R. RADAU

Sur une transformation des équations différentielles de la dynamique

Annales scientifiques de l'É.N.S. 1re série, tome 5 (1868), p. 311-375
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1868_1_5__311_0>

SUR UNE TRANSFORMATION

DES

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

DE LA DYNAMIQUE,

PAR M. R. RADAU.

Les équations différentielles qui expriment le mouvement d'un système libre peuvent être présentées, comme on sait, sous plusieurs formes, dont chacune a ses avantages particuliers. L'une des plus simples est celle où les secondes dérivées des coordonnées par rapport au temps sont égalées aux dérivées partielles d'une même fonction, appelée *fonction des forces*.

On peut toujours employer cette forme quand les mobiles ne sont soumis qu'à leurs attractions mutuelles. Dans ce cas, la fonction des forces ne renferme que les différences des coordonnées, circonstance qui facilite singulièrement la solution du problème. Il en résulte d'abord que la somme des dérivées partielles de la fonction des forces par rapport aux coordonnées de même nom s'annule, et cette remarque fournit immédiatement trois intégrales sous la forme de relations linéaires entre les coordonnées homonymes et le temps : ce sont les trois équations qui établissent le mouvement rectiligne et uniforme du centre de gravité. Grâce à ces trois intégrales, la recherche du mouvement absolu du système se réduit à celle du mouvement relatif des différents corps. Si on connaissait à chaque instant la *configuration* du système, ou la situation relative des mobiles autour de leur centre de gravité, on en trouverait les positions absolues par une simple addition (en supposant toutefois qu'il fût possible d'avoir les valeurs *numériques* des six constantes qui déterminent la trajectoire du centre de gravité dans l'espace).

Ainsi la forme particulière de la fonction des forces, qui ne dépend ici que des distances des mobiles ou des différences de leurs coordonnées, nous dispense d'en déterminer le mouvement absolu. Il nous suffit de chercher les positions relatives des différents corps, et c'est là d'ailleurs la question principale lorsqu'il s'agit du système solaire, car nous ne connaissons pas de point fixe dans l'espace qui pourrait nous servir de repère pour y rapporter le mouvement absolu du soleil et des planètes.

Les équations différentielles du problème se prêtent d'elles-mêmes à cette réduction; on peut, sans rien changer à leur forme, transporter l'origine des coordonnées au centre de gravité. Un système libre se meut donc autour de son centre de gravité comme autour d'un point fixe. Comme les équations différentielles restent les mêmes, soit qu'on prenne pour origine des coordonnées un point fixe ou qu'on rapporte tout au centre de gravité du système, les intégrales sont aussi les mêmes dans les deux cas, aux constantes près. Les trois équations linéaires qui, dans le premier cas, ont la forme $\sum mx = \mathrm{A} + \mathrm{B}t$ prennent dans le second la forme $\sum mx = 0$, que l'on obtient en faisant $\mathrm{A} = \mathrm{B} = 0$. Les intégrales des forces vives et des aires s'énoncent d'une manière identique dans les deux cas. Le principe des forces vives nous apprend que la différence entre la demi-force vive du système et la fonction des forces est une constante. Le principe des aires nous dit que la quantité du mouvement aréolaire dans un plan quelconque, ou la somme des produits des masses par les projections des vitesses aréolaires sur un plan quelconque, est une constante. Ces principes subsistent aussi bien pour une origine fixe que pour les coordonnées rapportées au centre de gravité. Il n'y a de changé que les valeurs numériques des constantes.

Sous les deux formes que nous avons considérées jusqu'ici, le problème des $n+1$ corps dépend de $3n+3$ équations de second ordre. Il est facile d'en réduire le nombre à $3n$ seulement, et on y arrive de plusieurs manières. On peut d'abord placer l'origine des coordonnées dans l'un des mobiles, que l'on considère alors comme un corps central autour duquel se meuvent n planètes. Cette fiction convient particulièrement aux systèmes qui renferment un corps de masse prépondérante, par exemple au système solaire. Si on retranche les trois équations du corps central des $3n$ équations des planètes, on obtient $3n$ équations différentielles pour les coordonnées relatives des planètes rapportées au corps central.

On peut, en second lieu, prendre pour origine le centre de gravité et profiter des trois relations $\sum mx = 0$; $\sum my = 0$, $\sum mz = 0$ pour éliminer les coordonnées x_0, y_0, z_0 du corps central; on obtient alors $3n$ équations pour les coordonnées des planètes rapportées au centre de gravité. Mais dans les deux cas on sacrifie à la fois la forme des équations différentielles et celle des intégrales. Les secondes dérivées des coordonnées par rapport au temps ne sont plus représentées par les dérivées partielles d'une même fonction, et les intégrales fournies par les principes des forces vives et des aires revêtent une forme assez compliquée. Ainsi, lorsqu'on prend pour origine le corps central, les forces vives et les vitesses aréolaires des différents corps par rapport à l'origine des coordonnées sont remplacées dans les intégrales par les forces vives et les vitesses aréolaires *relatives* de tous les corps pris deux à deux.

Ces inconvénients peuvent être évités au moyen d'une transformation linéaire dont Jacobi a indiqué le principe dans son *Mémoire sur l'élimination des nœuds dans le problème des trois corps* (*).

Je fais voir que cette tranformation peut être considérée comme une substitution orthogonale entre deux systèmes de variables, qui sont, d'un côté, les coordonnées absolues des $n+1$ corps donnés, et, de l'autre, les coordonnées de $n+1$ masses fictives, dont une est la masse totale du système, placée au centre de gravité.

Une substitution orthogonale, appliquée *simultanément* à deux systèmes de variables $x_0, x_1, \ldots, x_n$ et $x'_0, x'_1, \ldots, x'_n$, auxquelles on

(*) *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 18 août 1842.

substitue les systèmes $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n$ et $\xi'_0, \xi'_1, \ldots, \xi'_n$, laisse intacte la forme de la somme $x_0 x'_0 + x_1 x'_1 + \ldots + x_n x'_n$, que je désigne par le symbole $\mathfrak{S} = \sum((x))$, de sorte que l'équation

$$\sum((x)) = \sum((\xi))$$

exprime le résultat d'une substitution orthogonale double. Comme il s'agit ici de relations linéaires, on peut prendre à la place des variables leurs dérivées; en outre, on peut remplacer chaque produit xx' par une somme de produits semblables. Il s'ensuit que $((x))$ peut représenter le carré d'un rayon vecteur, la force vive, la vitesse aréolaire, ou le produit $d^2x.\delta x$, et que la somme $\mathfrak{S}$ sera tour à tour la force vive du système, le mouvement aréolaire, la variation δU de la fonction des forces, ou telle autre expression formée d'une manière analogue. On en conclut qu'une substitution orthogonale, appliquée aux coordonnées d'un système de points matériels, ne change rien à la forme des équations différentielles du mouvement, ni à celle des intégrales des forces vives et des aires.

On obtient en outre une réduction du nombre des inconnues, si on fait figurer parmi les nouvelles variables les coordonnées du centre de gravité du système, lesquelles sont connues par les trois intégrales du centre de gravité. Elles disparaissent d'ailleurs des intégrales et des équations différentielles, et le problème se réduit à un problème du mouvement de n corps autour d'un centre fixe. La somme $\mathfrak{S}$ ne se compose plus maintenant que de n termes, et elle est égale à la somme analogue, composée de $n + 1$ termes, que l'on obtient en rapportant les corps donnés à leur centre de gravité.

Les coefficients de la substitution qui fournit ces résultats ne sont pas complétement déterminés. Cependant, ce n'est point simplement une substitution orthogonale du degré $n + 1$, car la condition que l'on introduit en faisant figurer parmi les nouvelles variables les coordonnées du centre de gravité, détermine une partie des coefficients. Je fais voir que les coefficients peuvent être formés à l'aide des coefficients d'une substitution orthogonale du degré n. Dans le cas de trois corps, c'est donc une substitution binaire qui fournit les coefficients de la substitution ternaire demandée.

On peut d'ailleurs réduire la somme $\mathfrak{S}$ à n termes d'une manière directe. Il suffit pour cela de rapporter le deuxième corps au centre du premier, le troisième au centre de gravité des deux premiers, le quatrième au centre de gravité des trois premiers, et ainsi de suite, pourvu qu'en même temps on modifie légèrement les masses. Les relations linéaires qui existent entre ces coordonnées et les anciennes constituent un cas particulier de la substitution orthogonale dont je viens de parler.

Un autre cas particulier est celui où la transformation se réduit à un changement d'origine des coordonnées, les masses fictives étant simplement celles de n corps du système, que l'on peut appeler les planètes. Le système transformé est alors le système planétaire, rapporté à un point mobile qui a beaucoup d'analogie avec le centre de gravité et que j'appelle le *point canonique*, parce qu'on retrouve la forme canonique des équations du mouvement en le prenant pour origine. J'arrive ainsi au théorème suivant.

« Dans le mouvement d'un système libre de $n+1$ corps, soumis seulement à leurs attractions mutuelles, il existe $n+1$ centres qui ont chacun pour n corps les mêmes propriétés que le centre de gravité possède pour le système entier. Rapporté à l'un de ces centres, le mouvement de n corps du système a lieu comme autour d'un point fixe. Pour trouver ces centres, que j'appelle les *points canoniques*, il suffit d'attribuer à tous les corps des masses fictives égales aux racines carrées de leurs masses véritables, et à leur centre de gravité une masse $\sqrt{m}$, égale à la racine carrée de la masse totale m du système, puis de chercher les $n+1$ centres de gravité de la masse $\sqrt{m}$ combinée successivement avec chacune des masses $\sqrt{m_i}$. »

Faisant ensuite l'application de ces formules aux problèmes des trois corps et des quatre corps, je montre que l'on peut obtenir les coefficients de la transformation générale d'une manière très-simple, en prenant pour point de départ la transformation spéciale par les centres de gravité successifs. Les arbitraires de la substitution se présentent alors sous la forme d'angles auxiliaires.

Lorsqu'on veut appliquer l'une de ces transformations au système solaire en général, ou à la théorie de la lune en particulier, on peut toujours déterminer les coordonnées des masses fictives de manière qu'elles s'écartent très-peu des coordonnées relatives des corps donnés; en d'autres termes, on peut remplacer ces corps par des corps fictifs qui occupent des positions très-voisines des véritables. Cela permet de considérer les nouvelles coordonnées comme une première approximation des coordonnées cherchées; on obtient l'expression rigoureuse de ces dernières en ajoutant à la coordonnée de chaque corps de petites fractions constantes des coordonnées des autres corps. C'est comme si chaque orbite était corrigée à l'aide d'une série d'épicycles semblables aux autres orbites.

En dernier lieu, j'applique encore au problème réduit la transformation par les coordonnées polaires, et j'exprime les dérivées des nouvelles variables par les dérivées partielles de la fonction des forces U. Faisant l'application de ces formules au problème des trois corps, je montre que ce problème se réduit très-simplement à l'intégration d'un système canonique de huit équations du premier ordre, si l'on prend pour variables les deux *rayons vecteurs*, leurs *distances au nœud des orbites*, les *vitesses radiales* et les *aires* ou vitesses aréolaires. Cela tient à une circonstance importante, dont Jacobi a tiré un grand parti dans son Mémoire sur le problème des trois corps. Les plans des orbites des deux corps fictifs se coupent toujours dans le plan invariable; la ligne des nœuds est donc la même pour les deux orbites, et les longitudes des nœuds disparaissent aussi bien des intégrales des aires que de la fonction des forces. Le principe des aires fournit alors deux relations qui permettent d'exprimer les inclinaisons en fonction des aires, et l'on arrive à huit équations qui ne renferment que des éléments relatifs au mouvement dans les deux orbites, à savoir : les rayons vecteurs, leurs distances à l'intersection des orbites, les vitesses radiales et les vitesses aréolaires; le plan invariable a disparu. On pourrait aussi obtenir un système canonique de huit équations en éliminant le nœud du plan des trois corps; c'est ce que Edmond Bour a fait en 1856.

Si des huit équations du premier ordre on élimine encore la différentielle du temps, elles se réduisent à sept équations, dont on connaît déjà une intégrale, $H = h$. On peut donc dire que le problème a été ramené à l'intégration de six équations du premier ordre. Ce résultat avait été déjà obtenu par Jacobi (quoiqu'il ne l'ait pas dit d'une manière explicite), mais ses équations n'ont pas la forme canonique.

1. On appelle *substitution orthogonale* une transformation linéaire qui se renverse par une simple rotation du carré des coefficients autour de sa diagonale, rotation par laquelle les lignes deviennent colonnes, et *vice versâ*. La substitution orthogonale est donc représentée par la formule

$$x_i = \sum^h c_{ih}\,\xi_h, \quad \xi_i = \sum^h c_{hi}\,x_h. \tag{1}$$

Les coefficients d'une substitution orthogonale doivent satisfaire aux relations suivantes :

$$\left\{\begin{array}{l} \sum^h c_{hi}\,c_{hk} = 0, \quad \sum^h c_{hi}\,c_{hi} = 1, \\ \text{ou bien} \\ \sum^h c_{ih}\,c_{kh} = 0, \quad \sum^h c_{ih}\,c_{ih} = 1. \end{array}\right. \tag{2}$$

A chaque combinaison d'une variable x_i avec une variable ξ_k correspond un coefficient c_{ik}, on a

$$c_{ik} = \frac{dx_i}{d\xi_k} = \frac{d\xi_k}{dx_i}.$$

La formule de transformation (1) s'applique d'ailleurs, non-seulement aux variables x et ξ, mais encore à leurs dérivées dx et $d\xi$ et aux caractéristiques D_x et D_ξ; on a, par exemple,

$$D_{x_i} = \sum^h c_{ih}\,D_{\xi_h}, \quad D_{\xi_i} = \sum^h c_{hi}\,D_{x_h}.$$

Si la même substitution orthogonale intervient simultanément entre les variables x et ξ, et entre les variables y et η, on a

$$\sum^i x_i\,y_i = \sum^{h,k} \xi_h\,\eta_k \sum^i c_{ih}\,c_{ik}.$$

Or, grâce aux relations (2), tous les termes de cette somme pour lesquels h diffère de k disparaissent; il ne reste donc à droite que les produits $\xi_h \eta_h$, et nous pouvons écrire

$$\sum xy = \sum \xi\eta. \tag{2 bis}$$

Cette équation a une signification symbolique. A la place des systèmes conjugués x, ξ et y, η, on peut évidemment prendre deux systèmes quelconques, *assujettis aux mêmes relations linéaires*. On peut donc remplacer y et η par x et ξ, ensuite x et ξ par dx et $d\xi$, et ainsi de suite, ce qui donne

$$\sum x^2 = \sum \xi^2, \quad \sum dx^2 = \sum d\xi^2, \quad \sum x\,dx = \sum \xi\,d\xi, \quad \sum \mathrm{D}_x^2 = \sum \mathrm{D}_\xi^2, \ldots,$$

où D^2 signifie une seconde dérivée ou le carré d'une dérivée première. On peut aussi ajouter ou retrancher plusieurs égalités de cette espèce, de sorte que, si la même substitution a été appliquée à un troisième système de variables conjuguées z et ζ, nous aurons

$$\begin{gathered}
\sum (x^2 + y^2 + z^2) = \sum (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2), \\
\sum (dx^2 + dy^2 + dz^2) = \sum (d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2), \\
\sum (x\,dy - y\,dx) = \sum (\xi\,d\eta - \eta\,d\xi), \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{gathered}$$

Si les variables x satisfont à un système d'équations différentielles du type $\frac{d^2x_i}{dt^2} = \frac{d\mathrm{U}}{dx_i}$, les variables ξ seront assujetties à satisfaire à un système tout semblable. En effet, si dans l'identité (2 *bis*) nous remplaçons xy par $d^2x.\delta x + d^2y.\delta y + d^2z.\delta z$, nous avons, en étendant la somme à toutes les variables,

$$\sum \frac{d^2\xi}{dt^2}\,\delta\xi = \sum \frac{d^2x}{dt^2}\,\delta x = \delta\mathrm{U},$$

d'où il suit que

$$\frac{d^2\xi_i}{dt^2} = \frac{d\mathrm{U}}{d\xi_i}.$$

Il en est de même à l'égard des systèmes canoniques de la forme

$$\frac{dp}{dt} = \frac{d\mathrm{H}}{dp'}, \quad \frac{dp'}{dt} = -\frac{d\mathrm{H}}{dp}.$$

Si la substitution intervient simultanément entre les variables p et q, p' et q', on aura, en vertu de (2 *bis*),

$$\delta\mathrm{H} = \sum\left(\frac{dp}{dt}\,\delta p' - \frac{dp'}{dt}\,\delta p\right) = \sum\left(\frac{dq}{dt}\,\delta q' - \frac{dq'}{dt}\,\delta q\right),$$

d'où

$$\frac{dq}{dt} = \frac{d\mathrm{H}}{dq'}, \quad \frac{dq'}{dt} = -\frac{d\mathrm{H}}{dq}.$$

Je représenterai par le symbole $((x))$ le produit de deux quantités assujetties à la même substitution linéaire, ou bien une somme de plusieurs produits de ce genre, de sorte que $((x))$ représentera tour à tour l'une des expressions

$$\begin{gathered}
xy, \quad x^2, \quad y^2, \quad x^2+y^2, \quad x^2+y^2+z^2, \ldots, \\
x\,dx, \quad x\,dy, \quad x\,dy - y\,dx, \ldots, \\
dx^2, \quad dx^2+dy^2+dz^2, \ldots, \\
d^2x\,\delta x, \quad d^2x\,\delta x + d^2y\,\delta y + d^2z\,\delta z, \ldots, \\
x\,\mathrm{D}_x, \quad \mathrm{D}_x^2, \quad \mathrm{D}_x\,\mathrm{D}_x, \ldots,
\end{gathered}$$

et $((\xi))$ l'expression correspondante dans les variables ξ, η, ζ, liées aux premières par la transformation linéaire dont il s'agit. Le résultat d'une substitution orthogonale peut alors s'exprimer par l'équation symbolique

$$\sum((x)) = \sum((\xi)). \tag{3}$$

Si les parenthèses renferment les différences $x_i - x_h$, $\xi_i - \xi_h$, on les traitera comme les variables x, ξ elles-mêmes, de sorte que $((x_i - x_h))$ représentera le carré $(x_i - x_h)^2$, ou bien $(dx_i - dx_h)^2$, ou une autre expression semblable du second degré.

Nous pouvons maintenant écrire $\sqrt{m_i}\,x_i$ à la place de x_i, et $\sqrt{\mu_i}\,\xi_i$ à la place de ξ_i. Les formules de transformation deviennent, dans ce cas,

$$\sqrt{m_i}\, x_i = \sum^h c_{ih} \sqrt{\mu_h}\, \xi_h, \quad \sqrt{\mu_i}\, \xi_i = \sum^h c_{hi} \sqrt{m_h}\, x_h,$$

et l'équation symbolique se change en

$$\sum m((x)) = \sum \mu((\xi)). \tag{4}$$

Cette forme est commode lorsque les variables x, y, z représentent les coordonnées d'un système de points matériels. Nous supposerons que le système se compose de $n+1$ points qui ont les masses $m_0, m_1, \ldots, m_n$ et qui se meuvent librement dans l'espace sous l'influence de leurs attractions mutuelles. Les ξ, η, ζ seront les coordonnées de $n+1$ corps fictifs ayant les masses $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_n$. Le symbole $((x))$ représente alors le carré du rayon vecteur, ou le carré de la vitesse, ou le double de l'aire que la projection du rayon vecteur décrit dans un plan quelconque, ou le produit de la force accélératrice par la variation δx, ou une autre fonction semblable des coordonnées.

