GRUEY

Sur le calcul numérique des perturbations des petites planètes au moyen des quadratures

Annales scientifiques de l'É.N.S. 1re série, tome 5 (1868), p. 161-227

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1868_1_5__161_0>

SUR LE CALCUL NUMÉRIQUE

DES

PERTURBATIONS DES PETITES PLANÈTES

AU MOYEN DES QUADRATURES,

PAR M. L.-J. GRUEY,

AGRÉGÉ DE L'UNIVERSITÉ, ASTRONOME ADJOINT A L'OBSERVATOIRE DE PARIS.

Avant d'entrer en matière, rappelons quelques points de Mécanique céleste sur lesquels nous nous appuierons constamment dans la suite.

1. Le mouvement elliptique ou non troublé d'une planète est défini par les équations

$$(A)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^2 x_e}{dt^2} + \dfrac{f\mu}{r_e^3} x_e = 0, \\ \dfrac{d^2 y_e}{dt^2} + \dfrac{f\mu}{r_e^3} y_e = 0, \\ \dfrac{d^2 z_e}{dt^2} + \dfrac{f\mu}{r_e^3} z_e = 0, \end{cases}$$

où x_e, y_e, z_e désignent les coordonnées rectilignes et rectangulaires de la planète, suivant trois directions constantes menées par le centre du Soleil; r_e la distance de ces deux corps, μ la somme $m + M$ de leurs masses, f l'attraction mutuelle de deux unités de masse situées à l'unité de distance. Le plan des x_e, y_e est en général l'écliptique d'une certaine époque choisie à l'avance.

Les coordonnées elliptiques tirées de ces équations sont fournies par le système de formules suivant :

$$
(\mathrm{B}) \quad \left\{
\begin{array}{ll}
u - e\sin u = nt + \varepsilon - \varpi = nt + \varkappa & (\varkappa = \varepsilon - \varpi) \\[4pt]
\operatorname{tang}\frac{1}{2}v = \sqrt{\dfrac{1+e}{1-e}}\operatorname{tang}\frac{1}{2}u & \\[4pt]
r_e = a(1 - e\cos u) = \dfrac{a(1-e^2)}{1+e\cos v} & \\[4pt]
\left.\begin{array}{l}
x_e = r_e[\cos\theta\cos(v+\omega) - \sin\theta\sin(v+\omega)\cos\varphi] \\
y_e = r_e[\sin\theta\cos(v+\omega) + \cos\theta\sin(v+\omega)\cos\varphi] \\
z_e = r_e[\sin(v+\omega)\sin\varphi]
\end{array}\right\} & (\omega = \varpi - \theta)
\end{array}
\right.
$$

Les variables auxiliaires u et v représentent l'anomalie excentrique et l'anomalie vraie; les quantités constantes a, e, ε, ϖ, φ, θ représentent les éléments de l'orbite:

a le demi-grand axe,
e l'excentricité,
ε la longitude de l'époque,
ϖ la longitude du périhélie,
φ l'inclinaison de l'orbite sur l'écliptique,
θ la longitude du nœud ascendant;

n n'est pas une constante arbitraire, elle est liée à a par la relation $n = \sqrt{\frac{f\mu}{a^3}}$; elle représente le moyen mouvement angulaire de la planète en 1 jour solaire moyen; aux éléments ε et ϖ, on substitue souvent $\varkappa$ et ω, définis par les relations

$$\varkappa = \varepsilon - \varpi, \quad \omega = \varpi - \theta.$$

L'observation peut seule donner la valeur de ces six éléments. L'ascension droite et la déclinaison de la planète étant des fonctions déterminées de t, a, e, ε, ϖ, φ, θ, la connaissance de trois lieux géocentriques distincts et des époques correspondantes doit fournir six équations entre les éléments; mais la résolution de ces équations dépasse les forces de l'analyse; c'est par une voie détournée que Gauss est arrivé à la solution complète du problème, dans son immortel *Theoria motus*.

2. Le mouvement troublé de la planète m est défini par les équations

$$(\mathrm{C})\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2}+\frac{f\mu}{r^3}x&=+\frac{d\mathrm{R}}{dx},\\ \frac{d^2y}{dt^2}+\frac{f\mu}{r^3}y&=+\frac{d\mathrm{R}}{dy},\\ \frac{d^2z}{dt^2}+\frac{f\mu}{r^3}z&=+\frac{d\mathrm{R}}{dz}.\end{aligned}\right.$$

La fonction R, dite *perturbatrice*, a pour expression

$$\mathrm{R}=-fm'\left(\frac{xx'+yy'+zz'}{r'^3}-\frac{1}{\rho'}\right)-fm''\left(\frac{xx''+\ldots}{r''^3}-\frac{1}{\rho''}\right)-\ldots,$$

et, par suite,

$$\frac{d\mathrm{R}}{dx}=-fm'\left(\frac{x-x'}{\rho'^3}+\frac{x'}{r'^3}\right)-fm''\left(\frac{x-x''}{\rho''^3}+\frac{x''}{r''^3}\right)-\ldots,$$

$$\frac{d\mathrm{R}}{dy}=\ldots,\quad \frac{d\mathrm{R}}{dz}=\ldots;$$

m, x, y, z, r se rapportent à la planète troublée; m', x', y', z', r'; m'', x'', y'', z'', r'', ... aux diverses planètes troublantes. ρ', ρ'', ... sont les distances de la masse troublée m aux masses respectives m', m'', ...

Le mouvement de ces dernières masses est donné par des systèmes d'équations (C'), (C''), ... analogues au système (C); le nombre total des équations de ces divers systèmes est égal à celui des inconnues $x, y, z, x', y', z', x'', y'', z'', \ldots$.

On ne sait pas intégrer rigoureusement les équations (C), (C'), ..., et pour obtenir les valeurs de x, y, z, on procède par approximations successives. m', m'', ... étant de petites quantités relativement à μ, on néglige d'abord R, et l'intégration de (C) conduit aux coordonnées elliptiques x_e, y_e, z_e comme première approximation. On cherche ensuite suivant quelle loi les éléments a, e, ..., θ doivent varier avec le temps, pour que x_e, y_e, z_e, déterminés par les formules (B), soient respectivement égaux, à chaque instant, à x, y, z; on trouve que cette loi est exprimée par les équations

$$
(\mathrm{D})\quad \left\{
\begin{aligned}
\frac{da}{dt} &= +\frac{2}{na}\frac{d\mathrm{R}}{d\varepsilon},\\
\frac{de}{dt} &= -\frac{\left(1-\sqrt{1-e^2}\right)\sqrt{1-e^2}}{na^2e}\frac{d\mathrm{R}}{d\varepsilon} - \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e}\frac{d\mathrm{R}}{d\varpi},\\
\frac{d\varepsilon}{dt} &= +\operatorname{tang}\frac{\varphi}{2}\frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}}\frac{d\mathrm{R}}{d\varphi} + \frac{\sqrt{1-e^2}\left(1-\sqrt{1-e^2}\right)}{na^2e}\frac{d\mathrm{R}}{de} - \frac{2}{na}\frac{d\mathrm{R}}{da},\\
\frac{d\varpi}{dt} &= +\operatorname{tang}\frac{\varphi}{2}\frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}}\frac{d\mathrm{R}}{d\varphi} + \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e}\frac{d\mathrm{R}}{de},\\
\frac{d\varphi}{dt} &= -\frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin\varphi}\frac{d\mathrm{R}}{d\theta} - \operatorname{tang}\frac{\varphi}{2}\frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{d\mathrm{R}}{d\varpi}+\frac{d\mathrm{R}}{d\varepsilon}\right),\\
\frac{d\theta}{dt} &= +\frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin\varphi}\frac{d\mathrm{R}}{d\varphi}.
\end{aligned}
\right.
$$

Le système (D) s'intègre lui-même par approximations successives. On y parvient en développant la fonction perturbatrice R en série ordonnée, suivant les produits et les puissances croissantes des excentricités et des inclinaisons e, φ, e', φ',.... Pour les planètes anciennes, ces quantités sont suffisamment petites, et la série converge assez rapidement pour qu'on puisse s'arrêter aux premiers termes; mais elles atteignent de grandes valeurs dans le cas des comètes et des planètes télescopiques : la convergence de la série n'est plus alors assurée, ou elle est si faible, qu'elle oblige à prendre un grand nombre de termes, ce qui engendre dans la pratique des difficultés presque insurmontables. Aussi a-t-on cherché des méthodes plus expéditives et toujours sûres pour calculer les perturbations des petites planètes, dont le nombre déjà si élevé s'accroît chaque jour.

3. M. Encke a publié successivement, en 1837 dans le *Berliner astronomisches Jahrburch*, et en 1852 dans les nos 791, 792, 814 des *Astronomische Nachrichten*, deux méthodes qui sont aujourd'hui très-répandues en Allemagne et qui ne se distinguent pas essentiellement de celles que Laplace a données au livre IX, tome IV de sa *Mécanique céleste*, pour les perturbations des comètes. Dans la première méthode, on calcule pour des époques équidistantes les valeurs numériques des dérivées secondes relatives au temps des perturbations de x_e, y_e, z_e, et

on en conclut par une double quadrature les valeurs de ces perturbations aux mêmes époques. Dans la deuxième, on calcule pour des époques équidistantes les valeurs numériques des dérivées premières des éléments de l'orbite relatives au temps, et on en conclut par une quadrature simple les valeurs de ces éléments aux mêmes époques. On obtient ainsi les valeurs numériques, non la loi, des perturbations.

Nous présentons ici ces deux méthodes sous une forme plus simple et en grande partie nouvelle. Pour plus de clarté, nous divisons le travail en trois Sections : dans la Section I, nous donnons aux quantités dont les valeurs numériques sont demandées à des époques équidistantes une expression commode pour le calcul; dans la Section II, nous établissons les formules de quadrature; la Section III est consacrée à une application numérique des deux premières.

SECTION I.

4. *Première méthode.* — Les perturbations ξ, η, ζ, δr des coordonnées elliptiques de la planète et de son rayon vecteur sont, par définition,

$$\xi = x - x_e,$$
$$\eta = y - y_e,$$
$$\zeta = z - z_e,$$
$$\delta r = r - r_e.$$

Retranchons deux à deux les équations (A) des équations (C) correspondantes, nous aurons pour déterminer ξ, η, ζ les équations

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = -f\mu\left(\frac{x}{r^3} - \frac{x_e}{r_e^3}\right) + \frac{dR}{dx},$$
$$\frac{d^2\eta}{dt^2} = -f\mu\left(\frac{y}{r^3} - \frac{y_e}{r_e^3}\right) + \frac{dR}{dy},$$
$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} = -f\mu\left(\frac{z}{r^3} - \frac{z_e}{r_e^3}\right) + \frac{dR}{dz}.$$

Si nous développons par la série de Taylor, suivant ξ, η, ζ, δr, les rapports $\frac{x}{r^3}$, $\frac{y}{r^3}$, $\frac{z}{r^3}$, nous aurons, en négligeant les termes d'ordre supérieur au premier,

$$\frac{x}{r^3} = \frac{x_e}{r_e^3} + \frac{1}{r_e^3}\left(\xi - 3\frac{x_e}{r_e}\delta r\right),$$
$$\frac{y}{r^3} = \frac{y_e}{r_e^3} + \frac{1}{r_e^3}\left(\eta - 3\frac{y_e}{r_e}\delta r\right),$$
$$\frac{z}{r^3} = \frac{z_e}{r_e^3} + \frac{1}{r_e^3}\left(\zeta - 3\frac{z_e}{r_e}\delta r\right).$$

La substitution de ces valeurs dans les équations précédentes leur donne la forme adoptée dans la pratique :

$$(\mathrm{E})\quad \begin{cases} \dfrac{d^2\xi}{dt^2} = -f\mu\,\dfrac{1}{r_e^3}\left(\xi - 3\dfrac{x_e}{r_e}\delta r\right) + \dfrac{d\mathrm{R}}{dx}, \\ \dfrac{d^2\eta}{dt^2} = -f\mu\,\dfrac{1}{r_e^3}\left(\eta - 3\dfrac{y_e}{r_e}\delta r\right) + \dfrac{d\mathrm{R}}{dy}, \\ \dfrac{d^2\zeta}{dt^2} = -f\mu\,\dfrac{1}{r_e^3}\left(\zeta - 3\dfrac{z_e}{r_e}\delta r\right) + \dfrac{d\mathrm{R}}{dz}. \end{cases}$$

On remplacera x, y, z par x_e, y_e, z_e dans $\frac{d\mathrm{R}}{dx}$, $\frac{d\mathrm{R}}{dy}$, $\frac{d\mathrm{R}}{dz}$, car on ne commettra ainsi qu'une erreur de second ordre par rapport à R. Quant à δr, il sera fourni à notre degré d'approximation par la formule

$$\delta r = \frac{x_e}{r_e}\xi + \frac{y_e}{r_e}\eta + \frac{z_e}{r_e}\zeta.$$

Nous verrons dans les Sections suivantes comment on calcule les valeurs numériques des seconds membres des équations (E), et comment une double quadrature donne les valeurs correspondantes de ξ, η, ζ.

5. *Deuxième méthode.* — Nous devons chercher des expressions commodes pour le calcul numérique des dérivées des éléments relatives au temps. Celles qui sont fournies par les équations (D) ne sauraient convenir sous leur forme actuelle; mais, si nous remarquons que les dérivées de R relatives à x, y, z sont d'un calcul facile, nous serons conduits à exprimer $\frac{d\mathrm{R}}{da}$, $\frac{d\mathrm{R}}{de}$, ..., $\frac{d\mathrm{R}}{d\theta}$ au moyen de $\frac{d\mathrm{R}}{dx}$, $\frac{d\mathrm{R}}{dy}$, $\frac{d\mathrm{R}}{dz}$, et à substituer dans (D) les valeurs obtenues.

Soit λ un élément quelconque de l'orbite troublée, on a

$$(1) \qquad \frac{d\mathrm{R}}{d\lambda} = \frac{d\mathrm{R}}{dx}\frac{dx}{d\lambda} + \frac{d\mathrm{R}}{dy}\frac{dy}{d\lambda} + \frac{d\mathrm{R}}{dz}\frac{dz}{d\lambda}.$$

Il suffira donc, pour effectuer la transformation indiquée, de remplacer dans (1) $\frac{dx}{d\lambda}$, $\frac{dy}{d\lambda}$, $\frac{dz}{d\lambda}$ par leurs expressions tirées des équations (B), qui conviennent au mouvement troublé quand on y considère les éléments comme variables et qu'on y remplace x_e, y_e, z_e, r_e par x, y, z, r. Nous serons amenés ainsi à introduire les directions de trois droites, que nous définirons immédiatement.

Ces droites sont :

1° Le rayon vecteur r, qui fait avec les axes coordonnés les angles (r, x), (r, y), (r, z), tels que

$$(2) \qquad \begin{cases} \cos(r, x) = \dfrac{x}{r} = \cos\theta\cos(v+\omega) - \sin\theta\sin(v+\omega)\cos\varphi, \\[2ex] \cos(r, y) = \dfrac{y}{r} = \sin\theta\cos(v+\omega) + \cos\theta\sin(v+\omega)\cos\varphi, \\[2ex] \cos(r, z) = \dfrac{z}{r} = \sin(v+\omega)\sin\varphi. \end{cases}$$

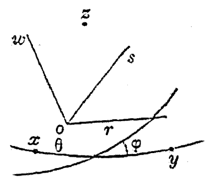
2° Le rayon vecteur s, perpendiculaire à r, et pour lequel on a, en remplaçant dans (2) v par $v + \frac{\pi}{2}$, ce qui revient à différentier (2) par rapport à v :

$$(3) \qquad \begin{cases} \cos(s, x) = \dfrac{d\left(\dfrac{x}{r}\right)}{dv} = -\cos\theta\sin(v+\omega) - \sin\theta\cos(v+\omega)\cos\varphi, \\[3ex] \cos(s, y) = \dfrac{d\left(\dfrac{y}{r}\right)}{dv} = -\sin\theta\sin(v+\omega) + \cos\theta\sin(v+\omega)\cos\varphi, \\[3ex] \cos(s, z) = \dfrac{d\left(\dfrac{z}{r}\right)}{dv} = \cos(v+\omega)\sin\varphi. \end{cases}$$

3° L'axe géométrique ow du plan de l'orbite, pour lequel on obtient, en remplaçant dans (2) $(v+\omega)$ par $\frac{\pi}{2}$, et φ par $\varphi+\frac{\pi}{2}$:

$$(4)\quad \begin{cases} \cos(w, x) = +\sin\theta\sin\varphi, \\ \cos(w, y) = -\cos\theta\sin\varphi, \\ \cos(w, z) = \cos\varphi. \end{cases}$$

Fig. 1.



6. Soit $\lambda = a, e, \varkappa$, ou l'un quelconque des éléments qui déterminent : les deux premiers, la forme de l'orbite ; le troisième, la position que la planète y occupe à l'époque prise pour origine.

On a, dans ce cas,

$$\begin{aligned}\frac{dx}{d\lambda} &= [\cos\theta\cos(v+\omega) - \sin\theta\sin(v+\omega)\cos\varphi]\frac{dr}{d\lambda} \\ &\qquad + r[-\cos\theta\sin(v+\omega) - \sin\theta\cos(v+\omega)\cos\varphi]\frac{dv}{d\lambda} \\ &= \frac{x}{r}\frac{dr}{d\lambda} + \frac{d\left(\frac{x}{r}\right)}{dv} r \frac{dv}{d\lambda},\end{aligned}$$

et de même

$$\frac{dy}{d\lambda} = \frac{y}{r}\frac{dr}{d\lambda} + \frac{d\left(\frac{y}{r}\right)}{dv} r \frac{dv}{d\lambda},$$

$$\frac{dz}{d\lambda} = \frac{z}{r}\frac{dr}{d\lambda} + \frac{d\left(\frac{z}{r}\right)}{dv} r \frac{dv}{d\lambda};$$

ou

$$\begin{aligned}\frac{dx}{d\lambda} &= \frac{dr}{d\lambda}\cos(r, x) + r\frac{dv}{d\lambda}\cos(s, x), \\ \frac{dy}{d\lambda} &= \frac{dr}{d\lambda}\cos(r, y) + r\frac{dv}{d\lambda}\cos(s, y), \\ \frac{dz}{d\lambda} &= \frac{dr}{d\lambda}\cos(r, z) + r\frac{dv}{d\lambda}\cos(s, z).\end{aligned}$$

Substituant dans l'équation (1) du n° 5, il vient

$$\frac{dR}{d\lambda} = \frac{dr}{d\lambda}\left[\frac{dR}{dx}\cos(r, x) + \frac{dR}{dy}\cos(r, y) + \frac{dR}{dz}\cos(r, z)\right]$$
$$+ r\frac{dv}{d\lambda}\left[\frac{dR}{dx}\cos(s, x) + \frac{dR}{dy}\cos(s, y) + \frac{dR}{dz}\cos(s, z)\right].$$

Soit P la force perturbatrice, (P, x), (P, y), (P, z) ses angles avec les axes, on sait que

$$\frac{dR}{dx} = P\cos(P, x),$$
$$\frac{dR}{dy} = P\cos(P, y),$$
$$\frac{dR}{dz} = P\cos(P, z);$$

on aura donc

$$(5) \qquad \frac{dR}{d\lambda} = \frac{dr}{d\lambda}P\cos(P, r) + r\frac{dv}{d\lambda}P\cos(P, s).$$

Il nous reste à calculer $\frac{dr}{d\lambda}$, $r\frac{dv}{d\lambda}$ pour les diverses valeurs de λ : a, e, $\varkappa$.

Les trois premières équations (B) donnent, en posant $p = a(1 - e^2)$ et $f\mu = k^2$,

$$\frac{dr}{da} = \frac{r}{a} - \frac{3}{2}\frac{kt}{a\sqrt{p}}e\sin v, \qquad \frac{dv}{da} = -\frac{3}{2}\frac{kt}{ar^2}\sqrt{p},$$
$$\frac{dr}{de} = -a\cos v, \qquad \frac{dv}{de} = \frac{(p+r)}{r(1-e^2)}\sin v,$$
$$\frac{dr}{d\varkappa} = \frac{a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{p}}e\sin v, \qquad \frac{dv}{d\varkappa} = \frac{a^{\frac{3}{2}}\sqrt{p}}{r^2}.$$

Substituant dans l'équation (5), on a

$$\frac{dR}{da} = \left(\frac{r}{a} - \frac{3}{2}\frac{kt}{a\sqrt{p}}e\sin v\right)P\cos(P, r) - \frac{3}{2}\frac{k\sqrt{p}}{ar}tP\cos(P, s),$$
$$\frac{dR}{de} = -a\cos v\,P\cos(P, r) + \frac{(p+r)}{(1-e^2)}\sin v\,P\cos(P, s),$$
$$\frac{dR}{d\varkappa} = \frac{a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{p}}e\sin v\,P\cos(P, r) + \frac{a^{\frac{3}{2}}\sqrt{p}}{r}P\cos(P, s).$$

7. Soit $\lambda = \omega, \varphi, \theta$ ou l'un des éléments qui déterminent le plan de l'orbite et la situation de l'orbite dans son plan. On a, dans ces trois cas, et successivement :

1°

$$\frac{dx}{d\omega} = r\,\frac{d\left(\frac{x}{r}\right)}{d\omega} = r\,\frac{d\left(\frac{x}{r}\right)}{dv} = r\cos(s, x),$$

$$\frac{dy}{d\omega} = r\cos(s, y),$$

$$\frac{dz}{d\omega} = r\cos(s, z);$$

substituant dans l'équation (1), n° 5, il vient

$$\frac{dR}{d\omega} = r\left[\frac{dR}{dx}\cos(s, x) + \frac{dR}{dy}\cos(s, y) + \frac{dR}{dz}\cos(s, z)\right],$$

ou

$$\frac{dR}{d\omega} = rP\cos(P, s).$$

2°

$$\frac{dx}{d\varphi} = r\sin(v+\omega)\sin\theta\sin\varphi = r\sin(v+\omega)\cos(w, x),$$

$$\frac{dy}{d\varphi} = -r\sin(v+\omega)\cos\theta\sin\varphi = r\sin(v+\omega)\cos(w, y),$$

$$\frac{dz}{d\varphi} = r\sin(v+\omega)\cos\varphi = r\sin(v+\omega)\cos(w, z);$$

d'où

$$\frac{dR}{d\varphi} = r\sin(v+\omega)\left[\frac{dR}{dx}\cos(w, x) + \frac{dR}{dy}\cos(w, y) + \frac{dR}{dz}\cos(w, z)\right],$$

c'est-à-dire

$$\frac{dR}{d\varphi} = r\sin(v+\omega)P\cos(P, w).$$

3°

$$\frac{dx}{d\theta} = r[-\sin\theta\cos(v+\omega) - \cos\theta\sin(v+\omega)\cos\varphi] = -r\cos(r, y),$$

$$\frac{dy}{d\theta} = r\cos(r, x),$$

$$\frac{dz}{d\theta} = 0,$$

ce qui donne

$$\frac{d\mathrm{R}}{d\theta} = r\left[-\frac{d\mathrm{R}}{dx}\cos(r,\,y) + \frac{d\mathrm{R}}{dy}\cos(r,\,x)\right]$$
$$= r\mathrm{P}\,[-\cos\mathrm{P}x\cos(r,\,y) + \cos\mathrm{P}y\cos(r,\,x)];$$

transformons cette expression, on a

$$\cos(\mathrm{P},\,x) = \cos(\mathrm{P},\,r)\cos(r,\,x) + \cos(\mathrm{P},\,s)\cos(s,\,x) + \cos(\mathrm{P},\,w)\cos(w,\,x),$$
$$\cos(\mathrm{P},\,y) = \cos(\mathrm{P},\,r)\cos(r,\,y) + \cos(\mathrm{P},\,s)\cos(s,\,y) + \cos(\mathrm{P},\,w)\cos(w,\,y);$$

multipliant la première relation par $-\cos(r,\,y)$, la deuxième par $+\cos(r,\,x)$, et ajoutant, il vient

$$\begin{aligned}
&-\cos(\mathrm{P},\,x)\cos(r,\,y) + \cos(\mathrm{P},\,y)\cos(r,\,x)\\
&\quad= \cos(\mathrm{P},\,s)[-\cos(s,\,x)\cos(r,\,y) + \cos(s,\,y)\cos(r,\,x)]\\
&\quad\quad+ \cos(\mathrm{P},\,w)[-\cos(w,\,x)\cos(r,\,y) + \cos(w,\,y)\cos(r,\,x)].
\end{aligned}$$

Or, en vertu des relations (2) et (3) du n° **5** et des relations (2) et (4) du même numéro, on a

$$-\cos(s,\,x)\cos(r,\,y) + \cos(s,\,y)\cos(r,\,x) = \cos\varphi,$$
$$-\cos(w,\,x)\cos(r,\,y) + \cos(w,\,y)\cos(r,\,x) = -\sin\varphi\cos(v+\omega),$$

d'où

$$\frac{d\mathrm{R}}{d\theta} = r\cos\varphi\,\mathrm{P}\cos(\mathrm{P},\,s) - r\sin\varphi\cos(v+\omega)\,\mathrm{P}\cos(\mathrm{P},\,w).$$

Nous avons ainsi en résumé

$$(\mathrm{F})\quad\left\{\begin{aligned}
\frac{d\mathrm{R}}{da} &= \left(\frac{r}{a} - \frac{3}{2}\,\frac{kt}{a\sqrt{p}}\,e\sin v\right)\mathrm{P}\cos(\mathrm{P},\,r) - \frac{3}{2}\,\frac{k\sqrt{p}}{ar}\,t\,\mathrm{P}\cos(\mathrm{P},\,s),\\
\frac{d\mathrm{R}}{de} &= -a\cos v\,\mathrm{P}\cos(\mathrm{P},\,r) + \frac{(p+r)}{1-e^2}\sin v\,\mathrm{P}\cos(\mathrm{P},\,s),\\
\frac{d\mathrm{R}}{d\varkappa} &= \frac{a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{p}}\,e\sin v\,\mathrm{P}\cos(\mathrm{P},\,r) + \frac{a^{\frac{3}{2}}\sqrt{p}}{r}\,\mathrm{P}\cos(\mathrm{P},\,s),\\
\frac{d\mathrm{R}}{d\omega} &= r\,\mathrm{P}\cos(\mathrm{P},\,s),\\
\frac{d\mathrm{R}}{d\varphi} &= r\sin(v+\omega)\,\mathrm{P}\cos(\mathrm{P},\,w),\\
\frac{d\mathrm{R}}{d\theta} &= r\cos\varphi\,\mathrm{P}\cos(\mathrm{P},\,s) - r\sin\varphi\cos(v+\omega)\,\mathrm{P}\cos(\mathrm{P},\,w).
\end{aligned}\right.$$

Remarquons que les dérivées partielles de R, relatives à a, e, $\varkappa$ sont indépendantes de $P\cos(P, w)$, ou de la projection de la force perturbatrice sur l'axe de l'orbite; et que les dérivées de R relatives à ω, φ, θ, sont indépendantes de $P\cos(P, r)$, ou de la projection de la force perturbatrice sur le rayon vecteur.

