par son plan tangent. Ce plan tangent, déterminé par les deux génératrices  $Mp, Mq$ , a pour trace  $pq$ . A une droite passant par le point  $M$  et située dans le plan tangent, correspondront deux droites passant par les points  $m, m'$  et se coupant sur la droite  $pq$ , et lorsqu'on aura l'une d'elles on déterminera l'autre immédiatement. Ainsi les tangentes aux points correspondants  $m, m'$  vont se rencontrer sur la droite  $pq$ .

Nous ne nous étendrons pas davantage sur ce mode de transformation des figures. Il a été étudié par plusieurs géomètres, mais le nouveau moyen que nous proposons pour le réaliser nous paraît offrir un avantage. On peut se rendre compte, géométriquement et sans difficulté, de tous les cas particuliers que présente la transformation de Magnus.

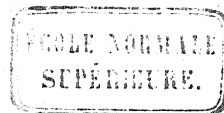
Ainsi M. Hirst a étudié très-complètement l'inversion quadratique. C'est une généralisation de la méthode de transformation par rayons vecteurs réciproques. On considère un point  $S$  et une conique. Par le point  $S$  (*fig. 4*) on mène une sécante  $MM'$  et on prend deux points  $a, a'$

Fig. 4.



conjugués harmoniques par rapport aux points  $M, M'$ . Au point  $a$  correspond le point  $a'$ , et inversement au point  $a'$  le point  $a$ . Pour obtenir cette méthode de transformation nous n'aurons qu'à prendre pour plan  $P$  le plan polaire d'un point de la droite  $oo'$ . Alors deux points correspondants  $a, a'$  forment une involution sur  $aa'$  et on a bien l'inversion quadratique telle qu'elle a été proposée par M. Hirst.

Par exemple, si l'on prend une sphère, deux points  $o, o'$  à l'extrémité d'un diamètre et pour plan  $P$  un plan perpendiculaire à  $oo'$ , on obtient la transformation par rayons vecteurs réciproques.



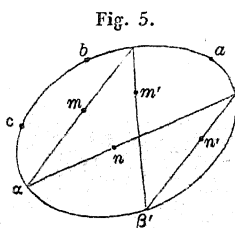
## II.

CONSTRUCTION DE LA SURFACE DU DEUXIÈME ORDRE DÉTERMINÉE PAR NEUF POINTS.

1. *Construction de la surface du deuxième ordre passant par une droite (o) et par six points  $o', a, b, c, M, N$ .*

Nous prenons pour les pôles de transformation un point  $o$  situé sur la droite (o) et le point  $o'$ ; pour plan P de la transformation nous prenons le plan des trois points  $a, b, c$ . La question est donc ramenée à la suivante :

*Déterminer les éléments de la transformation, connaissant le point  $\alpha$  [où la droite (o) rencontre le plan P], trois autres points  $a, b, c$  de la conique principale, et deux couples correspondants  $m, m', n, n'$  (fig. 5).*



Remarquons qu'aux droites  $\alpha m, \alpha n$  doivent répondre des droites allant se couper en un point  $\beta'$  de la conique principale. Ces droites doivent d'ailleurs passer par les points  $m', n'$ . Il faut donc résoudre le problème suivant :

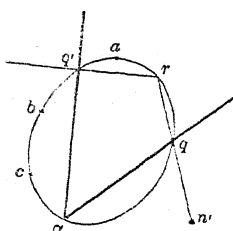
*Mener par quatre points fixes  $\alpha, a, b, c$  une conique rencontrant les droites fixes  $\alpha m, \alpha n$  en des points tels, que, si l'on joint ces deux points aux deux points donnés  $m', n'$ , les droites de jonction aillent se couper sur la conique.*

Ce problème se résout avec une grande facilité de la manière suivante :

Si l'on considère une des coniques passant par quatre points fixes et coupant les droites fixes en  $q, q'$ , la droite  $n'q$  ira couper la conique en un point  $r$  variable, et la droite  $rq'$  menée par les deux points mobiles  $r, q'$  ira passer par un point fixe.

Ce point fixe se détermine avec la règle, il suffit de prendre parmi les coniques variables celles qui se réduisent à des droites.

Fig. 6.



D'après cela, la droite  $q'r$  (fig. 6) devant passer par ce point fixe et par un autre point fixe  $m'$ , est complètement déterminée; le point  $q'$  donne un cinquième point de la conique principale.

La conique principale étant déterminée, le problème ne présente plus de difficulté. On a une droite, une conique de la surface et deux points, et par conséquent cinq points de toute section plane contenant les deux points.

2. *Construire la surface du deuxième ordre déterminée par neuf points quelconques.*

On sait que toutes les surfaces, passant par huit points, se coupent suivant une ligne du quatrième ordre, et, par suite, que leurs sections par un plan fixe passent toutes par quatre points de ce plan. Soit en particulier le plan P, contenant trois des huit points  $a, b, c$ : les sections des surfaces par ce plan se coupent aux trois points  $a, b, c$  et en un quatrième point qui est inconnu. Supposons que l'on sache déterminer ce quatrième point; alors, si des neuf points donnés, on retranche successivement deux points, on aura deux systèmes de huit points qui fourniront dans le plan P deux points  $x, y$ . La conique des cinq points  $a, b, c, x, y$  appartiendra donc à la surface cherchée, et le problème pourra être considéré comme résolu. Nous sommes donc ramenés au problème suivant :

*Étant donnés huit points, déterminer dans le plan de trois d'entre eux le quatrième point qui appartient à toutes les surfaces du second degré passant par les huit points.*



Ce problème se résout au moyen du premier, on n'a qu'à considérer deux surfaces particulières passant par six des huit points et par la ligne qui joint les deux autres, et il ne reste plus qu'à résoudre le problème connu :

*Étant données deux coniques déterminées par cinq points et ayant trois points communs, déterminer leur quatrième point d'intersection, ce qui se fait avec la règle.*