On sait que $x\,dy - y\,dx$ est le double de l'aire que la projection du rayon vecteur sur le plan des xy décrit dans le temps dt. J'appellerai $\frac{x\,dy - y\,dx}{dt}$ la *vitesse aréolaire*, et $m\frac{x\,dy - y\,dx}{dt}$ le *mouvement aréolaire* dans le plan des xy $\left(\text{par analogie avec la quantité de mouvement } m\frac{dx}{dt}\right)$. La formule (4) nous apprend alors que la substitution orthogonale reproduit sous leur forme primitive :

La *somme des produits des masses par les carrés des distances;* les *moments d'inertie;* la *force vive* du système; le *mouvement aréolaire* dans un plan quelconque; la *variation de la fonction des forces.*

En effet, si on tient compte des équations de mouvement, la formule (4) donne

$$\begin{aligned} dt^2\,\delta \mathrm{U} &= \sum m(d^2x\,\delta x + d^2y\,\delta y + d^2z\,\delta z) \\ &= \sum \mu(d^2\xi\,\delta\xi + d^2\eta\,\delta\eta + d^2\zeta\,\delta\zeta). \end{aligned}$$

Il s'ensuit qu'un système d'équations de la forme

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{dU}{dx}$$

se change par la substitution en un système semblable

$$\mu\frac{d^2\xi}{dt^2}=\frac{dU}{d\xi}.$$

2. Les masses μ sont en général arbitraires, et on pourrait les prendre égales à l'unité. En effet, ce qui se détermine par la substitution, ce n'est ni la coordonnée ξ ni la masse μ, c'est le produit $\sqrt{\mu}\,\xi$ ou bien $\mu\xi^2$, que l'on peut représenter plus simplement par ξ^2.

Nous ferons toutefois une exception pour la masse μ_0. Nous conviendrons qu'elle représente la somme m des masses m_i,

$$\mu_0=m=m_0+m_1+\ldots+m_n,$$

et nous la supposerons située au centre de gravité du système donné. Soient X, Y, Z les coordonnées du centre de gravité, nous aurons

$$\xi_0=X,\quad \eta_0=Y,\quad \zeta_0=Z,$$

et

$$(5)\qquad \begin{cases} \mu_0\,\xi_0=mX=\sum m_h x_h,\\ \mu_0\,\eta_0=mY=\sum m_h y_h,\\ \mu_0\,\zeta_0=mZ=\sum m_h z_h.\end{cases}$$

Cette condition détermine les coefficients c_{h0} dans (1). Il faut prendre

$$(6)\qquad c_{h0}=\sqrt{\frac{m_h}{m}}$$

pour avoir $\mu_0\xi_0=\sum m_h x_h,\ldots$. Il s'ensuit que

$$c_{i0}\sqrt{\mu_0}\,\xi_0=\sqrt{m_i}\,X,$$

et, par conséquent,

$$(7)\qquad x_i-X=\frac{1}{\sqrt{m_i}}\sum_1^n c_{ih}\sqrt{\mu_h}\,\xi_h.$$

Les formules (2) donnent encore

$$\sum_{0}^{n} c_{hi}\sqrt{m_h} = 0 \quad \text{ou bien} \quad c_{0i}\sqrt{m_0} = -\sum_{1}^{n} c_{hi}\sqrt{m_h},$$

d'où

$$\sqrt{\mu_i}\,\xi_i = \sum_{1}^{n} c_{hi}\sqrt{m_h}(x_h - x_0), \tag{8}$$

les sommes devant s'étendre depuis $h=1$ jusqu'à $h=n$. Les formules (7) et (8) montrent que les $3n$ variables $\xi_1, \eta_1, \zeta_1, \ldots, \xi_n, \eta_n, \zeta_n$ remplacent les $3n+3$ coordonnées $x-\mathrm{X}, y-\mathrm{Y}, z-\mathrm{Z}$, dont l'origine est au centre de gravité. Cela tient à l'existence des trois équations

$$\sum m_i(x_i - \mathrm{X}) = 0, \quad \sum m_i(y_i - \mathrm{Y}) = 0, \quad \sum m_i(z_i - \mathrm{Z}) = 0, \tag{9}$$

par lesquelles ces $3n+3$ coordonnées se réduisent à $3n$ variables indépendantes. L'équation symbolique (4) devient à présent

$$\sum_{0}^{n} m_i((x_i)) - m((\mathrm{X})) = \sum_{1}^{n} \mu_i((\xi_i)). \tag{10}$$

On peut lui donner une autre forme très-intéressante. On démontre sans difficulté l'identité

$$\sum^{i,h} m_i m_h (x_i - x_h)(y_i - y_h) = \sum m_i \,.\, \sum m_i x_i y_i - \sum m_i x_i \,.\, \sum m_i y_i,$$

que l'on généralise en l'écrivant de cette manière

$$\sum^{i,h} m_i m_h((x_i - x_h)) = m\sum m_i((x_i)) - \left(\left(\sum m_i x_i\right)\right), \tag{11}$$

où $m = \sum m_i$. Nous remplacerons $\sum m_i x_i$ par $m\mathrm{X}$, et comme l'expression à gauche ne change pas, si on diminue tous les x d'une même quantité, par exemple de X, il vient, à cause de (9) et (11),

$$\frac{1}{m}\sum^{n} m_i m_h((x_i - x_h)) = \sum^{n} m_i((x_i)) - m((\mathrm{X})) = \sum^{n} m_i((x_i - \mathrm{X})) = \sum^{n} \mu_i((\xi_i)). \tag{12}$$

Dans la première somme, il faut donner aux indices i et h toutes les valeurs depuis zéro jusqu'à n; elle se compose donc de $\frac{n(n+1)}{2}$ termes; la seconde et la troisième renferment chacune $n+1$ termes, la dernière n'a que n termes. La première dépend des différences des coordonnées, ou bien des coordonnées rapportées à l'un des mobiles; la seconde est formée avec les coordonnées absolues (par rapport à un point fixe); dans la troisième figurent les coordonnées relatives au centre de gravité; enfin la quatrième contient les coordonnées des corps fictifs.

3. Notre substitution orthogonale dans laquelle figurent parmi les variables nouvelles les coordonnées XYZ du centre de gravité, a donc la vertu de réduire à n termes la somme

$$\mathrm{S}=\frac{1}{m}\sum_{0}^{n} m_i m_h((x_i-x_h))=\sum_{0}^{n} m_i((x_i-\mathrm{X})),$$

qui représente soit la force vive, soit le mouvement aréolaire d'un système de $n+1$ corps par rapport au centre de gravité, soit la variation $\delta\mathrm{U}$, soit la somme des produits des masses par les carrés de leurs distances au centre de gravité, soit telle autre fonction semblable des coordonnées.

Le même résultat peut aussi s'obtenir directement de plusieurs manières. Ainsi, l'équation (12) montre que l'on aura

$$\mathrm{S}=\sum_{1}^{n} m_i((x_i)) \tag{13}$$

en prenant pour origine un point mobile défini par la condition

$$\sqrt{m_0}\,x_0 \pm \sqrt{m}\,\mathrm{X}=0.$$

Si nous choisissons le signe supérieur, nous avons

$$(\sqrt{mm_0}+m_0)x_0+m_1x_1+m_2x_2+\ldots=0.$$

Soit A le centre de gravité du système, et B le point mobile à partir duquel nous compterons les coordonnées. Les relations ci-dessus montrent alors que le point B sera situé sur la ligne qui joint m_0 au centre de gravité A; on peut le définir le centre de gravité d'une masse $\sqrt{m_0}$ remplaçant m_0, et d'une masse $\sqrt{m}$, située en A, ou bien le centre de gravité du système, pris en ajoutant à m_0 la masse $\sqrt{mm_0}$, qui est la moyenne géométrique de m_0 et de la masse totale m du système. Soit S le lieu de m_0, que j'appellerai le *corps principal*, et P le centre de gravité des corps $m_1, \ldots, m_n$, qui seront appelés les *planètes*. Les quatre points S, B, A, P seront évidemment en ligne droite, ils partageront la ligne SP suivant des rapports constants. En prenant m_0 pour unité des masses, on aura

$$\mathrm{SB} : \mathrm{SA} : \mathrm{BP} :: \frac{1}{1+\sqrt{m}} : \frac{1}{\sqrt{m}} : \frac{1}{m-1}.$$

S'il s'agit du système solaire, et que m_0 soit le soleil, $\sqrt{m} = 1{,}00067$; le point B occupe alors le milieu de SA et se trouve toujours compris entre la surface et le centre du soleil.

Désignons maintenant par xyz les coordonnées rapportées au point B, afin de les distinguer des xyz qui se rapportent à un point fixe. La coordonnée de A par rapport à B sera $-\frac{1}{\sqrt{m}}\mathrm{x}_0$, et nous aurons

$$(14)\quad \begin{cases} x_i - x_h = \mathrm{x}_i - \mathrm{x}_h \\ x_i - \mathrm{X} = \mathrm{x}_i + \dfrac{1}{\sqrt{m}}\mathrm{x}_0 \\ \sqrt{m}\,(x_0 - \mathrm{X}) = (1+\sqrt{m})\,\mathrm{x}_0 = -\sum_1^n m_h \mathrm{x}_h. \end{cases}$$

Les coordonnées héliocentriques des planètes deviendront

$$x_i - x_0 = \mathrm{x}_i - \mathrm{x}_0 = \mathrm{x}_i + \frac{1}{1+\sqrt{m}} \sum_1^n m_h \mathrm{x}_h,$$

elles se composeront d'un terme principal x_i et d'un terme de correction égal à la coordonnée $-\mathrm{x}_0$ du point B; ce terme est de l'ordre des masses planétaires et pourra être considéré comme une perturbation. La formule

$$(15)\quad \mathrm{S} = \sum_1^n m_i((\mathrm{x}_i)) = \sum_1^n \mu_i((\xi_i))$$

nous dit que les coordonnées xyz dépendent des anciennes par une substitution orthogonale, comme les $\xi\eta\zeta$. Il s'ensuit que la force vive et le mouvement aréolaire des planètes rapportées au point B sont identiques à la force vive et au mouvement aréolaire du système entier, rapporté au centre de gravité A. Le plan invariable est le même pour les points A et B. Enfin, les équations du mouvement ont la forme canonique si on fait usage des coordonnées xyz, puisque l'espèce d'invariant que je désigne par S peut représenter δU ou δH. C'est pour cette raison que j'ai appelé le point B le *point canonique* (*).

Comme il est permis de prendre pour m_0 l'un quelconque des corps donnés, nous avons là un théorème général, dont voici l'énoncé :

« *Dans le mouvement d'un système libre de $n+1$ corps qui ne sont soumis qu'à leurs attractions mutuelles, il existe $n+1$ centres qui ont chacun pour n corps les propriétés que le centre de gravité possède pour le système entier. Rapporté à l'un de ces centres, que nous appellerons les points canoniques, le mouvement de n corps du système a lieu comme autour d'un point fixe. Pour trouver les points canoniques, il suffit d'attribuer à tous les corps des masses fictives égales aux racines carrées de leurs masses véritables, et à leur centre de gravité une masse $\sqrt{m}$, égale à la racine carrée de la masse totale m du système, puis de chercher les $n+1$ centres de gravité de la masse $\sqrt{m}$ combinée successivement avec chacune des masses $\sqrt{m_i}$.* »

On aurait $n+1$ points analogues en prenant $-\sqrt{m}$ à la place de $\sqrt{m}$.

4. L'équation (12) est encore susceptible d'une autre transformation par laquelle la somme S se réduit directement à n termes. On y arrive à l'aide de l'identité suivante, analogue à (11), et que l'on vérifie aisément :

$$(16)\qquad \sum_0^{n-1} m_i m_h((x_i - x_h)) = (m - m_n)\sum_0^n m_i((x_i - X)) - m m_n((x_n - X)).$$

Je désignerai à présent par M_i la somme des masses $m_0, m_1, \ldots, m_i$, et par X_i l'une des coordonnées du centre de gravité des mêmes masses,

(*) *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 22 juin 1868.

de sorte que

$$M_i = \sum_0^i m_h, \quad M_i X_i = \sum_0^i m_h x_h, \quad M_0 = m_0, \quad M_n = m,$$

$$X_0 = x_0, \quad X_n = X,$$

$$x_i - X_i : x_i - X_{i-1} : X_i - X_{i-1} :: M_{i-1} : M_i : m_i.$$

La formule (16) devient alors

$$\sum_0^{n-1} m_i m_h ((x_i - x_h)) = M_{n-1} \sum_0^n m_i ((x_i - X_n)) - M_n m_n ((x_n - X_n)).$$

Or l'équation (12) nous donne, si nous remplaçons n par $n - 1$,

$$\sum_0^{n-1} m_i m_h ((x_i - x_h)) = M_{n-1} \sum_0^{n-1} m_i ((x_i - X_{n-1}));$$

par conséquent

$$(17) \qquad \sum_0^n m_i ((x_i - X_n)) - \sum_0^{n-1} m_i ((x_i - X_{n-1})) = \frac{M_n}{M_{n-1}} m_n ((x_n - X_n)).$$

Cette formule étant appliquée plusieurs fois de suite, il vient

$$\sum_0^n m_i ((x_i - X_n)) = \sum_1^n \frac{M_i}{M_{i-1}} m_i ((x_i - X_i)) = \sum_1^n \frac{M_{i-1}}{M_i} m_i ((x_i - X_{i-1})),$$

ou bien

$$(18) \qquad \mathsf{S} = \sum_1^n \frac{M_{i-1}}{M_i} m_i ((x_i - X_{i-1})).$$

On obtient donc une substitution orthogonale qui réduit S à n termes, en prenant

$$(19) \qquad \mu_i = m_i \frac{M_{i-1}}{M_i}, \quad \xi_i = x_i - X_{i-1}.$$

Les relations linéaires par lesquelles les variables ξ dépendent des anciennes coordonnées $x - X$ sont très-simples. Nous avons d'abord $\xi_1 = x_1 - x_0$, puis

$$\frac{x_i - X_i}{M_{i-1}} = \frac{\xi_i}{M_i} = \frac{X_i - X_{i-1}}{m_i},$$

d'où, en écrivant de nouveau X pour X_n,

$$x_i - X_i = \xi_i - \frac{m_i}{M_i}\xi_i, \quad X_i - X = -\sum_{i+1}^{n} \frac{m_h}{M_h}\xi_h,$$

d'où l'on tire

$$(20) \qquad x_i - X = \xi_i - \sum_{i}^{n} \frac{m_h}{M^h}\xi_h.$$

La coordonnée de m_0 est donc

$$x_0 - X = -\sum_{1}^{n} \frac{m_h}{M^h}\xi_h,$$

et celle de m_n :

$$x_n - X = \frac{M_{n-1}}{M_n}\xi_n.$$

La comparaison avec la formule générale (7) montre que les coefficients de transformation peuvent être choisis de la manière suivante :

$$c_{ih} = 0 \quad \text{pour} \quad h < i, \quad c_{ih} = -\sqrt{\frac{m_i m_h}{M_h M_{h-1}}} \quad \text{pour} \quad h > i,$$

et

$$c_{ii} = \sqrt{\frac{M_{i-1}}{M_i}} = \frac{M_i - m_i}{\sqrt{M_i M_{i-1}}} \quad \text{pour} \quad h = i.$$

Si le premier corps m_0 est le soleil, les autres étant les planètes, les rapports $\frac{M_{i-1}}{M_i}$ s'écartent très-peu de l'unité, et les masses fictives μ_i diffèrent à peine des masses planétaires m_i. La première coordonnée $x_0 - X$ est alors une quantité très-petite de l'ordre des masses planétaires, les autres coordonnées $x_i - X$ se composent chacune d'un terme principal ξ_i et d'une série de termes secondaires, de l'ordre des forces perturbatrices :

$$x_0 - X = -\frac{m_1 \xi_1}{m_0 + m_1} - \frac{m_2 \xi_2}{m_0 + m_1 + m_2} - \ldots,$$

$$x_1 - X = \xi_1 - \frac{m_1 \xi_1}{m_0 + m_1} - \frac{m_2 \xi_2}{m_0 + m_1 + m_2} - \ldots,$$

$$x_2 - X = \xi_2 - \frac{m_2 \xi_2}{m_0 + m_1 + m_2} - \ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$x_n - X = \xi_n - \frac{m_n \xi_n}{m_0 + m_1 + \ldots + m_n}.$$

On peut encore comprendre dans cet engrenage la terre et la lune. Il faut, dans ce cas, représenter par m_0 la terre, par m_1 la lune, par m_2 le soleil. La masse $\mu_1 = m_1 \dfrac{m_0}{m_0 + m_1}$ diffère alors très-peu de la masse lunaire m_1, les masses $\mu_3, \mu_4, \ldots$, très-peu des masses planétaires m_3, $m_4, \ldots$. Enfin, la masse μ_2 du soleil fictif est à très-peu près égale à la masse terrestre m_0, puisque

$$\mu_2 = (m_0 + m_1) \frac{m_2}{m_2 + m_1 + m_0}.$$

Lorsqu'il ne s'agit que de deux corps ($n = 1$), on a d'ailleurs

$$\begin{aligned} m_0((x_0 - X)) + m_1((x_1 - X)) = \mu_1((\xi_1)) &= \frac{m_0 m_1}{m_0 + m_1}((x_1 - x_0)) \\ &= \frac{m_0 + m_1}{m_0} m_1((x_1 - X)) \\ &= \frac{m_0 + m_1}{m_1} m_0((x_0 - X)). \end{aligned}$$

On peut donc indifféremment considérer, soit le mouvement des masses accouplées m_0, m_1, qui pivotent ensemble, aux extrémités de la ligne r_{01}, autour de leur centre de gravité commun, soit celui d'une masse $\mu_1 = \dfrac{m_0 m_1}{m_0 + m_1}$, tournant autour de m_0, soit enfin celui d'une masse $m_0 \dfrac{m_0 + m_1}{m_1}$ ou $m_1 \dfrac{m_0 + m_1}{m_0}$, remplaçant respectivement m_0 ou m_1, et tournant autour du centre de gravité des deux corps. Cela revient à des changements de notation, car nous avons

$$\frac{x_1 - X}{m_0} = \frac{X - x_0}{m_1} = \frac{x_1 - x_0}{m_0 + m_1}.$$

Si nous ajoutons un troisième corps, nous pouvons introduire la masse $\mu_2 = \frac{m_2(m_0 + m_1)}{m_0 + m_1 + m_2}$ qui tourne autour du centre de gravité des deux premiers corps ($\xi_2 = x_2 - X_1$), ou bien la masse $\mu_2 = \frac{m_2(m_0 + m_1 + m_2)}{m_0 + m_1}$, tournant autour du centre de gravité général ($\xi_2 = x_2 - X$), car nous avons

$$\frac{x_2 - X}{m_0 + m_1} = \frac{x_2 - X_1}{m_0 + m_1 + m_2}.$$

Si nous adoptons $\xi_2 = x_2 - X_1$, $\xi_1 = x_1 - X_1$, nous avons la combinaison indiquée par Jacobi (§ II, n° 15 de son *Mémoire sur l'élimination des nœuds*); deux planètes μ_1, μ_2 tournant autour du centre de gravité du soleil m_0 et de la première planète m_1. En appelant m_0 la terre, m_1 la lune, nous aurions un soleil fictif μ_2 et une lune fictive μ_1 tournant tous les deux autour du centre de gravité de la terre et de la lune; μ_2 différerait peu de la masse terrestre m_0, et $\mu_1 = m_1 \frac{m_0 + m_1}{m_0}$ différerait peu de la masse lunaire m_1. Si nous remplacions $x_1 - X_1$ par $x_1 - x_0$ et la valeur ci-dessus de μ_1 par $\frac{m_1 m_0}{m_0 + m_1}$, nous aurions une lune fictive dont la masse μ_1 serait encore à peu près égale à m_1 et qui tournerait autour de la terre, pendant que le soleil fictif μ_2 tournerait autour du centre de gravité de la terre et de la lune. C'est la combinaison adoptée par M. Weiler en 1866; on voit qu'elle ne se distingue de la précédente que par un changement de notation.