8. Avant de substituer les valeurs de ces dérivées dans les équations (D), nous transformerons ces dernières. Nous poserons $e = \sin\chi$, et à cause des relations $\varkappa = \varepsilon - \varpi$, $\omega = \varpi - \theta$, nous remplacerons

$$\frac{dR}{d\varepsilon} \text{ par } \frac{dR}{d\varkappa},$$

$$\frac{dR}{d\varpi} \text{ par } \frac{dR}{d\omega} - \frac{dR}{d\varkappa} = -\frac{a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{p}} e \sin v \, P\cos(P, r) + \left(r - \frac{a^{\frac{3}{2}}\sqrt{p}}{r}\right) P\cos(P, s),$$

$$\frac{dR}{d\theta} \text{ par } \frac{dR}{d\theta} - \frac{dR}{d\omega} = -2r\sin^2\frac{\varphi}{2} \, P\cos(P, s) - r\sin\varphi\cos(v+\omega) P\cos(P, w);$$

nous formerons en outre $\dfrac{d\varkappa}{dt} = \dfrac{d\varepsilon}{dt} - \dfrac{d\varpi}{dt}$.

Cela fait, il vient, en substituant les valeurs fournies par les équations F pour les dérivées de R, en réunissant les termes en $P\cos(P, r)$, $P\cos(P, s)$, $P\cos(P, w)$, et effectuant les simplifications qui se présentent :

$$(G)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= +\frac{2}{n}\sqrt{\frac{a}{p}}\, e\sin v \, P\cos(P, r) + \frac{2}{nr}\sqrt{pa}\, P\cos(P, s), \\ \frac{de}{dt} &= +\frac{\cos^2\chi}{n\sqrt{pa}}\sin v \, P\cos(P, r) - \frac{\cos\chi}{na^2 e}\left(r - \frac{a\sqrt{pa}}{r}\cos\chi\right) P\cos(P, s), \\ \frac{d\varkappa}{dt} &= -\frac{1}{na}\left(\frac{2r}{a} - \frac{\cos^2\chi}{e}\cos v - \frac{3kte\sin v}{a\sqrt{p}}\right) P\cos(P, r) \\ &\quad - \frac{1}{na^2}\left[\frac{(p+r)}{e}\sin v - \frac{3kt\sqrt{p}}{r}\right] P\cos(P, s), \\ \frac{d\varpi}{dt} &= -\frac{\cos\chi}{nae}\cos v \, P\cos(P, r) + \frac{(p+r)}{na^2 e\cos\chi}\sin v \, P\cos(P, s) + (1-\cos\varphi)\frac{d\theta}{dt}, \\ \frac{d\varphi}{dt} &= +\frac{r}{na^2\cos\chi}\cos(v+\omega) P\cos(P, w), \\ \frac{d\theta}{dt} &= +\frac{1}{na^2\cos\chi\sin\varphi}\, r\sin(v+\omega) P\cos(P, w). \end{aligned} \right.$$

Remarquons que $\frac{da}{dt}$, $\frac{de}{dt}$, $\frac{d\varkappa}{dt}$, dépendent seulement de $P\cos(P, r)$, $P\cos(P, s)$; $\frac{d\varpi}{dt}$ des trois quantités $P\cos(P, r)$, $P\cos(P, s)$, $P\cos(P, w)$; $\frac{d\varphi}{dt}$ et $\frac{d\theta}{dt}$ de $P\cos(P, w)$ uniquement. Si l'on décompose à chaque instant t, la force perturbatrice P suivant les trois axes or, os, ow, et si l'on néglige les quantités du second ordre relativement aux masses perturbatrices dans les équations (G), on voit que, dans le temps dt, les composantes situées dans le plan de l'orbite agissent seules pour troubler les éléments a, e, $\varkappa$ étrangers à la situation du plan, tandis que la composante perpendiculaire à ce plan agit seule pour en altérer la position; quant à la situation du périhélie, elle varie sous l'action réunie des trois composantes.

9. Il est avantageux, dans la pratique, de substituer aux éléments a, e, $\varkappa$ les quantités n, χ déjà définies et l'anomalie moyenne M, qui leur sont liées par les relations

$$n^2 a^3 = k^2,$$
$$e = \sin\chi,$$
$$M = nt + \varkappa,$$

d'où

$$\frac{dn}{dt} = -\frac{3n}{2a}\frac{da}{dt}, \quad \frac{d\chi}{dt} = \frac{1}{\cos\chi}\frac{de}{dt},$$

et désignant la perturbation de M par δM

$$\frac{d\delta M}{dt} = \int \frac{dn}{dt}\,dt + t\frac{dn}{dt} + \frac{d\varkappa}{dt},$$

ce qui conduit à

$$\frac{dn}{dt} = \frac{-3e}{\sqrt{pa}}\sin v\, P\cos(P, r) - \frac{3}{r}\sqrt{\frac{p}{a}}\, P\cos(P, s),$$

$$\frac{d\chi}{dt} = +\frac{\cos\chi}{n\sqrt{pa}}\sin v\, P\cos(P, r) - \frac{1}{na^2 e}\left(r - \frac{a\sqrt{pa}}{r}\cos\chi\right) P\cos(P, s),$$

$$\frac{d\delta M}{dt} = \int \frac{dn}{dt}\,dt - \left(\frac{2r}{na^2} - \frac{\cos^2\chi}{nae}\cos v\right) P\cos(P, r) - \frac{p+r}{na^2 e}\sin v\, P\cos(P, s).$$

Si l'on veut remplacer l'anomalie moyenne par la longitude moyenne L, on a

$$L = M + \varpi,$$

d'où

$$\frac{d\delta L}{dt} = \frac{d\delta M}{dt} + \frac{d\varpi}{dt},$$

c'est-à-dire

$$\frac{d\delta L}{dt} = \int \frac{dn}{dt}\,dt + (1-\cos\varphi)\frac{d\theta}{dt} - \left[\frac{2r}{na^2} + \frac{\cos\chi}{nae}\,2\sin^2\frac{\chi}{2}\cos v\right]P\cos(P, r)$$
$$+ \frac{2(p+r)}{na^2e}\,\frac{\sin^2\frac{\chi}{2}}{\cos\chi}\sin v\,P\cos(P, s),$$

ou

$$\frac{d\delta L}{dt} = \int \frac{dn}{dt}\,dt + (1-\cos\varphi)\frac{d\theta}{dt} - \left[\frac{2r}{na^2} + \frac{\cos\chi\,\mathrm{tang}\frac{\chi}{2}\cos v}{na}\right]P\cos(P, r)$$
$$+ \frac{(p+r)}{na^2}\,\frac{\mathrm{tang}\frac{\chi}{2}}{\cos\chi}\sin v\,P\cos(P, s).$$

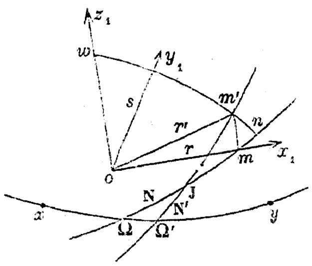
10. Nous devons actuellement calculer les composantes $P\cos(P, r)$, $P\cos(P, s)$, $P\cos(P\,w)$, de la force perturbatrice P, suivant les axes or, os, ow. Soient x_1, y_1, z_1 et x'_1, y'_1, z'_1, $x''_1, \ldots$, les coordonnées des planètes troublée et troublante rapportées à ces axes, on a

$$\begin{array}{lll}
x_1 = r, & x'_1 = r'\cos(r, r'), & x''_1 = r''\cos(r, r''), \\
y_1 = 0, & y'_1 = r'\cos(s, r'), & \ldots\ldots\ldots\ldots, \\
z_1 = 0, & z'_1 = r'\cos(w, r'), & \ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}$$

Cherchons $\cos rr'$, $\cos sr'$, $\cos wr'$; $\cos rr'', \ldots$.

Pour cela, déterminons d'abord la position de l'orbite de m' par rapport à l'orbite de m.

Fig. 2.



Soient :

ΩJ l'orbite de la planète troublée m,

Ω'J celle de la planète troublante m'.

Connaissant θ, φ, θ' et φ', on peut obtenir $\Omega J = N$, $\Omega' J = N'$, et l'angle J par les formules connues

$$(6)\quad \begin{cases} \sin\frac{1}{2}J \sin\frac{1}{2}(N+N') = \sin\frac{1}{2}(\theta'-\theta)\sin\frac{1}{2}(\varphi'+\varphi), \\ \sin\frac{1}{2}J \cos\frac{1}{2}(N+N') = \cos\frac{1}{2}(\theta'-\theta)\sin\frac{1}{2}(\varphi'-\varphi), \\ \cos\frac{1}{2}J \sin\frac{1}{2}(N-N') = \sin\frac{1}{2}(\theta'-\theta)\cos\frac{1}{2}(\varphi'+\varphi), \\ \cos\frac{1}{2}J \cos\frac{1}{2}(N-N') = \cos\frac{1}{2}(\theta'-\theta)\cos\frac{1}{2}(\varphi'-\varphi). \end{cases}$$

Menons, par le pôle (w) de l'orbite troublée et la planète troublante m', un grand cercle (w, m', n); la position de m' rapportée à l'orbite de m sera définie par

$$m'n = \beta',$$
$$Jn = \lambda'.$$

β' peut varier de $-\frac{\pi}{2}$ à $+\frac{\pi}{2}$, et λ' de o à 2π; β' étant positif lorsque w et m' sont dans le même hémisphère relativement à l'orbite Ωm, négatif dans le cas contraire.

Le triangle sphérique rectangle $mm'n$ donne

$$\begin{aligned}\cos(r, r') = \cos\beta' \cos(\lambda' - Jm) &= \cos\beta' \cos[\lambda' - (\Omega m - N)] \\ &= \cos\beta' \cos[\lambda' - (\varpi - \theta + v - N)],\end{aligned}$$

ou, posant la constante $\varpi - \theta - N = \sigma$,

$$\cos(r, r') = \cos\beta' \cos[\lambda' - (v+\sigma)];$$

si l'on change dans cette formule v en $v + \frac{\pi}{2}$, on a

$$\cos(s, r') = \cos\beta' \sin[\lambda' - (v+\sigma)];$$

d'ailleurs

$$\cos(w, r') = \sin\beta'.$$

On conclut

$$(7)\quad \begin{cases} x'_1 = r' \cos\beta' \cos[\lambda' - (v+\sigma)], \\ y'_1 = r' \cos\beta' \sin[\lambda' - (v+\sigma)], \\ z'_1 = r' \sin\beta'; \end{cases}$$

Quant aux coordonnées β', λ', elles se tirent du triangle sphérique rectangle $\mathrm{J}m'n$, qui donne

$$(8)\qquad \left\{\begin{array}{l} \cos\beta'\cos\lambda' = \cos\mathrm{J}m' = \cos[l' - (\theta' + \mathrm{N}')] = \cos(v' + \sigma'), \\ \cos\beta'\sin\lambda' = \sin[l' - (\theta' + \mathrm{N}')]\cos\mathrm{J} = \sin(v' + \sigma')\cos\mathrm{J}, \\ \sin\beta' = \sin[l' - (\theta' + \mathrm{N}')]\sin\mathrm{J} = \sin(v' + \sigma')\sin\mathrm{J}, \end{array}\right.$$

l' désignant la longitude vraie, dans son orbite, de la planète m'; v' son anomalie vraie, et σ' l'expression $\varpi' - \theta' - \mathrm{N}'$.

Or

$$\mathrm{P}\cos(\mathrm{P},\ r) = -fm'\left(\frac{x_1 - x'_1}{\rho'^3} + \frac{x'_1}{r'^3}\right) - fm''\left(\frac{x_1 - x''_1}{\rho''^3} + \frac{x''_1}{r''^3}\right) + \ldots,$$

$$\mathrm{P}\cos(\mathrm{P},\ s) = -fm'\left(\frac{y_1 - y'_1}{\rho'^3} + \frac{y'_1}{r'^3}\right) - fm''\left(\frac{y_1 - y''_1}{\rho''^3} + \frac{y''_1}{r''^3}\right) + \ldots,$$

$$\mathrm{P}\cos(\mathrm{P},w) = -fm'\left(\frac{z_1 - z'_1}{\rho'^3} + \frac{z'_1}{r'^3}\right) - fm''\left(\frac{z_1 - z''_1}{\rho''^3} + \frac{z''_1}{r''^3}\right) + \ldots;$$

les seconds membres sont donc connus par ce qui précède.

Nous poserons, pour simplifier l'écriture,

$$\frac{1}{\rho'^3} - \frac{1}{r'^3} = \Delta',$$

$$\frac{1}{\rho''^3} - \frac{1}{r''^3} = \Delta'',$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

et

$$\mathrm{P}\cos(\mathrm{P},\ r) = fm'\left(-\frac{r}{\rho'^3} + x'_1\Delta'\right) + fm''\left(-\frac{r}{\rho''^3} + x''_1\Delta''\right) + \ldots = \mathrm{R}_0 k^2,$$

$$\mathrm{P}\cos(\mathrm{P},\ s) = fm'(y'_1\Delta') + fm''(y''_1\Delta'') + \ldots = \mathrm{S}_0 k^2,$$

$$\mathrm{P}\cos(\mathrm{P},w) = fm'(z'_1\Delta') + fm''(z''_1\Delta'') + \ldots = \mathrm{V}_0 k^2.$$

11. Si nous substituons ces valeurs dans les équations (G) et dans celles qui donnent $\frac{dn}{dt}$, $\frac{d\chi}{dt}$, $\frac{d\delta\mathrm{M}}{dt}$, $\frac{d\delta\mathrm{L}}{dt}$, il vient :

$$\frac{da}{dt} = +\frac{2}{n}\sqrt{\frac{a}{p}}\,e\sin v\,\mathrm{R}_0 k^2 + \frac{2}{nr}\sqrt{pa}\,\mathrm{S}_0 k^2,$$

$$\frac{de}{dt} = +\frac{\cos^2\chi}{n\sqrt{pa}}\sin v\,\mathrm{R}_0 k^2 - \frac{\cos\chi}{na^2 e}\left(r - \frac{a\sqrt{pa}}{r}\cos\chi\right)\mathrm{S}_0 k^2,$$

$$\frac{d\varkappa}{dt} = -\frac{1}{na}\left(\frac{2r}{a} - \frac{\cos^2\chi}{e}\cos v - \frac{3ke}{a\sqrt{p}}t\sin v\right)\mathrm{R}_0 k^2$$
$$-\frac{1}{na^2}\left(\frac{p+r}{e}\sin v - \frac{3k\sqrt{p}}{r}t\right)\mathrm{S}_0 k^2,$$

$$\frac{d\varpi}{dt} = -\frac{\cos\chi}{nae}\cos v\,\mathrm{R}_0 k^2 + \frac{p+r}{na^2 e\cos\chi}\sin v\,\mathrm{S}_0 k^2 + (1-\cos\varphi)\frac{d\theta}{dt},$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = +\frac{r}{na^2\cos\chi}\cos(v+\omega)\,\mathrm{W}_0 k^2,$$

$$\frac{d\theta}{dt} = +\frac{1}{na^2\cos\chi\sin\varphi}r\sin(v+\omega)\,\mathrm{W}_0 k^2,$$

$$\frac{dn}{dt} = -\frac{3e}{\sqrt{pa}}\sin v\,\mathrm{R}_0 k^2 - \frac{3}{r}\sqrt{\frac{p}{a}}\mathrm{S}_0 k^2,$$

$$\frac{d\chi}{dt} = +\frac{\cos\chi}{n\sqrt{pa}}\sin v\,\mathrm{R}_0 k^2 - \frac{1}{na^2 e}\left(r - \frac{a\sqrt{pa}}{r}\cos\chi\right)\mathrm{S}_0 k^2,$$

$$\frac{d\delta\mathrm{M}}{dt} = \int\frac{dn}{dt}dt - \left(\frac{2r}{na^2} - \frac{\cos^2\chi}{nae}\cos v\right)\mathrm{R}_0 k^2 - \frac{p+r}{na^2 e}\sin v\,\mathrm{S}_0 k^2,$$

$$\frac{d\delta\mathrm{L}}{dt} = \int\frac{dn}{dt}dt + (1-\cos\varphi)\frac{d\theta}{dt} - \left(\frac{2r}{na^2} + \frac{\cos\chi\,\mathrm{tang}\,\frac{\chi}{2}}{na}\cos v\right)\mathrm{R}_0 k^2$$
$$+\frac{(p+r)}{na^2}\frac{\mathrm{tang}\,\frac{\chi}{2}}{\cos\chi}\sin v\,\mathrm{S}_0 k^2,$$

ou, en remplaçant n par $ka^{-\frac{3}{2}}$, ω par $\varpi - \theta$, et effectuant quelques simplifications,

$$\frac{da}{dt} = +2a^2 e\sin v\frac{k\mathrm{R}_0}{\sqrt{p}} + \frac{2a^2}{r}p\frac{k\mathrm{S}_0}{\sqrt{p}},$$

$$\frac{de}{dt} = p\sin v\frac{k\mathrm{R}_0}{\sqrt{p}} - \frac{p}{e}\left(\frac{r}{a} - \frac{p}{r}\right)\frac{k\mathrm{S}_0}{\sqrt{p}},$$

$$\frac{d\varkappa}{dt} = -\sqrt{\frac{p}{a}}\left(2r - \frac{p}{e}\cos v - \frac{3ke}{\sqrt{p}}t\sin v\right)\frac{k\mathrm{R}_0}{\sqrt{p}}$$
$$-\sqrt{\frac{p}{a}}\left(\frac{p+r}{e}\sin v - \frac{3k\sqrt{p}}{r}t\right)\frac{k\mathrm{S}_0}{\sqrt{p}},$$

$$\frac{d\varpi}{dt} = -\frac{p\cos v}{e}\frac{kR_0}{\sqrt{p}} + \frac{(p+r)}{e}\sin v\frac{kS_0}{\sqrt{p}} + (1-\cos\varphi)\frac{d\theta}{dt},$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = +r\cos(v+\varpi-\theta)\frac{kW_0}{\sqrt{p}},$$

$$\frac{d\theta}{dt} = +\frac{r\sin(v+\varpi-\theta)}{\sin\varphi}\frac{kW_0}{\sqrt{p}},$$

$$\frac{dn}{dt} = -\frac{3k}{\sqrt{a}}e\sin v\frac{kR_0}{\sqrt{p}} - \frac{3k}{\sqrt{a}}\frac{p}{r}\frac{kS_0}{\sqrt{p}},$$

$$\frac{d\chi}{dt} = +a\cos\chi\sin v\frac{kR_0}{\sqrt{p}} + a\cot\chi\left(\frac{p}{r}-\frac{r}{a}\right)\frac{kS_0}{\sqrt{p}},$$

$$\frac{d\delta M}{dt} = -(2r\cos\chi - p\cot\chi\cos v)\frac{kR_0}{\sqrt{p}} - (p+r)\cot\chi\sin v\frac{kS_0}{\sqrt{p}} + \int\frac{dn}{dt}dt,$$

$$\frac{d\delta L}{dt} = -\left(2r\cos\chi + p\,\mathrm{tang}\,\frac{1}{2}\chi\cos v\right)\frac{kR_0}{\sqrt{p}} + (p+r)\,\mathrm{tang}\,\frac{1}{2}\chi\sin v\frac{kS_0}{\sqrt{p}}$$
$$+(1-\cos\varphi)\frac{d\theta}{dt} + \int\frac{dn}{dt}dt.$$

Ce sont précisément les formules d'Encke; nous montrerons, dans la section III, comment on calcule méthodiquement les valeurs numériques des seconds membres, quand on leur a fait subir une dernière transformation que nous allons expliquer.

Comme, dans la pratique, il est commode, pour la division du travail, d'évaluer séparément les perturbations dues à chaque planète, il nous suffira d'introduire seulement l'une d'elles dans les formules définitives, soit m'.

