

# ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

F. DIDON

## Sur une équation aux dérivées partielles

*Annales scientifiques de l'É.N.S. 1<sup>re</sup> série*, tome 6 (1869), p. 377-380

[http://www.numdam.org/item?id=ASENS\\_1869\\_1\\_6\\_\\_377\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1869_1_6__377_0)

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1869, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# SUR UNE ÉQUATION AUX DÉRIVÉES PARTIELLES,

PAR M. DIDON,  
DOCTEUR ÈS SCIENCES.

---

On connaît le rôle important que joue dans la théorie des fonctions de Laplace l'équation aux dérivées partielles de Legendre

$$(1) \quad \frac{d}{dx} \left[ (1-x^2) \frac{dz}{dx} \right] + \frac{d}{d\alpha} \left( \alpha^2 \frac{dz}{d\alpha} \right) = 0,$$

qui admet pour solution l'expression  $(1 - 2\alpha x + \alpha^2)^{-\frac{1}{2}}$ ; mais je ne sais pas qu'on ait donné d'autres solutions de cette équation. On peut, cependant, en trouver facilement de très-générales de la manière suivante. Si l'on cherche à satisfaire à l'équation (1) par l'expression

$$(2) \quad z = R_0(x) + \alpha R_1(x) + \dots + \alpha^n R_n(x) + \dots,$$

on voit de suite que  $R_n(x)$  doit vérifier l'équation différentielle

$$(3) \quad \frac{d}{dx} \left[ (1-x^2) \frac{dR_n(x)}{dx} \right] + n(n+1)R_n(x) = 0,$$

dont l'intégrale complète est

$$R_n(x) = C_n X_n(x) + C'_n Q_n(x),$$

$C_n$  et  $C'_n$  étant des constantes quelconques,  $X_n(x)$  la fonction  $X_n$  de

Legendre, et  $Q_n(x)$  représentant l'expression  $\int_{-1}^{+1} \frac{X_n(t) dt}{x-t}$ ; par conséquent, la quantité

$$(4) \quad z = \sum C_n \alpha^n X_n + \sum C'_n \alpha^n Q_n(x),$$

dans laquelle les sommations peuvent s'étendre de  $n = 0$  à  $n = +\infty$ , est une solution de l'équation (1). Cette quantité se réduit, dans le cas où les  $C$  sont tous égaux à 1, et où les  $C'$  sont nuls, à

$$(1 - 2\alpha x + \alpha^2)^{-\frac{1}{2}} = \omega,$$

et, dans le cas, au contraire, où les  $C'$  sont égaux et où les  $C$  sont nuls, elle se réduit, à un facteur constant près, à

$$(5) \quad \omega \log \frac{(x - \alpha)\omega + 1}{(x - \alpha)\omega - 1},$$

expression qui est la fonction génératrice des fonctions  $Q_n(x)$ . En effet, dans la dernière hypothèse, on a

$$\sum C'_n \alpha^n Q_n(x) = C' \int_{-1}^{+1} \frac{\sum \alpha^n X_n(t)}{x-t} dt = C' \int_{-1}^{+1} \frac{(1 - 2\alpha t + \alpha^2)^{-\frac{1}{2}}}{x-t} dt,$$

et il suffit de calculer l'intégrale précédente pour retrouver l'expression (5) donnée plus haut. Mais on peut effectuer les deux sommations qui entrent dans l'expression (4) de  $z$ , même dans le cas où les  $C$  et les  $C'$  sont quelconques. Pour cela, on n'a qu'à employer la formule de Laplace

$$X_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (x - \cos \varphi \sqrt{x^2 - 1})^n d\varphi,$$

qui donne

$$\begin{aligned} \sum C_n \alpha^n X_n(x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sum C_n (\alpha x - \alpha \cos \varphi \sqrt{x^2 - 1})^n d\varphi \\ &= \int_0^\pi \varphi (\alpha x - \alpha \cos \varphi \sqrt{x^2 - 1}) d\varphi \end{aligned}$$

et

$$\Sigma C_n x^n Q_n(x) = \int_{-1}^{+1} \frac{dt}{x-t} \int_0^\pi \psi(\alpha t - \alpha \cos \varphi \sqrt{x^2-1}) d\varphi,$$

où les fonctions  $\varphi$  et  $\psi$  ne sont assujetties qu'à la condition que  $\varphi(z)$  et  $\psi(z)$  puissent se mettre sous la forme  $A + A_1 z + A_2 z^2 + \dots$ .

On peut aussi chercher à satisfaire à l'équation (1) par l'expression

$$(6) \quad z = \frac{1}{\alpha} S_0(x) + \dots + \frac{1}{\alpha^{n+1}} S_n(x) + \dots;$$

on trouve alors que  $S_n(x)$  doit vérifier l'équation différentielle (3), ce qui donne les nouvelles solutions

$$\frac{1}{\alpha} \int_0^\pi \chi \left( \frac{x - \cos \varphi \sqrt{x^2-1}}{\alpha} \right) d\varphi$$

et

$$\frac{1}{\alpha} \int_{-1}^{+1} \frac{dt}{x-t} \int_0^\pi \varpi \left( \frac{t - \cos \varphi \sqrt{t^2-1}}{\alpha} \right) d\varphi,$$

où  $\chi$  et  $\varpi$  sont des fonctions arbitraires constituées comme les fonctions  $\varphi$  et  $\varpi$  de tout à l'heure.

Les formes (2) et (6) ne comprennent pas toutes les solutions de l'équation (1), par exemple, la solution suivante :

$$z = \log \alpha \sqrt{x^2-1}.$$

En terminant, je fais remarquer que l'on ramène facilement l'équation (1) à la forme type d'Ampère, en faisant le changement de variables suivant :

$$s = \alpha(x - \sqrt{x^2-1}), \quad t = \alpha(x + \sqrt{x^2-1});$$

l'équation (1) devient alors

$$2(t-s) \frac{d^2 z}{dt ds} - \frac{dz}{dt} + \frac{dz}{ds} = 0$$

ou

$$\frac{d}{ds} \left[ (t-s) \frac{dz}{dt} \right] = \frac{d}{dt} \left[ (s-t) \frac{dz}{ds} \right].$$

Enfin, on peut observer encore que l'équation (1) se déduit de l'équation

$$(1-x^2) \frac{d^2 u}{dx^2} + x^2 \frac{d^2 u}{d\alpha^2} = 0$$

en posant

$$\frac{d^2 u}{dx d\alpha} = z.$$

FIN DU TOME SIXIÈME.