On pourrait maintenant ajouter un quatrième corps m_3, dont la coordonnée serait $\xi_3 = x_3 - X_2$, et la masse fictive $\mu_3 = m_3\left(1 - \frac{m_3}{m}\right)$, en désignant par m la masse totale du système; puis un cinquième corps m_4, avec la coordonnée ξ_4 et la masse fictive μ_4, et ainsi de suite. L'avantage de cette transformation consiste dans la forme des équations (20), qui permet de prendre, en première approximation,

$$x_0 - X = 0, \quad x_1 - X = \xi_1, \ldots, \quad x_n - X = \xi_n.$$

5. Je supposerai que la fonction des forces a la forme ordinaire

$$U = k\sum \frac{m_i m_h}{r_{ih}}$$

où r_{ih} figure la distance mutuelle des masses m_i, m_h, et k la constante de l'attraction. Comme U ne dépend pas des différences des coordonnées, nous avons

$$\sum \frac{dU}{dx} = \sum \frac{dU}{dy} = \sum \frac{dU}{dz} = 0,$$

d'où résultent les trois intégrales qui expriment la conservation du mouvement du centre de gravité,

$$\begin{aligned} mX &= A + Bt, \\ mY &= A' + B't, \\ mZ &= A'' + B''t. \end{aligned}$$

En même temps

$$(21)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{d^2X}{dt^2} = \frac{d^2Y}{dt^2} = \frac{d^2Z}{dt^2} = 0, \\ &m\frac{dX^2 + dY^2 + dZ^2}{dt^2} = \frac{1}{m}(B^2 + B'^2 + B''^2), \\ &m\frac{X\,dY - Y\,dX}{dt} = \frac{1}{m}(AB' - A'B), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \right.$$

Si nous nous reportons maintenant à l'identité symbolique

$$(12)\quad \left\{ \begin{aligned} S = \frac{1}{m}\sum m_i m_h ((x_i - x_h)) &= \sum_0^n m_i((x_i)) - m((X)) \\ &= \sum_0^n m_i((x_i - X)) = \sum_1^n \mu_i((\xi_i)), \end{aligned} \right.$$

nous voyons que nous aurons $((X)) =$ const., lorsque le symbole $((x))$ représente la force vive ou le mouvement aréolaire, et $((X)) = 0$ quand $((x)) = d^2x\,\delta x$. Il s'ensuit que les intégrales des forces vives et des aires ont lieu pour les variables $x_i - x_h$, $x_i - X$ et ξ_i, avec des constantes qui ne diffèrent que par le terme $m((X))$ des constantes analogues que l'on trouve pour les coordonnées absolues x_i.

Si nous désignons, comme à l'ordinaire, par $2T$ la force vive absolue des $n+1$ corps donnés, et par H la différence $T-U$, le principe des forces vives donne l'intégrale

$$H = h,$$

où h est une constante. Mais si $2T$ représente la force vive des masses m_i, estimée autour de leur centre de gravité, ou bien la force vive des n masses μ, on aura

$$H = h_0,$$

en désignant par h_0 la constante h, diminuée de la demi-force vive du centre de gravité :

$$h_0 = h - \frac{1}{2m}(B^2 + B'^2 + B''^2).$$

En prenant pour origine l'un des corps du système donné, par exemple m_0, on peut tout exprimer par les différences $x_i - x_0$, et l'intégrale des forces vives se présente sous cette forme :

$$\frac{1}{m}\sum m_i m_h \left[\left(\frac{dx_i - dx_h}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_i - dy_h}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz_i - dz_h}{dt}\right)^2\right] - U = h_0.$$

Soient L, M, N les trois constantes du plan invariable qui passe par le centre de gravité du système donné ; si on fait $L^2 + M^2 + N^2 = K^2$, les rapports $L:K$, $M:K$, $N:K$ sont les cosinus qui déterminent le pôle de ce plan. L'identité (12) donne alors

$$(22)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{m}\sum m_i m_h [(x_i - x_h)\, d(y_i - x_h) - (y_i - y_h)\, d(x_i - x_h)] \\ &\quad = \sum m_i [(x_i - X)\, d(y_i - Y) - (y_i - Y)\, d(x_i - X)] \\ &\quad = \sum \mu(\xi\, d\eta - \eta\, d\xi) = N \end{aligned}\right.$$

et deux équations analogues pour les plans xz et yz. Le mouvement aréolaire relatif des $n+1$ masses m_i est donc égal au mouvement aréolaire des mêmes masses autour de leur centre de gravité, et au mouvement aréolaire absolu des n masses μ_i. Le plan invariable des masses μ_i est parallèle à celui des masses m_i tournant autour de leur centre de gravité.

Si nous prenons $((x)) = d^2x\,\delta x$, l'équation (12) montre enfin que

$$dt^2\,\delta U = \sum m_i\, d^2x_i\,\delta x_i = \sum m_i\, d^2(x_i - X)\,\delta(x_i - X) = \sum \mu_i\, d^2\xi_i\,\delta\xi_i,$$

la somme comprenant toutes les variables x, y, z. Il s'ensuit qu'on aura

$$\mu_i \frac{d^2\xi_i}{dt^2} = \frac{dU}{d\xi_i}$$

pour les $3n$ coordonnées ξ, η, ζ, comme on a

$$m_i \frac{d^2(x_i - X)}{dt^2} = \frac{dU}{d(x_i - X)}$$

pour les $3n + 3$ coordonnées $x - X$, $y - Y$, $z - Z$. Lorsqu'on prend pour variables indépendantes les coordonnées $x_i - x_0$, $y_i - y_0$, $z_i - z_0$, rapportées à l'un des mobiles (m_0), la forme des équations différentielles n'est plus aussi simple. On a, dans ce cas,

$$\frac{d^2(x_i - x_0)}{dt^2} = \frac{1}{m_i}\,\frac{dU}{d(x_i - x_0)} + \frac{1}{m_0}\sum_1^n \frac{dU}{d(x_h - x_0)},$$

où l'on peut, *dans la somme*, omettre les termes de U qui dépendent des différences $x_i - x_h = x_i - x_0 - (x_h - x_0)$, parce que leurs dérivées partielles se détruisent si on les ajoute.

Voici enfin une dernière application de l'identité (12). Soient r_i et ρ_i les rayons vecteurs des masses m_i, μ_i, et R celui de la masse m (du centre de gravité); soit r_{ih} la distance de m_i à m_h, et R_i la distance de m_i à m (au centre de gravité). On aura

$$(23) \qquad \frac{1}{m}\sum m_i\, m_h\, r_{ih}^2 = \sum_0^n m_i\, r_i^2 - m R^2 = \sum_0^n m_i\, R_i^2 = \sum_1^n \mu_i\, \rho_i^2.$$

Si on supprime les z, les quantités r, R, ρ représentent les projections des rayons vecteurs ou distances sur le plan des xy, et la formule (23) renferme des théorèmes sur les moments d'inertie. Si elles représentent les distances ou rayons vecteurs mêmes, la formule (23), différentiée deux fois, conduit à une équation différentielle très-remarquable.

On a évidemment

$$\frac{1}{2}d^2\sum mr^2 = d\sum mx\,dx = \sum m(dx^2 + x\,d^2x),$$

en étendant les deux dernières sommes à toutes les variables x, y, z, ou bien, en vertu des équations du mouvement,

$$\frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}\sum mr^2 = \sum m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \sum x\frac{dU}{dx}.$$

Or le principe des forces vives donne

$$\sum m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = 2U + 2h.$$

D'un autre côté, U étant une fonction homogène du degré -1, nous pouvons écrire

$$\delta U + U\delta = 0,$$

en considérant δ comme une facteur constant après avoir développé la variation δU. Il s'ensuit que

$$\frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}\sum mr^2 = 2U + 2h + \frac{\delta U}{\delta} = U + 2h.$$

On a, d'un autre côté,

$$\frac{m}{2}\frac{d^2}{dt^2}R^2 = 2(h - h_0).$$

Donc

$$(24)\quad \frac{1}{2m}\frac{d^2}{dt^2}\sum m_i m_h r_{ih}^2 = \frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}\sum m_i R_i^2 = \frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}\sum \mu_i\rho_i^2 = U + 2h_0 = T_0 + h_0,$$

en désignant par $2T_0$ la force vive des masses μ, ou la force vive des corps m_i, estimée autour du centre de gravité. On déduit encore de là cette équation connue

$$(25)\qquad \sum m_i m_h\left(\frac{d^2 r_{ih}^2}{dt^2} - \frac{2km}{r_{ih}}\right) = 4mh_0,$$

qui ne renferme que les distances mutuelles des mobiles. Jacobi en a tiré des conséquences importantes relatives à la stabilité du système solaire. La stabilité exige que les distances r restent finies. Il faut pour cela que h_0 soit négatif, que les valeurs de $U + 2h_0$ oscillent autour de zéro, celles de la force vive $2T_0$ autour de U. Une valeur positive de h_0 correspond au mouvement hyperbolique, une valeur nulle à des paraboles.

6. En résumé, les équations différentielles du mouvement et les intégrales connues se présentent sous leur aspect le plus simple lorsqu'on fait usage des variables ξ, η, ζ. Le nombre des équations différentielles à intégrer se réduit alors à $3n$ comme lorsqu'on prend pour origine l'un des mobiles, mais sans qu'elles perdent, comme dans ce dernier cas, leur forme si simple. Les intégrales des forces vives et des aires ne renferment, comme les équations différentielles, que les $3n$ inconnues ξ, η, ζ; le problème des $n+1$ corps est donc ramené à un problème du mouvement de n corps. Ce résultat a été obtenu par une élimination à l'aide des trois intégrales du centre de gravité. Mais il y a une différence essentielle entre le problème primitif et le problème transformé : la fonction U ne dépend plus des différences des variables. Il en résulte que les sommes $\sum \frac{dU}{d\xi}$ ne s'annulent pas, et que le principe de la conservation du mouvement du centre de gravité n'a pas lieu pour les masses fictives. Cette circonstance établit une étroite analogie entre le problème transformé et celui du mouvement de n corps autour d'un centre d'attraction fixe.

Toutefois, à moins de supposer une loi d'attraction compliquée, la fonction U, transformée par les ξ, η, ζ, n'a pas la même forme que dans le cas d'un centre fixe; l'analogie se borne à cette remarque, que, dans les deux cas, U ne renferme que les distances mutuelles et les rayons vecteurs des mobiles. Soit ρ_{ik} la distance des masses μ_i, μ_k, et σ_{ik} le cosinus de l'angle formé par les rayons vecteurs ρ_i et ρ_k, nous avons

$$(26) \qquad \left\{ \begin{aligned} \rho_i^2 &= \xi_i^2 + \eta_i^2 + \zeta_i^2, \\ \rho_i \rho_k \sigma_{ik} &= \xi_i \xi_k + \eta_i \eta_k + \zeta_i \zeta_k, \\ \rho_{ik}^2 &= \rho_i^2 + \rho_k^2 - 2\rho_i \rho_k \sigma_{ik}, \end{aligned} \right.$$

et si on fait $\left(\frac{c_{ih}}{\sqrt{m_i}} - \frac{c_{kh}}{\sqrt{m_k}}\right)\sqrt{\mu_k} = e_h^{(ik)}$, les formules (7) donnent

$$x_i - x_k = \sum^h e_h^{(ik)} \xi_h,$$

d'où

$$(27) \qquad r_{ik}^2 = \left[\sum^{h} e_h^{(ik)} \rho_h \sigma_h\right]^2,$$

formule symbolique où il faut, après développement, faire $\sigma_h \sigma_l = \sigma_{hl}$ et $\sigma_h^2 = \sigma_{hh} = 1$. On a d'ailleurs $2\rho_h \rho_l \sigma_{hl} = \rho_h^2 + \rho_l^2 - \rho_{hl}^2$, ce qui prouve que les distances r_{ik} ne dépendent que des n rayons vecteurs ρ_i et des $\frac{n(n-1)}{2}$ distances ρ_{ik}. On a d'ailleurs

$$\frac{dU}{d\xi_l} = -k \sum^{i,k} \frac{m_i m_k}{r_{ik}^3} e_l^{(ik)} \sum^{h} e_h^{(ik)} \xi_h.$$

7. Il faut maintenant déterminer les coefficients de la transformation générale, de manière à satisfaire aux conditions exprimées par les équations

$$(2) \qquad \sum_{h=0}^{h=n} c_{hi} c_{hk} = 0, \quad \sum_{h=0}^{h=n} c_{hi} c_{hi} = 1,$$

et

$$(6) \qquad c_{h0} = \sqrt{\frac{m_h}{m}}, \quad \sum_{h=0}^{h=n} c_{hi} \sqrt{m_h} = 0,$$

que nous avons établies plus haut.

M. Cayley a montré que les coefficients d'une substitution orthogonale peuvent s'exprimer d'une manière générale par un système de quantités arbitraires. Nos coefficients c sont au nombre de $(n+1)^2$, et les équations (2) ci-dessus représentent

$$n + 1 + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

conditions; il en résulte que le nombre des quantités arbitraires sera égal à $\frac{n(n+1)}{2}$, ou bien à $n(n+1)$, s'il existe entre elles $\frac{n(n+1)}{2}$ relations. Je fais ici abstraction des conditions spéciales énoncées par les équations (6), dont il sera question plus tard. Désignons par b_{ih} les coefficients de la transformation simultanée

$$\sqrt{m_i}\, x_i = \sum_0^n b_{ih} \sqrt{m_h}\, u_h,$$

$$\sqrt{\mu_i}\, \xi_i = \sum_0^n b_{hi} \sqrt{m_h}\, u_h,$$

en supposant que

$$b_{ih} + b_{hi} = 0, \quad b_{ii} = 1.$$

On a d'abord $2u_i = x_i + \xi_i$, et la résolution du système montre que l'on peut prendre

$$c_{hi} = \frac{2\beta_{hi}}{B}, \quad c_{ii} = \frac{2\beta_{ii}}{B} - 1, \tag{28}$$

en désignant par B le déterminant des b, et par β_{hi} le coefficient de b_{hi} dans B. La transformation prend alors cet aspect :

$$B(\sqrt{m_i}\, x_i + \sqrt{\mu_i}\, \xi_i) = 2\sum_0^n \beta_{hi} \sqrt{m_h}\, x_h = 2\sum_0^n \beta_{ih} \sqrt{\mu_h}\, \xi_h. \tag{29}$$

Cette formule représente une substitution orthogonale entre les variables $\sqrt{m_i}\, x_i$ d'une part, et $\sqrt{\mu_i}\, \xi_i$ de l'autre. Pour obtenir que ξ_0 soit la coordonnée X du centre de gravité, il faut encore tenir compte des équations (6), c'est-à-dire prendre $c_{h0} = \sqrt{\frac{m_h}{m}}$. Nous ferons désormais $m_0 = 1$, en prenant m_0 pour l'unité des masses, et nous écrirons β à la place de β_{00}, de sorte que β représentera le déterminant mineur

$$\beta = \sum (\pm\, b_{11}\, b_{22} \ldots b_{nn}).$$

Les équations (6) et (28) donnent alors

$$\frac{2\beta_{h0}}{B} = \sqrt{\frac{m_h}{m}}, \quad \frac{2\beta}{B} = 1 + \frac{1}{\sqrt{m}}. \tag{30}$$

Ces relations spécialisent en quelque sorte la substitution orthogonale qui convient au problème des $n+1$ corps. Elles sont au nombre de $n+1$, mais ne représentent que n conditions distinctes, car on a identiquement

$$\sum_{0}^{n} c_{h0}^2 = 1 \quad \text{ou bien} \quad \sum_{1}^{n} (2\beta_{h0})^2 = B^2 - (2\beta - B)^2,$$

d'où il suit qu'en faisant $\frac{2\beta_{h0}}{B} = \sqrt{\frac{m_h}{m}}$, on aura nécessairement

$$\frac{2\beta}{B} = 1 + \frac{1}{\sqrt{m}}.$$

Il ne s'ajoute donc que n conditions nouvelles aux $\frac{n(n+1)}{2}$ relations qui existaient déjà entre les $n(n+1)$ quantités b_{hi} dont les indices h, i sont différents l'un de l'autre. Par conséquent, si l'on tient compte de toutes les conditions à remplir, on dispose en réalité de $\frac{n(n-1)}{2}$ arbitraires (d'une seule dans le cas de trois corps). Il est vrai que l'on peut, en outre, considérer comme arbitraires les n masses μ, mais elles n'entrent dans les formules que comme facteurs des carrés des coordonnées; aussi écrirons-nous désormais ξ_i à la place de $\sqrt{\mu_i}\xi_i$, de sorte que les formules de transformation (7) et (8) deviennent

$$\sqrt{m_i}\,(x_i - X) = \sum_{h=1}^{h=n} c_{ih}\,\xi_h, \tag{7 bis}$$

$$\xi_i = \sum_{h=1}^{h=n} c_{hi}\sqrt{m_h}\,(x_h - x_0). \tag{8 bis}$$

8. Les équations de condition (30) peuvent être remplacées par des relations linéaires entre les quantités b. Nous avons, en vertu des propriétés connues des déterminants,

$$\sum_{h=0}^{h=n} b_{hi}\,\beta_{hk} = 0, \quad \sum_{h=0}^{h=n} b_{hi}\,\beta_{hi} = B,$$

d'où, à cause de (28),

$$(31)\quad \begin{cases} b_{ki}+\displaystyle\sum_{h=0}^{h=n} b_{hi}\,c_{hk}=0, \\ -1+\displaystyle\sum_{h=0}^{h=n} b_{hi}\,c_{hi}=0. \end{cases}$$

On en déduit, en faisant dans la première $k=0$, dans la seconde $i=0$,

$$(32)\quad \begin{cases} (1+\sqrt{m})\,b_{0i}+\displaystyle\sum_{1}^{n}\sqrt{m_h}\,b_{hi}=0, \quad \text{pour} \quad i>0, \\ 1-\sqrt{m}+\displaystyle\sum_{1}^{n}\sqrt{m_h}\,b_{h0}=0. \end{cases}$$

Il est facile de voir que l'une des équations (32) résulte des n autres, de sorte qu'elles ne représentent que n conditions distinctes. En effet, si nous ajoutons les équations qui correspondent à $i=0, i=1, i=2,\ldots$, après les avoir respectivement multipliées par $1+\sqrt{m}$, $\sqrt{m_1}$, $\sqrt{m_2}$, ..., il vient

$$1-m+(1+\sqrt{m})\sum_{1}^{n}\sqrt{m_h}\,b_{h0}+(1+\sqrt{m})\sum_{1}^{n}\sqrt{m_h}\,b_{0h}+\sum_{1}^{n}\sum_{1}^{n}\sqrt{m_i m_h}\,b_{hi}=0,$$

équation identique à cause des relations qui existent entre les b.

Le système des formules

$$(33)\quad \begin{cases} b_{ii}=b_{00}=1, \\ b_{ih}+b_{hi}=0, \\ b_{0i}=-b_{i0}, \\ (1+\sqrt{m})\,b_{0i}=-\displaystyle\sum_{h=1}^{h=n}\sqrt{m_h}\,b_{hi}, \\ (1+\sqrt{m})\,b_{i0}=2\sqrt{m_i}-\displaystyle\sum_{h=1}^{h=n}\sqrt{m_h}\,b_{ih}, \end{cases}$$

où l'on suppose toujours les indices i et h *différents de zéro*, exprime les quantités b_{i0} et b_{0i} par les $n(n-1)$ quantités b_{ih} dont l'indice h diffère de i. Ces quantités sont assujetties à satisfaire à $\frac{n(n-1)}{2}$ relations linéaires et ne représentent conséquemment que $\frac{n(n-1)}{2}$ arbitraires; je les appellerai néanmoins les *arbitraires*, afin de les distinguer des b_{ii}, b_{0i} et b_{i0}.

On peut exprimer les coefficients de la substitution par les arbitraires seules, en éliminant les b_{0i} et les b_{i0}.