Posons pour abréger l'écriture, en désignant par α un coefficient indéterminé dont nous verrons l'usage dans les sections suivantes,

$$(1) = \frac{km'}{\sqrt{p}}\alpha\frac{1}{\sin 1''}, \qquad (5) = \frac{1}{e},$$

$$(2) = \frac{1}{\sin\varphi}, \qquad (6) = \mathrm{tang}\,\frac{1}{2}\varphi,$$

$$(3) = a\cos\chi, \qquad (7) = \frac{3ke}{\sqrt{a}}\alpha,$$

$$(4) = \frac{p}{e}, \qquad (8) = \frac{3kp}{\sqrt{a}}\alpha,$$

$$(9) = p \operatorname{tang} \frac{1}{2}\chi, \qquad (12) = p \cot \frac{1}{2}\chi,$$
$$(10) = 2\cos\chi, \qquad (13) = \cot\chi,$$
$$(11) = \operatorname{tang} \frac{1}{2}\chi, \qquad \upsilon = v + \varpi - \theta.$$

Réduisons R_0, S_0, W_0 au terme en m', et remarquons que m étant négligeable, $f = k^2$, si on prend la masse M du Soleil pour unité; nous aurons alors :

$$\frac{k}{\sqrt{p}} \frac{\alpha}{\sin 1''} R_0 = \frac{k}{\sqrt{p}} \frac{\alpha}{\sin 1''} m' \left(-\frac{r}{\rho'^3} + x'_1 \Delta'\right) = (1)\left(-\frac{r}{\rho'^3} + x'_1 \Delta'\right) = R'_0,$$
$$\frac{k}{\sqrt{p}} \frac{\alpha}{\sin 1''} S_0 = \frac{k}{\sqrt{p}} \frac{\alpha}{\sin 1''} m'(y'_1 \Delta') = (1)(y'_1 \Delta') = S'_0,$$
$$\frac{k}{\sqrt{p}} \frac{\alpha}{\sin 1''} W_0 = \frac{k}{\sqrt{p}} \frac{\alpha}{\sin 1''} m'(z'_1 \Delta') = (1)(z'_1 \Delta') = W'_0,$$

R'_0, S'_0, W'_0 désignant respectivement $(1)\left(-\frac{r}{\rho'^3} + x'_1 \Delta'\right)$, $(1)(y'_1 \Delta')$, $(1)(z'_1 \Delta')$.

Par suite, le système d'équations différentielles que nous venons d'obtenir, réduit aux sept dernières seules usitées, prend la forme

$$(\mathrm{H}) \left\{ \begin{aligned}
&\alpha \frac{d\varpi}{dt} = -(4)\cos v\, R'_0 + (5)\left(\frac{p}{r} + 1\right) r \sin v\, S'_0 + (6)\, r \sin \upsilon\, W'_0,\\
&\alpha \frac{d\varphi}{dt} = r \cos \upsilon\, W'_0,\\
&\alpha \frac{d\theta}{dt} = (2)\, r \sin \upsilon\, W'_0,\\
&\alpha^2 \frac{dn}{dt} = -(7)\sin v\, R'_0 - (8)\frac{1}{r} S'_0,\\
&\alpha \frac{d\psi}{dt} = (3)\sin v\, R'_0 + (3)(\cos v + \cos u)\, S'_0,\\
&\alpha \frac{d\delta \mathrm{M}}{dt} = [(12)\cos v - (10)\, r]\, R'_0 - (13)\left(\frac{p}{r} + 1\right) r \sin v\, S'_0 + \alpha \int \frac{dn}{dt}\, dt,\\
&\alpha \frac{d\delta \mathrm{L}}{dt} = -[(9)\cos v + (10)\, r]\, R'_0 + (11)\left(\frac{p}{r} + 1\right) r \sin v\, S'_0\\
&\qquad + (6)\, r \sin \upsilon\, W'_0 + \alpha \int \frac{dn}{dt}\, dt,
\end{aligned} \right.$$

à laquelle nous nous arrêtons.

Cette forme offre l'avantage de séparer nettement les grandeurs (1), (2),..., (13) qui ne varient pas sensiblement, pendant un certain temps, des autres grandeurs telles que v, r,..., dont la variation est rapide; elle fournit d'ailleurs les variations des éléments exprimées en secondes d'angle.

SECTION II.

12. La résolution numérique des équations E et H nous conduit au problème suivant :

Connaissant les valeurs d'une fonction du temps à certaines époques particulières et équidistantes, calculer les intégrales première et seconde de cette fonction.

Soient $u = f(t)$ la fonction; t_{-1}, t_0, t_1,..., t_n les valeurs attribuées à t; u_{-1}, u_0, u_1,..., u_n les valeurs correspondantes de u; $t_n = t_0 + n\alpha$, n étant un nombre entier positif ou négatif, et α la raison de la progression que forment toujours dans la pratique les valeurs de t. Supposons en outre la série de Taylor applicable à la fonction u.

Une valeur quelconque de t étant mise sous la forme $t_{n+z} = t_n + z\alpha$, on peut développer u suivant les puissances croissantes de z; désignons ce développement par u_{n+z}, on a

$$u_{n+z} = u_n + \left(\frac{du}{dt}\right)_n \frac{\alpha}{1} z + \left(\frac{d^2u}{dt^2}\right)_n \frac{\alpha^2}{1.2} z^2 + \ldots + \left(\frac{d^ku}{dt^k}\right)_n \frac{\alpha^k}{1.2\ldots k} z^k + \ldots;$$

ou posant, pour abréger l'écriture,

$$\left(\frac{d^ku}{dt^k}\right)_n \frac{\alpha^k}{1.2\ldots k} = a_n^k,$$

$$(1) \qquad u_{n+z} = u_n + a_n^1 z + a_n^2 z^2 + a_n^3 z^3 + \ldots + a_n^k z^k + \ldots,$$

il suffira de connaître a_n^1, a_n^2,..., a_n^k pour avoir u sous une forme facile à intégrer. Nous déterminerons ces quantités au moyen de ..., u_{-1},

$u_0, u_1, \ldots$ et de leurs différences, dont voici le tableau :

$$\begin{array}{lllll}
\vdots & & & & \\
u_{-2} & & & & \\
 & \Delta^1 u_{-\frac{3}{2}} & & & \\
u_{-1} & & \Delta^2 u_{-1} & & \\
 & \Delta^1 u_{-\frac{1}{2}} & & \Delta^3 u_{-\frac{1}{2}} & \\
u_0 & & \Delta^2 u_0 & & \Delta^4 u_0. \\
 & \Delta^1 u_{\frac{1}{2}} & & \Delta^3 u_{\frac{1}{2}} & \\
u_1 & & \Delta^2 u_1 & & \\
 & \Delta^1 u_{\frac{3}{2}} & & & \\
u_2 & & & & \\
\vdots & & & &
\end{array}$$

Chaque différence est écrite entre les deux nombres dont elle résulte et à leur droite; l'indice de u y est égal à la moyenne arithmétique des indices dans ces deux nombres. Ainsi les différences de divers ordres de u_n sont désignées généralement par $\Delta^p u_{n+\frac{p}{2}}$ et se trouvent sur la ligne oblique qui part de u_n, tandis que l'indice de u est constant sur une même ligne horizontale et l'ordre des différences toujours pair ou impair sur cette ligne.

Nous désignerons la moyenne arithmétique de u_n, u_{n+1}, par $u^{\cdot}_{n+\frac{1}{2}}$, et celle de $\Delta^p u_k$, $\Delta^p u_{k+1}$, par $\Delta^{\cdot p} u_{k+\frac{1}{2}}$. Ces moyennes arithmétiques complètent pour ainsi dire les lignes horizontales, qui ne présentent qu'un terme dans leur rencontre avec deux lignes verticales consécutives.

Une ligne horizontale complétée de la sorte, par l'intercalation des moyennes arithmétiques des différences immédiatement adjacentes deux à deux de part et d'autre de cette ligne, est de la forme, si son premier terme est u_n,

$$u_n, \quad \Delta^{\cdot 1} u_n, \quad \Delta^2 u_n, \quad \Delta^{\cdot 3} u_n, \ldots, \quad \Delta^{\cdot 2p-1} u_n, \quad \Delta^{2p} u_n, \ldots,$$

nous la désignerons par le nom de *ligne* (n).

Une ligne horizontale complète détermine toutes les autres. Nous établirons dès maintenant des formules qui nous serviront plus tard, pour passer de la ligne (n) à la ligne voisine $\left(n - \frac{1}{2}\right)$, ou inversement.

Cette dernière ligne est, en vertu des définitions précédentes,

$$u^{\cdot}_{n-\frac{1}{2}},\quad \Delta^{1} u_{n-\frac{1}{2}},\quad \Delta^{\cdot 2} u_{n-\frac{1}{2}},\ldots,\quad \Delta^{2p-1} u_{n-\frac{1}{2}},\quad \Delta^{\cdot 2p} u_{n-\frac{1}{2}},\ldots.$$

Or, on a, par définition,

$$\Delta^{2p} u_n - \Delta^{2p} u_{n-1} = \Delta^{2p+1} u_{n-\frac{1}{2}},$$
$$\Delta^{2p} u_n + \Delta^{2p} u_{n-1} = 2\Delta^{\cdot 2p} u_{n-\frac{1}{2}},$$

d'où

$$\Delta^{2p} u_n = \Delta^{\cdot 2p} u_{n-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\Delta^{2p+1} u_{n-\frac{1}{2}};$$

on a aussi, par définition,

$$\Delta^{2p-1} u_{n+\frac{1}{2}} - \Delta^{2p-1} u_{n-\frac{1}{2}} = \Delta^{2p} u_n,$$
$$\Delta^{2p-1} u_{n+\frac{1}{2}} + \Delta^{2p-1} u_{n-\frac{1}{2}} = 2\Delta^{\cdot 2p-1} u_n;$$

d'où, retranchant ces relations l'une de l'autre et transportant $\Delta^{\cdot 2p-1} u_n$ dans le premier membre,

$$\Delta^{\cdot 2p-1} u_n = \Delta^{2p-1} u_{n-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\Delta^{2p} u_n = \Delta^{2p-1} u_{n-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\Delta^{\cdot 2p} u_{n-\frac{1}{2}} + \frac{1}{4}\Delta^{2p+1} u_{n-\frac{1}{2}};$$

on trouverait de la même manière les relations inverses pour passer de la ligne $\left(n-\frac{1}{2}\right)$ à la ligne (n); en les réunissant aux premières, nous avons le système des formules suivantes :

$$(2)\qquad \Delta^{2p} u_n = \Delta^{\cdot 2p} u_{n-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\Delta^{2p+1} u_{n-\frac{1}{2}},$$

$$(3)\qquad \Delta^{\cdot 2p-1} u_n = \Delta^{2p-1} u_{n-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\Delta^{\cdot 2p} u_{n-\frac{1}{2}} + \frac{1}{4}\Delta^{2p+1} u_{n-\frac{1}{2}},$$

$$(4)\qquad \Delta^{\cdot 2p} u_{n-\frac{1}{2}} = \Delta^{2p} u_n - \frac{1}{2}\Delta^{\cdot 2p+1} u_n + \frac{1}{4}\Delta^{2p+2} u_n,$$

$$(5)\qquad \Delta^{2p-1} u_{n-\frac{1}{2}} = \Delta^{\cdot 2p-1} u_n - \frac{1}{2}\Delta^{2p} u_n.$$

13. Cherchons maintenant la relation qui existe entre les coefficients $a_n^1, a_n^2, \ldots, a_n^k$ et la différence d'ordre p de u_{n+h}, h étant entier.

L'équation (1), n° **12**, donne, pour $z = h$, $z = h+1$,

$$u_{n+h} = u_n + a_n^1 h + a_n^2 h^2 + a_n^3 h^3 + \ldots,$$

$$u_{n+h+1} = u_n + a_n^1 (h+1) + a_n^2 (h+1)^2 + a_n^3 (h+1)^3 + \ldots,$$

d'où

$$\Delta^1 u_{n+h+\frac{1}{2}} = a_n^1 [(h+1) - h] + a_n^2 [(h+1)^2 - h^2] + \ldots,$$

qui, pour h augmenté de 1, est

$$\Delta^1 u_{n+h+\frac{3}{2}} = a_n^1 [(h+2) - (h+1)] + a_n^2 [(h+2)^2 - (h+1)^2] + \ldots;$$

donc

$$\Delta^2 u_{n+h+1} = a_n^1 [(h+2) - 2(h+1) + h] + a_n^2 [(h+2)^2 - 2(h+1)^2 + h^2] + \ldots.$$

Admettons que la loi qui se manifeste déjà soit vraie pour la différence d'ordre $p-1$, on aura

$$\Delta^{p-1} u_{n+h+\frac{p-1}{2}} = a_n^1 \left[(h+p-1) - \frac{p-1}{1}(h+p-2) + \ldots \mp h \right] + a_n^2 [(h+p-1)^2 - \ldots \pm h^2] + \ldots,$$

les coefficients des parenthèses comprises dans un même crochet étant ceux de la puissance $(p-1)^{ième}$ du binône $(x-1)$.

Retranchons cette relation membre à membre de celle obtenue, en y changeant h en $h+1$; il vient

$$\Delta^p u_{n+h+\frac{p}{2}} = a_n^1 [(h+p) - p(h+p-1) + \ldots \pm h] + a_n^2 [(h+p)^2 - \ldots \mp h^2] + \ldots,$$

ce qui démontre que la loi est vraie quel que soit p. Posons

$$q_k = (h+p)^k - p(h+p-1)^k + \frac{p(p-1)}{1.2}(h+p-2)^k + \ldots \mp p(h+1)^k \pm h^k,$$

on aura

$$\Delta^p u_{n+h+\frac{p}{2}} = a_n^1 q_1 + a_n^2 q_2 + \ldots + a_n^k q^k + \ldots.$$

Les coefficients q sont indépendants de t_n, α et de la fonction u.

Si nous prenons $u = t^p$, nous aurons

$$\Delta^p u_{n+h+\frac{p}{2}} = 1.2.3\ldots p\alpha^p, \quad \text{quels que soient } n \text{ et } h; \text{ et } a_n^k = 0, \quad \text{pour } k > p.$$

Donc, dans ce cas,

$$1.2.3\ldots p\alpha^p = a_n^1 q_1 + a_n^2 q_2 + \ldots + a_n^k q_k + \ldots + a_n^p q_p.$$

Cette relation ayant lieu quel que soit t_n, dont les puissances décroissantes $t_n^{p-1}, t_n^{p-2}, \ldots, t_n^0$, entrent comme facteur dans $a_n^1, a_n^2, \ldots, a_n^p$, on a nécessairement

$$q_p = 1.2.3\ldots p \quad \text{et} \quad q_k = 0, \quad \text{pour} \quad k < p.$$

Nous obtenons ainsi une généralisation de la propriété bien connue du polynôme

$$p^k - p(p-1)^k + \frac{p(p-1)}{1.2}(p-2)^k + \ldots \pm p,$$

que l'on obtient en faisant $h = 0$ dans q_k. Il en résulte pour $\Delta^p u_{n+h+\frac{p}{2}}$ l'expression plus simple que celle qui précède

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} \Delta^p u_{n+h+\frac{p}{2}} &= a_n^p \left[(h+p)^p - \frac{p}{1}(h+p-1)^p + \ldots \pm h^p \right] \\ &\quad + a_n^{p+1}\left[(h+p)^{p+1} - \ldots \pm h^{p+1}\right] + \ldots; \end{aligned} \right.$$

pour $h = 0$, on a

$$\Delta^p u_{n+\frac{p}{2}} = a_n^p\left[p^p - p(p-1)^p + \ldots \pm p\, 1^p\right] + a_n^{p+1}\left[p^{p+1} - \ldots \pm p\, 1^{p+1}\right] + \ldots,$$

expression qui est de la forme

$$(l) \quad \left\{ \begin{aligned} \Delta^p u_{n+\frac{p}{2}} &= a_n^p\left[l_p^0 p^p + l_p^1 (p-1)^p + \ldots + l_p^{p-1}\, 1^p \right] \\ &\quad + a_n^{p+1}\left[l_p^0 p^{p+1} + \ldots + l_p^{p-1}\, 1^{p+1} \right] + \ldots \text{ (*)}. \end{aligned} \right.$$

14. La relation (6), pour n et h constants et p variable, donne les différences successives de u_{n+h} formant avec ce nombre une même ligne oblique du tableau des différences. Nous pouvons aussi en tirer en fonc-

(*) La forme (l) suppose $p > 0$.

tion de $a_n^1, \ldots, a_n^k, \ldots$, les différences situées sur la même ligne horizontale que u_{n+h} et les moyennes arithmétiques de celles qui sont deux à deux situées immédiatement de part et d'autre de cette ligne, c'est-à-dire $\Delta^{2p} u_{n+h}$ et $\Delta^{\cdot 2p+1} u_{n+h}$.

Si nous faisons successivement dans l'équation (6)

$$h + \frac{p}{2} = h', \qquad p = 2p', \qquad \text{d'où} \qquad h + p = h' + p', \qquad h = h' - p';$$

$$h + \frac{p}{2} = h' - \frac{1}{2}, \qquad p = 2p' + 1, \qquad \text{»} \qquad h + p = h' + p', \qquad h = h' - p' - 1;$$

$$h + \frac{p}{2} = h' + \frac{1}{2}, \qquad p = 2p' + 1, \qquad \text{»} \qquad h + p = h' + p' + 1, \qquad h = h' - p',$$

nous aurons, en supprimant les accents après substitution,

$$(7)\left\{\begin{aligned} \Delta^{2p} u_{n+h} = a_n^{2p}\left[(h+p)^{2p} - \frac{2p}{1}(h+p-1)^{2p} + \ldots + (h-p)^{2p}\right] \\ + a_n^{2p+1}[(h+p)^{2p+1} - \ldots] + \ldots, \end{aligned}\right.$$

$$(8)\left\{\begin{aligned} &\Delta^{2p+1} u_{n+h-\frac{1}{2}} \\ &= a_n^{2p+1}\left[(h+p)^{2p+1} - \frac{2p+1}{1}(h+p-1)^{2p+1} + \ldots - (h-p-1)^{2p+1}\right] \\ &+ a_n^{2p+2}[(h+p)^{2p+2} - \ldots] + \ldots, \end{aligned}\right.$$

$$(9)\left\{\begin{aligned} &\Delta^{2p+1} u_{n+h+\frac{1}{2}} \\ &= a_n^{2p+1}\left[(h+p+1)^{2p+1} - \frac{2p+1}{1}(h+p)^{2p+1} + \ldots - (h-p)^{2p+1}\right] \\ &+ a_n^{2p+2}[(h+p+1)^{2p+2} - \ldots] + \ldots. \end{aligned}\right.$$

On tirera des deux dernières égalités $\Delta^{\cdot 2p+1} u_{n+h}$, qui est par définition :

$$\Delta^{\cdot 2p+1} u_{n+h} = \frac{1}{2}\left[\Delta^{2p+1} u_{n+h-\frac{1}{2}} + \Delta^{2p+1} u_{n+h+\frac{1}{2}}\right].$$

Si l'on fait $h = 0$ dans ces formules, on obtient $\Delta^{2p} u_n$, $\Delta^{2p+1} u_{n-\frac{1}{2}}$, $\Delta^{2p+1} u_{n+\frac{1}{2}}$. On voit alors que :

1° Dans $\Delta^{2p} u_n$, les coefficients de a_n^{2p}, $a_n^{2p+2}, \ldots$ ont leurs termes propres égaux deux à deux et de même signe, et les coefficients de a_n^{2p+1}, a_n^{2p+3},..., leurs termes égaux deux à deux et de signe contraire; ces derniers coefficients sont donc nuls.

2° Dans $\Delta^{2p+1} u_{n-\frac{1}{2}}$, les coefficients de a_n^{2p+1}, a_n^{2p+3},..., sont les mêmes que dans $\Delta^{2p+1} u_{n+\frac{1}{2}}$; ceux de a_n^{2p+2}, a_n^{2p+4},..., égaux et de signe contraire; ils disparaîtront donc dans la moyenne arithmétique $\Delta^{\cdot 2p+1} u_n$.

Il résulte de là que si nous réunissons dans $\Delta^{2p} u_n$, $\Delta^{\cdot 2p+1} u_n$ les termes contenant en facteur la puissance d'un même nombre, nous aurons des expressions de la forme

$$(m) \quad \left\{ \begin{aligned} \Delta^{2p} u_n = {} & a_n^{2p} \left[m_p^0 p^{2p} + m_p^1 (p-1)^{2p} + \ldots + m_p^{p-1} 1^{2p} \right] \\ & + a_n^{2p+2} \left[m_p^0 p^{2p+2} + \ldots \right] + \ldots \text{ (*)} \end{aligned} \right.$$

$$(\mu) \quad \left\{ \begin{aligned} \Delta^{\cdot 2p+1} u_n = {} & a_n^{2p+1} \left[\mu_p^0 (p+1)^{2p+1} + \mu_p^1 p^{2p+1} + \ldots + \mu_p^p 1^{2p+1} \right] \\ & + a_n^{2p+3} \left[\mu_p^0 (p+1)^{2p+3} + \ldots \right]. \end{aligned} \right.$$

Il résulte aussi du n° **13**, que le coefficient de $a_n^{2p} = 1, 2, 3, \ldots, 2p$, et que celui de $a_n^{2p+1} = 1, 2, 3, \ldots, (2p+1)$ dans (m) et (μ).

15. Si au lieu de poser $t = t_n + z\alpha$, nous posons $t = t_{n+\frac{1}{2}} + z\alpha$, où $t_{n+\frac{1}{2}} = t_n + \frac{1}{2}\alpha$, nous aurons pour le développement de u, suivant les puissances croissantes de z,

$$(1)' \qquad u_{n+\frac{1}{2}+z} = u_{n+\frac{1}{2}} + a^1_{n+\frac{1}{2}} z + \ldots + a^k_{n+\frac{1}{2}} z^k + \ldots,$$

où $u_{n+\frac{1}{2}}$ est la valeur de u pour $t = t_{n+\frac{1}{2}}$, et où

$$a^k_{n+\frac{1}{2}} = \left(\frac{d^k u}{dt^k}\right)_{n+\frac{1}{2}} \frac{\alpha^k}{1.2\ldots k},$$

conformément à la notation adoptée.

Cette série $(1)'$ donnant u_{n+h} pour $z = h - \frac{1}{2}$, on voit que les formules

(*) La forme (m) suppose $p > 0$.

établies aux nos 13 et 14 subsistent, si l'on y remplace dans les seconds membres h par $h-\frac{1}{2}$ et les coefficients a_n par les coefficients $a_{n+\frac{1}{2}}$.

Ainsi l'équation (7) nous donne, en faisant $h=0$, après cette substitution dans le second membre,

$$\begin{aligned}\Delta^{2p} u_n = a^{2p}_{n+\frac{1}{2}}&\left[\left(p-\frac{1}{2}\right)^{2p} - \frac{2p}{1}\left(p-\frac{3}{2}\right)^{2p} + \ldots + \left(-p-\frac{1}{2}\right)^{2p}\right]\\ &+ a^{2p+1}_{n+\frac{1}{2}}\left[\left(p-\frac{1}{2}\right)^{2p+1} - \ldots\right] + \ldots;\end{aligned}$$

la même équation appliquée à u_{n+h+1} donne de la même manière

$$\begin{aligned}\Delta^{2p} u_{n+1} = a^{2p}_{n+\frac{1}{2}}&\left[\left(p+\frac{1}{2}\right)^{2p} - \frac{2p}{1}\left(p-\frac{1}{2}\right)^{2p} + \ldots + \left(-p+\frac{1}{2}\right)^{2p}\right]\\ &+ a^{2p+1}_{n+\frac{1}{2}}\left[\left(p+\frac{1}{2}\right)^{2p+1} - \ldots\right] + \ldots,\end{aligned}$$

ce qui fournit, pour la moyenne arithmétique de ces deux différences, une expression de la forme

$$(\nu)\quad \left\{\begin{aligned}\Delta^{\cdot 2p} u_{n+\frac{1}{2}} = a^{2p}_{n+\frac{1}{2}}&\left[\nu^0_p\left(p+\frac{1}{2}\right)^{2p} + \nu^1_p\left(p-\frac{1}{2}\right)^{2p} + \ldots + \nu^p_p\left(\frac{1}{2}\right)^{2p}\right]\\ &+ a^{2p+2}_{n+\frac{1}{2}}\left[\nu^0_p\left(p+\frac{1}{2}\right)^{2p+2} + \ldots\right] + \ldots\ (*);\end{aligned}\right.$$

l'équation (9) donne de même pour $\Delta^{2p+1} u_{n+\frac{1}{2}}$ une expression de cette forme

$$(\varepsilon)\quad \left\{\begin{aligned}\Delta^{2p+1} u_{n+\frac{1}{2}} = a^{2p+1}_{n+\frac{1}{2}}&\left[\varepsilon^0_p\left(p+\frac{1}{2}\right)^{2p+1} + \varepsilon^1_p\left(p-\frac{1}{2}\right)^{2p+1} + \ldots + \varepsilon^p_p\left(\frac{1}{2}\right)^{2p+1}\right]\\ &+ a^{2p+3}_{n+\frac{1}{2}}\left[\varepsilon^0_p\left(p+\frac{1}{2}\right)^{2p+3} + \ldots\right] + \ldots.\end{aligned}\right.$$

Il résulte encore du no 13 que le coefficient de $a^{2p}_{n+\frac{1}{2}} = 1, 2, 3, \ldots, 2p$, et celui de $a^{2p+1}_{n+\frac{1}{2}} = 1, 2, 3, \ldots, (2p+1)$ dans (ν) et (ε).

(*) La forme (ν) est encore vraie pour $p=0$, si l'on remplace dans le premier membre $\Delta^{\cdot 2p} u_{n+\frac{1}{2}}$ par $u^{\cdot}_{n+\frac{1}{2}}$, et dans le second $a^{2p}_{n+\frac{1}{2}}$ par $u_{n+\frac{1}{2}}$.

16. Les formules des nos **13**, **14**, **15** conduisent aux valeurs des coefficients des équations (1) et (1)'. Pour déterminer a_n^1, a_n^2, ..., a_n^k, nous pouvons employer les relations que fournit, soit (l), soit le système (m), (μ). Pour déterminer $u_{n+\frac{1}{2}}$, $a^1_{n+\frac{1}{2}}$, $a^2_{n+\frac{1}{2}}$, ..., $a^k_{n+\frac{1}{2}}$, nous emploierons le système (ν), (ε). A chacun de ces trois systèmes de relations correspond pour u une forme particulière remarquable.

1° (l) donne, pour les valeurs 1, 2, 3, ..., p, attribuées à p,

$$\begin{aligned}
\Delta^1 u_{n+\frac{1}{2}} &= a_n^1 l_1^0 + a_n^2 l_1^0 + a_n^3 l_1^0 + \ldots + a_n^p l_1^0 + \ldots,\\
\Delta^2 u_{n+1} &= a_n^2[l_2^0 2^2 + l_2^1 1^2] + a_n^3[l_2^0 2^3 + l_2^1 1^3] + \ldots + a_n^p[l_2^0 2^p + l_2^1 1^p] + \ldots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\Delta^p u_{n+\frac{p}{2}} &= a_n^p[l_p^0 p^p + l_p^1 (p-1)^p + \ldots + l_p^{p-1} 1^p] + \ldots,
\end{aligned}$$

Les coefficients a_n^1, a_n^2, ... sont des fonctions linéaires des différences de u_n; on aura donc

$$u_{n+z} = u_n + \lambda_1 \Delta^1 u_{n+\frac{1}{2}} + \ldots + \lambda_p \Delta^p u_{n+\frac{p}{2}} + \ldots. \tag{10}$$

λ_1, λ_2, ... étant des fonctions entières de z, qu'on déterminera en identifiant les coefficients de a_n^1, a_n^2, ... dans les équations (1) et (10); on obtient ainsi immédiatement

$$(\lambda)\quad\left\{\begin{aligned}
z &= \lambda_1 l_1^0,\\
z^2 &= \lambda_1 l_1^0 + \lambda_2 (l_2^0 2^2 + l_2^1 1^2),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots,\\
z^k &= \lambda_1 l_1^0 + \lambda_2 (l_2^0 2^k + l_2^1 1^k) + \ldots + \lambda_k (l_k^0 k^k + \ldots + l_k^{k-1} 1^k),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\\
z^p &= \lambda_1 l_1^0 + \lambda_2 (l_2^0 2^p + l_2^1 1^p) + \ldots + \lambda_k (l_k^0 k^p + \ldots + l_k^{k-1} 1^p) + \ldots + \lambda_p (l_p^0 p^p + \ldots + l_p^{p-1} 1^p).
\end{aligned}\right.$$

2° Le système (m), (μ), donne, exactement de la même manière,

$$u_{n+z} = u_n + \lambda'_1 \Delta^{\cdot 1} u_n + \ldots + \lambda'_{2p-1} \Delta^{\cdot 2p-1} u_n + \lambda'_{2p} \Delta^{2p} u_n + \ldots, \tag{11}$$

avec

$$(\lambda')\quad\left\{\begin{aligned}
z^2 &= \lambda'_2 m_1^0, & z &= \lambda'_1 \mu_0^0,\\
z^4 &= \lambda'_2 m_1^0 + \lambda'_4 (m_2^0 2^4 + m_2^1 1^4), & z^3 &= \lambda'_1 \mu_0^0 + \lambda'_3 (\mu_1^0 2^3 + \mu_1^1 1^3),
\end{aligned}\right.$$

3° (ν), (ε) et l'équation (1)', donnent encore, exactement de la même manière,

$$(12)\quad u_{n+\frac{1}{2}+z} = \lambda''_0 u_{n+\frac{1}{2}} + \lambda''_1 \Delta^1 u_{n+\frac{1}{2}} + \ldots + \lambda''_{2p} \Delta^{2p} u_{n+\frac{1}{2}} + \lambda''_{2p+1} \Delta^{2p+1} u_{n+\frac{1}{2}} + \ldots\ (^*),$$

avec

$$(\lambda'')\left\{\begin{array}{ll} z^0 = \lambda''_0 \nu_0^0 \left(\frac{1}{2}\right)^0, & z = \lambda''_1 \varepsilon_0^0 \left(\frac{1}{2}\right)^1, \\ z^2 = \lambda''_0 \nu_0^0 \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \lambda''_2 \left[\nu_1^0 \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \nu_1^1 \left(\frac{1}{2}\right)^2\right], & z^3 = \lambda''_1 \varepsilon_0^0 \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \lambda''_3 \left[\varepsilon_1^0 \left(\frac{3}{2}\right)^3 + \varepsilon_1^1 \left(\frac{1}{2}\right)^3\right]. \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

17. La constitution des systèmes (λ), (λ'), (λ'') permet de les résoudre aussi facilement qu'on les a formés, c'est-à-dire sans calcul, et tous les trois de la même manière. Considérons le système (λ).

Les termes qui se correspondent verticalement dans les coefficients de λ_k sont de la forme

$$l_k^m (k-m)^k, \quad l_k^m (k-m)^{k+1}, \quad l_k^m (k-m)^{k+2}, \quad \ldots, \quad l_k^m (k-m)^{k+(p-k)}.$$

Si donc nous retranchons chaque équation λ, multipliée par 1, de la suivante, nous obtiendrons dans le système résultant $(\lambda)_1$

$$l_k^m (k-m)^k (k-m-1), \quad l_k^m (k-m)^{k+1} (k-m-1), \ldots, \quad l_k^m (k-m)^{p-1} (k-m-1).$$

Si nous retranchons chaque équation du système $(\lambda)_1$, multipliée par 2, de la suivante, nous aurons dans le système résultant $(\lambda)_2$

$$l_k^m (k-m)^k (k-m-1)(k-m-2), \ldots, \quad l_k^m (k-m)^{p-1} (k-m-1)(k-m-2).$$

Généralement, si ayant obtenu le système $(\lambda)_{p-2}$, on en multiplie chaque équation par $(p-1)$, pour la retrancher de la suivante, on obtiendra, dans le système $(\lambda)_{p-1}$,

$$l_k^m (k-m)^k (k-m-1)(k-m-2)\ldots(k-m-p+1), \ldots,$$

(*) *Voir* les notes, pages 184, 186, 187, dont il faut tenir compte pour former les équations (10), (11), (12) et les systèmes (λ), (λ'), (λ'').

de sorte que tous les termes des coefficients de λ, dans le système (λ), pour lesquels on a

$$k - m = 1, \quad 2, \ldots, \quad p - 1,$$

c'est-à-dire les $(p-1)$ derniers termes de ces coefficients, n'existent plus dans le système $(\lambda)_{p-1}$. La première et unique équation de ce système final sera donc

$$z(z-1)(z-2)\ldots(z-p+1) = \lambda_p . 1.2.3\ldots p,$$

d'où

$$\lambda_p = \frac{z(z-1)(z-2)\ldots(z-p+1)}{1.2.3\ldots p}.$$

Le même genre de raisonnement, appliqué aux systèmes (λ') et (λ''), montre que l'on a

$$\lambda'_{2p} = \frac{z^2(z^2-1^2)\ldots[z^2-(p-1)^2]}{1.2.3\ldots 2p},$$

$$\lambda'_{2p-1} = \frac{z(z^2-1^2)\ldots[z^2-(p-1)^2]}{1.2.3\ldots(2p-1)},$$

et

$$\lambda''_{2p} = \frac{\left[z^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]\cdots\left[z^2-\left(\frac{2p-1}{2}\right)^2\right]}{1.2.3\ldots 2p},$$

$$\lambda''_{2p+1} = \frac{z\left[z^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]\cdots\left[z^2-\left(\frac{2p-1}{2}\right)^2\right]}{1.2.3\ldots(2p+1)}.$$

18. Si nous substituons ces valeurs dans les égalités (10), (11), (12), nous obtenons pour u les trois formes suivantes :

$$\text{(I)} \quad u_{n+z} = u_n + \frac{z}{1}\Delta^1 u_{n+\frac{1}{2}} + \ldots + \frac{z(z-1)\ldots(z-p+1)}{1.2\ldots p}\Delta^p u_{n+\frac{p}{2}} + \ldots,$$

$$\text{(J)} \quad \left\{\begin{aligned} u_{n+z} &= u_n + \frac{z}{1}\Delta'^1 u_n + \frac{z^2}{1.2}\Delta^2 u_n + \ldots + \frac{z(z^2-1^2)\ldots[z^2-(p-1)^2]}{1.2\ldots(2p-1)}\Delta'^{2p-1} u_n \\ &\quad + \frac{z^2(z^2-1^2)\ldots[z^2-(p-1)^2]}{1.2\ldots 2p}\Delta^{2p} u_n + \ldots,\end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{K})\left\{\begin{aligned} u_{n+\frac{1}{2}+z} = {} & u^{\bullet}_{n+\frac{1}{2}} + \frac{z}{1}\Delta^{1} u_{n+\frac{1}{2}} + \frac{\left[z^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]}{1.2}\Delta^{\cdot 2} u_{n+\frac{1}{2}} + \ldots \\ & + \frac{\left[z^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]\left[z^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2\right]\cdots\left[z^2-\left(\frac{2p-1}{2}\right)^2\right]}{1.2.3\ldots 2p}\Delta^{\cdot 2p} u_{n+\frac{1}{2}} \\ & + \frac{z\left[z^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]\cdots\left[z^2-\left(\frac{2p-1}{2}\right)^2\right]}{1.2\ldots(2p+1)}\Delta^{2p+1} u_{n+\frac{1}{2}} + \ldots \end{aligned}\right.$$

La première est la série si connue sous le nom de formule aux différences de Newton; les deux autres, quoique beaucoup moins répandues, ne sont pas moins remarquables; nous les emploierons même à l'exclusion de la première, et nous verrons bientôt pourquoi.

Soient s^p_k, S^p_k, $'S^p_k$ la somme des produits différents K à K, des p nombres des suites respectives : $-1, -2, -3, \ldots, -p$; $-1^2, -2^2, -3^2, \ldots, -p^2$; $-\left(\frac{1}{2}\right)^2, -\left(\frac{3}{2}\right)^2, -\left(\frac{5}{2}\right)^2, \ldots, -\left(\frac{2p-1}{2}\right)^2$.

Supposons, en outre, les formules (I), (J), (K), ordonnées par rapport à z. On voit de suite, en identifiant les coefficients des mêmes puissances de z dans (I) ou (J) d'une part, et (1) d'autre part, que

$$a^k_n = \sum \frac{S^{p-1}_{p-k}}{1.2.3\ldots p}\Delta^p u_{n+\frac{p}{2}}, \tag{13}$$

et

$$a^{2k}_n = \sum \frac{S^{p-1}_{p-k}}{1.2.3\ldots 2p}\Delta^{2p} u_n\,(^*), \tag{14}$$

$$a^{2k+1}_n = \sum \frac{S^{p}_{p-k}}{1.2.3\ldots(2p+1)}\Delta^{\cdot 2p+1} u_n. \tag{15}$$

On voit de même, par la comparaison des équations (K) et (1)′, que

$$a^{2k}_{n+\frac{1}{2}} = \sum \frac{'S^{p}_{p-k}}{1.2.3\ldots 2p}\Delta^{\cdot 2p} u_{n+\frac{1}{2}}\,(^{**}), \tag{16}$$

$$a^{2k+1}_{n+\frac{1}{2}} = \sum \frac{'S^{p}_{p-k}}{1.2\ldots(2p+1)}\Delta^{2p+1} u_{n+\frac{1}{2}}, \tag{17}$$

(*) Les formules (13) et (14) supposent $k > 0$.

(**) La formule (16) est vraie pour $k = 0$ si l'on remplace $a^{2k}_{n+\frac{1}{2}}$ par $u_{n+\frac{1}{2}}$ dans le premier membre, et, dans le développement du second, $1.2.3\ldots 2p$ par 1; $\Delta^{\cdot 2p} u_{n+\frac{1}{2}}$ par $u^{\bullet}_{n+\frac{1}{2}}$ pour $p = 0$.

les signes $\sum$ se rapportent dans ces formules aux valeurs entières de $p \geqq k$ et pour $p = k$, on fait s, S, 'S égales à 1.

19. Les coefficients a_n^k, $a_{n+\frac{1}{2}}^k$ étant ainsi déterminés, nous pouvons chercher les intégrales première et seconde de la fonction u; la méthode que nous donnons s'applique d'ailleurs, avec une égale facilité, à une intégrale d'ordre quelconque. Soit x une intégrale de u.

On a, en attribuant aux indices le même sens que précédemment,

$$x_{n+z} = x_n + \left(\frac{dx}{dt}\right)_n \frac{\alpha}{1} z + \ldots + \left(\frac{d^k x}{dt^k}\right)_n \frac{\alpha^k}{1.2\ldots k} z^k + \ldots, \tag{18}$$

et

$$x_{n+\frac{1}{2}+z} = x_{n+\frac{1}{2}} + \left(\frac{dx}{dt}\right)_{n+\frac{1}{2}} \frac{\alpha}{1} z + \cdots + \left(\frac{d^k x}{dt^k}\right)_{n+\frac{1}{2}} \frac{\alpha^k}{1.2\ldots k} z^k + \ldots, \tag{19}$$

quel que soit l'ordre de l'intégrale x. Développons les deux cas dont nous aurons besoin :

1° $\dfrac{dx}{dt} = u$. On a alors

$$\left(\frac{d^{k+1} x}{dt^{k+1}}\right) \frac{\alpha^{k+1}}{1.2\ldots k(k+1)} = \left(\frac{d^k u}{dt^k}\right) \frac{\alpha^k}{1.2\ldots k} \frac{\alpha}{k+1} = \frac{\alpha}{k+1} a^k,$$

d'où

$$x_{n+z} = x_n + \alpha\left(u_n \frac{z}{1} + a_n^1 \frac{z^2}{2} + \ldots + a_n^k \frac{z^{k+1}}{k+1} + \ldots\right), \tag{20}$$

$$x_{n+\frac{1}{2}+z} = x_{n+\frac{1}{2}} + \alpha\left(u_{n+\frac{1}{2}} \frac{z}{1} + a_{n+\frac{1}{2}}^1 \frac{z^2}{2} + \ldots + a_{n+\frac{1}{2}}^k \frac{z^{k+1}}{k+1} + \ldots\right). \tag{21}$$

2° $\dfrac{d^2 x}{dt^2} = u$. Posons

$$y = \frac{dx}{dt} \quad \text{ou} \quad \frac{dy}{dt} = u;$$

on a alors

$$\frac{d^{k+2} x}{dt^{k+2}} \frac{\alpha^{k+2}}{1.2\ldots(k+1)(k+2)} = \frac{d^k u}{dt^k} \frac{\alpha^k}{1.2\ldots k} \frac{\alpha^2}{(k+1)(k+2)} = \frac{\alpha^2}{(k+1)(k+2)} a^k,$$

d'où

$$(22)\quad x_{n+z} = x_n + \alpha y_n z + \alpha^2\left[u_n \frac{z^2}{1.2} + a_n^1 \frac{z^3}{2.3} + \ldots + a_n^k \frac{z^{k+2}}{(k+1)(k+2)} + \ldots\right],$$

$$(23)\quad \left\{\begin{aligned} x_{n+\frac{1}{2}+z} &= x_{n+\frac{1}{2}} + \alpha y_{n+\frac{1}{2}} z \\ &+ \alpha^2\left[u_{n+\frac{1}{2}} \frac{z^2}{1.2} + a_{n+\frac{1}{2}}^1 \frac{z^3}{2.3} + \ldots + a_{n+\frac{1}{2}}^k \frac{z^{k+2}}{(k+1)(k+2)} + \ldots\right]. \end{aligned}\right.$$

Puisque a_n^k, $a_{n+\frac{1}{2}}^k$ sont actuellement connus, l'une et l'autre des deux formules (20), (21) dans le premier cas; (22), (23) dans le second, donnent la valeur de x pour toutes les valeurs de t correspondantes aux valeurs attribuées à z; mais leur emploi n'est pas avantageux dans la pratique, car, si l'on y prend un nombre fixe de termes, l'erreur commise croît très-rapidement avec z; de sorte que, pour obtenir x avec la même exactitude dans tout le cours du calcul, il faudrait prendre un nombre de termes croissant avec cette variable z. On évite cet inconvénient en ne faisant varier z qu'entre $-\frac{1}{2}$ et $+\frac{1}{2}$, et donnant à n toutes les valeurs entières, positives ou négatives; de sorte que $t = t_n + z\alpha$ prend toutes les valeurs possibles. Il suffit de connaître x_i ou $x_{i+\frac{1}{2}}$, i étant entier; nous allons déterminer ces quantités de proche en proche en donnant à z les seules valeurs $-\frac{1}{2}$, $+\frac{1}{2}$ et en supposant que la valeur initiale est $x_{-\frac{1}{2}}$ ou x_0. Nous examinerons les quatre combinaisons possibles entre ces valeurs extrêmes de x et, par un choix convenable des formules précédentes, nous ferons disparaître du résultat les valeurs des coefficients a_n^k de même parité relativement à k.

Quadrature de $\frac{dx}{dt} = u$.

20. La formule (20) donne, pour $z = -\frac{1}{2}$, $z = +\frac{1}{2}$,

$$x_{n-\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad x_{n+\frac{1}{2}},$$

dont la différence est

$$x_{n+\frac{1}{2}} - x_{n-\frac{1}{2}} = \alpha\left[u_n + a_n^2 \frac{1}{3.2^2} + \ldots + a_n^{2k} \frac{1}{(2k+1)2^{2k}} + \ldots\right].$$

La formule (21) donne de même, pour $z=-\frac{1}{2}$, $z=+\frac{1}{2}$,

$$x_n \quad \text{et} \quad x_{n+1},$$

dont la différence est

$$x_{n+1}-x_n=\alpha\left[u_{n+\frac{1}{2}}+a^2_{n+\frac{1}{2}}\frac{1}{3.2^2}+\ldots+a^{2k}_{n+\frac{1}{2}}\frac{1}{(2k+1)2^{2k}}+\ldots\right];$$

d'où

$$x_{i+\frac{1}{2}}-x_{-\frac{1}{2}}=\sum_{n=0}^{n=i}(x_{n+\frac{1}{2}}-x_{n-\frac{1}{2}})$$

$$=\alpha\sum_{n=0}^{n=i}\left[u_n+\frac{1}{3.2^2}a^2_n+\ldots+\frac{1}{(2k+1)2^{2k}}a^{2k}_n+\ldots\right],$$

$$x_i-x_0=\sum_{n=0}^{n=i-1}(x_{n+1}-x_n)$$

$$=\alpha\sum_{n=0}^{n=i-1}\left[u_{n+\frac{1}{2}}+\frac{1}{3.2^2}a^2_{n+\frac{1}{2}}+\ldots+\frac{1}{(2k+1)2^{2k}}a^{2k}_{n+\frac{1}{2}}+\ldots\right].$$

Calcul de $x_{i+\frac{1}{2}}-x_{-\frac{1}{2}}$.

u_n est une quantité calculée et connue; a^{2k}_n peut être fourni soit par la formule (13), soit par la formule (14) du n° **18**. La formule (13) introduirait tous les ordres de différences; la formule (14), n'introduisant que les différences de même parité, doit être préférée, dans l'application; elle donne

$$\frac{1}{(2k+1)2^{2k}}a^{2k}_n=\sum\frac{S^{p-1}_{p-k}}{1.2\ldots 2p}\,\frac{1}{(2k+1)2^{2k}}\Delta^{2p}u_n,$$

où p doit prendre toutes les valeurs entières k, $k+1$,... et où $k>0$....

Le coefficient, dans $x_{i+\frac{1}{2}}-x_{-\frac{1}{2}}$, d'une différence déterminée $\Delta^{2p}u_n$ s'obtiendra donc en laissant p fixe sous le signe $\sum$ et faisant varier k de 1 à p dans l'expression

$$\sum\frac{S^{p-1}_{p-k}}{1.2\ldots 2p}\,\frac{1}{(2k+1)2^{2k}}.$$

Soit A_{2p} ce coefficient, on aura

$$(24)\qquad A_{2p} = \frac{1}{1.2.3\ldots 2p}\left[\frac{S_{p-1}^{p-1}}{3.2^2} + \frac{S_{p-2}^{p-1}}{5.2^4} + \ldots + \frac{S_0^{p-1}}{(2p+1)2^{2p}}\right] (*),$$

et, par suite,

$$x_{i+\frac{1}{2}} - x_{-\frac{1}{2}} = \alpha \sum_{n=0}^{n=i} (A_0 u_n + A_2 \Delta^2 u_n + \ldots + A_{2p} \Delta^{2p} u_n + \ldots);$$

mais, en se reportant à la formation du tableau des différences, on voit que

$$\sum_{n=0}^{n=i} \Delta^{2p} u_n = \Delta^{2p-1} u_{i+\frac{1}{2}} - \Delta^{2p-1} u_{-\frac{1}{2}}.$$

Si nous désignons par $'u_{-\frac{1}{2}}, 'u_{\frac{1}{2}}, 'u_{\frac{3}{2}}, \ldots, 'u_{i+\frac{1}{2}}$ une suite de nombres dont le premier est arbitraire, admettant $u_0, u_1, \ldots, u_i$ pour différences premières, nous aurons

$$\sum_0^i u_n = 'u_{i+\frac{1}{2}} - 'u_{-\frac{1}{2}}.$$

Donc

$$(L)\quad x_{i+\frac{1}{2}} - x_{-\frac{1}{2}} = \alpha\left(A_0 'u_{i+\frac{1}{2}} + A_2 \Delta^1 u_{i+\frac{1}{2}} + \ldots + A_{2p} \Delta^{2p-1} u_{i+\frac{1}{2}} + \ldots\right) + C_{-\frac{1}{2}}$$

avec

$$C_{-\frac{1}{2}} = -\alpha\left(A_0 'u_{-\frac{1}{2}} + A_2 \Delta^1 u_{-\frac{1}{2}} + \ldots + A_{2p} \Delta^{2p-1} u_{-\frac{1}{2}} + \ldots\right).$$

On pourra faire disparaître la constante $C_{-\frac{1}{2}}$, en déterminant l'arbitraire $'u_{-\frac{1}{2}}$ par la condition

$$C_{-\frac{1}{2}} = 0.$$

Calcul de $x_i - x_0$.

La formule (16), n° 18, donne $u_{n+\frac{1}{2}}$, $a^2_{n+\frac{1}{2}}, \ldots$, pour $k = 0, 1, 2, \ldots$. On a généralement

$$\frac{1}{(2k+1)2^{2k}} a^{2k}_{n+\frac{1}{2}} = \sum \frac{'S_{p-k}^p}{1.2.3\ldots 2p} \frac{1}{(2k+1)2^{2k}} \Delta^{2p} u_{n+\frac{1}{2}}.$$

(*) La formule (24) ne s'applique plus pour $p = 0$. On voit directement que, dans ce cas, $\Delta^{2p} u_n = u_n$, $A_{2p} = 1$.