L'équation (30) nous donne d'abord

$$(34)\qquad \begin{cases} (1+\sqrt{m})\,\mathrm{B} = 2\sqrt{m}\,\beta, \\ (1+\sqrt{m})\,\beta_{i0} = \sqrt{m_i}\,\beta. \end{cases}$$

Le déterminant β ne renferme que les arbitraires; il fournirait les coefficients d'une substitution orthogonale du degré n. Nous pouvons le décomposer en déterminants partiels à l'aide de la formule

$$\beta = \sum_1^n b_{ih}\,\mathfrak{C}_{ih},$$

où la somme se prend par rapport à h ou par rapport à i. On déduit β_{0h} de β, et β_{ih} de β_{0h} par les opérations suivantes. D'abord β se change en $(1+\sqrt{m})\,\beta_{0h}$, si la ligne b_{1h}, b_{2h},... est remplacée par

$$-(1+\sqrt{m})\,b_{10},\quad -(1+\sqrt{m})\,b_{20},\ldots,$$

ou bien, à cause des formules (33), b_{ph} par

$$-2\sqrt{m_p} + \sqrt{m_1}\,b_{p1} + \sqrt{m_2}\,b_{p2} + \ldots.$$

Le terme $-2\sqrt{m_p}$ donne $-2\sum^p \sqrt{m_p}\,\mathfrak{C}_{ph}$, le terme $\sqrt{m_h}\,b_{ph}$ donne $\sqrt{m_h}\,\beta$, et les autres termes donnent zéro, en vertu d'un théorème connu. Par conséquent

$$(35)\qquad (1+\sqrt{m})\,\beta_{0h} = \sqrt{m_h}\,\beta - 2\sum^p \sqrt{m_p}\,\mathfrak{C}_{ph}.$$

On déduit $(1+\sqrt{m})\,\beta_{ih}$ de β_{0h} en remplaçant dans B la colonne b_{i0}, b_{i1},...

par une colonne

$$-(1+\sqrt{m})\,b_{00}, \quad -(1+\sqrt{m})\,b_{01}, \ldots.$$

En tenant compte de (32) et de (33), cela revient à remplacer b_{i0} par

$$-(1+\sqrt{m}) = -2\sqrt{m} + \sqrt{m_1}\,b_{10} + \sqrt{m_2}\,b_{20} + \ldots,$$

et b_{ip} par

$$\sqrt{m_1}\,b_{1p} + \sqrt{m_2}\,b_{2p} + \ldots.$$

Les termes $\sqrt{m_i}b_{ip}$ donnent $\sqrt{m_i}\beta_{0h}$, les termes $\sqrt{m_k}b_{kp}$, où k diffère de i, donnent zéro; enfin le terme $-2\sqrt{m}$, dans l'expression qui a pris la place de b_{i0}, se trouve multiplié par le coefficient de $-b_{hi}$ dans β. Il en résulte que

$$(36) \qquad (1+\sqrt{m})\,\beta_{ih} = \sqrt{m_i}\,\beta_{0h} + 2\sqrt{m}\,\mathfrak{b}_{ih}.$$

Je désignerai à présent par γ_{ih} les coefficients d'une substitution orthogonale du degré n, tirée du déterminant mineur β, de sorte que

$$(37) \qquad \gamma_{ih} = \frac{2\,\mathfrak{b}_{ih}}{\beta}, \quad \gamma_{ii} = \frac{2\,\mathfrak{b}_{ii}}{\beta} - 1,$$

et je représenterai par

$$\beta_h = \sum_{i=1}^{i=n} \sqrt{m_i}\,\mathfrak{b}_{ih}$$

ce que devient β lorsque la ligne $b_{1h}, b_{2h}, \ldots, b_{ih}, \ldots$ est remplacée par $\sqrt{m_1}, \sqrt{m_2}, \ldots, \sqrt{m_i}, \ldots$. On trouve alors que les coefficients c s'expriment facilement à l'aide des γ. En effet, les formules (34), (35), (36) donnent

$$(38) \qquad \left\{\begin{aligned} &\sqrt{m}\,c_{h0} = \sqrt{m_h}, \\ &-\sqrt{m}\,c_{0h} = \frac{2\,\beta_h}{\beta} - \sqrt{m_h} = \sum_{p=1}^{p=n} \sqrt{m_p}\,\gamma_{ph}, \\ &c_{ih} = \gamma_{ih} + \frac{\sqrt{m_i}}{1+\sqrt{m}}\,c_{0h}. \end{aligned}\right.$$

La substitution orthogonale du degré $n+1$ conduit donc ici à une autre substitution du degré n : dans le cas de trois corps, c'est une substitution ternaire qui revient à une substitution binaire. On pourrait l'appeler *terno-binaire*. On tire encore de (7 *bis*) et (8 *bis*) :

$$(39)\qquad \left\{\begin{aligned} x_i - \mathrm{X} &= \frac{1}{\sqrt{m_i}} \sum c_{ih}\,\xi_h, \\ x_i - x_k &= \frac{1}{\sqrt{m_i\,m_k}} \sum \left(\sqrt{m_k}\,c_{ih} - \sqrt{m_i}\,c_{kh}\right)\xi_h, \\ \xi_i &= \sum \sqrt{m_h}\,c_{hi}(x_h - x_0), \end{aligned}\right.$$

ou bien

$$(40)\qquad \left\{\begin{aligned} x_0 - \mathrm{X} &= \sum c_{0h}\,\xi_h, \\ x_i - \mathrm{X} &= \frac{1}{\sqrt{m_i}} \sum \gamma_{ih}\,\xi_h + \frac{1}{1+\sqrt{m}} \sum c_{0h}\,\xi_h, \\ x_i - x_0 &= \frac{1}{\sqrt{m_i}} \sum \gamma_{ih}\,\xi_h - \frac{\sqrt{m}}{1+\sqrt{m}} \sum c_{0h}\,\xi_h, \\ \xi_i &= \sum \gamma_{hi}\sqrt{m_h}(x_h - x_0) + \frac{m c_{0i}}{1+\sqrt{m}}(\mathrm{X} - x_0), \end{aligned}\right.$$

les sommes devant être prises par rapport à h, depuis $h = 1$ jusqu'à $h = n$. On prendra toujours $m_0 = 1$.

Un cas particulier est celui où toutes les arbitraires s'évanouissent. Les quantités b se réduisent alors aux suivantes :

$$b_{ii} = 1, \quad b_{i0} = -\,b_{0i} = \frac{\sqrt{m_i}}{1+\sqrt{m}},$$

et les déterminants mineurs sont nuls ou égaux à l'unité :

$$\beta = 1, \quad \gamma_{ii} = 1, \quad \gamma_{ih} = 0.$$

L'une des formules (40) donne alors, si nous remplaçons ξ_i par $\sqrt{m_i}\,\xi_i$,

$$x_i - x_0 = \xi_i + \frac{1}{1+\sqrt{m}} \sum_1^n m_h\,\xi_h :$$

c'est la transformation par les points canoniques, que nous avons développée au n° 3.

Un autre cas particulier est celui qui a été traité au n° 4, où nous avons obtenu une substitution orthogonale en introduisant les centres de gravité successifs des systèmes M_0, M_1, M_2, ... Il est clair qu'on pourrait aussi arriver à la transformation générale du degré $n+1$ en prenant pour point de départ l'un de ces cas particuliers et en appliquant aux variables spéciales xyz une substitution orthogonale du degré n, de manière que

$$\mathrm{S}=\sum_1^n \mathrm{m}_i((\mathrm{x}_i))=\sum_1^n \mu_i((\xi_i)).$$

Je me bornerai à indiquer plus loin la marche à suivre dans les cas de trois et de quatre corps.

9. Nous allons d'abord appliquer les formules générales au problème des trois corps. Nous avons ici $n=2$, et les arbitraires se réduisent à une seule, $b=b_{12}=-b_{21}$. Donc (*)

$$\beta=1+b^2,\quad \mathfrak{b}_{11}=\mathfrak{b}_{22}=1,\quad \mathfrak{b}_{12}=-\mathfrak{b}_{21}=b,$$
$$\gamma_{11}=\gamma_{22}=\frac{2}{\beta}-1,\quad \gamma_{12}=-\gamma_{21}=\frac{2b}{\beta}.$$

Les γ_{ih} représentent une substitution orthogonale binaire, et si nous écrivons, pour abréger, γ à la place de γ_{11} et de γ_{22}, γ' à la place de γ_{12} et de $-\gamma_{21}$, nous avons $\gamma^2+\gamma'^2=1$, et nous pouvons prendre $\gamma=\cos\varphi$, $\gamma'=\sin\varphi$, en représentant l'arbitraire par l'angle φ. Les formules (38) donnent alors

$$(41)\quad \left\{\begin{array}{ll}
\text{Coefficients de} & \\
x_0-\mathrm{X} & \left\{\begin{array}{l}\sqrt{m}\,c_{01}=-\sqrt{m_1}\,\gamma+\sqrt{m_2}\,\gamma',\\ \sqrt{m}\,c_{02}=-\sqrt{m_2}\,\gamma-\sqrt{m_1}\,\gamma'.\end{array}\right.\\
x_1-\mathrm{X} & \left\{\begin{array}{l}(1+\sqrt{m})\sqrt{m}\,c_{11}=(1+\sqrt{m}+m_2)\gamma+\sqrt{m_1m_2}\,\gamma',\\ (1+\sqrt{m})\sqrt{m}\,c_{12}=-\sqrt{m_1m_2}\,\gamma+(1+\sqrt{m}+m_2)\gamma',\end{array}\right.\\
x_2-\mathrm{X} & \left\{\begin{array}{l}(1+\sqrt{m})\sqrt{m}\,c_{21}=-\sqrt{m_1m_2}\,\gamma-(1+\sqrt{m}+m_1)\gamma',\\ (1+\sqrt{m})\sqrt{m}\,c_{22}=(1+\sqrt{m}+m_1)\gamma-\sqrt{m_1m_2}\,\gamma'.\end{array}\right.
\end{array}\right.$$

(*) Nous avons toujours accolé les indices h, i sans les séparer par une virgule, nous avons écrit b_{12} pour $b_{1,2}$, etc. Le lecteur ne s'y trompera pas.

$$
(42)\quad \begin{cases}
\text{Ceofficients de} & \\
x_2 - x_1 & \begin{cases} \sqrt{m_1}\,c_{21} - \sqrt{m_2}\,c_{11} = \sqrt{m}\,c_{02}, \\ \sqrt{m_1}\,c_{22} - \sqrt{m_2}\,c_{12} = -\sqrt{m}\,c_{01}, \end{cases} \\
x_0 - x_2 & \begin{cases} \sqrt{m_2}\,c_{01} - c_{21} = \sqrt{m}\,c_{12}, \\ \sqrt{m_2}\,c_{02} - c_{22} = -\sqrt{m}\,c_{11}, \end{cases} \\
x_1 - x_0 & \begin{cases} c_{11} - \sqrt{m_1}\,c_{01} = \sqrt{m}\,c_{22}, \\ c_{12} - \sqrt{m_1}\,c_{02} = -\sqrt{m}\,c_{21}. \end{cases}
\end{cases}
$$

L'inspection de ces tableaux montre que les six coefficients (42), qui servent à exprimer les différences des coordonnées par les $\xi\eta\zeta$, sont *les mêmes* que ceux par lesquels on transforme les coordonnées $x-\mathrm{X}$, $y-\mathrm{Y}$, $z-\mathrm{Z}$, rapportées au centre de gravité, ou, du moins, que ces deux groupes de coefficients ne diffèrent que par des facteurs qui dépendent des masses. Les formules (39) combinées avec (40) donnent, par exemple,

$$x_0 - \mathrm{X} = c_{01}\,\xi_1 + c_{02}\,\xi_2,$$

$$\sqrt{\frac{m_1 m_2}{m}}\,(x_2 - x_1) = c_{02}\,\xi_1 - c_{11}\,\xi_2,$$

d'où l'on tire

$$(x_0 - \mathrm{X})^2 + \frac{m_1 m_2}{m}(x_2 - x_1)^2 = (c_{01}^2 + c_{02}^2)(\xi_1^2 + \xi_2^2) = \frac{m_1 + m_2}{m}(\xi_1^2 + \xi_2^2).$$

On a des relations analogues pour $(x_1 - \mathrm{X})$ et $(x_0 - x_2)$, pour $(x_2 - \mathrm{X})$ et $(x_1 - x_0)$; elles montrent que notre substitution terno-binaire fournit les trois substitutions binaires contenues dans la formule

$$
(43)\quad \begin{cases}
\xi_1^2 + \xi_2^2 = \dfrac{m m_0 (x_0 - \mathrm{X})^2 + m_1 m_2 (x_1 - x_2)^2}{m_1 + m_2} \\[2ex]
 = \dfrac{m m_1 (x_1 - \mathrm{X}) + m_2 m_0 (x_2 - x_0)^2}{m_2 + m_0} \\[2ex]
 = \dfrac{m m_2 (x_2 - \mathrm{X})^2 + m_0 m_1 (x_0 - x_1)^2}{m_0 + m_1},
\end{cases}
$$

qui découle aussi directement de (18). On peut remarquer, en outre, que les trois groupes c_{01}, c_{02}; c_{11}, c_{12}; c_{21}, c_{22} dépendent chacun de γ, γ'

par une substitution orthogonale, ce qui s'exprime par l'égalité

$$\gamma^2+\gamma'^2=\frac{m}{m_1+m_2}(c_{01}^2+c_{02}^2)=\frac{m}{1+m_2}(c_{11}^2+c_{12}^2)=\frac{m}{1+m_1}(c_{21}^2+c_{22}^2)=1,$$

qui résulte aussi des relations

$$\sum c_{hi}^2=1,\quad c_{ho}^2=\frac{m_h}{m},$$

en prenant toujours $m_0=1$.

Si nous faisions d'abord $\varphi=0$, $\gamma'=0$, $\gamma=1$, en écrivant $\sqrt{m_1}\,\xi_1$, $\sqrt{m_2}\,\xi_2$ à la place de ξ_1, ξ_2, nous trouverions la transformation par laquelle les planètes m_1, m_2 sont rapportées au point canonique du Soleil m_0. En effet,

$$\sqrt{m}\,(x_0-\mathrm{X})=-(m_1\xi_1+m_2\xi_2),$$
$$x_2-x_1=\xi_2-\xi_1,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

comme dans (14). Pour examiner de plus près le cas général, j'introduirai les trois angles α_0, α_1, α_2 définis par les équations

$$(44)\qquad \operatorname{tg}\alpha_0=\sqrt{\frac{m_1}{m_2}},\quad \operatorname{tg}\alpha_1=\frac{\sqrt{m_1m_2}}{1+\sqrt{m}+m_2},\quad \operatorname{tg}\alpha_2=\frac{\sqrt{m_1m_2}}{1+\sqrt{m}+m_1},$$

et je poserai

$$\alpha_1+\alpha_2=\theta,\quad \alpha_0-\alpha_1=\theta_2,\quad \alpha_0+\alpha_2=\frac{\pi}{2}-\theta_1,$$

d'où

$$\theta+\theta_1+\theta_2=\frac{\pi}{2},$$

$$(45)\qquad \operatorname{tg}\theta=\sqrt{\frac{m_1m_2}{m}},\quad \operatorname{tg}\theta_1=\sqrt{\frac{m_2}{mm_1}},\quad \operatorname{tg}\theta_2=\sqrt{\frac{m_1}{mm_2}},$$

$$\sin^2\theta=\frac{m_1m_2}{(1+m_1)(1+m_2)},\quad \cos^2\theta=\frac{m}{(1+m_1)(1+m_2)},$$

$$\sin^2\theta_2=\frac{m_1}{(1+m_2)(m_1+m_2)},\quad \cos^2\theta_2=\frac{mm_2}{(1+m_2)(m_1+m_2)},$$

$$\sin^2\theta_1=\frac{m_2}{(1+m_1)(m_1+m_2)},\quad \cos^2\theta_1=\frac{mm_1}{(1+m_1)(m_1+m_2)}.$$

On trouve alors

$$(46)\quad \left\{\begin{aligned}
&\sqrt{\frac{m}{m_1+m_2}}\,c_{01}=\sin(\varphi-\alpha_0), &&\sqrt{\frac{m}{m_1+m_2}}\,c_{02}=-\cos(\varphi-\alpha_0),\\
&\sqrt{\frac{m}{1+m_2}}\,c_{11}=\cos(\varphi-\alpha_1), &&\sqrt{\frac{m}{1+m_2}}\,c_{12}=\sin(\varphi-\alpha_1),\\
&\sqrt{\frac{m}{1+m_1}}\,c_{21}=-\sin(\varphi+\alpha_2), &&\sqrt{\frac{m}{1+m_1}}\,c_{22}=\cos(\varphi+\alpha_2).
\end{aligned}\right.$$

Avec ces coefficients on a, par exemple, en rétablissant m_0 pour plus de symétrie,

$$(47)\quad \left\{\begin{aligned}
&\sqrt{\frac{mm_1}{m_0+m_2}}(x_1-\mathrm{X})=\xi_1\cos(\varphi-\alpha_1)+\xi_2\sin(\varphi-\alpha_1),\\
&\sqrt{\frac{m_0m_2}{m_0+m_2}}(x_2-x_0)=-\xi_1\sin(\varphi-\alpha_1)+\xi_2\cos(\varphi-\alpha_1),\\
&\sqrt{\frac{mm_2}{m_0+m_1}}(x_2-\mathrm{X})=-\xi_1\sin(\varphi+\alpha_2)+\xi_2\cos(\varphi+\alpha_2),\\
&\sqrt{\frac{m_0m_1}{m_0+m_1}}(x_1-x_0)=\xi_1\cos(\varphi+\alpha_2)+\xi_2\sin(\varphi+\alpha_2).
\end{aligned}\right.$$

Si l'on fait $\alpha_1-\varphi=\psi$, on a $\varphi+\alpha_2=\theta-\psi$, et il vient

$$(48)\quad \left\{\begin{aligned}
&\sqrt{\frac{m_2}{1+m_2}}(x_2-x_0)=\xi_1\sin\psi+\xi_2\cos\psi,\\
&\sqrt{\frac{m_1}{1+m_1}}(x_1-x_0)=\xi_1\cos(\theta-\psi)+\xi_2\sin(\theta-\psi).
\end{aligned}\right.$$

J'écrirai maintenant de nouveau $\sqrt{\mu_1}\,\xi_1$, $\sqrt{\mu_2}\,\xi_2$, à la place de ξ_1, ξ_2, et je poserai

$$(49)\quad \sqrt{\mu_1}\cos(\theta-\psi)=\sqrt{\frac{m_1}{1+m_1}},\quad \sqrt{\mu_2}\cos\psi=\sqrt{\frac{m_2}{1+m_2}}.$$

Comme on a

$$\sin\theta=\frac{\sqrt{m_1m_2}}{\sqrt{(1+m_1)(1+m_2)}},$$

la première des équations (48) donne

$$x_2 - x_0 = \xi_2 + \frac{m_1 \xi_1}{1 + m_1} \frac{\sin \psi}{\sin \theta \cos(\theta - \psi)}.$$

On trouve de cette façon

$$(50) \quad \left\{ \begin{aligned} x_2 - x_0 &= \xi_2 + \frac{m_1 \xi_1}{1 + m_1} \left[1 - \frac{\tan(\theta - \psi)}{\tan \theta} \right], \\ x_1 - x_0 &= \xi_1 + \frac{m_2 \xi_2}{1 + m_2} \left[1 - \frac{\tan \psi}{\tan \theta} \right]. \end{aligned} \right.$$

Si m_0 représentait le Soleil, m_1, m_2 étant deux planètes, il suffirait de prendre l'angle ψ entre les limites zéro et θ, pour que les seconds termes de ces expressions fussent toujours de petites quantités de l'ordre des masses m_1, m_2 et, par suite, comparables à des perturbations. On pourrait alors, en première approximation, prendre $x_2 - x_0 = \xi_2$ et $x_1 - x_0 = \xi_1$, et les coordonnées ξ_1, ξ_2 seraient celles de deux mouvements elliptiques. En même temps, les masses μ_1, μ_2 différeraient peu de m_1, m_2.