On voit par là que le coefficient de $\Delta^{\cdot 2p} u_{n+\frac{1}{2}}$, dans $x_i - x_0$, étant désigné par A'_{2p}, on a

$$(25) \qquad A'_{2p} = \frac{1}{1.2.3\ldots 2p}\left[\frac{'S_p^p}{1.2^0} + \frac{'S_{p-1}^p}{3.2^2} + \ldots + \frac{'S_0^p}{(2p+1)2^{2p}}\right] (*).$$

et, par suite,

$$x_i - x_0 = \alpha \sum_{n=0}^{n=i-1} \left(A'_0\, u^{\cdot}_{n+\frac{1}{2}} + A'_2\, \Delta^{\cdot 2} u_{n+\frac{1}{2}} + \ldots + A'_{2p}\, \Delta^{\cdot 2p} u_{n+\frac{1}{2}} + \ldots\right).$$

Mais, par définition,

$$\Delta^{\cdot 2p} u_{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\Delta^{2p} u_n + \frac{1}{2}\Delta^{2p} u_{n+1},$$

donc

$$\sum_{n=0}^{n=i-1} \Delta^{\cdot 2p} u_{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{n=i-1} \Delta^{2p} u_n + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{n=i-1} \Delta^{2p} u_{n+1};$$

or,

$$\sum_{n=0}^{n=i-1} \Delta^{2p} u_n = \Delta^{2p-1} u_{i-\frac{1}{2}} - \Delta^{2p-1} u_{-\frac{1}{2}},$$

$$\sum_{n=0}^{n=i-1} \Delta^{2p} u_{n+1} = \Delta^{2p-1} u_{i+\frac{1}{2}} - \Delta^{2p-1} u_{+\frac{1}{2}},$$

donc

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{n=i-1} \Delta^{\cdot 2p} u_{n+\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2}\left(\Delta^{2p-1} u_{i-\frac{1}{2}} + \Delta^{2p-1} u_{i+\frac{1}{2}}\right) - \frac{1}{2}\left(\Delta^{2p-1} u_{-\frac{1}{2}} + \Delta^{2p-1} u_{\frac{1}{2}}\right)\\ &= \Delta^{\cdot 2p-1} u_i - \Delta^{\cdot 2p-1} u_0,\end{aligned}$$

ce qui nous conduit à la formule

$$(\mathrm{M}) \qquad x_i - x_0 = \alpha\left(A'_0\, 'u^{\cdot}_i + A'_2\, \Delta^{\cdot 1} u_i + \ldots + A'_{2p}\, \Delta^{\cdot 2p-1} u_i + \ldots\right) + C_0,$$

avec

$$C_0 = -\alpha\left(A'_0\, 'u^{\cdot}_0 + A'_2\, \Delta^{\cdot 1} u_0 + \ldots + A'_{2p}\, \Delta^{\cdot 2p-1} u_0 + \ldots\right):$$

on pourra déterminer la quantité arbitraire $'u_{-\frac{1}{2}}$ par la condition $C_0 = 0$.

(*) La formule (25) s'applique pour $p = 0$, conformément aux conventions de la note (**), page 191. $A'_0 = 1$.

La formule (L) permettra de calculer $x_{i+\frac{1}{2}}$, si l'on se donne $x_{-\frac{1}{2}}$; et la formule (M), de calculer x_i, si l'on se donne x_0.

21. Il est quelquefois utile de pouvoir calculer $x_{i+\frac{1}{2}}$, connaissant x_0; et x_i, connaissant $x_{-\frac{1}{2}}$. Formons donc $x_{i+\frac{1}{2}} - x_0$ et $x_i - x_{-\frac{1}{2}}$, dont nons aurons d'ailleurs besoin pour la deuxième intégration. Nous les déduirons de $x_{i+\frac{1}{2}} - x_{-\frac{1}{2}}$ et $x_i - x_0$ en retranchant de la première quantité et en ajoutant à la seconde $x_0 - x_{-\frac{1}{2}}$, que nous allons calculer d'abord.

La formule (20) donne pour $n = 0$ et pour $z = -\frac{1}{2}$

$$x_0 - x_{-\frac{1}{2}} = \alpha\left[u_0 \frac{1}{1.2^3} + a_0^2 \frac{1}{3.2^3} + \ldots + a_0^{2k} \frac{1}{(2k+1)2^{2k+1}} + \ldots\right]$$
$$- \alpha\left[a_0^1 \frac{1}{2.2^2} + a_0^3 \frac{1}{4.2^4} + \ldots + a_0^{2k+1} \frac{1}{(2k+2)2^{2k+2}} + \ldots\right].$$

Or les relations (14) et (15), pour $n = 0$, sont

$$a_0^{2k} = \sum \frac{S_{p-k}^{p-1}}{1.2.3\ldots 2p} \Delta^{2p} u_0,$$
$$a_0^{2k+1} = \sum \frac{S_{p-k}^{p}}{1.2.3\ldots(2p+1)} \Delta^{\cdot 2p+1} u_0.$$

Les coefficients de $\Delta^{2p} u_0$, $\Delta^{\cdot 2p+1} u_0$ dans $x_0 - x_{-\frac{1}{2}}$ seront donc respectivement

$$\frac{1}{1.2\ldots 2p} \sum \frac{S_{p-k}^{p-1}}{(2k+1)2^{2k+1}} = \frac{1}{2} A_{2p},$$

et

$$\frac{1}{1.2\ldots(2p+1)} \sum \frac{S_{p-k}^{p}}{(2k+2)2^{2k+2}}.$$

Appelons ce dernier A_{2p+1},

$$(26) \qquad A_{2p+1} = \frac{1}{1.2\ldots(2p+1)}\left[\frac{S_p^p}{2.2^2} + \frac{S_{p-1}^p}{4.2^4} + \ldots + \frac{S_0^p}{(2p+2)2^{2p+2}}\right],$$

donc

$$[0]\quad \begin{cases} x_0 - x_{-\frac{1}{2}} = \dfrac{\alpha}{2}(A_0 u_0 + A_2 \Delta^{\cdot 2} u_0 + \ldots + A_{2p}\Delta^{\cdot 2p} u_0 + \ldots) \\ \qquad - \alpha(A_1 \Delta^{\cdot 1} u_0 + A_3 \Delta^{\cdot 3} u_0 + \ldots + A_{2p+1}\Delta^{\cdot 2p+1} u_0 + \ldots). \end{cases}$$

On peut trouver une forme différente pour $x_0 - x_{-\frac{1}{2}}$, en partant de l'équation (21), qui, pour $n = -1$ et $z = +\frac{1}{2}$, donne

$$x_0 - x_{-\frac{1}{2}} = \alpha\left[u_{-\frac{1}{2}}\frac{1}{1.2^1} + a^2_{-\frac{1}{2}}\frac{1}{3.2^3} + \ldots + a^{2k}_{-\frac{1}{2}}\frac{1}{(2k+1)2^{2k+1}} + \ldots\right]$$
$$+ \alpha\left[a^1_{-\frac{1}{2}}\frac{1}{2.2^2} + a^3_{-\frac{1}{2}}\frac{1}{4.2^4} + \ldots + a^{2k+1}_{-\frac{1}{2}}\frac{1}{(2k+2)2^{2k+2}} + \ldots\right].$$

Or les relations (16) et (17), pour $n = -1$, sont

$$a^{2k}_{-\frac{1}{2}} = \sum \frac{'S^p_{p-k}}{1.2.3\ldots 2p}\Delta^{\cdot 2p} u_{-\frac{1}{2}},$$
$$a^{2k+1}_{-\frac{1}{2}} = \sum \frac{'S^p_{p-k}}{1.2.3\ldots(2p+1)}\Delta^{2p+1} u_{-\frac{1}{2}}.$$

Les coefficients de $\Delta^{\cdot 2p} u_{-\frac{1}{2}}$, $\Delta^{2p+1} u_{-\frac{1}{2}}$ dans $x_0 - x_{-\frac{1}{2}}$ seront donc respectivement

$$\frac{1}{1.2.3\ldots 2p}\sum\frac{'S^p_{p-k}}{(2k+1)2^{2k+1}} = \frac{1}{2}A'_{2p},$$

et

$$\frac{1}{1.2.3\ldots(2p+1)}\sum\frac{'S^p_{p-k}}{(2k+2)\,2^{2k+2}}.$$

Appelons ce dernier A'_{2p+1},

$$(27)\qquad A'_{2p+1} = \frac{1}{1.2.3\ldots(2p+1)}\left[\frac{'S^p_p}{2.2^2} + \frac{'S^p_{p-1}}{4.2^4} + \ldots + \frac{'S^p_0}{(2p+2)2^{2p+2}}\right],$$

d'où

$$\left[-\frac{1}{2}\right]\quad \begin{cases} x_0 - x_{-\frac{1}{2}} = \dfrac{\alpha}{2}\left(A'_0 u_{-\frac{1}{2}} + A'_2\Delta^{\cdot 2} u_{-\frac{1}{2}} + \ldots + A'_{2p}\Delta^{\cdot 2p} u_{-\frac{1}{2}} + \ldots\right) \\ \qquad + \alpha\left(A'_1\Delta^1 u_{-\frac{1}{2}} + A'_3\Delta^3 u_{-\frac{1}{2}} + \ldots + A'_{2p+1}\Delta^{2p+1} u_{-\frac{1}{2}} + \ldots\right). \end{cases}$$

22. Les deux expressions $\left[-\frac{1}{2}\right]$ et $[0]$, de $x_0 - x_{-\frac{1}{2}}$, nous ont conduit à des relations importantes entre les coefficients A_{2p}, A_{2p+1},

A'_{2p}, A'_{2p+1}. Ces expressions contiennent en effet, respectivement, les divers termes des deux lignes horizontales complètes $\left(-\frac{1}{2}\right)$ et (0), savoir :

$$\begin{array}{llll} u_{-\frac{1}{2}}, & \Delta^{1} u_{-\frac{1}{2}}, \ldots, & \Delta^{2p} u_{-\frac{1}{2}}, & \Delta^{2p+1} u_{-\frac{1}{2}}, \\ u_0, & \Delta^{1} u_0, \ldots, & \Delta^{2p} u_0, & \Delta^{2p+1} u_0. \end{array}$$

Or, si l'on fait $n = 0$ dans les formules (2) et (3) du n° **12**, on voit que si l'on exprime les termes de la seconde ligne en fonction de ceux de la première pour les substituer dans $[0]$, $\Delta^{2p} u_{-\frac{1}{2}}$ ne sera introduit dans le résultat que par

$$\Delta^{2p} u_0 = \Delta^{2p} u_{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \Delta^{2p+1} u_{-\frac{1}{2}},$$

et

$$\Delta^{2p-1} u_0 = \Delta^{2p-1} u_{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \Delta^{2p} u_{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{4} \Delta^{2p+1} u_{-\frac{1}{2}},$$

de sorte qu'en identifiant, après substitution, les coefficients de $\Delta^{2p} u_{-\frac{1}{2}}$ dans $[0]$ et $\left[-\frac{1}{2}\right]$, on aura

$$A_{2p} - A_{2p-1} = A'_{2p}.$$

On verra de même, en identifiant les coefficients de $\Delta^{2p+1} u_{-\frac{1}{2}}$, qui sera introduit par $\Delta^{2p+1} u_0$, $\Delta^{2p} u_0$, $\Delta^{2p-1} u_0$ dans $[0]$, que

$$\frac{1}{4}(A_{2p} - A_{2p-1}) = A_{2p+1} + A'_{2p+1}.$$

Si, inversement, au moyen des relations (4), (5), n° **12**, on exprime les termes de la première ligne en fonction de ceux de la seconde pour les substituer dans $\left[-\frac{1}{2}\right]$, afin de comparer ce résultat à $[0]$, on retrouve les mêmes relations

$$(\rho) \qquad \left\{ \begin{aligned} & A_{2p} - A_{2p-1} = A'_{2p}, \\ & A_{2p+1} + A'_{2p+1} = \frac{1}{4} A'_{2p}. \end{aligned} \right.$$

23. Ces relations nous seront très-utiles pour obtenir commodément $x_i - x_{-\frac{1}{2}}$, et $x_{i+\frac{1}{2}} - x_0$.

Calcul de $x_i - x_{-\frac{1}{2}}$.

Si à la relation

$$x_i - x_0 = \alpha\left(A'_0\,{}'u^{\cdot}_i + A'_2\,\Delta^{\cdot 1} u_i + \ldots + A'_{2p}\,\Delta^{\cdot 2p-1} u_i + \ldots\right) + C_0,$$

où

$$C_0 = -\alpha\left(A'_0\,{}'u^{\cdot}_0 + A'_2\,\Delta^{\cdot 1} u_0 + \ldots + A'_{2p}\,\Delta^{\cdot 2p-1} u_0 + \ldots\right),$$

nous ajoutons membre à membre la relation [O], n° **21**, nous aurons

$$x_i - x_{-\frac{1}{2}} = \alpha\left(A'_0\,{}'u^{\cdot}_i + A'_2\,\Delta^{\cdot 1} u_i + \ldots + A'_{2p}\,\Delta^{\cdot 2p-1} u_i + \ldots\right) + \text{const.},$$

avec

$$\begin{array}{l} \text{const.} = -\alpha\left(\begin{array}{r|r|r|l} A'_0\,{}'u^{\cdot}_0 + A'_2 & \Delta^{\cdot 1} u_0 + A'_4 & \Delta^{\cdot 3} u_0 + \ldots + A'_{2p} & \Delta^{\cdot 2p-1} u_0 + \ldots \\ + A_1 & + A_3 & + A_{2p-1} & \end{array}\right) \\ \qquad + \dfrac{\alpha}{2}\left(A_0 u_0 + A_2\quad \Delta^2 u_0 + A_4\quad \Delta^4 u_0 + \ldots + A_{2p}\quad \Delta^{2p} u_0 \quad + \ldots\right), \end{array}$$

ou, en vertu de l'identité précédemment démontrée,

$$A'_{2p} + A_{2p-1} = A_{2p},$$

et de ce que $A_0 = A'_0 = 1$,

$$\begin{aligned} \text{const.} = -\alpha\Big[A_0\left({}'u^{\cdot}_0 - \frac{1}{2}u_0\right) + A_2\left(\Delta^{\cdot 1} u_0 - \frac{1}{2}\Delta^2 u_0\right) + \ldots \\ + A_{2p}\left(\Delta^{\cdot 2p-1} u_0 - \frac{1}{2}\Delta^{2p} u_0\right)\ldots\Big]; \end{aligned}$$

mais comme

$$\Delta^{\cdot 2p-1} u_0 = \frac{1}{2}\left(\Delta^{2p-1} u_{\frac{1}{2}} + \Delta^{2p-1} u_{-\frac{1}{2}}\right),$$

$$\frac{1}{2}\Delta^{2p} u_0 = \frac{1}{2}\left(\Delta^{2p-1} u_{\frac{1}{2}} - \Delta^{2p-1} u_{-\frac{1}{2}}\right),$$

on a

$$\Delta^{\cdot 2p-1} u_0 - \frac{1}{2}\Delta^{2p} u_0 = \Delta^{2p-1} u_{-\frac{1}{2}};$$

par suite

$$\text{const.} = -\alpha\left(A_0\,{}'u_{-\frac{1}{2}} + A_2\,\Delta^1 u_{-\frac{1}{2}} + \ldots + A_{2p}\,\Delta^{2p-1} u_{-\frac{1}{2}} + \ldots\right) = C_{-\frac{1}{2}}.$$

Calcul de $x_{i+\frac{1}{2}} - x_0$.

Si de

$$x_{i+\frac{1}{2}} - x_{-\frac{1}{2}} = \alpha\left(A_0\,{}'u_{i+\frac{1}{2}} + A_2\,\Delta^1 u_{i+\frac{1}{2}} + \ldots + A_{2p}\,\Delta^{2p-1} u_{i+\frac{1}{2}} + \ldots\right) + C_{-\frac{1}{2}},$$

nous retranchons [O] membre à membre, nous aurons

$$x_{i+\frac{1}{2}} - x_0 = \alpha\left(A_0\,{}'u_{i+\frac{1}{2}} + A_2\,\Delta^1 u_{i+\frac{1}{2}} + \ldots + A_{2p}\,\Delta^{2p-1} u_{i+\frac{1}{2}} + \ldots\right) + \text{const.},$$

avec

$$\begin{array}{rl} \text{const.} = -\alpha & \left(\begin{array}{c|c|c|c} {}'u_{-\frac{1}{2}} & A_0 + \Delta^1 u_{-\frac{1}{2}} & A_2 + \ldots + \Delta^{2p-1} u_{-\frac{1}{2}} & A_{2p} \quad + \ldots \\ + \frac{1}{2} u_0 & + \frac{1}{2}\Delta^2 u_0 & + \frac{1}{2}\Delta^{2p} u_0 & \end{array}\right) \\ + \alpha & \left(\begin{array}{cccc} \phantom{{}'u_{-\frac{1}{2}}} & + \Delta^{\cdot 1} u_0 & A_1 + \ldots + \Delta^{\cdot 2p-1} u_0 & A_{2p-1} + \ldots \end{array}\right); \end{array}$$

mais comme

$$\Delta^{2p-1} u_{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\Delta^{2p} u_0 = \frac{1}{2}\left(\Delta^{2p-1} u_{\frac{1}{2}} + \Delta^{2p-1} u_{-\frac{1}{2}}\right) = \Delta^{\cdot 2p-1} u_0,$$

on a, en vertu de l'identité ci-dessus rappelée,

$$\text{const.} = -\alpha\left(A_0'\,{}'u_0^{\cdot} + A_2'\,\Delta^{\cdot 1} u_0 + \ldots + A_{2p}'\,\Delta^{\cdot 2p-1} u_0 + \ldots\right) = C_0.$$

On a ainsi les formules suivantes :

$$(L_1) \quad x_{i+\frac{1}{2}} - x_0 = \alpha\left(A_0\,{}'u_{i+\frac{1}{2}} + A_2\,\Delta^1 u_{i+\frac{1}{2}} + \ldots + A_{2p}\,\Delta^{2p-1} u_{i+\frac{1}{2}} + \ldots\right) + C_0,$$

$$(M_1) \quad x_i - x_{-\frac{1}{2}} = \alpha\left(A_0'\,{}'u_i^{\cdot} + A_2'\,\Delta^{\cdot 1} u_i + \ldots + A_{2p}'\,\Delta^{\cdot 2p-1} u_i + \ldots\right) + C_{-\frac{1}{2}}.$$

Remarque. — Avant de passer à la quadrature seconde, nous démontrerons l'identité

$$x_0 + C_0 = x_{-\frac{1}{2}} + C_{-\frac{1}{2}},$$

qui nous servira pour cette quadrature.

On a vu, n^{os} **20** et **21**, que

$$C_0 = \qquad -\alpha\left(A_0'\,{}'u_0^{\cdot} + A_2'\,\Delta^{\cdot 1} u_0 + \ldots + A_{2p}'\,\Delta^{\cdot 2p-1} u_0 + \ldots\right),$$

$$x_0 = x_{-\frac{1}{2}} + \frac{\alpha}{2}\left(A_0 u_0 + \ldots + A_{2p}\Delta^{2p} u_0 + \ldots\right) - \alpha\left(A_1\Delta^{\cdot 1} u_0 + \ldots + A_{2p-1}\Delta^{\cdot 2p-1} u_0 + \ldots\right).$$

En vertu de la première relation (ρ),

$$A_{2p-1} + A_{2p}' = A_{2p};$$

donc

$$x_0 + C_0 = x_{-\frac{1}{2}} - \alpha\left[A_0\left('u_0 - \frac{1}{2}u_0\right) + A_2\left(\Delta^{\cdot 1} u_0 - \frac{1}{2}\Delta^2 u_0\right) + \ldots \right.$$
$$\left. + A_{2p}\left(\Delta^{\cdot 2p-1} u_0 - \frac{1}{2}\Delta^{2p} u_0\right) + \ldots\right].$$

Mais on a

$$\Delta^{\cdot 2p-1} u_0 - \frac{1}{2}\Delta^{2p} u_0 = \Delta^{2p-1} u_{-\frac{1}{2}};$$

on trouve ainsi

$$x_0 + C_0 = x_{-\frac{1}{2}} - \alpha\left(A_0 'u_{-\frac{1}{2}} + \ldots + A_{2p}\Delta^{2p-1} u_{-\frac{1}{2}} + \ldots\right) = x_{-\frac{1}{2}} + C_{-\frac{1}{2}}.$$

Quadrature $\frac{d^2x}{dt^2} = u.$

24. Nous suivrons de point en point la méthode employée pour intégrer $\frac{dx}{dt} = u$.

Si dans les formules (22) et (23) on fait successivement $z = +\frac{1}{2}$, $z = -\frac{1}{2}$, et qu'on retranche le deuxième résultat du premier, on a

$$x_{n+\frac{1}{2}} - x_{n-\frac{1}{2}} = \alpha y_n + \alpha^2\left[a_n^1 \frac{1}{2.3.2^2} + \ldots + a_n^{2k+1}\frac{1}{(2k+2)(2k+3)2^{2k+2}} + \ldots\right],$$

$$x_{n+1} - x_n = \alpha y_{n+\frac{1}{2}} + \alpha^2\left[a_{n+\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{2.3.2^2} + \ldots + a_{n+\frac{1}{2}}^{2k+1}\frac{1}{(2k+2)(2k+3)2^{2k+2}} + \ldots\right];$$

d'où

$$x_{i+\frac{1}{2}} - x_{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{n=i}\left(x_{n+\frac{1}{2}} - x_{n-\frac{1}{2}}\right)$$
$$= \alpha\sum_0^i y_n + \alpha^2\sum_{n=0}^{n=i}\left[a_n^1\frac{1}{2.3.2^2} + \ldots + a_n^{2k+1}\frac{1}{(2k+2)(2k+3)2^{2k+2}} + \ldots\right],$$

$$x_i - x_0 = \sum_{n=0}^{n=i-1}(x_{n+1} - x_n)$$
$$= \alpha\sum_0^{i-1} y_{n+\frac{1}{2}} + \alpha_2\sum_{n=0}^{n=i-1}\left[a_{n+\frac{1}{2}}^1\frac{1}{2.3.2^2} + \ldots + a_{n+\frac{1}{2}}^{2k+1}\frac{1}{(2k+2)(2k+3)2^{2k+2}} + \ldots\right].$$

Calcul de $x_{i+\frac{1}{2}} - x_{-\frac{1}{2}}$.