Il n'en serait plus de même si m_0 était la Terre, m_1 la Lune, m_2 le Soleil. Dans ce cas, le second terme de $x_1 - x_0$ ne serait plus très-petit par l'effet du coefficient $\frac{m_2}{1 + m_2}$, dont la valeur serait alors voisine de l'unité; en outre, le rapport $\frac{x_2 - x_0}{x_1 - x_2}$ $\left(\text{et par suite aussi } \frac{\xi_2}{\xi_1}\right)$ pourrait devenir égal à 400. Il faudrait donc alors prendre $\psi = \theta$, afin d'annuler complétement le second terme de $x_1 - x_0$. On aurait de cette manière

$$(51) \quad \left\{ \begin{aligned} x_1 - x_0 &= \xi_1, & \mu_1 &= \frac{m_1}{1 + m_1}, \\ x_2 - x_0 &= \xi_2 + \frac{m_1}{1 + m_1} \xi_1, & \mu_2 &= \frac{m_2(1 + m_1)}{m}. \end{aligned} \right.$$

C'est notre transformation (19), car, en désignant par X_1 la coordonnée du centre de gravité de la Terre et de la Lune, nous avons

$$x_0 + m_1 x_1 = (1 + m_1) X_1, \quad \text{d'où} \quad \xi_2 = x_2 - X_1,$$

comme dans (19).

On pourrait encore poser

$$\lambda \sin\psi = \varepsilon \sin\theta, \quad \lambda \cos\psi = 1 + \varepsilon\cos\theta, \quad \lambda^2 = 1 + 2\varepsilon\cos\theta + \varepsilon^2,$$

ε étant une quantité arbitraire destinée à remplacer ψ. Les formules (48) et (49) donneraient alors

$$(52) \quad \left\{ \begin{aligned} x_1 - x_0 &= \xi_1 + \frac{m_2 \xi_2}{1 + m_2} \frac{1}{1 + \varepsilon\cos\theta}, \\ x_2 - x_0 &= \xi_2 + \frac{m_1 \xi_1}{1 + m_1} \frac{\varepsilon}{\varepsilon + \cos\theta}, \\ \mu_1 &= \frac{m_1}{1 + m_1}\left(\frac{\lambda}{1 + \varepsilon\cos\theta}\right)^2, \\ \mu_2 &= \frac{m_2}{1 + m_2}\left(\frac{\lambda}{\varepsilon + \cos\theta}\right)^2. \end{aligned} \right.$$

C'est la transformation adoptée par M. Weiler. Pour la théorie de la Lune, on prend $\varepsilon = 0$, en désignant ici par m_2 la Lune, par m_1 le Soleil. Si m_1, m_2 sont deux planètes, m_0 étant le Soleil, on voit que les seconds termes de $x_1 - x_0$ et de $x_2 - x_0$ seront toujours de petites quantités de l'ordre des forces perturbatrices, tant que ε reste positif, quelle que soit d'ailleurs la valeur absolue de cette constante.

10. Nous allons constater que l'on peut aussi arriver à ces formules en partant de la transformation indiquée au nº 4. Si nous écrivons x, y, z à la place de ξ, η, ζ, les formules (19) et (20) donnent, X_1 étant la coordonnée primitive du centre de gravité des deux masses m_0, m_1,

$$\mathrm{x}_1 = x_1 - x_0, \qquad \mathrm{x}_2 = x_2 - X_1,$$
$$\mu_1 = \frac{m_0 m_1}{m_0 + m_1}, \qquad \mu_2 = \frac{(m_0 + m_1) m_2}{m_0 + m_1 + m_2}.$$

On tire de là

$$(53) \quad \left\{ \begin{aligned} x_1 - x_0 &= \mathrm{x}_1, & x_2 - X_2 &= \frac{m_0 + m_1}{m}\mathrm{x}_2, \\ x_2 - x_0 &= \mathrm{x}_2 + \frac{m_1}{m_0 + m_1}\mathrm{x}_1, & x_1 - X_2 &= -\frac{m_2}{m}\mathrm{x}_2 + \frac{m_0}{m_0 + m_1}\mathrm{x}_1, \\ x_2 - x_1 &= \mathrm{x}_2 - \frac{m_0}{m_0 + m_1}\mathrm{x}_1, & x_0 - X_2 &= -\frac{m_2}{m}\mathrm{x}_2 - \frac{m_1}{m_0 + m_1}\mathrm{x}_1, \end{aligned} \right.$$

en écrivant toujours m pour $m_0 + m_1 + m_2$. Ces relations peuvent se présenter sous la forme suivante :

$$(54)\quad \begin{cases} \sqrt{\dfrac{m_0 m_1}{m_0+m_1}}(x_1-x_0)=\sqrt{\mu_1}\,\mathrm{x}_1, \\ \sqrt{\dfrac{m_0 m_2}{m_0+m_2}}(x_2-x_0)=\dfrac{\sqrt{\mu_1}\,\mathrm{x}_2\sqrt{mm_0}+\sqrt{\mu_1}\,\mathrm{x}_1\sqrt{m_1 m_2}}{\sqrt{mm_0+m_1 m_2}}, \\ \sqrt{\dfrac{m_1 m_2}{m_1+m_2}}(x_2-x_1)=\dfrac{\sqrt{\mu_2}\,\mathrm{x}_2\sqrt{mm_1}-\sqrt{\mu_1}\,\mathrm{x}_1\sqrt{m_0 m_2}}{\sqrt{mm_1+m_0 m_2}}, \\ \sqrt{\dfrac{mm_2}{m_0+m_1}}(x_2-\mathrm{X}_2)=\sqrt{\mu_2}\,\mathrm{x}_2, \\ \sqrt{\dfrac{mm_1}{m_0+m_2}}(x_1-\mathrm{X}_2)=\dfrac{-\sqrt{\mu_2}\,\mathrm{x}_2\sqrt{m_1 m_2}+\sqrt{\mu_1}\,\mathrm{x}_1\sqrt{mm_0}}{\sqrt{mm_0+m_1 m_2}}, \\ \sqrt{\dfrac{mm_0}{m_1+m_2}}(x_0-\mathrm{X}_2)=\dfrac{-\sqrt{\mu_2}\,\mathrm{x}_2\sqrt{m_0 m_2}-\sqrt{\mu_1}\,\mathrm{x}_1\sqrt{mm_1}}{\sqrt{mm_1+m_0 m_2}}. \end{cases}$$

Si on introduit les angles θ définis par les formules (45), il vient

$$(55)\quad \begin{cases} \sqrt{\dfrac{m_0 m_2}{m_0+m_2}}(x_2-x_0)=\sqrt{\mu_2}\,\mathrm{x}_2\cos\theta+\sqrt{\mu_1}\,\mathrm{x}_1\sin\theta, \\ \sqrt{\dfrac{m_1 m_2}{m_1+m_2}}(x_2-x_1)=\sqrt{\mu_2}\,\mathrm{x}_2\cos\theta_1-\sqrt{\mu_1}\,\mathrm{x}_1\sin\theta_1, \\ \sqrt{\dfrac{mm_1}{m_0+m_2}}(x_1-\mathrm{X}_2)=-\sqrt{\mu_2}\,\mathrm{x}_2\sin\theta+\sqrt{\mu_1}\,\mathrm{x}_1\cos\theta, \\ \sqrt{\dfrac{mm_0}{m_1+m_2}}(x_0-\mathrm{X}_2)=-\sqrt{\mu_2}\,\mathrm{x}_2\sin\theta_1-\sqrt{\mu_1}\,\mathrm{x}_1\cos\theta_1. \end{cases}$$

Je pose maintenant

$$(56)\quad \begin{cases} \sqrt{\mu_1}\,\mathrm{x}_1=-\xi_0\cos(\theta_1+\psi)+\xi_1\sin(\theta_1+\psi), \\ \sqrt{\mu_2}\,\mathrm{x}_2=-\xi_0\sin(\theta_1+\psi)-\xi_1\cos(\theta_1+\psi), \end{cases}$$

et je trouve

$$(57)\quad \begin{cases} \sqrt{\dfrac{m_0 m_2}{m_0+m_2}}(x_0-x_2)=\xi_0\cos(\theta_2-\psi)+\xi_1\sin(\theta_2-\psi), \\ \sqrt{\dfrac{m_1 m_2}{m_1+m_2}}(x_1-x_2)=\xi_0\sin\psi+\xi_1\cos\psi. \end{cases}$$

En même temps

$$\mathrm{S} = \mu_1((\mathrm{x}_1)) + \mu_2((\mathrm{x}_2)) = ((\xi_0)) + ((\xi_1)).$$

Les formules (57) coïncident avec (48), si on avance tous les indices d'une unité en écrivant 1, 2, 0 pour 0, 1, 2, et en prenant $m_0 = 1$, $\theta_0 = \theta$.

Pour un système de quatre corps m_0, m_1, m_2, m_3, nous aurions

$$\mathrm{S} = \sum_1^3 \mu_i((\mathrm{x}_i))$$

et

$$\mathrm{x}_3 = x_3 - \mathrm{X}_2, \quad \mu_3 = \frac{(m_0 + m_1 + m_2) m_3}{m_0 + m_1 + m_2 + m_3},$$

les valeurs de x_1, x_2, μ_1, μ_2 étant les mêmes que précédemment dans le cas des trois corps. Les formules (20) donnent les expressions des coordonnées $x - \mathrm{X}$ par les trois x, et si nous introduisons les angles ϑ_0, ϑ_1, ϑ_2 définis par les équations

$$(58) \quad \left\{ \begin{aligned} &\operatorname{tang}\vartheta_0 = \sqrt{\frac{m_3 m_0}{m(m_1+m_2)}}, \quad \operatorname{tang}\vartheta_1 = \sqrt{\frac{m_3 m_1}{m(m_0+m_2)}}, \\ &\operatorname{tang}\vartheta_2 = \sqrt{\frac{m_3 m_2}{m(m_0+m_1)}}, \end{aligned} \right.$$

où $m = m_0 + m_1 + m_2 + m_3$, il vient

$$(59) \quad \left\{ \begin{aligned} &\sqrt{\frac{mm_3}{m - m_3}}(x_3 - \mathrm{X}_3) = \sqrt{\mu_3}\,\mathrm{x}_3, \\ &\sqrt{\frac{mm_2}{m - m_2}}(x_2 - \mathrm{X}_3) = -\sqrt{\mu_3}\,\mathrm{x}_3 \sin\vartheta_2 + \sqrt{\mu_2}\,\mathrm{x}_2 \cos\vartheta_2, \\ &\sqrt{\frac{mm_1}{m - m_1}}(x_1 - \mathrm{X}_3) = -\sqrt{\mu_3}\,\mathrm{x}_3 \sin\vartheta_1 - (\sqrt{\mu_2}\,\mathrm{x}_2 \sin\theta - \sqrt{\mu_1}\,\mathrm{x}_1 \cos\theta)\cos\vartheta_1, \\ &\sqrt{\frac{mm_0}{m - m_0}}(x_0 - \mathrm{X}_3) = -\sqrt{\mu_3}\,\mathrm{x}_3 \sin\vartheta_0 - (\sqrt{\mu_2}\,\mathrm{x}_2 \sin\theta_1 + \sqrt{\mu_1}\,\mathrm{x}_1 \cos\theta_1)\cos\vartheta_0. \end{aligned} \right.$$

Les formules (55) montrent que les deux parenthèses qui entrent dans les expressions de $x_1 - \mathrm{X}_3$ et de $x_0 - \mathrm{X}_3$ représentent les coordonnées $x_1 - \mathrm{X}_2$ et $x_0 - \mathrm{X}_2$, comme x_3 représente $x_3 - \mathrm{X}_2$. On pourrait maintenant transformer les variables x_1, x_2, x_3 au moyen d'une substitution orthogonale ternaire qui renfermerait trois angles arbitraires φ, ψ, χ; les nouvelles variables dépendraient alors des quatre coordonnées $x_0 - X$, $x_1 - X$, $x_2 - X$, $x_3 - X$ par une substitution quaternaire de l'espèce définie par les formules (40).

11. Il y a quelque intérêt à comparer ces formules à celles de Jacobi. En introduisant dans ces dernières les changements de notation indispensables, nous avons, pour trois corps,

$$\begin{aligned}
x_0 &= X + a_{01}\xi_1 + a_{02}\xi_2,\\
x_1 &= X + a_{11}\xi_1 + a_{12}\xi_2,\\
x_2 &= X + a_{21}\xi_1 + a_{22}\xi_2,\\
\hline
mX &= m_0 x_0 + m_1 x_1 + m_2 x_2,\\
\xi_1 &= \alpha_{01}x_0 + \alpha_{11}x_1 + \alpha_{21}x_2,\\
\xi_2 &= \alpha_{02}x_0 + \alpha_{12}x_1 + \alpha_{22}x_2,
\end{aligned}$$

avec ces conditions pour les coefficients a et α :

$$\begin{aligned}
&m_0 a_{01} + m_1 a_{11} + m_2 a_{21} = 0, && \alpha_{01} + \alpha_{11} + \alpha_{21} = 0,\\
&m_0 a_{02} + m_1 a_{12} + m_2 a_{22} = 0, && \alpha_{02} + \alpha_{12} + \alpha_{22} = 0,\\
&m_0 a_{01} a_{02} + m_1 a_{11} a_{12} + m_2 a_{21} a_{22} = 0, && \frac{\alpha_{01}\alpha_{02}}{m_0} + \frac{\alpha_{11}\alpha_{12}}{m_1} + \frac{\alpha_{21}\alpha_{22}}{m_2} = 0.
\end{aligned}$$

Si on fait, avec Jacobi,

$$\begin{aligned}
\gamma_0 &= a_{11} - a_{21}, & \delta_0 &= a_{12} - a_{22},\\
\gamma_1 &= a_{21} - a_{01}, & \delta_1 &= a_{22} - a_{02},\\
\gamma_2 &= a_{01} - a_{11}, & \delta_2 &= a_{02} - a_{12},
\end{aligned}$$

ce qui donne

$$\gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_2 = 0, \quad \delta_0 + \delta_1 + \delta_2 = 0,$$

il vient

$$\begin{aligned}
x_1 - x_2 &= \gamma_0\xi_1 + \delta_0\xi_2,\\
x_2 - x_0 &= \gamma_1\xi_1 + \delta_1\xi_2,\\
x_0 - x_1 &= \gamma_2\xi_1 + \delta_2\xi_2,
\end{aligned}$$

d'où l'on tire par élimination

$$\begin{aligned}
(\gamma_1\delta_2 - \gamma_2\delta_1)\xi_1 &= \delta_0 x_0 + \delta_1 x_1 + \delta_2 x_2,\\
(\gamma_2\delta_1 - \gamma_1\delta_2)\xi_2 &= \gamma_0 x_0 + \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2,
\end{aligned}$$

Les six coefficients γ, δ ne diffèrent donc des six α que par le facteur $\gamma_2\delta_1 - \gamma_1\delta_2$. Il s'ensuit qu'ils devront aussi vérifier l'équation

$$\frac{\gamma_0\delta_0}{m_0} + \frac{\gamma_1\delta_1}{m_1} + \frac{\gamma_2\delta_2}{m_2} = 0$$

ou bien

$$\frac{1}{m_0}(\gamma_1+\gamma_2)(\delta_1+\delta_2) + \frac{1}{m_1}\gamma_1\delta_1 + \frac{1}{m_2}\gamma_2\delta_2 = 0.$$

On peut la résoudre en posant

$$\gamma_1 = -\frac{m_1\gamma_2}{1+m_1+\frac{1}{\varepsilon}\sqrt{m}}, \qquad \delta_2 = -\frac{m_2\delta_1}{1+m_2+\varepsilon\sqrt{m}},$$

où ε est une quantité arbitraire. En prenant $\gamma_2 = -1$, $\delta_1 = 1$, on aurait

$$x_1 - x_0 = \xi_1 + \frac{m_2\xi_2}{1+m_2+\varepsilon\sqrt{m}},$$
$$x_2 - x_0 = \xi_2 + \frac{m_1\xi_1}{1+m_1+\frac{1}{\varepsilon}\sqrt{m}},$$

formules qui coïncident avec (52), si nous écrivons

$$\varepsilon\sqrt{\frac{1+m_2}{1+m_1}}$$

à la place de ε.

L'équation $m_0 a_{01} + m_1 a_{11} + m_2 a_{21} = 0$ donne encore

$$m a_{01} = m_1\gamma_2 - m_2\gamma_1, \qquad m a_{02} = m_1\delta_2 - m_2\delta_1,$$
$$m a_{11} = m_2\gamma_0 - m_0\gamma_2, \qquad m a_{12} = m_2\delta_0 - m_0\delta_2,$$
$$m a_{21} = m_0\gamma_1 - m_1\gamma_0, \qquad m a_{22} = m_0\delta_1 - m_1\delta_0,$$

m étant toujours la somme $m_0 + m_1 + m_2$. On tire de là, en multipliant par $m_0 a_{01}$, $m_1 a_{11}$, $m_2 a_{21}$, et ajoutant,

$$\mu_1 = m_0 a_{01}^2 + m_1 a_{11}^2 + m_2 a_{21}^2 = \frac{m_0 m_1 m_2}{m}\left(\frac{\gamma_0^2}{m_0} + \frac{\gamma_1^2}{m_1} + \frac{\gamma_2^2}{m_2}\right),$$
$$\mu_2 = m_0 a_{02}^2 + m_1 a_{12}^2 + m_2 a_{22}^2 = \frac{m_0 m_1 m_2}{m}\left(\frac{\delta_0^2}{m_0} + \frac{\delta_1^2}{m_1} + \frac{\delta_2^2}{m_2}\right),$$
$$\mu_1\mu_2 = \frac{m_0 m_1 m_2}{m}(\gamma_1\delta_2 - \gamma_2\delta_1)^2 = \frac{m m_1 m_2}{m_0}(a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22})^2.$$

12. Nous avons vu que le problème des $n+1$ corps peut toujours se réduire à un problème du mouvement de n corps fictifs à l'aide d'une substitution orthogonale d'une certaine nature que nous avons représentée par la formule symbolique

$$S=\sum_1^n \mu_i((\xi_i)).$$

Les distances r qui entrent dans la fonction des forces s'expriment alors par les rayons vecteurs ρ des corps fictifs et par les cosinus σ_{ik} des angles (ik) compris entre deux rayons vecteurs ρ_i, ρ_k, au moyen de la formule (27)

$$r_{ik}^2=\left[\sum^h e_h^{(ik)}\rho_h\sigma_h\right]^2,$$

dans laquelle il faut, après développement du carré, poser $\sigma_h\sigma_l=\sigma_{hl}$ et $\sigma_h^2=\sigma_{hh}=1$. On a d'ailleurs (26)

$$\rho^2=\xi^2+\eta^2+\zeta^2,$$
$$\rho_i\rho_k\sigma_{ik}=\xi_i\xi_k+\eta_i\eta_k+\zeta_i\zeta_k.$$

La fonction des forces U est une fonction homogène du degré -1 par rapport aux coordonnées et distances. On aura donc, en tenant compte des formules (26) et (27),

$$\text{(60)}\qquad U+\sum^i\rho_i\frac{dU}{d\rho_i}=0,$$

et

$$\text{(61)}\qquad \rho_i\frac{dU}{d\rho_i}=\xi_i\frac{dU}{d\xi_i}+\eta_i\frac{dU}{d\eta_i}+\zeta_i\frac{dU}{d\zeta_i}.$$

On trouve encore

$$\text{(62)}\qquad \xi_i\frac{dU}{d\eta_i}-\eta_i\frac{dU}{d\xi_i}=\sum^h\frac{\xi_i\eta_h-\eta_i\xi_h}{\rho_i\rho_h}\frac{dU}{d\sigma_{ih}},$$

et, par suite,

$$\text{(63)}\qquad \sum^i\left(\xi_i\frac{dU}{d\eta_i}-\eta_i\frac{dU}{d\xi_i}\right)=0.$$

Cette dernière formule donnerait les intégrales des aires. L'expression

$\xi_i \eta_h - \eta_i \xi_h$, qui figure dans (62), est le double de la projection du triangle formé par les rayons vecteurs ρ_i, ρ_h. Par conséquent, si nous désignons par α_{ih}, β_{ih}, γ_{ih} les cosinus des angles que la normale au plan de ce triangle fait avec les trois axes,

$$\xi_i \eta_h - \eta_i \xi_h = \rho_i \rho_h \sin(ih) \gamma_{ih}.$$

Cette expression étant substituée dans (62), il vient, en tenant compte des équations du mouvement et en remplaçant $d\sigma_{ih}$ par $-\sin(ih)\, d(ih)$,

$$\mu_i \frac{d}{dt}\left(\xi_i \frac{d\eta_i}{dt} - \eta_i \frac{d\xi_i}{dt}\right) = -\sum^h \gamma_{ih} \frac{dU}{d(ih)}. \tag{64}$$

Soient encore α_i, β_i, γ_i les trois cosinus qui déterminent le plan de l'orbite instantanée du corps μ_i, et soit f_i le produit de μ_i par le double de l'aire ou de la vitesse aréolaire du rayon vecteur ρ_i, on aura

$$\mu_i \left(\xi_i \frac{d\eta_i}{dt} - \eta_i \frac{d\xi_i}{dt}\right) = f_i \gamma_i, \ldots,$$

et les intégrales des aires pourront s'écrire de cette manière :

$$\sum f_i \alpha_i = \mathrm{L}, \quad \sum f_i \beta_i = \mathrm{M}, \quad \sum f_i \gamma_i = \mathrm{N}. \tag{65}$$

Ces trois équations signifient que le mouvement aréolaire dans un plan quelconque est constant. Si on fait $\mathrm{L}^2 + \mathrm{M}^2 + \mathrm{N}^2 = \mathrm{K}^2$, on a encore

$$\sum f^2 + 2 \sum f_i f_h s_{ih} = \mathrm{K}^2, \tag{66}$$

où s_{ih} est le cosinus de l'inclinaison relative des deux orbites f_i, f_h. On peut considérer K comme la résultante de n forces égales aux quantités f et perpendiculaires aux plans des orbites; la direction de cette résultante représente la normale au plan invariable du système.