Les coefficients a_n^{2k+1} peuvent être donnés soit par la relation (13), soit par la relation (15), n° **18**. La première est écartée comme introduisant les différences de tous les ordres; la seconde donne

$$\frac{1}{(2k+2)(2k+3)2^{2k+2}}a_n^{2k+1} = \sum \frac{S_{p-k}^p}{1.2.3(2p+1)} \frac{1}{(2k+2)(2k+3)2^{2k+2}} \Delta^{\cdot 2p+1} u_n.$$

On voit, comme précédemment, que le coefficient de $\Delta^{\cdot 2p+1} u_n$, dans $x_{i+\frac{1}{2}} - x_{-\frac{1}{2}}$, étant désigné par B_{2p+1}, on a

$$B_{2p+1} = \frac{1}{1.2.3\ldots(2p+1)} \left[\frac{S_p^p}{2.3.2^2} + \frac{S_{p-1}^p}{4.5.2^4} + \ldots + \frac{S_0^p}{(2p+2)(2p+3)2^{2p+2}}\right],$$

d'où

$$x_{i+\frac{1}{2}} - x_{-\frac{1}{2}} = \alpha \sum_0^i y_n + \alpha^2 \sum_{n=0}^{n=i} (B_1 \Delta^{\cdot 1} u_n + \ldots + B_{2p+1} \Delta^{\cdot 2p+1} u_n + \ldots).$$

Mais (M_1) donne (n° **23**)

$$y_n = y_{-\frac{1}{2}} + \alpha (A'_0 {}' u_n^{\cdot} + A'_2 \Delta^{\cdot 1} u^n + \ldots + A'_{2p+2} \Delta^{\cdot 2p+1} u_n + \ldots) + C_{-\frac{1}{2}};$$

donc

$$\begin{aligned} x_{i+\frac{1}{2}} - x_{-\frac{1}{2}} &= \alpha (i+1) \left(y_{-\frac{1}{2}} + C_{-\frac{1}{2}}\right) \\ &+ \alpha^2 \sum_{n=0}^{n=i} \left[A'_0 {}' u_n^{\cdot} + (A'_2 + B_1) \Delta^{\cdot 1} u_n + \ldots + \left(A'_{2p+2} + B_{2p+1}\right) \Delta^{\cdot 2p+1} u_n + \ldots\right], \end{aligned}$$

ou, comme

$$\sum_{n=0}^{n=i} \Delta^{\cdot 2p+1} u_n = \Delta^{\cdot 2p} u_{i+\frac{1}{2}} - \Delta^{\cdot 2p} u_{-\frac{1}{2}},$$

$$(\mathrm{P}) \left\{ \begin{aligned} & x_{i+\frac{1}{2}} - x_{-\frac{1}{2}} \\ & \quad = \alpha (i+1)\left(y_{-\frac{1}{2}} + C_{-\frac{1}{2}}\right) + \alpha^2 \left[A'_0 {}'' u_{i+\frac{1}{2}}^{\cdot} + (A'_2 + B_1) u_{i+\frac{1}{2}}^{\cdot} + \ldots \right. \\ & \qquad \left. + (A'_{2p+2} + B_{2p+1}) \Delta^{\cdot 2p} u_{i+\frac{1}{2}} + \ldots\right] + C'_{-\frac{1}{2}}, \end{aligned} \right.$$

avec

$$C'_{-\frac{1}{2}} = -\alpha^2 \left[A'_0 {}'' u_{-\frac{1}{2}}^{\cdot} + (A'_2 + B_1) u_{-\frac{1}{2}}^{\cdot} + \ldots + (A'_{2p+2} + B_{2p+1}) \Delta^{\cdot 2p} u_{-\frac{1}{2}} + \ldots\right],$$

en appelant $''u_{-\frac{1}{2}}, ''u_{\frac{1}{2}}, \ldots, ''u_{i+\frac{1}{2}}$ les moyennes arithmétiques de deux nombres voisins dans la suite $''u_{-1}, ''u_0, \ldots, ''u_{i+1}$, dont le premier terme est arbitraire et dont les différences premières sont $'u_{-\frac{1}{2}}, 'u_{\frac{1}{2}}, \ldots, 'u_{i+\frac{1}{2}}$, quantités que nous avons définies précédemment. On pourra déterminer simultanément les arbitraires $'u_{-\frac{1}{2}}, ''u_{-1}$, par la condition que l'on ait

$$C_{-\frac{1}{2}} = 0, \quad C'_{-\frac{1}{2}} = 0.$$

Calcul de $x_i - x_0$.

La formule (17) donne $a^{2k+1}_{n+\frac{1}{2}}$, et on voit immédiatement que le coefficient de $\Delta^{2p+1} u_{n+\frac{1}{2}}$ dans $x_i - x_0$ étant désigné par B'_{2p+1}, on a

$$B'_{2p+1} = \frac{1}{1.2.3\ldots(2p+1)} \sum \frac{'S^p_{p-k}}{(2k+2)(2k+3)\,2^{2k+2}}, \quad \text{où } k=0, 1, 2, \ldots, p,$$

c'est-à-dire

$$B'_{2p+1} = \frac{1}{1.2.3\ldots(2p+1)} \left[\frac{'S^p_p}{2.3.2^2} + \frac{'S^p_{p-1}}{4.5.2^4} + \ldots + \frac{'S^p_0}{(2p+2)(2p+3)\,2^{2p+2}} \right];$$

donc

$$x_i - x_0 = \alpha \sum_0^{i-1} y_{n+\frac{1}{2}} + \alpha^2 \sum_{n=0}^{n=i-1} \left(B'_1 \Delta^1 u_{n+\frac{1}{2}} + \ldots + B'_{2p+1} \Delta^{2p+1} u_{n+\frac{1}{2}} + \ldots \right).$$

Mais (L_1) donne

$$y_{n+\frac{1}{2}} = y_0 + \alpha \left(A_0\, 'u_{n+\frac{1}{2}} + A_2 \Delta^1 u_{n+\frac{1}{2}} + \ldots + A_{2p+2}\, \Delta^{2p+1} u_{n+\frac{1}{2}} + \ldots \right) + C_0,$$

d'où

$$x_i - x_0 = \alpha i (y_0 + C_0) + \alpha^2 \sum_{n=0}^{n=i-1} \Big[A_0\, 'u_{n+\frac{1}{2}} + (A_2 + B'_1)\, \Delta^1 u_{n+\frac{1}{2}} + \ldots$$
$$+ \left(A_{2p+2} + B'_{2p+1} \right) \Delta^{2p+1} u_{n+\frac{1}{2}} \ldots \Big],$$

c'est-à-dire

$$\text{(Q)} \quad x_i - x_0 = \alpha i (y_0 + C_0) + \alpha^2 \big[A_0\, ''u_i + (A_2 + B'_1)\, u_i + \ldots$$
$$+ (A_{2p+2} + B'_{2p+1})\, \Delta^{2p} u_i + \ldots \big] + C'_0,$$

avec

$$C'_0 = -\alpha^2 \big[A_0\, ''u_0 + (A_2 + B'_1)\, u_0 + \ldots + (A_{2p+2} + B'_{2p+1})\, \Delta^{2p} u_0 + \ldots \big].$$

Les arbitraires $'u_{-\frac{1}{2}}$ et $''u_{-1}$ peuvent être déterminées de telle sorte que l'on ait simultanément

$$C_0 = 0, \quad C'_0 = 0.$$

25. Il nous reste, pour achever cette section, à calculer $x_i - x_{-\frac{1}{2}}$ et $x_{i+\frac{1}{2}} - x_0$. Nous suivrons encore la même marche que dans la première intégration, et nous formerons d'abord $x_0 - x_{-\frac{1}{2}}$.

1° Pour $n = 0$ et $z = -\frac{1}{2}$, l'équation (22) donne

$$x_{-\frac{1}{2}} - x_0 = -\frac{1}{2}\alpha y_0 + \alpha^2\left[u_0 \frac{1}{1.2.2^2} + \ldots + a_0^{2k} \frac{1}{(2k+1)(2k+2)2^{2k+2}} + \ldots\right]$$
$$- \alpha^2\left[a_0^1 \frac{1}{2.3.2^3} + \ldots + a_0^{2k+1} \frac{1}{(2k+2)(2k+3)2^{2k+3}} + \ldots\right];$$

comme

$$a_0^{2k} = \sum \frac{S_{p-k}^{p-1}}{1.2\ldots 2p} \Delta^{2p} u_0,$$
$$a_0^{2k+1} = \sum \frac{S_{p-k}^{p}}{1.2\ldots(2p+1)} \Delta^{\cdot 2p+1} u_0,$$

les coefficients de $\Delta^{2p} u_0$ et $\Delta^{\cdot 2p+1} u_0$ seront respectivement : le premier $\frac{1}{1.2\ldots 2p} \sum \frac{S_{p-k}^{p-1}}{(2k+1)(2k+2)2^{2k+2}}$, soit B_{2p} :

$$B_{2p} = \frac{1}{1.2\ldots 2p}\left[\frac{S_{p-1}^{p-1}}{3.4.2^4} + \ldots + \frac{S_0^{p-1}}{(2p+1)(2p+2)2^{2p+2}}\right] (^*),$$

et le second

$$\frac{1}{1.2\ldots(2p+1)} \sum \frac{S_{p-k}^{p}}{(2k+2)(2k+3)2^{2k+3}} = \frac{B_{2p+1}}{2};$$

donc

$$[0'] \quad \left\{ \begin{aligned} x_0 - x_{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\alpha y_0 - \alpha^2 (B_0 u_0 + \ldots + B_{2p} \Delta^{2p} u_0 + \ldots) \\ + \frac{\alpha^2}{2}(B_1 \Delta^{\cdot 1} u_0 + \ldots + B_{2p+1} \Delta^{\cdot 2p+1} u_0 + \ldots). \end{aligned} \right.$$

(*) Cette formule ne s'applique plus pour $p = 0$. On voit directement que $\Delta^{2p} u_0$, B_{2p} sont alors u_0 et $\frac{1}{8}$.

2° Pour $n = -1$ et $z = +\frac{1}{2}$, l'équation (23) donne

$$x_0 - x_{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\alpha y_{-\frac{1}{2}} + \alpha^2\Big[u_{-\frac{1}{2}}\frac{1}{1.2.2^2} + a^2_{-\frac{1}{2}}\frac{1}{3.4.2^4} + \ldots + a^{2k}_{-\frac{1}{2}}\frac{1}{(2k+1)(2k+2)2^{2k+2}} + \ldots\Big]$$
$$+ \alpha^2\Big[a^1_{-\frac{1}{2}}\frac{1}{2.3.2^3} + a^3_{-\frac{1}{2}}\frac{1}{4.5.2^5} + \ldots + a^{2k+1}_{-\frac{1}{2}}\frac{1}{(2k+2)(2k+3)2^{2k+3}} + \ldots\Big];$$

mais

$$a^{2k}_{-\frac{1}{2}} = \sum \frac{{}'S^p_{p-k}}{1.2.3.\ .2p}\Delta^{\cdot 2p} u_{-\frac{1}{2}},$$
$$a^{2k+1}_{-\frac{1}{2}} = \sum \frac{{}'S^p_{p-k}}{1.2\ldots(2p+1)}\Delta^{2p+1} u_{-\frac{1}{2}};$$

les coefficients de $\Delta^{\cdot 2p} u_{-\frac{1}{2}}$, $\Delta^{2p+1} u_{-\frac{1}{2}}$ seront donc respectivement : le premier $\frac{1}{1.2.3\ldots 2p}\sum\frac{{}'S^p_{p-k}}{(2k+1)(2k+2)2^{2k+2}}$, soit B'_{2p} :

$$B'_{2p} = \frac{1}{1.2.3\ldots 2p}\left[\frac{{}'S^p_p}{1.2.2^2} + \ldots + \frac{{}'S^p_0}{(2p+1)(2p+2)2^{2p+2}}\right] (^*),$$

et le second

$$\frac{1}{1.2.3..\ (2p+1)}\sum\frac{{}'S^p_{p-k}}{(2k+2)(2k+3)2^{2k+3}} = \frac{1}{2}B'_{2p+1};$$

d'où

$$\left[-\frac{1'}{2}\right]\left\{\begin{aligned} x_0 - x_{-\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2}\alpha y_{-\frac{1}{2}} + \alpha^2\left(B'_0 u_{-\frac{1}{2}} + \ldots + B'_{2p}\Delta^{\cdot 2p} u_{-\frac{1}{2}} + \ldots\right) \\ &+ \frac{\alpha^2}{2}\left(B'_1 \Delta^1 u_{-\frac{1}{2}} + \ldots + B'_{2p+1}\Delta^{2p+1} u_{-\frac{1}{2}} + \ldots\right). \end{aligned}\right.$$

26. Nous obtenons ainsi une deuxième forme de $x_0 - x_{-\frac{1}{2}}$, où figurent $y_{-\frac{1}{2}}$, $\Delta^{\cdot 2p} u_{-\frac{1}{2}}$, $\Delta^{2p+1} u_{-\frac{1}{2}}$, tandis que dans la première figurent y_0, $\Delta^{2p} u_0$, $\Delta^{\cdot 2p+1} u_0$; si nous identifions les deux formes après avoir

---

(*) Cette formule a lieu pour $p = 0$, conformément aux conventions de la note (**), page 197. $B'_0 = \frac{1}{8}$.

remplacé ces dernières quantités par les premières, ou inversement, nous découvrirons des relations utiles entre les coefficients A et B :

1° On a, par la relation [O] n° 21,

$$y_0 = y_{-\frac{1}{2}} + \frac{\alpha}{2}(A_0 u_0 + A_2 \Delta^2 u_0 + \ldots + A_{2p} \Delta^{2p} u_0 + \ldots)$$
$$- \alpha(A_1 \Delta^{\cdot 1} u_0 + A_3 \Delta^{\cdot 3} u_0 + \ldots + A_{2p+1} \Delta^{\cdot 2p+1} u_0 + \ldots).$$

Substituant cette valeur dans [O′], on obtient

$$[\mathrm{O}''] \left\{ \begin{aligned} x_0 - x_{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\alpha y_{-\frac{1}{2}} & \\ & - \frac{1}{2}\alpha^2 [(A_1 - B_1)\Delta^{\cdot 1} u_0 + \ldots + (A_{2p+1} - B_{2p+1})\Delta^{\cdot 2p+1} u_0 + \ldots] \\ & + \frac{1}{4}\alpha^2 [(A_0 - 4B_0) u_0 + \ldots + (A_{2p} - 4B_{2p})\Delta^{2p} u_0 + \ldots]. \end{aligned} \right.$$

On voit alors que $\Delta^{\cdot 2p+1} u_0$, $\Delta^{2p} u_0, \ldots$ étant exprimés en fonction des différences qui figurent dans $\left[-\frac{1'}{2}\right]$, il ne resterait plus qu'à identifier les coefficients de $\Delta^{\cdot 2p} u_{-\frac{1}{2}}$, $\Delta^{2p+1} u_{-\frac{1}{2}}$ dans ces deux relations [O″] et $\left[-\frac{1'}{2}\right]$. On reconnaît immédiatement, en se reportant aux équations [O], $\left[-\frac{1}{2}\right]$ et les comparant à [O″], $\left[-\frac{1'}{2}\right]$, que le résultat ainsi obtenu ne sera autre chose que le système (ρ) où l'on aurait remplacé

$$A_{2p}, \quad \frac{1}{2} A'_{2p}, \quad A_{2p+1}, \quad A'_{2p+1},$$

par

$$\frac{1}{2}(A_{2p} - 4B_{2p}), \quad B'_{2p}, \quad \frac{1}{2}(A_{2p+1} - B_{2p+1}), \quad \frac{1}{2} B'_{2p+1}.$$

On aura, par ce changement, en mettant les coefficients A dans le premier membre,

$$(\rho') \quad \left\{ \begin{aligned} & A_{2p-1} - A_{2p} = B_{2p-1} - 4(B_{2p} + B'_{2p}), \\ & A_{2p+1} = B_{2p+1} - B'_{2p+1} + B'_{2p}. \end{aligned} \right.$$

2° On a, par la relation $\left[-\frac{1}{2}\right]$, la valeur de $y_{-\frac{1}{2}}$, qui, substituée dans $\left[-\frac{1'}{2}\right]$, donne

$$\left[-\frac{1''}{2}\right]\left\{\begin{aligned} x_0 - x_{-\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2}\alpha y_0 \\ &\quad - \frac{1}{2}\alpha^2\left[(A'_1 - B'_1)\Delta^1 u_{-\frac{1}{2}} + \ldots + (A'_{2p+1} - B'_{2p+1})\Delta^{2p+1} u_{-\frac{1}{2}} + \ldots\right] \\ &\quad - \frac{1}{4}\alpha^2\left[(A'_0 - 4B'_0)u^{\cdot}_{-\frac{1}{2}} + \ldots + (A'_{2p} - 4B'_{2p})\Delta^{2p} u_{-\frac{1}{2}} + \ldots\right].\end{aligned}\right.$$

On voit encore, en comparant les équations $[O']$ et $\left[-\frac{1''}{2}\right]$ aux équations $[O]$ et $\left[-\frac{1}{2}\right]$, que les relations (ρ) subsistent, si l'on y remplace

$$\frac{1}{2}A_{2p}, \quad -A_{2p+1}, \quad A'_{2p}, \quad A'_{2p+1},$$

par

$$-B_{2p}, \quad +\frac{1}{2}B_{2p+1}, \quad -\frac{1}{2}(A'_{2p} - 4B'_{2p}), \quad -\frac{1}{2}(A'_{2p+1} - B'_{2p+1}),$$

ce qui donne, en plaçant les A dans le premier membre,

$$(\rho'')\qquad \left\{\begin{aligned} A'_{2p} &= -B_{2p-1} + 4(B_{2p} + B'_{2p}), \\ A'_{2p+1} &= B_{2p} + B'_{2p+1} - B_{2p+1} - \frac{1}{4}B_{2p-1}.\end{aligned}\right.$$

Il est d'ailleurs évident que l'un quelconque des systèmes (ρ), (ρ'), (ρ'') résulte des deux autres.

27. Les relations que nous avons établies entre les coefficients constants A, B, nous seront très-utiles pour obtenir $x_{i+\frac{1}{2}} - x_0$ et $x_i - x_{-\frac{1}{2}}$. Cherchons successivement ces deux quantités.

Calcul de $x_{i+\frac{1}{2}} - x_0$.

Nous avons les deux relations (P) et $\left[-\frac{1'}{2}\right]$ des nos 24 et 25, savoir :

$$\begin{aligned} &x_{i+\frac{1}{2}} - x_{-\frac{1}{2}} \\ &\quad = \alpha(i+1)(y_{-\frac{1}{2}} + C_{-\frac{1}{2}}) + \alpha^2\left[A'_0{}'' u^{\cdot}_{i+\frac{1}{2}} + (A'_2 + B_1)u^{\cdot}_{i+\frac{1}{2}} + \ldots\right. \\ &\qquad\qquad \left. + (A'_{2p+2} + B_{2p+1})\Delta^{2p} u_{i+\frac{1}{2}} + \ldots\right] + C'_{-\frac{1}{2}},\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
x_0 - x_{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\alpha\left(y_{-\frac{1}{2}} + C_{-\frac{1}{2}}\right) &+ \alpha^2\left(B'_0 u^{\cdot}_{-\frac{1}{2}} + \ldots + B'_{2p}\Delta^{\cdot 2p} u^{\cdot}_{-\frac{1}{2}} + \ldots\right) \\
&+ \frac{\alpha^2}{2}\left(B'_1 \Delta^1 u_{-\frac{1}{2}} + \ldots + B'_{2p+1}\Delta^{2p+1} u_{-\frac{1}{2}} + \ldots\right) \\
&- \frac{1}{2}\alpha C_{-\frac{1}{2}}.
\end{aligned}
$$

Si nous retranchons membre à membre la seconde de la première, il vient, en tenant compte de l'identité $\left(x_0 + C_0 = x_{-\frac{1}{2}} + C_{-\frac{1}{2}}\right)$,

$$
\begin{aligned}
x_{i+\frac{1}{2}} - x_0 = \alpha\left(i + \frac{1}{2}\right)&(y_0 + C_0) \\
&+ \alpha^2\left[A'_0{}'' u^{\cdot}_{i+\frac{1}{2}} + (A'_2 + B_1) u^{\cdot}_{i+\frac{1}{2}} + \ldots + (A'_{2p+2} + B_{2p+1})\Delta^{\cdot 2p} u_{i+\frac{1}{2}} + \ldots\right] \\
&+ \text{const.},
\end{aligned}
$$

où

$$
\begin{aligned}
\text{const.} = &- \alpha^2\left[\begin{array}{l|l|l} A'_0{}'' u^{\cdot}_{-\frac{1}{2}} + (A'_2 + B_1) & u^{\cdot}_{-\frac{1}{2}} + \ldots + (A'_{2p+2} + B_{2p+1}) & \Delta^{\cdot 2p} u_{-\frac{1}{2}} + \ldots \\ \qquad\qquad + B'_0 & \qquad\qquad + B'_{2p} & \end{array}\right] \\
&- \frac{1}{2}\alpha^2\left[\begin{array}{l|l|l} A_0{}' u_{-\frac{1}{2}} + A_2 & \Delta^1 u_{-\frac{1}{2}} + \ldots + A_{2p+2} & \Delta^{2p+1} u_{-\frac{1}{2}} + \ldots \\ \qquad\qquad + B'_1 & \qquad\qquad + B'_{2p+1} & \end{array}\right]
\end{aligned}
$$

quand on y a remplacé $C_{-\frac{1}{2}}$ et $C'_{-\frac{1}{2}}$ par leurs valeurs.

Or, en vertu des relations (ρ') et (ρ''), on a

$$
A'_{2p+2} + B_{2p+1} + B'_{2p} = A_{2p+2} + B'_{2p+1};
$$

donc

$$
\begin{aligned}
\text{const.} = -\alpha^2\Big[A_0\left({}'' u^{\cdot}_{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}{}' u_{-\frac{1}{2}}\right) &+ (A_2 + B'_1)\left(u^{\cdot}_{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\Delta^1 u_{-\frac{1}{2}}\right) + \ldots \\
&+ \left(A_{2p+2} + B'_{2p+1}\right)\left(\Delta^{\cdot 2p} u_{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\Delta^{2p+1} u_{-\frac{1}{2}}\right) + \ldots\Big];
\end{aligned}
$$

mais, par définition,

$$
\Delta^{\cdot 2p} u_{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\Delta^{2p+1} u_{-\frac{1}{2}} = \Delta^{2p} u_0,
$$

et, par suite, .

$$\text{const.} = -\alpha^2\Big[A_0\,{}''u_0 + (A_2 + B'_1)\,u_0 + \ldots + \big(A_{2p+2} + B'_{2p+1}\big)\,\Delta^{2p}u_0 + \ldots\Big] = C'_0\,;$$

donc

$$(P_1)\left\{\begin{aligned} & x_{i+\frac{1}{2}} - x_0 \\ & \quad = \alpha\left(i+\frac{1}{2}\right)(y_0 + C_0) + \alpha^2\Big[A'_0\,{}''u^{\cdot}_{i+\frac{1}{2}} + (A'_2 + B_1)\,u^{\cdot}_{i+\frac{1}{2}} + \ldots \\ & \qquad\qquad + \big(A'_{2p+2} + B_{2p+1}\big)\,\Delta^{\cdot 2p}u_{i+\frac{1}{2}} + \ldots\Big] + C'_0. \end{aligned}\right.$$

Calcul de $x_i - x_{-\frac{1}{2}}$.