L'équation (64) donne à présent

$$\frac{d(f_i \gamma_i)}{dt} = -\sum^h \gamma_{ih} \frac{dU}{d(ih)}, \tag{67}$$

et l'on a deux équations analogues pour α_i et β_i. Si nous les ajoutons après les avoir multipliées par α_i, β_i, γ_i, nous avons

$$\alpha_i^2 + \beta_i^2 + \gamma_i^2 = 1,$$
$$\alpha_i\, d\alpha_i + \beta_i\, d\beta_i + \gamma_i\, d\gamma_i = 0,$$
$$\alpha_i \alpha_{ih} + \beta_i \beta_{ih} + \gamma_i \gamma_{ih} = \cos\theta_{ih},$$

où θ_{ih} est l'inclinaison de l'orbite f_i sur le plan du triangle (ρ_i, ρ_h); donc

$$\frac{df_i}{dt} = -\sum^{h} \cos\theta_{ih} \frac{dU}{d(ih)}. \tag{68}$$

Prenons maintenant le plan invariable pour celui des xy, en faisant $L = M = 0$, $N = K$, et soient : λ_i les inclinaisons des plans des aires sur le plan invariable; ϑ_i les angles compris entre leurs intersections avec ce plan et l'axe des x, ou ce qu'on appelle les *longitudes des nœuds ;* υ_i les distances des planètes aux nœuds ascendants; on aura

$$\gamma_i = \cos\lambda_i, \quad \beta_i = \sin\lambda_i \cos\vartheta_i, \quad \alpha_i = \sin\lambda_i \sin\vartheta_i,$$

et le principe des aires donnera

$$\sum f_i \cos\lambda_i = K, \quad \sum f_i \sin\lambda_i \cos\vartheta_i = 0, \quad \sum f_i \sin\lambda_i \sin\vartheta_i = 0. \tag{69}$$

Les coordonnées rectangulaires ξ, η, ζ auront pour expression

$$\left\{\begin{aligned} \xi &= \rho(\cos\vartheta \cos\upsilon - \sin\vartheta \sin\upsilon \cos\lambda),\\ \eta &= \rho(\sin\vartheta \cos\upsilon + \cos\vartheta \sin\upsilon \cos\lambda),\\ \zeta &= \rho \sin\upsilon \sin\lambda. \end{aligned}\right. \tag{70}$$

Le cosinus de l'angle (ih) compris entre deux rayons vecteurs ρ_i, ρ_h est donné par la formule

$$\left\{\begin{aligned} \sigma_{ih} = {} & \cos\upsilon_i \cos\upsilon_h \cos(\vartheta_i - \vartheta_h)\\ & + \sin\upsilon_i \sin\upsilon_h [\sin\lambda_i \sin\lambda_h + \cos\lambda_i \cos\lambda_h \cos(\vartheta_i - \vartheta_h)]\\ & + (\cos\upsilon_i \sin\upsilon_h \cos\lambda_h - \sin\upsilon_i \cos\upsilon_h \cos\lambda_i) \sin(\vartheta_i - \vartheta_h). \end{aligned}\right. \tag{71}$$

Considérons maintenant le quadrilatère sphérique dont les côtés sont υ_i, υ_h, (ih) et $\vartheta_i - \vartheta_h$, es angles λ_i, λ_h, θ_{ih} et θ_{hi}. Si le rayon ρ_i se déplace seul dans son orbite, les inclinaisons et les nœuds restant constants, ainsi que v_h, la variation correspondante de l'arc (ih) sera la projection de $-dv_i$ sur le grand cercle de (ih), de sorte que

$$\frac{d(ih)}{dv_i} = -\cos\theta_{ih}.$$

Par conséquent

$$\frac{df_i}{dt} = \sum^{h} \frac{dU}{d(ih)} \frac{d(ih)}{dv_i} = \frac{dU}{dv_i},$$

ou bien, puisque T ne renferme pas les v,

$$\frac{df_i}{dt} = -\frac{dH}{dv_i}. \tag{72}$$

13. A la place des trois composantes rectangulaires des vitesses ω, j'introduirai maintenant les deux composantes prises, l'une dans la direction du rayon, l'autre perpendiculairement au rayon et dans le plan de l'orbite instantanée f. Soit δv le déplacement angulaire du rayon vecteur ρ pendant le temps dt, les deux composantes de la vitesse ω seront

$$\frac{d\rho}{dt} \quad \text{et} \quad \rho\frac{\delta v}{dt}.$$

On aura d'ailleurs

$$f = \mu\rho^2\frac{\delta v}{dt}, \quad \text{ou bien} \quad \mu\rho\frac{\delta v}{dt} = \frac{f}{\rho},$$

et en faisant $\mu\frac{d\rho}{dt} = \varpi$, on pourra considérer ϖ et $\frac{f}{\rho}$ comme les deux composantes de la quantité de mouvement $\mu\omega$. L'expression des forces vives devient à présent

$$2T = \sum \frac{1}{\mu}\left(\varpi^2 + \frac{f^2}{\rho^2}\right). \tag{73}$$

Si on différentie l'équation $\rho\,d\rho = \xi\,d\xi + \eta\,d\eta + \zeta\,d\zeta$, on trouve, en ayant égard à (61),

$$\frac{1}{\mu}\varpi^2 + \rho\frac{d\varpi}{dt} = \mu\omega^2 + \rho\frac{dU}{d\rho},$$

ou bien, en remplaçant la vitesse ω par ses deux composantes,

$$\frac{d\varpi}{dt} = \frac{1}{\mu}\frac{f^2}{\rho^3} + \frac{dU}{d\rho}. \tag{74}$$

Le premier terme de cette expression n'est autre chose que $-\frac{dT}{d\rho}$: par suite

$$(75) \qquad \frac{d\varpi}{dt} = -\frac{dH}{d\rho}.$$

On a de même $\frac{d\rho}{dt} = \frac{\varpi}{\mu} = \frac{dT}{d\varpi}$, d'où

$$(76) \qquad \frac{d\rho}{dt} = \frac{dH}{d\varpi}.$$

On voit que les rayons vecteurs et les vitesses radiales multipliées par les masses constituent un système de variables conjuguées.

L'équation (24) donnerait encore

$$(24) \qquad \frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}\sum \mu\rho^2 = T + h_0 = U + 2h_0,$$

ou bien

$$\frac{d}{dt}\sum \rho\varpi = \sum \frac{1}{\mu}\left(\varpi^2 + \frac{f^2}{\rho^2}\right) + h_0.$$

14. Il faut maintenant chercher les équations différentielles pour les inclinaisons λ, les distances aux nœuds υ et les longitudes des nœuds ϑ.

Le plan invariable étant celui des xy, nous avons $\cos\lambda_i = \gamma_i$, et, par (67) et (68),

$$f_i \sin\lambda_i \frac{d\lambda_i}{dt} = -\frac{d(f_i\gamma_i)}{dt} + \cos\lambda_i \frac{df_i}{dt} = \sum (\gamma_{ih} - \cos\lambda_i \cos\theta_{ih}) \frac{dU}{d(ih)}.$$

Or, γ_{ih} est le cosinus de l'inclinaison du plan (ρ_i, ρ_h) sur le plan invariable ; donc

$$\gamma_{ih} = \cos\lambda_i \cos\theta_{ih} + \sin\lambda_i \sin\theta_{ih} \cos\upsilon_i,$$

et

$$f_i \frac{d\lambda_i}{dt} = \cos\upsilon_i \sum^{h} \sin\theta_{ih} \frac{dU}{d(ih)}.$$

Supposons que, dans l'angle tétraèdre formé par deux rayons vecteurs et leurs nœuds, l'arête ρ_i se déplace seule en décrivant un cône circulaire d'amplitude υ_i autour de son nœud ; le plan de l'orbite tournera d'un angle $d\lambda_i$, le rayon vecteur ρ_i décrira l'arc $\sin\upsilon_i\,d\lambda_i$, qui fera avec le plan de (ih) un angle égal à $90° - \theta_{ih}$, et la distance (ih) croîtra d'une quantité égale à la projection de $\sin\upsilon_i\,d\lambda_i$ sur (ih). Donc

$$\frac{d(ih)}{d\lambda_i} = \sin\upsilon_i \sin\theta_{ih}.$$

Par conséquent

$$f_i \operatorname{tang}\upsilon_i \frac{d\lambda_i}{dt} = \sum \frac{dU}{d(ih)} \frac{d(ih)}{d\lambda_i} = \frac{dU}{d\lambda_i}. \tag{77}$$

La quantité $\frac{dU}{d\lambda_i} d\lambda_i$ représente l'accroissement que U prend lorsque le plan f_i tourne autour de son nœud d'un angle $d\lambda_i$, les distances aux nœuds, les différences des nœuds et les inclinaisons, hormis λ_i, restant constantes.

Cherchons maintenant les équations différentielles qui déterminent les deux éléments υ et ϑ.

La variation totale de υ se compose du déplacement angulaire $\delta\upsilon$ du rayon vecteur ρ et de la quantité $\Delta\upsilon$, dont υ s'accroît par suite de la rotation du plan de l'orbite autour du rayon vecteur. Comme cette rotation n'affecte pas la latitude, on trouvera $\Delta\upsilon$ en considérant ζ comme une constante, ou en égalant à zéro la variation du produit $\sin\upsilon \sin\lambda$, ce qui donne

$$\operatorname{tang}\lambda_i\,\Delta\upsilon_i + \operatorname{tang}\upsilon_i\,d\lambda_i = 0. \tag{78}$$

L'arc $\Delta\upsilon_i$ est d'ailleurs la projection de $-d\vartheta_i$ sur le grand cercle de υ_i; d'où il suit que

$$\Delta\upsilon_i + \cos\lambda_i\,d\vartheta_i = 0, \tag{79}$$

et

$$d\vartheta_i = \operatorname{tang}\upsilon_i \frac{d\lambda_i}{\sin\lambda_i}. \tag{80}$$

Par conséquent

$$\left\{\begin{aligned} f_i \frac{d\vartheta_i}{dt} &= -\frac{dU}{d\cos\lambda_i}, \\ f_i \frac{\Delta\upsilon_i}{dt} &= \cos\lambda_i \frac{dU}{d\cos\lambda_i}. \end{aligned}\right. \tag{81}$$

La vitesse angulaire $\frac{\delta v}{dt}$ était

$$\frac{\delta v}{dt} = \frac{f}{\mu\rho^2} = \frac{d\mathrm{T}}{df};$$

par suite, en ajoutant δv à Δv,

$$\frac{dv_i}{dt} = \frac{d\mathrm{T}}{df_i} + \frac{\cos\lambda_i}{f_i}\frac{d\mathrm{U}}{d\cos\lambda_i}. \tag{82}$$

15. Nous pouvons maintenant réunir en tableau les différents résultats obtenus dans les n^os **12, 13** et **14**.

Pour les rayons vecteurs ρ et les vitesses radiales $\rho' = \frac{\varpi}{\mu}$, nous avons trouvé

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{d\mathrm{H}}{d\varpi} = \frac{1}{\mu}\varpi,$$

$$\frac{d\varpi}{dt} = -\frac{d\mathrm{H}}{d\rho} = \frac{1}{\mu}\frac{f^2}{\rho^3} + \frac{d\mathrm{U}}{d\rho},$$

la force vive étant exprimée par

$$2\mathrm{T} = \sum \frac{1}{\mu}\left(\varpi^2 + \frac{f^2}{\rho^2}\right).$$

Nous avons ensuite, pour les aires ou vitesses aréolaires f,

$$\frac{df_i}{dt} = -\frac{d\mathrm{H}}{dv_i} = -\sum^{h}\cos\theta_{ih}\frac{d\mathrm{U}}{d(ih)};$$

pour les inclinaisons λ,

$$f_i\frac{d\lambda_i}{dt} = \operatorname{cotang} v_i\frac{d\mathrm{U}}{d\lambda_i} = \cos v_i\sum^{h}\sin\theta_{ih}\frac{d\mathrm{U}}{d(ih)};$$

pour les distances aux nœuds v,

$$\frac{dv_i}{dt} = \frac{d\mathrm{T}}{df_i} + \frac{\cos\lambda_i}{f_i}\frac{d\mathrm{U}}{d\cos\lambda_i};$$

pour les longitudes des nœuds ϑ,

$$f_i\frac{d\vartheta_i}{dt} = -\frac{d\mathrm{U}}{d\cos\lambda_i};$$

en même temps, pour chaque orbite,

$$dv = \delta v + \Delta v,$$
$$\frac{\delta v}{dt} = \frac{d\mathrm{T}}{df} = \frac{f}{\mu\rho^2},$$
$$\Delta v = -\cos\lambda\, d\vartheta,$$
$$d\vartheta = \operatorname{tang} v \frac{d\lambda}{\sin\lambda}.$$

Si l'on introduisait, à l'exemple de M. Weiler, une fonction perturbatrice

$$\mathrm{R} = \mathrm{U} - \sum \frac{k_h \mu_h}{\rho_h}, \tag{83}$$

où les constantes k_h sont encore indéterminées, on aurait

$$\frac{d\mathrm{R}}{d(ih)} = \frac{d\mathrm{U}}{d(ih)}, \quad \frac{d\mathrm{R}}{d\rho} = \frac{d\mathrm{U}}{d\rho} + \frac{k\mu}{\rho^2};$$

par conséquent, en vertu de (74),

$$\frac{d^2\rho}{dt^2} = \frac{f^2}{\mu^2\rho^3} - \frac{k}{\rho^2} + \frac{1}{\mu}\frac{d\mathrm{R}}{d\rho}. \tag{84}$$

Pour assimiler cette équation à celle d'une orbite elliptique de demi-paramètre p, on poserait $f^2 = \mu^2 pk$, ce qui donnerait

$$\frac{d\rho^2}{dt^2} = \frac{pk}{\rho^3} - \frac{k}{\rho^2} + \frac{1}{\mu}\frac{d\mathrm{R}}{d\rho}. \tag{85}$$

Les lois connues du mouvement elliptique donnent encore, en désignant par a le demi-grand axe et par ω la vitesse,

$$\omega^2 = \frac{2k}{\rho} - \frac{k}{a}.$$

Il s'ensuit que

$$\mathrm{T} = \sum \frac{k\mu}{\rho} - \sum \frac{k\mu}{2a},$$

et le principe des forces vives donne, en tenant compte de (83),

$$\mathrm{R} + \sum \frac{k\mu}{2a} + h_0 = 0. \tag{86}$$

Le principe des aires donne, en même temps,

$$(87)\qquad \sum \mu\alpha\sqrt{pk} = \mathrm{L},\quad \sum \mu\beta\sqrt{pk} = \mathrm{M},\quad \sum \mu\gamma\sqrt{pk} = \mathrm{N},$$

et l'équation (72) devient

$$(88)\qquad \mu\sqrt{k}\,\frac{d\sqrt{p}}{dt} = \frac{d\mathrm{R}}{dv}.$$

Enfin,

$$(89)\qquad \frac{1}{a^2}\frac{da}{dt} = \frac{1}{\rho^2}\frac{dp}{dt} + \frac{2}{\mu k}\frac{d\mathrm{R}}{d\rho}\frac{d\rho}{dt}.$$

16. Dans le problème des trois corps, les intégrales des aires sont

$$f_1\alpha_1 + f_2\alpha_2 = \mathrm{L},$$
$$f_1\beta_1 + f_2\beta_2 = \mathrm{M},$$
$$f_1\gamma_1 + f_2\gamma_2 = \mathrm{N};$$

d'où il résulte que la normale au plan invariable représente la direction de la résultante de deux forces f_1, f_2 qui s'exerceraient suivant les normales aux plans des aires, et que la valeur de cette résultante est K. Il s'ensuit aussi que la normale au plan invariable est perpendiculaire à l'intersection des orbites, ou que celles-ci se coupent dans le plan invariable. On aura donc $\vartheta_1 = \vartheta_2$; les deux orbites ont le même nœud, et le principe des aires donne

$$(90)\qquad \begin{cases} f_1\sin\lambda_1 + f_2\sin\lambda_2 = 0, \\ f_1\cos\lambda_1 + f_2\cos\lambda_2 = \mathrm{K}; \end{cases}$$

d'où l'on tire

$$(91)\qquad f_1 = \frac{\mathrm{K}\sin\lambda_2}{\sin(\lambda_2-\lambda_1)},\quad f_2 = \frac{\mathrm{K}\sin\lambda_1}{\sin(\lambda_1-\lambda_2)},$$

$$(92)\qquad \begin{cases} \cos\lambda_1 = \dfrac{\mathrm{K}^2+f_1^2-f_2^2}{2\mathrm{K}f_1}, \quad \cos\lambda_2 = \dfrac{\mathrm{K}^2-f_1^2+f_2^2}{2\mathrm{K}f_2}, \\ \cos(\lambda_1-\lambda_2) = \dfrac{\mathrm{K}^2-f_1^2-f_2^2}{2f_1f_2}. \end{cases}$$

L'inclinaison relative des orbites est égale à la différence $\lambda_1 - \lambda_2$, et si nous écrivons σ pour $\cos(1, 2)$, nous avons

$$(93)\qquad \sigma = \cos v_1\cos v_2 + \sin v_1\sin v_2\cos(\lambda_1-\lambda_2).$$

Les relations (91) nous permettent d'écrire, à la place de (77) et de (81):

$$(94)\quad \begin{cases} \dfrac{f_1 f_2}{\sin\lambda_1}\dfrac{d\lambda_1}{dt} = -\mathrm{K}\cos\upsilon_1\sin\upsilon_2\dfrac{d\mathrm{U}}{d\sigma}, \\[2ex] \dfrac{f_1 f_2}{\sin\lambda_2}\dfrac{d\lambda_2}{dt} = -\mathrm{K}\sin\upsilon_1\cos\upsilon_2\dfrac{d\mathrm{U}}{d\sigma}, \\[2ex] f_1 f_2\dfrac{d\vartheta}{dt} = -\mathrm{K}\sin\upsilon_1\sin\upsilon_2\dfrac{d\mathrm{U}}{d\sigma}. \end{cases}$$

L'équation (72) donnerait encore

$$(95)\quad \begin{cases} \dfrac{df_1}{dt} = \dfrac{d\sigma}{d\upsilon_1}\dfrac{d\mathrm{U}}{d\sigma}, \\[2ex] \dfrac{df_2}{dt} = \dfrac{d\sigma}{d\upsilon_2}\dfrac{d\mathrm{U}}{d\sigma}. \end{cases}$$