On trouvera de la même manière en ajoutant à $x_i - x_0$, $x_0 - x_{-\frac{1}{2}}$ donné par [O′],

$$\begin{aligned} x_i - x_{-\frac{1}{2}} &= \alpha\left(i+\frac{1}{2}\right)\left(y_{-\frac{1}{2}} + C_{-\frac{1}{2}}\right) \\ &\quad + \alpha^2\Big[A_0\,{}''u_i + (A_2 + B'_1)\,u_i + \ldots + \big(A_{2p+2} + B'_{2p+1}\big)\,\Delta^{2p}u_i + \ldots\Big] + \text{const.}, \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \text{const.} = -\alpha^2 &\left[\begin{array}{c|c|c} A_0\,{}''u_0 + (A_2 + B'_1) & u_0 + \ldots + (A_{2p+2} + B'_{2p+1}) & \Delta^{2p}u_0 + \ldots \\ + B_0 & + B_{2p} & \end{array}\right] \\ + \frac{\alpha^2}{2} &\left[\begin{array}{c|c|c} + A'_0 & {}'u^{\cdot}_0 + \ldots + A'_{2p} & \Delta^{\cdot 2p-1}u_0 + \ldots \\ & + B_{2p-1} & \end{array}\right]. \end{aligned}$$

Or, les relations (ρ'), (ρ'') donnent

$$A_{2p+2} + B'_{2p+1} + B_{2p} = A'_{2p+2} + B_{2p+1} + \frac{1}{4}\left(A'_{2p} + B_{2p-1}\right).$$

On aura donc, en désignant par T la somme des deux termes en $\Delta^{2p}u_0$, $\Delta^{\cdot 2p-1}u_0$, qui se correspondent verticalement,

$$T = -\alpha^2\left(A'_{2p} + B_{2p-1}\right)\left(\frac{1}{4}\Delta^{2p}u_0 - \frac{1}{2}\Delta^{\cdot 2p-1}u_0\right) - \alpha^2\left(A'_{2p+2} + B_{2p+1}\right)\Delta^{2p}u_0.$$

Considérons d'abord le premier terme de T; on a, par définition,

$$\frac{1}{4}\,\Delta^{2p}u_0 = \frac{1}{4}\left(\Delta^{2p-1}u_{\frac{1}{2}} - \Delta^{2p-1}u_{-\frac{1}{2}}\right),$$

$$\frac{1}{2}\,\Delta^{\cdot 2p-1}u_0 = \frac{1}{4}\left(\Delta^{2p-1}u_{\frac{1}{2}} + \Delta^{2p-1}u_{-\frac{1}{2}}\right).$$

Substituant dans T, il vient

$$T = \alpha^2\left(A'_{2p} + B_{2p-1}\right)\frac{1}{2}\,\Delta^{2p-1}u_{-\frac{1}{2}} - \alpha^2\left(A'_{2p+2} + B_{2p+1}\right)\Delta^{2p}u_0;$$

donc

$$\text{const.} = -\alpha^2\left[\begin{array}{l|l|l} {}''u_0 & A_0 + \ldots + \Delta^{2p}u_0 & \left(A'_{2p+2} + B_{2p+1}\right) + \ldots \\ -\frac{1}{2}\,{}'u_{-\frac{1}{2}} & \qquad -\frac{1}{2}\,\Delta^{2p+1}u_{-\frac{1}{2}} & \end{array}\right].$$

Et comme

$$\Delta^{2p}u_0 - \frac{1}{2}\,\Delta^{2p+1}u_{-\frac{1}{2}} = \Delta^{\cdot 2p}u_{-\frac{1}{2}},$$

on a

$$\text{const.} = -\alpha^2\left[A_0\,{}''u^{\cdot}_{-\frac{1}{2}} + \ldots + \left(A'_{2p+2} + B_{2p+1}\right)\Delta^{\cdot 2p}u_{-\frac{1}{2}} + \ldots\right] = C'_{-\frac{1}{2}};$$

donc, enfin,

$$(Q_1)\left\{\begin{aligned} x_i - x_{-\frac{1}{2}} &= \alpha\left(i + \frac{1}{2}\right)\left(y_{-\frac{1}{2}} + C_{-\frac{1}{2}}\right) \\ &\quad + \alpha^2\left[A_0\,{}''u_i + \left(A_2 + B'_1\right)u_i + \ldots + \left(A_{2p+2} + B'_{2p+1}\right)\Delta^{2p}u_i + \ldots\right] + C'_{-\frac{1}{2}}. \end{aligned}\right.$$

En résumé, nous avons obtenu les formules suivantes :

Premier cas. $\dfrac{dx}{dt} = u.$

(R)

$$x_{i+\frac{1}{2}} - \left\{\begin{matrix} x_{-\frac{1}{2}} \\ x_0 \end{matrix}\right. = \alpha\left(A_0\,{}'u_{i+\frac{1}{2}} + A_2\Delta^1 u_{i+\frac{1}{2}} + \ldots + A_{2p}\,\Delta^{2p-1}u_{i+\frac{1}{2}} + \ldots\right) + \left\{\begin{matrix} C_{-\frac{1}{2}} \\ C_0 \end{matrix}\right.,$$

$$x_i - \left\{\begin{matrix} x_{-\frac{1}{2}} \\ x_0 \end{matrix}\right. = \alpha\left(A'_0\,{}'u^{\cdot}_i + A'_2\Delta^{\cdot 1}u_i + \ldots + A'_{2p}\,\Delta^{\cdot 2p-1}u_i + \ldots\right) + \left\{\begin{matrix} C_{-\frac{1}{2}} \\ C_0 \end{matrix}\right..$$

Deuxième cas. $\dfrac{d^2 x}{dt^2} = u.$

(S)

$$x_{i+\frac{1}{2}} - \begin{cases} x_{-\frac{1}{2}} \\ x_0 \end{cases} = \alpha^2 \left[\mathrm{A}_0'{}'' u^{\bullet}_{i+\frac{1}{2}} + (\mathrm{A}_2' + \mathrm{B}_1) u^{\bullet}_{i+\frac{1}{2}} + \ldots + \left(\mathrm{A}'_{2p+2} + \mathrm{B}_{2p+1}\right) \Delta^{\cdot 2p} u_{i+\frac{1}{2}} + \cdots \right] + \begin{cases} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}' \end{cases},$$

$$x_i - \begin{cases} x_{-\frac{1}{2}} \\ x_0 \end{cases} = \alpha^2 \left[\mathrm{A}_0'' u_i + (\mathrm{A}_2 + \mathrm{B}_1') u_i + \ldots + \left(\mathrm{A}_{2p+2} + \mathrm{B}'_{2p+1}\right) \Delta^{2p} u_i + \ldots \right] + \begin{cases} \mathbf{C}_1 \\ \mathbf{C}_1' \end{cases},$$

avec

$$\mathrm{C}_0 = -\alpha \left(\mathrm{A}_0'{}' u^{\bullet}_0 + \mathrm{A}_2' \Delta^{\cdot 1} u_0 + \ldots + \mathrm{A}'_{2p} \Delta^{\cdot 2p-1} u_0 + \ldots \right),$$

$$\mathrm{C}_{-\frac{1}{2}} = -\alpha \left(\mathrm{A}_0' u_{-\frac{1}{2}} + \mathrm{A}_2 \Delta^1 u_{-\frac{1}{2}} + \ldots + \mathrm{A}_{2p} \Delta^{2p-1} u_{-\frac{1}{2}} + \ldots \right),$$

$$\mathrm{C}_0' = -\alpha_2 \left[\mathrm{A}_0'' u_0 + (\mathrm{A}_2 + \mathrm{B}_1') u_0 + \ldots + \left(\mathrm{A}_{2p+2} + \mathrm{B}'_{2p+1}\right) \Delta^{2p} u_0 + \ldots \right],$$

$$\mathrm{C}'_{-\frac{1}{2}} = -\alpha^2 \left[\mathrm{A}_0'{}'' u^{\bullet}_{-\frac{1}{2}} + (\mathrm{A}_2' + \mathrm{B}_1) u^{\bullet}_{-\frac{1}{2}} + \ldots + \left(\mathrm{A}'_{2p+2} + \mathrm{B}_{2p+1}\right) \Delta^{\cdot 2p} u_{-\frac{1}{2}} + \ldots \right].$$

$$\mathbf{C} = \alpha(i+1)\left(y_{-\frac{1}{2}} + \mathrm{C}_{-\frac{1}{2}}\right) + \mathrm{C}'_{-\frac{1}{2}}, \qquad \mathbf{C}' = \alpha\left(i + \frac{1}{2}\right)(y_0 + \mathrm{C}_0) + \mathrm{C}_0',$$

$$\mathbf{C}_1 = \alpha\left(i + \frac{1}{2}\right)\left(y_{-\frac{1}{2}} + \mathrm{C}_{-\frac{1}{2}}\right) + \mathrm{C}'_{-\frac{1}{2}}, \qquad \mathbf{C}_1' = \alpha i (y_0 + \mathrm{C}_0) + \mathrm{C}_0'.$$

Voici les valeurs numériques des coefficients, seulement pour les premiers termes. On trouve, par les formules qui expriment ces coefficients,

$$\mathrm{A}_0 = 1. \qquad \mathrm{A}_2 = +\frac{1}{24}, \qquad \mathrm{A}_4 = -\frac{17}{5760}, \qquad \mathrm{A}_6 = +\frac{367}{967680},$$

$$\mathrm{B}_1' = +\frac{1}{24}, \qquad \mathrm{B}_3' = -\frac{7}{5760}, \qquad \mathrm{B}_5' = +\frac{129}{967680},$$

$$\mathrm{A}_2 + \mathrm{B}_1' = +\frac{1}{12}, \qquad \mathrm{A}_4 + \mathrm{B}_3' = -\frac{1}{240}, \qquad \mathrm{A}_6 + \mathrm{B}_5' = +\frac{31}{60480}.$$

$$\mathrm{A}_0' = 1 \qquad \mathrm{A}_2' = -\frac{1}{12}, \qquad \mathrm{A}_4' = +\frac{11}{720}, \qquad \mathrm{A}_6' = -\frac{191}{60480},$$

$$\mathrm{B}_1 = +\frac{1}{24}, \qquad \mathrm{B}_3 = -\frac{37}{5760}, \qquad \mathrm{B}_5 = +\frac{407}{322560},$$

$$\mathrm{A}_2' + \mathrm{B}_1 = -\frac{1}{24}, \qquad \mathrm{A}_4' + \mathrm{B}_3 = +\frac{17}{1920}, \qquad \mathrm{A}_6' + \mathrm{B}_5 = -\frac{367}{193536}.$$

Il est clair que, dans l'application, on n'aura pas besoin, en général, de toutes les formules (R) et (S) ; on choisira, dans chaque groupe, suivant les cas.

28. Montrons comment, au moyen de ces formules, on exécute une quadrature première ou seconde :

1° Soit ϖ la longitude du périhélie d'une planète dont la valeur $\varpi_{-\frac{1}{2}}$ est donnée pour l'époque $t_{-\frac{1}{2}}$, et supposons qu'on veuille l'obtenir pour les époques t_0, t_1, t_2, t_3, t_4, au moyen des valeurs numériques de $\frac{d\varpi}{dt} = u$.

On calculera les valeurs numériques de αu pour les époques t_{-1}, t_0, t_1, t_2, t_3, t_4, qui, si l'on prend $t_{-\frac{1}{2}} = 1866$, janvier 23, et $\alpha = 30$ jours solaires moyens, seront respectivement

1866 : janvier 8, février 7, mars 9, avril 8, mai 8, juin 7.

Si les différences troisièmes de ces valeurs numériques sont négligeables, on aura, pour déterminer ϖ par la troisième formule (R),

$$\varpi_i - \varpi_{-\frac{1}{2}} = \alpha\left({}'u_i^{\cdot} - \frac{1}{12}\Delta^{\cdot 1} u_i\right) = \alpha\,{}'u_i^{\cdot} - \frac{1}{12}\Delta^{\cdot 1}(\alpha u)_i,$$

avec

$$C_{-\frac{1}{2}} = 0 \quad \text{ou} \quad {}'u_{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{24}\Delta^1 u_{-\frac{1}{2}},$$

et, par suite, avec

$$\alpha\,{}'u_{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{24}\Delta^1(\alpha u)_{-\frac{1}{2}}.$$

D'après cela, on construira le tableau suivant, qui fournira les variations $\delta\varpi$, comptées de 1866, janvier 23 :

t_i.		$\alpha\,{}'u_{i+\frac{1}{2}}$.	αu_i.	$\Delta^1(\alpha u)_{i+\frac{1}{2}}$.	$\Delta^{\cdot 1}(\alpha u)_i$.	$\alpha\,{}'u_i^{\cdot}$	$-\frac{1}{12}\Delta^{\cdot 1}(\alpha u)_i =$	$\delta\varpi$.
t_{-1}	Janv. 8		$-18,208$					
		$+0,031$		$-0,751$				
t_0	Févr. 7		$-18,959$		$-1,271$	$-9,448$	$-(+0,106) =$	$-9,342$
		$-18,928$		$-1,791$				
t_1	Mars 9		$-20,750$		$-2,276$	$-29,303$	$-(+0,190) =$	$-29,113$
		$-39,678$		$-2,762$				
t_2	Avril 8		$-23,512$		$-3,182$	$-51,434$	$-(+0,265) =$	$-51,169$
		$-63,190$		$-3,601$				
t_3	Mai 8		$-27,113$		$-3,916$	$-76,746$	$-(+0,326) =$	$-76,420$
		$-90,303$		$-4,231$				
t_4	Juin 7		$-31,344$					

La colonne t_i contient les diverses valeurs du temps pour lesquelles on a calculé $\alpha \frac{d\varpi}{dt}$.

La colonne αu_i les diverses valeurs de $\alpha \frac{d\varpi}{dt}$.

Les colonnes $\Delta^1 (\alpha u)_{i+\frac{1}{2}}$, $\Delta^{\cdot 1} (\alpha u)_i$ contiennent les différences premières de αu_i et les moyennes arithmétiques de ces différences premières.

Le premier nombre de la colonne $\alpha' u_{i+\frac{1}{2}}$ est égal à $-\frac{1}{24} \cdot 0{,}751$; les autres s'en déduisent par la condition que les différences premières de cette colonne soient les nombres correspondants de la colonne αu_i.

Les trois dernières colonnes s'expliquent d'elles-mêmes.

2° Soit ξ la perturbation de la coordonnée x d'une planète, perturbation comptée du 23 janvier 1866, époque que nous désignerons encore par $t_{-\frac{1}{2}}$.

Comme l'orbite troublée est tangente à l'orbite elliptique au point correspondant à cette époque, on a

$$\xi_{-\frac{1}{2}} = 0, \quad \left(\frac{d\xi}{dt}\right)_{-\frac{1}{2}} = 0.$$

Si, prenant $\alpha = 30$ jours, on désire les valeurs de ξ pour les époques t_{-1}, t_0, $t_1, \ldots, t_4$, on calculera $\alpha^2 \frac{d^2\xi}{dt^2}$ pour ces différentes dates, et si les différences secondes sont négligeables, on aura, par la troisième formule (S),

$$\xi_i = \alpha^2 \left({}'' u_i + \frac{1}{12} u_i \right) = \alpha^2 \, {}'' u_i + \frac{1}{12} \alpha^2 u_i,$$

avec

$$C_{-\frac{1}{2}} = 0, \quad C'_{-\frac{1}{2}} = 0$$

ou

$$\alpha^2 \, {}' u_{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{24} \Delta^1 (\alpha^2 u)_{-\frac{1}{2}}, \quad \alpha^2 \, {}'' u_{-1} \doteq \frac{1}{24} (\alpha^2 u_0).$$

On construira donc le tableau suivant,

t_i.	$\alpha^2{}''u_i$.	$\alpha^2{}'u_{i+\frac{1}{2}}$.	$\alpha^2 u_i$.	Δ^1.	$\alpha^2{}''u_i + \frac{1}{12}\alpha^2 u_i = \xi_i$.
t_{-1} Janv. 8	−0,0059		−0,1210		$-0{,}0059+(-0{,}0101)=-0{,}0160$
		+0,0008		−0,0200	
t_0 Févr. 7	−0,0051		−0,1410		$-0{,}0051+(-0{,}0117)=-0{,}0168$
		−0,1402			
t_1 Mars 9	−0,1453		−0,1820		$-0{,}1453+(-0{,}0152)=-0{,}1605$
		−0,3222			
t_2 Avril 8	−0,4675		−0,2490		$-0{,}4675+(-0{,}0207)=-0{,}4882$
		−0,5712			
t_3 Mai 8	−1,0387		−0,3290		$-1{,}0387+(-0{,}0274)=-1{,}0661$
		−0,9002			
t_4 Juin 7	−1,9389		−0,4050		$-1{,}9389+(-0{,}0337)=-1{,}9726$

La colonne $\alpha^2 u_i$ contient les valeurs numériques de $\alpha^2 \frac{d^2\xi}{dt^2}$ pour les époques t_i.

Les premiers termes des colonnes $\alpha^2{}'u_{i+\frac{1}{2}}$, $\alpha^2{}''u_i$ sont respectivement $-\frac{1}{24}(-0{,}0200)$, $\frac{1}{24}(-0{,}1410)$; les autres s'en déduisent par de simples additions; le reste du tableau s'explique de lui-même.

On doit voir maintenant que, dans la Section I, nous avons introduit le facteur indéterminé α dans les équations (H), afin de leur donner la forme définitive qui se prête immédiatement à la quadrature. Si nous n'avons pas multiplié par α^2 les équations E de la même section, c'est uniquement parce que, dans ce cas, la simplicité des opérations permet d'effectuer cette multiplication, sans aucune crainte d'erreur, dans le cours même du calcul.

Ajoutons que, dans la Section III, nous pratiquerons les quadratures première et seconde comme nous venons de l'indiquer dans ce n° **28**.

SECTION III.

Cette Section est destinée à compléter les deux premières par une application numérique. Nous prenons les éléments de Cérès au 23 janvier 1866, et nous calculons de trente en trente jours, jusqu'au 28 mai de la même année, les perturbations qu'éprouve cette planète de la part de Jupiter. Nous comptons en temps de Greenwich, et nous prenons le jour solaire moyen pour unité.

Dans les deux méthodes, le calcul offre à l'origine une partie commune que nous présenterons d'abord; nous séparerons ensuite les opérations relatives à chacune d'elles.

Partie commune aux deux méthodes.

29. Après avoir fixé l'instant initial t_{-1} du calcul et l'étendue de l'intervalle de temps α, on calculera, pour les époques $t_{-1}+\alpha$, $t_{-1}+2\alpha$, $t_{-1}+3\alpha, \ldots$: 1° les quantités u, r, v, υ qui se rapportent à Cérès; 2° les lieux héliocentriques de Jupiter. On aura soin de rapporter toutes les longitudes à un équinoxe fixe, soit l'équinoxe de 1866, janvier 1,0 :

1° Éléments de Cérès; calcul de u, r, v, υ.

Pour 1866, janvier 23,0, le supplément au *Nautical Almanac* 1866, donne

$$
\begin{aligned}
\varepsilon &= 125^\circ.58'.23'',7, & \varphi &= 10^\circ.36'.27'',3\\
\varpi &= 148.20.43,9, & \chi &= 4.36.13,4\\
\theta &= 80.49.44,6, & n &= 771'',02100
\end{aligned}
$$

Ces longitudes ε, ϖ, θ de l'époque, du périhilie et du nœud sont comptées de l'équinoxe moyen de 1866, janvier 23,0. Nous les réduisons à l'équinoxe moyen de 1866, janvier 1,0, en les corrigeant de la précession correspondante à la différence des deux dates ou en les diminuant de 3″,03. Les valeurs corrigées ε_1, ϖ_1, θ_1 sont

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= 125^\circ.58'.20'',7\\
\varpi_1 &= 148.20.40,9\\
\theta_1 &= 80.49.41.6
\end{aligned}
$$

u, v, r, υ se calculeront au moyen des formules

$$
\begin{gathered}
u - \frac{\sin\chi}{\sin 1''}\sin u = nt + \varepsilon - \varpi = nt + \varepsilon_1 - \varpi_1,\\
\sqrt{r}\sin\frac{1}{2}v = \sin\frac{1}{2}u.\sqrt{a(1+e)},\\
\sqrt{r}\cos\frac{1}{2}v = \cos\frac{1}{2}u.\sqrt{a(1-e)},\\
\upsilon = v + \varpi - \theta = v + \varpi_1 - \theta_1.
\end{gathered}
$$

t		u	v	υ	$\log r_e$
1866. Janvier.	8,0	$-27^\circ.43'.27''$	$-29^\circ.56'.44''$	$+37^\circ.34'.15''$	0,40994
Février.	7,0	−20.47.32	−22.29.26	+45. 1.33	0,40808
Mars...	9,0	−13.50. 2	−14.58.48	+52.32.11	0,40672
Avril...	8,0	− 6.51.31	− 7.25.52	+60. 5. 7	0,40588
Mai....	8,0	+ 0. 7.33	+ 0. 8.10	+67.39. 9	0,40564
Juin...	7,0	+ 7. 6.17	+ 7.41.52	+75.12.51	0,40592

2° Lieux héliocentriques de Jupiter.

On trouve, dans le *Nautical Almanac* de 1866, les positions héliocentriques suivantes de Jupiter :

t.		Long. hélioc $=$ L′.	Latitude $= \Lambda'$.	$\log r'$.
1866. Janvier.	8,0	$281^\circ.\ 5'.57'',4$	$-0^\circ.\ 2'.51'',0$	0,7160071
Février.	7,0	283.35.49,3	−0. 6.16,3	0,7150881
Mars...	9,0	286. 6.18,1	−0. 9.41,9	0,7141674
Avril...	8,0	288.37.24,6	−0.13. 7,1	0,7132469
Mai....	8,0	291. 9.10,4	−0.16.31,7	0,7123286
Juin...	7,0	293.41.36,1	−0.19.55,2	0,7114138

Ces longitudes étant comptées de l'équinoxe vrai des époques respectives, nous devons les rapporter à l'équinoxe moyen de 1866, janvier 1,0. On trouve dans le *Nautical* la précession et la nutation en longitude correspondant au changement d'origine du temps; leur somme donne la correction qui, appliquée à L′, fournira les longitudes l' évaluées en partant de notre équinoxe fixe :

t.		t — 1866. Janv. 1,0.	Précession.	Nutation.	Correction.	l'.
		Jours.				
1866. Janvier.	8,0	7	$-\ 0'',97$	$-5'',69$	$-\ 6'',66$	$281^\circ.\ 5'.50'',7$
Février.	7,0	37	− 5,09	−5,73	−10,82	283.35.38,5
Mars...	9,0	67	− 9,22	−4,51	−13,73	286. 6. 4,4
Avril...	8,0	97	−13,35	−2,80	−16,15	288.37. 8,5
Mai....	8,0	127	−17,48	−1,81	−19,29	291. 8.51,1
Juin....	7,0	157	−21,60	−2,00	−23,60	293.41.12,5

Première méthode.

30. Après avoir calculé la partie commune, on choisira pour axes de coordonnées rectilignes l'axe de l'écliptique, la ligne des équinoxes moyens de 1866, janvier 1,0, et la droite perpendiculaire à ces deux-là; l'axe des x positifs étant dirigé vers l'équinoxe du printemps, celui des y positifs vers le solstice d'été, et celui des z positifs vers le pôle boréal de l'écliptique. On continuera le calcul de la manière suivante :

1° Calcul des coordonnées elliptiques rectangulaires x_e, y_e, z_e de Cérès;

2° Calcul des coordonnées x', y', z' de Jupiter, et de sa distance ρ' à Cérès;

3° Calcul des quantités $\frac{1}{\sin 1''}\,\alpha^2\frac{dR}{dx}$, $\frac{1}{\sin 1''}\,\alpha^2\frac{dR}{dy}$, $\frac{1}{\sin 1''}\,\alpha^2\frac{dR}{dz}$, qui, en vertu des équations E, représentent $\frac{1}{\sin 1''}\,\alpha^2\frac{d^2\xi}{dt^2}$, $\frac{1}{\sin 1''}\,\alpha^2\frac{d^2\eta}{dt^2}$, $\frac{1}{\sin 1''}\,\alpha^2\frac{d^2\zeta}{dt^2}$, quand, dans une première approximation, on néglige ξ, η, ζ;

4° Formation du tableau des valeurs numériques des quantités précédentes et application des formules de quadrature qui fourniront en secondes d'angle les premières valeurs approchées ξ_1, η_1, ζ_1 de ξ, η, ζ;

5° Substitution de ces valeurs approchées ξ_1, η_1, ζ_1 dans les termes $-\frac{k^2\alpha^2}{r_e^3}\left(\xi-3\frac{x_e}{r_e}\delta r\right)$, $-\frac{k^2\alpha^2}{r_e^3}\left(\eta-3\frac{y_e}{r_e}\delta r\right)$, $-\frac{k^2\alpha^2}{r_e^3}\left(\zeta-3\frac{z_e}{r_e}\delta r\right)$, pour obtenir des valeurs plus approchées de $\frac{1}{\sin 1''}\,\alpha^2\frac{d^2\xi}{dt^2}$, $\frac{1}{\sin 1''}\,\alpha^2\frac{d^2\eta}{dt^2}$, $\frac{1}{\sin 1''}\,\alpha^2\frac{d^2\zeta}{dt^2}$. La quadrature correspondante à ces valeurs nouvelles fournira ξ_2, η_2, ζ_2 plus exactes que ξ_1, η_1, ζ_1; et ainsi de suite.