Enfin, on tirerait de (74) et de (24):

$$(96)\quad \begin{cases} \mu_1\dfrac{d^2\rho_2}{dt^2} = \dfrac{1}{\mu_1}\dfrac{f_1^2}{\rho_1^3} + \dfrac{d\mathrm{U}}{d\rho_1}, \\[2ex] \mu_2\dfrac{d^2\rho_2}{dt^2} = \dfrac{1}{\mu_2}\dfrac{f_2^2}{\rho_2^3} + \dfrac{d\mathrm{U}}{d\rho_2}, \\[2ex] \dfrac{d^2}{dt^2}(\mu_1\rho_1^2 + \mu_2\rho_2^2) = 2\mathrm{U} + 4h_0. \end{cases}$$

Entre les dérivées partielles de U il existe la relation suivante, déjà indiquée par M. Weiler :

$$\rho^2\frac{d^2\mathrm{U}}{d\rho^2} + 2\rho\frac{d\mathrm{U}}{d\rho} + (1-\sigma^2)\frac{d^2\mathrm{U}}{d\sigma^2} - 2\sigma\frac{d\mathrm{U}}{d\sigma} = 0.$$

Mais les relations (91) montrent que l'on peut aussi introduire f_1, f_2 comme variables indépendantes à la place des inclinaisons λ_1, λ_2. On a d'abord

$$\frac{d\cos(\lambda_1-\lambda_2)}{df_1} = -\frac{\mathrm{K}\cos\lambda_1}{f_1 f_2} = -\frac{\cos\lambda_1}{f_1}\frac{d\cos(\lambda_1-\lambda_2)}{d\cos\lambda_1};$$

par suite :

$$\frac{\cos\lambda_1}{f_1}\frac{d\mathrm{U}}{d\cos\lambda_1} = \frac{\cos\lambda_1}{f_1}\frac{d\mathrm{U}}{d\cos(\lambda_1-\lambda_2)}\frac{d\cos(\lambda_1-\lambda_2)}{d\cos\lambda_1} = -\frac{d\mathrm{U}}{df_1}.$$

L'équation (82) devient alors

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dT}{df} - \frac{dU}{df} = \frac{dH}{df}.$$

Le problème des trois corps se trouve ainsi ramené à l'intégration du système canonique de huit équations différentielles du premier ordre que voici :

$$H = \frac{1}{2\mu_1}\left(\varpi_1^2 + \frac{f_1^2}{\rho_1^2}\right) + \frac{1}{2\mu_2}\left(\varpi_2^2 + \frac{f_2^2}{\rho_2^2}\right) - U.$$

$$(97)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d\rho_1}{dt} &= \frac{dH}{d\varpi_1}, & \frac{d\varpi_1}{dt} &= -\frac{dH}{d\rho_1}, \\ \frac{d\rho_2}{dt} &= \frac{dH}{d\varpi_2}, & \frac{d\varpi_2}{dt} &= -\frac{dH}{d\rho_2}, \\ \frac{dv_1}{dt} &= \frac{dH}{df_1}, & \frac{df_1}{dt} &= -\frac{dH}{dv_1}, \\ \frac{dv_2}{dt} &= \frac{dH}{df_2}, & \frac{df_2}{dt} &= -\frac{dH}{dv_2}. \end{aligned}\right.$$

Ces équations n'en représentent que sept si nous éliminons dt ; on peut même dire qu'elles se réduisent à six à cause de l'intégrale des forces vives, $H = h$. Après l'intégration de ce système, le temps et la longitude du nœud se trouveraient par des quadratures. On a vu, en effet, que le nœud a disparu des équations différentielles; on pourra le déterminer à part à l'aide des équations

$$d\vartheta = \operatorname{tang} v_1 \frac{d\lambda_1}{\sin\lambda_1} = \operatorname{tang} v_2 \frac{d\lambda_2}{\sin\lambda_2}.$$

On a d'ailleurs aussi

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{1}{f}\frac{dU}{d\cos\lambda}, \quad \frac{df}{dt} = \frac{dU}{dv},$$

d'où

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{1}{f}\frac{dU}{d\sigma}\frac{d\sigma}{d\cos\lambda}, \quad \frac{df}{dt} = \frac{dU}{d\sigma}\frac{d\sigma}{dv}, \quad \frac{d(f_1+f_2)}{dt} = \frac{dU}{d\sigma}\left(\frac{d\sigma}{dv_1} + \frac{d\sigma}{dv_2}\right).$$

Or

$$\frac{1}{f_1}\frac{d\sigma}{d\cos\lambda_1} = \frac{1}{f_1}\sin v_1 \sin v_2 \frac{d\cos(\lambda_1-\lambda_2)}{d\cos\lambda_1} = \frac{K\sin v_1 \sin v_2}{f_1 f_2},$$

$$\frac{d\sigma}{dv_1} + \frac{d\sigma}{dv_2} = \sin(v_1+v_2)\left[-1 + \cos(\lambda_1-\lambda_2)\right] = \sin(v_1+v_2)\frac{K^2-(f_1+f_2)^2}{2f_1 f_2},$$

par conséquent :

$$(98)\ \vartheta = \int \frac{2K \sin \upsilon_1 \sin \upsilon_2}{\sin(\upsilon_1 + \upsilon_2)} \frac{d(f_1 + f_2)}{K^2 - (f_1 + f_2)^2} = \int \frac{\sin \upsilon_1 \sin \upsilon_2}{\sin(\upsilon_1 + \upsilon_2)} d \log \frac{f_1 + f_2 + K}{f_1 + f_2 - K}.$$

Si l'on regarde le nœud des orbites comme leur intersection mutuelle, les équations (97) ne renferment plus aucune trace du plan invariable, elles ne renferment que les rayons vecteurs et les plans des orbites; le plan invariable n'entre en scène que par l'équation (98), qui représente une quadrature.

17. Chez Jacobi, les équations différentielles du problème des trois corps sont présentées sous la forme que voici :

$$\text{I.}\quad \tang \upsilon_1 \frac{d\lambda_1}{\sin \lambda_1} = \tang \upsilon_2 \frac{d\lambda_2}{\sin \lambda_2} = d\vartheta,$$

$$\text{II.}\quad \tang \upsilon_1 \frac{d\lambda_1}{\tang \lambda_1} + d\upsilon_1 = \frac{K}{\mu_1} \frac{\sin \lambda_2}{\sin(\lambda_1 - \lambda_2)} \frac{dt}{\rho_1^2},$$

$$\text{III.}\quad \tang \upsilon_2 \frac{d\lambda_2}{\tang \lambda_2} + d\upsilon_2 = \frac{K}{\mu_2} \frac{\sin \lambda_1}{\sin(\lambda_1 - \lambda_2)} \frac{dt}{\rho_2^2},$$

$$\text{IV.}\quad \frac{K \sin \lambda_2 \, d\lambda_1}{\cos \upsilon_1 \sin \upsilon_2 \sin^2(\lambda_1 - \lambda_2)} = \frac{dU}{d \cos(1, 2)} dt,$$

$$\text{V.}\quad \mu_1 \left(\frac{d\rho_1}{dt}\right)^2 + \mu_2 \left(\frac{d\rho_2}{dt}\right)^2 + \frac{K}{\sin^2(\lambda_1 - \lambda_2)} \left(\frac{\sin^2 \lambda_2}{\mu_1 \rho_1^2} + \frac{\sin^2 \lambda_1}{\mu_2 \rho_2^2}\right) = 2U + 2h_0,$$

$$\text{VI.}\quad \frac{d^2}{dt^2}(\mu_1 \rho_1^2 + \mu_2 \rho_2^2) = 2U + 4h_0.$$

Jacobi dit que le problème des trois corps se trouve ainsi réduit à l'intégration de six équations, dont cinq du premier et une du second ordre, et à une quadrature. « Par suite, ajoute-t-il, l'on a fait cinq intégrations. Les intégrales connues n'étant qu'au nombre de quatre, on pourra donc dire que l'on a fait une intégration de plus dans le système du monde. » Cette conclusion paraît difficile à justifier, car, ainsi que l'a déjà fait remarquer M. Cayley, la quadrature par laquelle on détermine la longitude du nœud ϑ doit toujours compter pour une équation différentielle tant que le système de six équations n'a pas été intégré (*).

(*) *Report of the British Association*, 32d *meeting*, Londres, 1863, p. 215.

Les douze équations du premier ordre d'où dépend le problème lorsqu'on fait usage des coordonnées rectangulaires se réduisent à sept par les quatre intégrales connues et par l'élimination de *dt*. Si, dans le système d'équations adopté par Jacobi, on considère $\frac{d\rho_1}{dt}$ et $\frac{d\rho_2}{dt}$ comme deux variables indépendantes, et l'équation V comme une intégrale, on peut remplacer V et VI par les quatre équations du premier ordre

$$\frac{d\rho_1}{dt} = \rho'_1, \quad \frac{d\rho_2}{dt} = \rho'_2, \quad \frac{d\rho'_1}{dt} = R_1, \quad \frac{d\rho'_2}{dt} = R_2,$$

qui sont contenues dans la formule 25 du § 4 du Mémoire de Jacobi, formule qui donne l'expression de $\frac{d^2\rho_1}{dt^2}$. Le système

$$\frac{d\lambda_1}{A} = \frac{d\lambda_2}{B} = \frac{d\upsilon_1}{C} = \frac{d\upsilon_2}{D} = \frac{d\rho_1}{E} = \frac{d\rho_2}{F} = \frac{d\rho'_1}{G} = \frac{d\rho'_2}{H} \ (= dt)$$

représente alors sept équations du premier ordre, avec une intégrale (celle des forces vives), et les quadratures *virtuelles* qui donnent le nœud et le temps. On pourrait aussi, avec M. Cayley, conserver l'équation VI en l'écrivant de cette manière :

$$\frac{d\Theta}{dt} = U - 2h_0,$$

où

$$\Theta = \mu_1\rho_1\frac{d\rho_1}{dt} + \mu_2\rho_2\frac{d\rho_2}{dt},$$

et profiter de l'équation V pour exprimer $\frac{d\rho_1}{dt}$ et $\frac{d\rho_2}{dt}$ en fonction des sept variables λ_1, λ_2, υ_1, υ_2, ρ_1, ρ_2, Θ. Le système de Jacobi prendrait alors cet aspect :

$$\frac{d\lambda_1}{A} = \frac{d\lambda_2}{B} = \frac{d\upsilon_1}{C} = \frac{d\upsilon_2}{D} = \frac{d\rho_1}{E} = \frac{d\rho_2}{F} = \frac{d\Theta}{G} \ (= dt),$$

et se réduirait, par conséquent, à six équations du premier ordre *sans* intégrale. On arriverait au même résultat en faisant, avec M. Weiler, $\sqrt{\mu_1}\rho_1 = r\cos\psi$, $\sqrt{\mu_2}\rho_2 = r\sin\psi$, d'où $\Theta = r\frac{dr}{dt}$. En résumé, on voit que Jacobi aurait été en droit de dire que, grâce à la transformation imaginée par lui, le problème des trois corps se réduisait à l'intégration de six équations différentielles du premier ordre et à deux quadratures. Les équations I à IV de son tableau définitif, et la formule 25 du § 4 montrent que les dérivées par rapport au temps des huit variables ρ_1, ρ_2, ρ'_1, ρ'_2, λ_1, λ_2, υ_1, υ_2 ne renferment pas d'autres inconnues que ces variables elles-mêmes.

18. Le procédé de Jacobi revient, comme nous l'avons vu, à éliminer par le principe des aires *le nœud des deux orbites* ou leur intersection commune avec le plan invariable. En substituant les aires f aux inclinaisons λ, j'ai fait disparaître des équations différentielles la dernière trace du plan invariable, de sorte qu'on ne détermine d'abord que le mouvement dans les deux orbites, dont l'intersection mutuelle sert de repère.

On pourrait de la même manière éliminer *le nœud du plan des deux corps*, c'est-à-dire son intersection avec le plan invariable. Le plan des deux corps, ou plan des vecteurs ρ_1, ρ_2, se confond toujours avec le *plan des trois corps*, si l'origine des coordonnées $\xi\eta\zeta$ est prise dans ce plan. On arrive ainsi à ne faire figurer dans les équations différentielles que le mouvement des trois corps *dans leur plan*. En effet, le principe des aires nous dit que deux forces égales aux aires f_1 et f_2 et perpendiculaires aux orbites des deux corps fictifs ont une résultante K invariable en grandeur et en direction. En d'autres termes, les normales f_1, f_2 aux orbites sont les côtés d'un parallélogramme dont la diagonale est la normale K au plan invariable. Soit encore P la normale au plan des trois corps. Si l'on mène par la normale P trois plans qui passent par les normales f_1, f_2, K, ces plans seront évidemment perpendiculaires aux intersections du plan des trois corps avec les orbites et avec le plan invariable, c'est-à-dire aux rayons vecteurs ρ_1, ρ_2 et au nœud N du plan des trois corps, et si on les fait tourner de 90 degrés autour de P, ils passeront par ρ_1, ρ_2 et N. Or, ces trois plans renferment les côtés et la diagonale du parallélogramme f_1, f_2, K, lequel les suit dans leur rotation autour de la normale P, de manière que les angles (P, f_1), (P, f_2), (P, K) restent toujours les mêmes. Ces trois angles, que je désignerai par θ_1, θ_2 et I, représentent donc toujours les inclinaisons des plans des orbites et du plan invariable par rapport au plan des trois corps; seulement la droite f_1 est maintenant dans le plan (P, ρ_1), la droite f_2 dans le plan (P, ρ_2), la diagonale K dans le plan (P, N). Si nous projetons le parallélogramme sur la normale P, nous avons

$$K \cos I = f_1 \cos\theta_1 + f_2 \cos\theta_2. \tag{99}$$

Si nous le projetons sur le plan des trois corps, la projection forme un parallélogramme dont les côtés $f_1 \sin\theta_1$ et $f_2 \sin\theta_2$ coïncident respectivement avec ρ_1 et ρ_2, et dont la diagonale $K \sin I$ tombe sur le nœud N. Il s'ensuit que les quantités $f_1 \sin\theta_1$, $f_2 \sin\theta_2$, c'est-à-dire les deux composantes des vitesses aréolaires qui sont perpendiculaires au plan des trois corps, peuvent s'exprimer par $K \sin I$ et par les angles que les rayons vecteurs ρ_1, ρ_2 forment avec le nœud N. On a, en effet,

$$\frac{f_1 \sin\theta_1}{\sin u_2} = -\frac{f_2 \sin\theta_2}{\sin u_1} = \frac{K \sin I}{\sin(1, 2)}, \tag{100}$$

en désignant par u_1, u_2 les distances des rayons vecteurs au nœud N de leur plan, et par $(1, 2) = u_2 - u_1$ l'angle compris entre ρ_1 et ρ_2. Or, $K \sin I$ peut s'exprimer par $K \cos I$ ou par la somme des composantes $f_1 \cos\theta_1$, $f_2 \cos\theta_2$ qui représentent le mouvement aréolaire dans le plan même des trois corps. Il s'ensuit que ces deux composantes et les angles u_1, u_2 suffisent à exprimer les composantes $f_1 \sin\theta_1$, $f_2 \sin\theta_2$, et par suite les aires f_1, f_2 elles-mêmes. On a, par exemple,

$$\begin{aligned} f_1^2 &= f_1^2 \cos^2\theta_1 + \frac{K^2 \sin^2 I}{\sin^2(1, 2)} \sin^2 u_2 \\ &= f_1^2 \cos^2\theta_1 + \frac{\sin^2 u_2}{\sin^2(1, 2)} [K^2 - (f_1 \cos\theta_1 + f_2 \cos\theta_2)^2]. \end{aligned}$$

La force vive du système peut donc s'exprimer par les rayons vecteurs ρ, les vitesses radiales ρ', les distances au nœud u et le mouvement aréolaire $f \cos\theta$ dans le plan des trois corps. La fonction des forces ne renferme que les rayons ρ et l'angle (1, 2), qui est la différence $u_2 - u_1$. Il en résulte que la fonction $H = T - U$ peut être exprimée par les huit variables ρ_1, ρ_2, ϖ_1, ϖ_2, u_1, u_2, $f_1 \cos\theta_1$, $f_2 \cos\theta_2$, et on trouve que l'on peut former un système de huit équations qui ne renferme que le mouvement des rayons vecteurs dans leur plan. C'est là le résultat obtenu par Edmond Bour dans son Mémoire sur le Problème des trois corps (*). Si l'on pose avec lui

$$\begin{array}{llll} q_1=\rho_1, & q_2=\rho_2, & p_1=\varpi_1, & p_2=\varpi_2,\\ q_3=u_1, & q_4=u_2, & p_3=f_1\cos\theta_1, & p_4=f_2\cos\theta_2, \end{array}$$

l'expression de la force vive devient

$$(101)\quad \left\{\begin{aligned} 2T&=\frac{1}{m_1}p_1^2+\frac{1}{m_2}p_2^2+\frac{p_3^2}{m_1q_1^2}+\frac{p_4^2}{m_2q_2^2}\\ &\quad+\frac{K^2-(p_3+p_4)^2}{m_1m_2q_1^2q_2^2}\,\frac{m_1q_1^2\sin q_3^2+m_2q_2^2\sin^2 q_4}{\sin^2(q_3-q_4)}. \end{aligned}\right.$$

Le dernier terme disparaît si le mouvement a lieu dans un plan, qui est alors le plan invariable. On peut aussi remplacer q_3, q_4, p_3, p_4 par leurs sommes et différences en faisant

$$\begin{array}{ll} n_3=q_3-q_4=(1,2), & n_4=q_3+q_4,\\ l_3=\frac{1}{2}(p_3-p_4), & l_4=\frac{1}{2}(p_3+p_4)=\frac{1}{2}K\cos I. \end{array}$$

E. Bour démontre que ces variables forment un système canonique, de sorte que le problème se ramène encore ici à l'intégration de huit équations du premier ordre. Pour mieux montrer les rapports qui existent entre ces nouvelles variables et celles que j'ai employées jusqu'ici, j'écrirai les relations suivantes :

$$\begin{array}{l} \cos(1,2)=\cos\upsilon_1\cos\upsilon_2+\sin\upsilon_1\sin\upsilon_2\cos(\lambda_1-\lambda_2),\\ \cos I\sin(1,2)=\cos\upsilon_1\sin\upsilon_2\cos\lambda_2-\cos\upsilon_2\sin\upsilon_1\cos\lambda_1,\\ \sin\theta_1\sin(1,2)=\sin\upsilon_2\sin(\lambda_1-\lambda_2),\quad \sin I\sin q_3=\sin\upsilon_1\sin\lambda_1,\\ \sin\theta_2\sin(1,2)=\sin\upsilon_1\sin(\lambda_1-\lambda_2),\quad \sin I\sin q_4=\sin\upsilon_2\sin\lambda_2. \end{array}$$

(*) *Journal de l'École Polytechnique*, XXXVI[e] Cahier, 1856, p. 50. Le tableau de la page 54, où l'auteur réunit les valeurs définitives de ses variables, renferme deux erreurs : il faut, dans les expressions de p_3 et de p_4, remplacer les facteurs $\frac{1}{\psi}$ et $\frac{1}{\psi_1}$ par $\upsilon\varphi$ et $\upsilon_1\varphi_1$ respectivement.