1° *Calcul de x_e, y_e, z_e.*

On posera

$$a\sin A=\cos\theta_1,\qquad a\cos A=-\sin\theta_1\cos\varphi,$$
$$b\sin B=\sin\theta_1,\qquad b\cos B=\cos\theta_1\cos\varphi,$$

et l'on aura

$$x_e=r_e\,a\sin(A+v),\quad y_e=r_e\,b\sin(B+v),\quad z_e=r_e\sin\varphi\sin v.$$

On trouve dans notre exemple

$$\log a = \overline{1},99271, \qquad A = \pi - 9^\circ.19'.42'',$$
$$\log b = \overline{1},99982, \qquad B = + 80.58\ 58.$$

$t.$		$\log x_e.$	$\log y_e.$	$\log z_e.$
1866. Janvier.	8,0	0,07770.n	0,35344	$\overline{1}$,46009
Février.	7,0	0,16683.n	0,31581	$\overline{1}$,52277
Mars...	9,0	0,23490.n	0,26696	$\overline{1}$,57141
Avril...	8,0	0,28759.n	0,20393	$\overline{1}$,60879
Mai....	8,0	0,32830.n	0,12187	$\overline{1}$,63674
Juin...	7,0	0,35898.n	0,01168	$\overline{1}$,65630

2° *Calcul de x', y', z' et de ρ'.*

Ces quantités sont données par les formules

$$x' = r' \cos \Lambda' \cos l', \quad y' = r' \cos \Lambda' \sin l', \quad z' = r' \sin \Lambda';$$
$$\rho'^2 = (x_e - x')^2 + (y_e - y')^2 + (z_e - z')^2.$$

$t.$		$\log x'.$	$\log y'.$	$\log z'.$	$\log \rho'.$
1866. Janvier.	8,0	0,00039	0,70781.n	$\overline{3}$,63458.n	0,88569
Février.	7,0	0,08623	0,70274.n	$\overline{3}$,97619.n	0,88147
Mars...	9,0	0,15717	0,69679.n	$\overline{2}$,16460.n	0,87665
Avril...	8,0	0,21741	0,68990.n	$\overline{2}$,29485.n	0,87120
Mai....	8,0	0,26956	0,68205.n	$\overline{2}$,39428.n	0,86515
Juin...	7,0	0,31533	0,67318.n	$\overline{2}$,47442.n	0,85847

3° *Calcul de* $\dfrac{\alpha^2}{\sin 1''}\dfrac{dR}{dx}$, $\dfrac{\alpha^2}{\sin 1''}\dfrac{dR}{dy}$, $\dfrac{\alpha^2}{\sin 1''}\dfrac{dR}{dz}$.

Ces quantités ne dépendent que de x, y, z; x', y', z'; r', ρ' qui sont actuellement calculés, et de k, m', dont voici les valeurs :

$$\log k = \overline{2},23558, \quad \log m' = \log \frac{1}{1050} = \overline{4},97881.$$

On trouve

	$t.$	$\log \frac{\alpha^2}{\sin 1''} \frac{dR}{dx}.$	$\log \frac{\alpha^2}{\sin 1''} \frac{dR}{dy}.$	$\log \frac{\alpha^2}{\sin 1''} \frac{dR}{dz}.$
1866. Janvier.	8,0	$\bar{1}$,07650.n	0,02140	$\bar{2}$,50695.n
Février.	7,0	$\bar{1}$,13919.n	0,01895	$\bar{2}$,56954.n
Mars...	9,0	$\bar{1}$,18850.n	0,01604	$\bar{2}$,62332.n
Avril..	8,0	$\bar{1}$,22670.n	0,01265	$\bar{2}$,67001.n
Mai....	8,0	$\bar{1}$,25550.n	0,00896	$\bar{2}$,71068.n
Juin...	7,0	$\bar{1}$,27544.n	0,00497	$\bar{2}$,74603.n

4° *Valeurs numériques des quantités de l'article* 3° *ou de* $\frac{\alpha^2}{\sin 1''} \frac{d^2\xi}{dt^2}$, $\frac{\alpha^2}{\sin 1''} \frac{d^2\eta}{dt^2}$, $\frac{\alpha^2}{\sin 1''} \frac{d^2\zeta}{dt^2}$, *quand on néglige* ξ, η, ζ (*première approximation*) *et quadrature.*

On a

	$t.$	$\frac{\alpha^2}{\sin 1''} \frac{d^2\xi}{dt^2}.$	$\frac{\alpha^2}{\sin 1''} \frac{d^2\eta}{dt^2}.$	$\frac{\alpha^2}{\sin 1''} \frac{d^2\zeta}{dt^2}.$
1866. Janvier.	8,0	$-0'',119$	$+1'',051$	$-0'',0321$
Février.	7,0	$-0,138$	$+1,045$	$-0,0371$
Mars...	9,0	$-0,154$	$+1,038$	$-0,0420$
Avril...	8,0	$-0,169$	$+1,030$	$-0,0468$
Mai....	8,0	$-0,180$	$+1,021$	$-0,0514$
Juin...	7,0	$-0,189$	$+1,012$	$-0,0557$

La troisième formule S, appliquée à ces trois séries (*voir* n° 28, Section II), donne respectivement

	$t.$	$\xi_1.$	$\eta_1.$	$\zeta_1.$
1866. Janvier.	8,0	$-0'',016$	$+\ 0'',132$	$-0'',0042$
Février.	7,0	$-0,016$	$+\ 0,131$	$-0,0043$
Mars..,	9,0	$-0,155$	$+\ 1,175$	$-0,0417$
Avril...	8,0	$-0,447$	$+\ 3,258$	$-0,1211$
Mai....	8,0	$-0,908$	$+\ 6,371$	$-0,2471$
Juin...	7,0	$-1,550$	$+10,504$	$-0,4245$

5° *Calcul de*

$$-\frac{k^2\alpha^2}{r_e^3}\left(\xi - 3\frac{x_e}{r_e}\delta r\right),\quad -\frac{k^2\alpha^2}{r_e^3}\left(\eta - 3\frac{y_e}{r_e}\delta r\right),\quad -\frac{k^2\alpha^2}{r_e^3}\left(\zeta - 3\frac{z_e}{r_e}\delta r\right),$$

où l'on remplacera ξ, η, ζ *par* ξ_1, η_1, ζ_1, *et* δr *par* $\frac{x_e}{r_e}\xi_1 + \frac{y_e}{r_e}\eta_1 + \frac{z}{r_e}\zeta_1$.

On obtient

t.		$-\frac{k^2\alpha^2}{r_e^3}\left(\xi-3\frac{x_e}{r_e}\delta r\right)$.	$-\frac{k^2\alpha^2}{r_e^3}\left(\eta-3\frac{y_e}{r_e}\delta r\right)$.	$-\frac{k^2\alpha^2}{r_e^3}\left(\zeta-3\frac{z_e}{r_e}\delta r\right)$.
1866. Janvier.	8,0	$-0'',002$	$+0'',003$	$+0'',0007$
Février.	7,0	$-0,003$	$+0,002$	$+0,0008$
Mars...	9,0	$-0,028$	$+0,014$	$+0,0073$
Avril...	8,0	$-0,080$	$+0,019$	$+0,0202$
Mai....	8,0	$-0,149$	$-0,001$	$+0,0373$
Juin....	7,0	$-0,216$	$-0,061$	$+0,0547$

En ajoutant les nombres de ces trois séries respectivement à ceux des trois premières séries de 4°, on obtient des valeurs plus exactes pour $\frac{\alpha^2}{\sin 1''}\frac{d^2\xi}{dt^2}$, $\frac{\alpha^2}{\sin 1''}\frac{d^2\eta}{dt^2}$, $\frac{\alpha^2}{\sin 1''}\frac{d^2\zeta}{dt^2}$.

Ces valeurs sont

t.		$\frac{\alpha^2}{\sin 1''}\frac{d^2\xi}{dt^2}$.	$\frac{\alpha^2}{\sin 1''}\frac{d^2\eta}{dt^2}$.	$\frac{\alpha^2}{\sin 1''}\frac{d^2\zeta}{dt^2}$.
1866. Janvier.	8,0	$-0'',121$	$+1'',054$	$-0'',0314$
Février.	7,0	$-0,141$	$+1,047$	$-0,0363$
Mars...	9,0	$-0,182$	$+1,052$	$-0,0347$
Avril...	8,0	$-0,249$	$+1,049$	$-0,0266$
Mai....	8,0	$-0,329$	$+1,020$	$-0,0141$
Juin...	7,0	$-0,405$	$+0,951$	$-0,0010$

On déduit de ces valeurs numériques, par la formule de quadrature qui a servi à l'article 4°, des valeurs de ξ, η, ζ plus exactes que ξ_1, η_1, ζ_1, et que nous avons déjà désignées par ξ_2, η_2, ζ_2.

t.	ξ_2.	η_2.	ζ_2.
	$''$	$''$	$''$
1866. Janvier. 8,0	−0,016	+ 0,131	−0,0041
Février. 7,0	−0,017	+ 0,131	−0,0041
Mars... 9,0	−0,160	+ 1,179	−0,0399
Avril... 8,0	−0,488	+ 3,278	−0,1098
Mai.... 8,0	−1,066	+ 6,424	−0,2060
Juin... 7,0	−1,973	+10,586	−0,3162

Si l'on appliquait aux valeurs numériques de $\frac{\alpha^2}{\sin 1''}\frac{d^2\xi}{dt^2}$, $\frac{\alpha^2}{\sin 1''}\frac{d^2\eta}{dt^2}$, $\frac{\alpha^2}{\sin 1''}\frac{d^2\zeta}{dt^2}$ les formules de la première quadrature, on obtiendrait $\frac{\alpha}{\sin 1''}\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{\alpha}{\sin 1''}\frac{d\eta}{dt}$, $\frac{\alpha}{\sin 1''}\frac{d\zeta}{dt}$. Les valeurs de ξ, η, ζ et de $\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{d\eta}{dt}$, $\frac{d\zeta}{dt}$, à une certaine époque, permettent de calculer, pour cette époque, les variations correspondantes des éléments de l'orbite, au moyen de formules dues à M. Encke, et qu'on trouve dans le *Nautical Almanac* de 1856. C'est en vue de cette transformation, qu'il convient de calculer ξ, η, ζ en secondes d'angle. Nous avons obtenu de cette manière :

t.	$\frac{\alpha}{\sin 1''}\frac{d\xi}{dt}$.	$\frac{\alpha}{\sin 1''}\frac{d\eta}{dt}$.	$\frac{\alpha}{\sin 1''}\frac{d\zeta}{dt}$.
1866. Février. 7,0	$-0'',0672$	$+0'',5239$	$-0'',0176$
Mars... 9,0	−0,2267	+1,5732	−0,0536
Avril... 8,0	−0,4406	+2,6251	−0,0852
Mai.... 8,0	−0,7292	+3,6624	−0,1053

et pour les perturbations des éléments au 8 mai :

$$\delta L = -13'',210 \qquad \delta\chi = -15'',969$$
$$\delta\varpi_1 = -76,295 \qquad \delta\varphi = -\ 0,601$$
$$\delta\theta_1 = -\ 4,658 \qquad \delta n = +\ 0,0878$$

Deuxième méthode.

31. Après avoir calculé la partie commune, on divisera la suite du travail dans les cinq parties suivantes :

1° Calcul des coefficients (1), (2),..., (13), p, dont la définition a été donnée, Section I, n° **11**, et des quantités $\sin v$, $\cos v$, $\sin \upsilon$, $\cos \upsilon$,

$\cos u$; on aura alors tous les éléments nécessaires pour former les coefficients de R'_0, S'_0, W'_0 dans les équations (H) ;

2° Calcul des lieux de la planète perturbatrice rapportée à l'orbite de la planète troublée, comme il a été expliqué au n° **10**, Section I ;

3° Calcul de R'_0, S'_0, W'_0 ;

4° Calcul des valeurs numériques des seconds membres des équations (H) pour les diverses époques.

5° Application des formules de quadrature aux séries de ces valeurs numériques correspondantes aux divers éléments.

1° *a. Coefficients* (1), (2),..., (13). *b. Coefficients de* R'_0, S'_0, W'_0 *dans les équations* (H).

a.

$\log(1) = 1{,}78636$,	$\log(6) = \bar{2}{,}96771$,	$\log(11) = \bar{2}{,}60419$,
$\log(2) = 0{,}73499$,	$\log(7) = \bar{2}{,}87335$,	$\log(12) = 1{,}53323$,
$\log(3) = 0{,}44056$,	$\log(8) = 0{,}40800$,	$\log(13) = 1{,}09408$,
$\log(4) = 1{,}53464$,	$\log(9) = \bar{1}{,}04334$,	$\log p = 0{,}43915$.
$\log(5) = 1{,}09549$,	$\log(10) = 0{,}29963$,	

b. Les nombres entre [ ] sont les logarithmes des coefficients dont ils tiennent la place :

$$1866 \text{ Janv. } 8{,}0 \quad \alpha\frac{d\varpi_1}{dt} = -[\bar{1}{,}93777](4)R'_0 + [0{,}42406.n](5)S'_0 + [0{,}19508](6)W'_0.$$

$t.$		$\cos v.$	$\left(\frac{p}{r}+1\right) r\sin v.$	$r\sin v.$
1866 Janv.	8,0	$[\bar{1},93777]$	$[0,42406.n]$	$[0,19508]$
Fév.	7,0	$[\bar{1},96564]$	$[0,30759.n]$	$[0,25776]$
Mars	9,0	$[\bar{1},98498]$	$[0,13667.n]$	$[0,30640]$
Avril	8,0	$[\bar{1},99633]$	$[\bar{1},83557.n]$	$[0,34378]$
Mai.	8,0	$[0,00000]$	$[\bar{2},09951]$	$[0,37173]$
Juin.	7,0	$[\bar{1},99607]$	$[\bar{1},85082]$	$[0,39129]$

$$\alpha\frac{d\varphi}{dt} = [0,30899]W'_0, \qquad \alpha\frac{d\theta}{dt} = [0,19508](2)W'_0.$$

$r\cos v.$	$r\sin v.$
$[0,30899]$	$[0,19508]$
$[0,25736]$	$[0,25776]$
$[0,19081]$	$[0,30640]$
$[0,10372]$	$[0,34378]$
$[\bar{1},98567]$	$[0,37173]$
$[\bar{1},81280]$	$[0,39129]$

$$
\begin{array}{rll}
 & \sin v. & \tfrac{1}{r}. \\
\alpha^2 \dfrac{dn}{dt} = & -[\bar{1},69825.n](7)\mathrm{R}'_0 & -[\bar{1},59006](8)\mathrm{S}'_0. \\
 & [\bar{1},58266.n] & [\bar{1},59192] \\
 & [\bar{1},41242.n] & [\bar{1},59328] \\
 & [\bar{1},11171.n] & [1,59412] \\
 & [\bar{1},37577\ ] & [\bar{1},59436] \\
 & [\bar{1},12693\ ] & [\bar{1},59408]
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rll}
 & \sin v. & (\cos v + \cos u). \\
\alpha \dfrac{d\chi}{dt} = & [\bar{1},69825.n](3)\mathrm{R}'_0 & +[0,24346](3)\mathrm{S}'_0. \\
 & [\bar{1},58266.n] & [0,26924] \\
 & [\bar{1},41242.n] & [0,28713] \\
 & [\bar{1},11171.n] & [0,29763] \\
 & [\bar{3},37577\ ] & [0,30103] \\
 & [\bar{1},12693\ ] & [0,29739]
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rlllll}
 & \cos v. & r. & \left(\dfrac{p}{r}+1\right) r\sin v. & r\sin v. & \\
\alpha \dfrac{d\delta\mathrm{L}}{dt} = & -[\bar{1},93777](9)\mathrm{R}'_0 & -[0,40994](10)\mathrm{R}'_0 & +[0,42406.n](11)\mathrm{S}'_0 & +[0,19508](6)\mathrm{W}'_0 & +\alpha\displaystyle\int \frac{dn}{dt}\,dt. \\
 & [\bar{1},96564] & [0,40808] & [0,30759.n] & [0,25776] & \\
 & [\bar{1},98498] & [0,40672] & [0,13667.n] & [0,30640] & \\
 & [\bar{1},99633] & [0,40588] & [\bar{1},83557.n] & [0,34378] & \\
 & [0,00000] & [0,40564] & [\bar{2},09951\ ] & [0,37173] & \\
 & [\bar{1},99607] & [0,40592] & [\bar{1},85082\ ] & [0,39129] &
\end{array}
$$

2° *Calcul des lieux de la planète perturbatrice rapportés à l'orbite de Cérès.*

a. Les lieux héliocentriques de Jupiter l'_0, Λ'_0 pour janvier 8 et l'_1, Λ'_1 pour juin 7 donneront d'abord les éléments θ', φ' de cette planète au moyen des formules

$$\sin\left[\frac{1}{2}(l'_1 + l'_0) - \theta'\right]\tang\varphi' = \frac{\sin(\Lambda'_1 + \Lambda'_0)}{2\cos\Lambda'_1\cos\Lambda'_0\cos\frac{1}{2}(l'_1 - l'_0)},$$

$$\cos\left[\frac{1}{2}(l'_1 + l'_0) - \theta'\right]\tang\varphi' = \frac{\sin(\Lambda'_1 - \Lambda'_0)}{2\cos\Lambda'_1\cos\Lambda'_0\sin\frac{1}{2}(l'_1 - l'_0)}.$$

On trouve

$$\theta' = 99^\circ\, 1'\, 17'',9, \quad \varphi' = 1^\circ\, 18'\, 40'',2.$$

b. On cherchera ensuite N, N′, J au moyen des formules (6) du n° **10**, Section I,

$$\begin{aligned} N &= \pi - 2^\circ.30'.54'',4, \\ N' &= \pi - 20.40.14,0, \\ J &= + 9.22.14,0. \end{aligned}$$

c. On calculera les longitudes de Jupiter dans son orbite L′ au moyen de la formule suffisamment exacte

$$L' = l' + \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2}\varphi' \sin 2(l' - \theta').$$

Après quoi les formules (8), n° **10**, Section I, donneront β' et λ'. On trouve ainsi :

t.		L′.	λ′.	β′.
1866. Janvier..	8,0	281°. 5′.52″,7	22°.28′.23″	3°.36′.35″
Février..	7,0	283.35.42,8	24.56.59	3.58.54
Mars....	9,0	286. 6.11,0	27.26.12	4.20.54
Avril....	8,0	288.37.17,4	29 56.6	4.42.28
Mai.....	8,0	291. 9. 2,2	32.27.2	5. 3.33
Juin.....	7,0	293.41.25,7	34.58.38	5.24.14

d. On passera alors au calcul des quantités x'_1, y'_1, z'_1 données par les formules (7) du n° **10**, Section I. On en déduira ρ', Δ' :

t.		$\log x'_1$.	$\log y'_1$.	$\log z'_1$.	$\log \rho'$.	$\log \Delta'$.
1866. Janvier..	8,0	0,69428.*n*	0,19606	$\bar{1}$,51505	0,88569	$\bar{3}$,69099.*n*
Février..	7,0	0,67935.*n*	0,29860	$\bar{1}$,55670	0,88147	$\bar{3}$,68925.*n*
Mars....	9,0	0,66038.*n*	0,37902	$\bar{1}$,59394	0,87665	$\bar{3}$,68648.*n*
Avril....	8,0	0,63701.*n*	0,44401	$\bar{1}$,62746	0,87121	$\bar{3}$,68253.*n*
Mai.....	8,0	0,60882.*n*	0,49725	$\bar{1}$,65781	0,86515	$\bar{3}$,67728.*n*
Juin.....	7,0	0,57534.*n*	0,54126	$\bar{1}$,68536	0,85849	$\bar{3}$,67056.*n*

3° *Calcul de* R'_0, S'_0, W'_0.

t.		$\log\left\{R'_0=(1)\left[\Delta' x'_1-\frac{r}{\rho'^3}\right]\right\}$	$\log\left\{W'_0=(1)[\Delta' y'_1]\right\}$.	$\log\left\{S'_0=(1)[\Delta' z'_1]\right\}$.
1866. Janvier.	8,0	0,05635	$\bar{2}$,99240.n	$\bar{1}$,67341.n
Février.	7,0	0,03098	$\bar{1}$,03231.n	$\bar{1}$,77421.n
Mars...	9,0	$\bar{1}$,99708	$\bar{1}$,06678.n	$\bar{1}$,85186.n
Avril...	8,0	$\bar{1}$,95287	$\bar{1}$,09635.n	$\bar{1}$,91290.n
Mai....	8,0	$\bar{1}$,89577	$\bar{1}$,12145.n	$\bar{1}$,96089.n
Juin...	7,0	$\bar{1}$,82171	$\bar{1}$,14228.n	1,99818.n

4° *Valeurs numériques des seconds membres des équations* (H).

On les obtient en substituant, dans les équations b de l'article 1°, leurs valeurs à (1), (2), ..., (11), R'_0, S'_0, W'_0 :

t.		$30\frac{d\varpi_1}{dt}$.	$30\frac{d\varphi}{dt}$.	$30\frac{d\theta_1}{dt}$.	$30^2\frac{dn}{dt}$.	$30\frac{d\chi}{dt}$.	$\left(30\frac{d\delta L}{dt}-30\int\frac{dn}{dt}dt\right)$.
1866. Janv.	8,0	$-18'',208$	$-0'',200$	$-0'',837$	$+0'',512$	$-3'',844$	$-5'',906$
Fév..	7,0	$-18,959$	$-0,195$	$-1,060$	$+0,625$	$-4,181$	$-5,558$
Mars	9,0	$-20,750$	$-0,181$	$-1,283$	$+0,732$	$-4,506$	$-5,140$
Avril	8,0	$-23,512$	$-0,159$	$-1,497$	$+0,831$	$-4,798$	$-4,655$
Mai..	8,0	$-27,113$	$-0,128$	$-1,692$	$+0,919$	$-5,036$	$-4,106$
Juin.	7,0	$-31,344$	$-0,090$	$-1,856$	$+0,994$	$-5,202$	$-3,443$

5° *Une quadrature première appliquée aux séries numériques précédentes donnera immédiatement*

$$\delta\varpi_1,\quad \delta\varphi,\quad \delta\theta_1,\quad 30\,\delta n,\quad \delta\chi,\quad \delta L-\iint\frac{dn}{dt}dt^2.$$ (*Voir* n° 28, Section II.)

Une simple division par 30 donnera δn; δL se déduira de $\left(\delta L-\iint\frac{dn}{dt}dt^2\right)$ par l'addition de $\iint\frac{dn}{dt}dt^2$ que fournira d'ailleurs une quadrature seconde appliquée à la série numérique $30^2\frac{dn}{dt}$. On arrive ainsi aux résultats suivants pour le 8 mai :

t.		$\delta\varpi_1$.	$\delta\varphi$.	$\delta\theta_1$.	$30\delta n$.	$\delta\chi$.	δL.
1866. Févr.	7,0	$-\;9'',342$	$-0'',098$	$-0'',502$	$+0'',3028$	$-\;2'',048$	$-\;2'',748$
Mars	9,0	$-29,113$	$-0,287$	$-1,674$	$+0,9820$	$-\;6,394$	$-\;7,469$
Avril	8,0	$-51,169$	$-0,458$	$-3,065$	$+1,7643$	$-11,050$	$-11,007$
Mai	8,0	$-76,420$	$-0,602$	$-4,662$	$+2,6403$	$-15,972$	$-13,200$

Nous trouvons, en résumé, les perturbations suivantes du 23 janvier au 8 mai 1866 :

	1re méthode.	2e méthode.	Différence des résultats (1re m. — 2e m.)
δL	$-13'',210$	$-13'',200$	$-0'',010$
$\delta\varpi_1$	$-76,295$	$-76,420$	$+0,125$
$\delta\theta_1$	$-\;4,658$	$-\;4,662$	$+0,004$
$\delta\chi$	$-15,969$	$-15,972$	$+0,003$
$\delta\varphi$	$-\;0,601$	$-\;0,602$	$+0,001$
δn	$+\;0,0878$	$+\;0,0880$	$-0,0002$