On a encore

$$f_1^2 = p_3^2 + \frac{K^2 - (p_3+p_4)^2}{\sin^2(q_3-q_4)} \sin^2 q_4, \ldots,$$

$$\operatorname{tang} v_1 = \frac{f_1 \sin(q_3-q_4)\sin q_3}{p_4 \sin q_4 + p_3 \sin q_3 \cos(q_3-q_4)}, \ldots.$$

19. Pour le mouvement des trois corps dans un plan, on aurait

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \quad f_1 + f_2 = K, \quad (1, 2) = v_2 - v_1;$$

la fonction H ne renfermerait donc que les six variables ρ_1, ρ_2, ϖ_1, ϖ_2, $(1, 2)$ et f_1 ou f_2. On aurait

$$\frac{df_1}{dt} = -\frac{df_2}{dt} = -\frac{dH}{d(1,2)} \quad \text{et} \quad \frac{d(1,2)}{dt} = \frac{dH}{df_1} - \frac{dH}{df_2},$$

ou bien, en posant $f_1 - f_2 = 2\varphi$,

$$(102) \qquad \frac{d\varphi}{dt} = -\frac{dH}{d(1,2)}, \quad \frac{d(1,2)}{dt} = \frac{dH}{d\varphi}.$$

Le nombre des variables indépendantes se réduirait ainsi à six, et on aurait en outre l'intégrale des forces vives

$$H = \frac{1}{2\mu_1}\varpi_1^2 + \frac{1}{2\mu_2}\varpi_2^2 + \frac{1}{2\mu_1}\left(\frac{\frac{1}{2}K + \varphi}{\rho_1}\right)^2 + \frac{1}{2\mu_2}\left(\frac{\frac{1}{2}K - \varphi}{\rho_2}\right)^2 - U = h_0.$$

Si l'on désigne par H_0 ce que devient H lorsqu'on y fait $\varphi = 0$, l'élimination donne

$$\frac{d(1,2)}{dt} = \sqrt{2(h_0 - H_0)\left(\frac{1}{\mu_1\rho_1^2} + \frac{1}{\mu_2\rho_2^2}\right) + \frac{K^2}{4}\left(\frac{1}{\mu_1\rho_1^2} - \frac{1}{\mu_2\rho_2^2}\right)^2}.$$

On peut encore de la même manière remplacer φ dans les expressions de $\frac{d\varpi_1}{dt}$ et de $\frac{d\varpi_2}{dt}$, et le problème du mouvement de trois corps dans un plan se trouve alors réduit à l'intégration des quatre équations simultanées du premier ordre

$$(103) \qquad \frac{d\rho_1}{\frac{1}{\mu_1}\varpi_1} = \frac{d\rho_2}{\frac{1}{\mu_2}\varpi_2} = \frac{d\varpi_1}{R_1} = \frac{d\varpi_2}{R_2} = \frac{d(1,2)}{R_3} (= dt),$$

où R_1, R_2, R_3 sont des fonctions des cinq variables ρ_1, ρ_2, ϖ_1, ϖ_2, (1, 2). Tout le reste reviendrait à des quadratures. L'avantage de cette réduction est cependant bien mince, vu la complication des dénominateurs.

20. Pour terminer, je ferai voir comment les systèmes canoniques peuvent être obtenus par la méthode d'Hamilton. Soit Ω la longitude du nœud des trois corps, I étant l'inclinaison de leur plan. La rotation de ce plan peut être composée d'une rotation dI autour du nœud et d'une rotation $\sin I\, d\Omega$ autour d'un axe perpendiculaire au nœud, ou bien de deux rotations correspondantes autour de deux axes ρ et (ρ), qui font avec le nœud les angles u et $90° + u$. La dernière représente la quantité $\frac{f \sin\theta}{\mu\rho^2}$ dont le rayon vecteur ρ sort du plan primitif des trois corps; il s'ensuit, si nous désignons par Ω', I' les dérivées de Ω, I, que

$$\mu\rho^2(\Omega' \sin I \cos u - I' \sin u) = f \sin\theta. \tag{104}$$

La dérivée u' s'obtient en ajoutant à l'angle $\frac{f\cos\theta}{\mu\rho^2}$, que ρ décrit dans le plan des trois corps, la quantité $-\Omega' \cos I$, qui provient de la rotation du plan autour de l'axe perpendiculaire au nœud; donc

$$\mu\rho^2(\Omega' \cos I + u') = f \cos\theta. \tag{105}$$

Les quatre relations que l'on déduit de ces formules, en donnant aux variables les indices 1 et 2, permettent d'exprimer H par les quantités ρ, ρ', u, u' et I, I', Ω'; mais les trois dernières s'éliminent par les intégrales des aires. En effet, les formules (100) et (104) donnent

$$\Omega' = \frac{K}{\sin^2(u_1 - u_2)}\left(\frac{\sin^2 u_1}{\mu_2\rho_2^2} + \frac{\sin^2 u_2}{\mu_1\rho_1^2}\right) = \frac{1}{K\sin^2 I}\sum\frac{f^2\sin^2\theta}{\mu\rho^2}. \tag{106}$$

De même, (99) et (105) donnent

$$\sum \mu\rho^2(\Omega'\cos I + u') = K \cos I. \tag{107}$$

On peut donc écrire

$$2T = \sum\mu\rho'^2 + \sum\mu\rho^2(\Omega'\cos I + u')^2 + \sum\mu\rho^2(\Omega'\sin I\cos u - I'\sin u)^2, \tag{108}$$

ou bien

$$(108\ bis) \qquad 2T = \sum \mu\rho'^2 + \sum \mu\rho^2(\Omega' \cos I + u')^2 + \Omega' K \sin^2 I.$$

Si nous prenons pour T l'expression (108), les intégrales des aires peuvent s'écrire

$$(109) \qquad \frac{dT}{d\Omega'} = K, \quad \frac{dT}{dI'} = 0, \quad \frac{dT}{dI} = 0,$$

et la troisième conserve cette forme, si nous remplaçons (108) par (108 *bis*). Il s'ensuit qu'il est permis d'éliminer Ω', I', I par les intégrales des aires, dans l'application de la méthode d'Hamilton. Soient p_1, p_2, p_3, p_4 les dérivées partielles de T par rapport à ρ'_1, ρ'_2, u'_1, u'_2, on aura

$$p_1 = \mu_1\rho'_1, \quad p_2 = \mu_2\rho'_2, \quad p_3 = \mu_1\rho_1^2(\Omega' \cos I + u'_1), \quad p_4 = \mu_2\rho_2^2(\Omega' \cos I + u'_2);$$

par conséquent

$$2T = \frac{p_1^2}{\mu_1} + \frac{p_2^2}{\mu_2} + \frac{p_3^2}{\mu_1\rho_1^2} + \frac{p_4^2}{\mu_2\rho_2^2} + \frac{K^2 - (p_3 + p_4)^2}{K}\Omega',$$

la quantité Ω' étant toujours la fonction définie par (106). On voit que les variables p_1, p_2 sont les conjuguées de ρ_1, ρ_2, et p_3, p_4 celles de u_1, u_2. La longitude du nœud Ω s'obtient par une quadrature à l'aide de la formule (106).

On peut encore remplacer les variables u_1, u_2, p_3, p_4 par leurs sommes et différences

$$2l_3 = p_3 - p_4, \qquad 2l_4 = p_3 + p_4 = K \cos I,$$
$$n_3 = u_1 - u_2 = (1, 2), \qquad n_4 = u_1 + u_2,$$

et les variables l_3, l_4 sont alors les conjuguées de n_3, n_4. Cela se démontre directement, en substituant dans la formule (108), $\frac{1}{2}n'_4 \pm \frac{1}{2}n'_3$ à la place de u'; on trouve alors que l_3 et l_4 sont les dérivées partielles de T par rapport à n'_3 et n'_4. La variable n_4 représente l'azimut de la bissectrice de l'angle (1, 2).

M. Brioschi (*) a établi ces formules d'une manière différente.

(*) *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LXVI, p. 710.

En prenant pour axes mobiles la normale P au plan des trois corps et les deux bissectrices de l'angle ω formé par les vecteurs ρ_1, ρ_2, M. Brioschi arrive à exprimer T par les variables ρ_1, ρ_2, ρ'_1, ρ'_2, ω, ω', et par les rotations du système autour des trois axes mobiles, lesquelles dépendent de I, I', Ω', φ, φ' (I étant toujours l'inclinaison du plan des trois corps, $\varphi = \frac{1}{2}(u_1 + u_2)$ la longitude du nœud comptée dans ce plan, Ω la longitude du nœud dans le plan invariable). Il introduit alors les dérivées p_1, p_2, q, de T par rapport à ρ'_1, ρ'_2, ω', et ayant éliminé I', Ω', φ' par les intégrales des aires, il forme avec les six variables ρ_1, ρ_2, ω, p_1, p_2, q un système canonique. M. Brioschi ne s'aperçoit pas que φ et $K \cos I$ sont conjugués, et que ω, q, 2φ, $\frac{1}{2} K \cos I$ sont les variables n_3, l_3, n_4, l_4 de Bour.

21. On peut d'ailleurs éliminer le nœud sans recourir à la transformation de Jacobi; c'est une remarque qui a déjà été faite par M. Sylvester (*). Voici comment nous y arriverons. Proposons-nous de trouver les coordonnées x, y des trois corps dans leur plan, avant de connaître la position de ce plan par rapport au plan invariable (elle sera donnée plus tard par l'inclinaison I et par la longitude du nœud Ω). Prenons le nœud pour axe des x, et l'origine au centre de gravité; nous aurons $\sum mx = 0$, $\sum my = 0$. Le déplacement du nœud dans le plan des trois corps étant égal à $\Omega' \cos I$, il est facile de voir que les vitesses des corps, estimées suivant les axes des x et des y, s'expriment par $x' - y\Omega' \cos I$ et $y' + x\Omega' \cos I$. La composante normale au plan des trois corps est $x\Omega' \sin I - y I'$; par conséquent,

$$(110)\quad \left\{ \begin{aligned} 2T = {} & \sum m(x' - y\Omega' \cos I)^2 \\ & + \sum m(y' + x\Omega' \cos I)^2 + \sum m(x\Omega' \sin I - y I')^2. \end{aligned} \right.$$

Les intégrales des aires peuvent être présentées sous la forme (109),

(*) A la fin du Mémoire intitulé *On the motion of a rigid body* (*Philosophical Transactions*, 1866). M. Sylvester n'a pas publié la méthode par laquelle il obtient ce résultat.

les plans de projection étant alors le plan invariable et deux plans perpendiculaires, menés par les axes mobiles des x et des y. Si nous projetons sur le plan des trois corps et sur deux plans perpendiculaires qui passent par les axes des x et des y, il vient

$$(111)\qquad \left\{\begin{aligned} &\Omega'\cos\mathrm{I}\sum m(x^2+y^2)+\sum m(xy'-yx')=\mathrm{K}\cos\mathrm{I},\\ &\Omega'\sin\mathrm{I}\sum mx^2-\mathrm{I}'\sum mxy=\mathrm{K}\sin\mathrm{I},\\ &\Omega'\sin\mathrm{I}\sum mxy-\mathrm{I}'\sum my^2=0. \end{aligned}\right.$$

Il résulte des deux dernières équations de ce groupe que la force vive qui provient de la composante normale s'exprime par $\Omega'\mathrm{K}\sin^2\mathrm{I}$, comme nous l'avons déjà trouvé plus haut; par conséquent

$$(112)\qquad 2\mathrm{T}=\sum m(x'-y\Omega'\cos\mathrm{I})^2+\sum m(y'+x\Omega'\cos\mathrm{I})^2+\Omega'\mathrm{K}\sin^2\mathrm{I}.$$

Les mêmes équations donnent pour Ω' la valeur suivante :

$$(113)\qquad \Omega'=\frac{\mathrm{MK}}{m_1\,m_2\,m_3}\,\frac{\sum my^2}{4\Delta^2},$$

où M est la somme des trois masses, et Δ l'aire du triangle des trois corps. On a d'ailleurs $\frac{2\Delta}{\mathrm{M}}=\frac{y_1x_2-y_2x_1}{m_3}=\frac{y_2x_3-y_3x_2}{m_1}=\frac{y_3x_1-y_1x_3}{m_2}$.

La variation de Ω est donc proportionnelle au moment d'inertie du système autour de la ligne des nœuds, divisé par le carré du triangle des trois corps; elle devient infinie pour $\Delta=0$, parce que le plan des trois corps cesse d'être déterminé quand ces corps se trouvent sur une ligne droite. Ce cas doit être exclu de notre analyse. En outre des variables Ω', I' et I, qu'il est permis d'éliminer par les intégrales des aires, comme je l'ai déjà dit plus haut, l'expression de la force vive renferme les douze variables x, y, x', y', dont le nombre se réduit à huit par les quatre équations $\sum mx=0$, $\sum mx'=0$,.... Si donc nous supposons x_3, y_3, x'_3, y'_3 éliminées, les coordonnées x_1, y_1, x_2, y_2 formeront un système canonique avec $\frac{d\mathrm{T}}{dx'_1}$, $\frac{d\mathrm{T}}{dy'_1}$, $\frac{d\mathrm{T}}{dx'_2}$, $\frac{d\mathrm{T}}{dy'_2}$. Pour obtenir ces dérivées partielles de T, nous devons différentier l'expression (112) en traitant Ω' et I comme des constantes. Au lieu d'éliminer x'_3, y'_3, nous pouvons d'ailleurs tenir compte des équations de condition par deux multiplicateurs α, β, en ajoutant à T l'expression

$$\alpha\sum mx' + \beta\sum my'.$$

On trouve de cette manière

$$(114)\qquad \begin{cases} p = \dfrac{d\mathrm{T}}{dx'} = m(x' - y\,\Omega'\cos\mathrm{I} + \alpha), \\ q = \dfrac{d\mathrm{T}}{dy'} = m(y' + x\,\Omega'\cos\mathrm{I} + \beta). \end{cases}$$

Si nous ajoutons les trois p, il vient $\sum p = \mathrm{M}\alpha$; de même $\sum q = \mathrm{M}\beta$. On a ensuite

$$(115)\qquad \sum(qx - py) = \mathrm{K}\cos\mathrm{I},$$

et finalement

$$(116)\qquad 2\mathrm{T} = \sum\frac{p^2+q^2}{m} - \frac{\left(\sum p\right)^2 + \left(\sum q\right)^2}{\mathrm{M}} + \Omega'\mathrm{K} - \frac{\Omega'}{\mathrm{K}}\left[\sum(qx - py)\right]^2.$$

Or nous pouvons choisir α et β de manière que $p_3 = q_3 = 0$; il ne reste alors dans T que les huit variables canoniques x_1, x_2, y_1, y_2, p_1, p_2, q_1, q_2, si nous substituons pour Ω' l'expression

$$(117)\qquad \Omega' = \mathrm{K}\frac{\mathrm{M}(m_1y_1^2 + m_2y_2^2) - m_1m_2(y_1 - y_2)^2}{\mathrm{M}\,m_1m_2(y_1x_2 - y_2x_1)^2},$$

qui se déduit de (113). Nous avons dès lors

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d\mathrm{H}}{dp},\quad \frac{dp}{dt} = -\frac{d\mathrm{H}}{dx},\quad \frac{dy}{dl} = \frac{d\mathrm{H}}{dq},\quad \frac{dq}{dt} = -\frac{d\mathrm{H}}{dy},$$

c'est-à-dire sept équations du premier ordre, dont on connaît une intégrale, $\mathrm{H} = h$. L'inclinaison I est donnée par la formule (115), la longitude Ω se trouve par une quadrature. Les variables p, q sont ici les vitesses relatives des corps m_1, m_2 par rapport à m_3, car nous avons

$\frac{p_1}{m_1} = x'_1 - x'_3 - (y_1 - y_3)\Omega' \cos \mathrm{I} = - \mathrm{x}'_2 + \mathrm{y}_2 \Omega' \cos \mathrm{I}$, en désignant par $\mathrm{x}_1 = x_2 - x_3$, $\mathrm{x}_2 = x_3 - x_1, \ldots$ les coordonnées relatives des trois corps dans leur plan.

22. Les coordonnées relatives x, y forment à leur tour des systèmes canoniques avec les vitesses $x' - y\Omega' \cos \mathrm{I}$, $y' + x\Omega' \cos \mathrm{I}$, des trois corps par rapport au centre de gravité. On peut enfin remplacer les x, y par les rayons vecteurs et les azimuts des trois corps, ou les x, y par les distances mutuelles des corps et par les azimuts de ces distances; toutes ces substitutions conduisent à des systèmes canoniques de huit variables. Pour le démontrer, il me suffira de faire remarquer que la formule (12) indique l'existence d'une transformation orthogonale par laquelle les coordonnées relatives de trois corps dépendent des coordonnées rapportées au centre de gravité. La formule en question peut s'écrire

$$\mathrm{m}^2 \sum \frac{1}{m_i}((\mathrm{x}_i)) = \sum m_i((x_i)), \tag{118}$$

où $\mathrm{m}^2 = \frac{m_1 m_2 m_3}{\mathrm{M}}$. Il en résulte que la substitution a lieu entre les variables $\sqrt{m_i}\, x_i$ d'une part, et $\mathrm{m}\frac{\mathrm{x}_i}{\sqrt{m_i}}$ de l'autre, et que l'on peut remplacer mx, my, mz par mx, my, mz dans les formes quadratiques telles que la force vive, le mouvement aréolaire, les moments d'inertie, etc. L'équation (116) subsistera donc, si les lettres p, q représentent les dérivées $\frac{m}{\mathrm{m}}\frac{d\mathrm{T}}{d\mathrm{x}}$, $\frac{m}{\mathrm{m}}\frac{d\mathrm{T}}{d\mathrm{y}}$, ou si nous remplaçons p, q par $\frac{m\mathrm{p}}{\mathrm{m}}$, $\frac{m\mathrm{q}}{\mathrm{m}}$, ce qui donne

$$\left\{\begin{aligned} 2\mathrm{T} = {} & \frac{1}{\mathrm{m}^2}\sum m(\mathrm{p}^2 + \mathrm{q}^2) \\ & - \frac{\left(\sum m\mathrm{p}\right)^2 + \left(\sum m\mathrm{q}\right)^2}{\mathrm{m}^2 \mathrm{M}} + \mathrm{K}\Omega' - \frac{\Omega'}{\mathrm{K}}\left[\sum(\mathrm{qx} - \mathrm{py})\right]^2. \end{aligned}\right. \tag{119}$$

On a ensuite

$$\frac{\mathrm{p}_1}{m_2} = x'_2 - y_2\Omega' \cos \mathrm{I}, \quad \frac{\mathrm{p}_2}{m_1} = - x'_1 + y_1 \Omega' \cos \mathrm{I}, \ldots.$$

Pour trouver les variables conjuguées des rayons vecteurs et des azimuts, on n'a qu'à différentier l'expression (108) en tenant compte des équations de condition $\sum m\rho \cos u = 0, \sum m\rho \sin u = 0$; je me dispenserai de développer les calculs.

La substitution orthogonale indiquée par l'équation (118) est la suivante :

$$(120) \qquad \begin{cases} \mathrm{x}_1 = x_2 - x_3 + \dfrac{m_1}{\mathrm{m}\mathrm{M}} \sum mx, \ldots. \\ \mathrm{M}x_1 = m_2 \mathrm{x}_3 - m_3 \mathrm{x}_2 + \mathrm{m} \sum \mathrm{x}, \ldots. \\ x_2 - x_3 = \mathrm{x}_1 - \dfrac{m_1}{\mathrm{M}} \sum \mathrm{x}, \ldots; \end{cases}$$

et, si nous considérons toujours les quantités $\sqrt{m}\,x$ et $\dfrac{\mathrm{m}\mathrm{x}}{\sqrt{m}}$ comme les variables de la transformation, les neuf coefficients sont

$$\frac{m_1}{\mathrm{M}}, \quad \frac{\sqrt{m_1 m_2} + \sqrt{m_3 \mathrm{M}}}{\mathrm{M}}, \quad \frac{\sqrt{m_3 m_1} - \sqrt{m_2 \mathrm{M}}}{\mathrm{M}}, \ldots.$$

Cette transformation porte d'ailleurs aussi sur la forme $dt^2 \delta \mathrm{U}$, qui devient $\sum \dfrac{\mathrm{m}^2}{m} d^2 \mathrm{x}\, \delta \mathrm{x}$, la somme devant s'étendre aux neuf coordonnées relatives x, y, z, et nous avons pour toutes ces coordonnées

$$\mathrm{m}^2 \frac{d^2 \mathrm{x}}{dt^2} = m \frac{d\mathrm{U}}{d\mathrm{x}},$$

si dans la fonction des forces nous remplaçons les différences $x_2 - x_3, \ldots$ par les expressions $\mathrm{x}_1 - \dfrac{m_1}{\mathrm{M}} \sum \mathrm{x}, \ldots.$

FIN DU TOME CINQUIÈME.